САТТОРОВ А.С.

АСОСҲОИ МАТЕМАТИКАИ ОЛӢ

БАРОИ ИХТИСОСҲОИ ИҚТИСОДӢ

ДАР МИСОЛҲО ВА МАСЪАЛАҲО

ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН
ИНСТИТУТИ ИЛМӢ-ТАҲҚИҚОТӢ

А.С. САТТОРОВ

АСОСҲОИ МАТЕМАТИКАИ ОЛӢ БАРОИ ИХТИСОСҲОИ ИҚТИСОДӢ

(ДАР МИСОЛҲО ВА МАСЪАЛАҲО)

Душанбе
«ЭР-граф»
2011

ББК 22.11 (2 тоҷик)
С-34

Ба 20-солагии Истиқлолияти давлатии Тоҷикистон бахшида мешавад

Муҳаррир: *узви вобастаи АИ ҶТ док. илмҳои физ-мат., профессор* ***Қурбонов И.Қ.***

Муқарризон: *док. илмҳои физ-мат. профессор* ***Акбаров Р.А.,*** *док. илмҳои иқтисодӣ, профессор* ***Ҷӯрабоев Г.Ҷ.***

А.С. Сатторов.
Асосҳои математикаи олӣ барои ихтисосҳои иқтисодӣ. – «ЭР-граф», Душанбе - 2011. – 464 с.

Китоби дарсии мазкур дар асоси барномаи таълимӣ аз фанни математикаи олӣ барои мактабҳои олӣ аз рӯи ихтисосҳои иқтисодӣ навишта шудааст. Ин барномаи нави таълимӣ мувофиқи талаботи имрӯза ба иқтисоди бозоргонӣ тартиб дода шудааст, ки иқтисодчӣ бояд донад.

Дар китоб маводҳои назариявӣ аз математика оварда шуда, ҳалли мисолу масъалаҳо иишон дода, шуда дар охири ҳар боб мисолҳо ва масъалаҳо барои кори мустақилона пешниҳод карда шудаанд. Диққати асосӣ ба ҳалли мисолу масъалаҳо дода мешавад. Китоби мазкур барои донишҷӯёни ихтисосҳои иқтисодӣ, факултетҳои табиатшиноси мактабҳои олӣ ва доираи васеъи хонандагон пешниҳод карда мешавад.

ISBN 978-99947-41-67-0

МУНДАРИЧА

Боби VI. Интеграли номуайян

Боби VII. Интеграли муайян

Боби VIII. Функсиҳои бисёртағйирёбанда

Боби IX. Қаторҳо

Боби X. Интеграли дукарата ва секарата

Боби X I. Интегралҳои ғайрихос

Пешгуфтор

Дар шароити имрӯза вобаста ба иқтисоди бозоргонӣ барномаҳои таълимии нав амал мекунанд. Аз ҷумла, барномаи таълимӣ аз фанни математикаи олӣ ҳам аз нав дида баромада шудааст, вале китоби дарсӣ аз фанни математикаи олӣ, ки пурра бо барномаи нави таълимӣ мувофиқат кунад, бо забони тоҷикӣ кам аст. Бо зиёд шудани шумораи мактабҳои олӣ дар ҷумҳуриамон, ки аксарияти онҳо раванди иқтисодӣ доранд, норасоии адабиётҳо аз фанни математикаи олӣ бо забони тоҷикӣ пурра эҳсос карда мешавад. То ҳол чанде китобҳои дарсӣ доир ба фаслҳои алоҳидаи математикаи олӣ вуҷуд доранд, вале на ҳамаи онҳо бо барномаи нави таълимӣ мувофиқат мекунанд.

Китоби дарсии мазкур бо назардошти барномаи нави фанни математикаи олӣ барои ҳамаи ихтисосҳои иқтисодӣ навишта шудааст. Мавзӯъҳои овардашуда барномаи таълимиро пурра фаро гирифта, баъзе мавзӯъҳое, ки оянда барои ихтисосҳои иқтисодӣ заруранд, низ оварда шудаанд.

Китоби дарсӣ бо барномаи таълимии давлатӣ аз фанни математикаи олӣ пурра мувофиқат мекунад.

Муаллиф кӯшиш кардааст, ки мафҳумҳо ва назарияхои математикиро барои ҳалли масъалаҳои иқтисодӣ татбиқ намояд. Бо ин мақсад якчанд банди китоб ба татбиқи мафҳумҳои математика дар ҳалли муаммоҳои иқтисодӣ бахшида шудаанд. Дар ин бандҳо масъалаҳои иқтисодӣ оварда шудаанд ва ҳалли онҳо бо усулҳои математикӣ нишон дода шудааст.

Дар ҳар банд аввало маводҳо аз назария оварда мешаванд, ҳалли мисолҳову масъалаҳо нишон дода мешаванд, ҳалҳои овардашуда содда ва фаҳмо шарҳ дода шудаанд. Дар охири ҳар як боб барои кори мустақилона мисолҳо ва масъалаҳо пешниҳод карда шудаанд. Китоби дарсии мазкур барои донишҷӯёни ҳамаи ихтисосҳои иқтисодӣ навишта шудааст. Инчунин донишҷӯёни факултетҳои табиатшиносӣ ва доираи васеъи хоҳишмандон метавонанд онро истифода баранд.

Муаллиф пеш аз ҳама ба ректори Донишгоҳи миллии Тоҷикистон профессор Саидов Н.С., ки дар тайёр кардан ва нашри китоби дарсии мазкур саҳми зиёд доранд, миннатдории бепоёни худро баён менамояд. Ин чунин муалиф ба муҳаррир **узви вобастаи АИ ҶТ док. илмҳои физ-мат., профессор Курбонов И.Қ. ва муққаризон_** д.и.ф.м, профессор Акбаров Р., доктори илмҳои иктисодӣ, профессор Ҷӯрабоев Ғ.Ҷ. ва н.и.ф.м., дотсент Болтаев К.С. ки дастнависи ин китобро Хонда, фикрҳои ҷолиби худро гуфтанд ва маслиҳатҳои пурқимати худро дареғ надоштанд, изҳори миннатдорӣ менамояд.

Бояд қайд намуд, ки китоби дарсии мазкур аз камбудиҳо холӣ нест, аз ин рӯ аз хонандагони азиз хоҳиш менамоям, ки андешаҳояшонро оиди камбудиҳои дарккардаашон ба суроғаи ш. Душанбе, ДМТ, х.Рӯдакӣ-17 ирсол намоянд.

Ба хонандагоне, ки оиди камбудиҳои ин китоб хабар медиҳанд, пешакӣ изҳори минатдорӣ менамоям.

Муаллиф

Муқаддима

Пайдоиши математика хеле қадима мебошад. Давраи аввали он номи “математикаи элементариро” гирифт. Хусусиятҳои асосии он чунин буданд:

а) беҳаракатии омили омӯхташаванда;

б) истифода накардани мафҳуми беохирӣ;

в) мавҷуд набудани усулҳои умумӣ.

Тараққиёти асосҳои математика ба асрҳои XVII ва XVIII рост меояд. Дар ин асрҳо инкишофёбии истеҳсолот, техника ва илмҳои табиатшиносӣ талаб намуд, ки ба омӯзиши бузургиҳои тағйирёбанда рӯ орем, ки бо ҳамдигар дар вобастагии функсионалӣ бошанд. Раванди нав ба вуҷуд омад, ки онро математикаи олӣ меномем: Геометрияи аналитикӣ, ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралӣ, элементҳои алгебраи олӣ, назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва ғайраҳо шохаҳои илми математикаи олӣ мебошанд.

Дар геометрияи аналитикӣ усулҳои умумии ҳалли масъалаҳои геометрӣ (усули координатаҳо) дода шудаанд. Бо ҷорӣ намудани ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралӣ мафҳумҳои бузургиҳои беохир хурд, ҳосила, интеграл, қатори беохир ва ғайраҳо имконият доданд, ки масъалаҳои ба миёномада ҳалли худро ёбанд. Масъалаҳои оид ба расанда, масоҳат, ҳаҷм ва ғайраҳо низ ҳалли худро ёфтанд.

Бо ёрии муодилаҳои дифференсиалӣ муҳимтарин масъалаҳое, ки аз механика, физика, техника пайдо мешуданд, ҳалли худро ёфтанд.

Маълумотҳои мухтасарро оид ба инкишофи математикаи олӣ меорем. Асосҳои геометрияи анлитикиро математик, файласуф Декарт (1596-1650) муайян намуд. Истифодаи ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралӣ ба Нютон (1642-1727) ва Лейбнитс (1646-1716) тааллуқ дорад. Асосгузорони назарияи таҳлили математикӣ Эйлер (1707-1783), Лагранж (1736-1813), Гаусс (1777-1855), Коши (1789-1857), Вейштрасс (1815-1897) ва дигарон мебошанд.

Дар инкишофи математикаи олӣ нақшаи олимон - математикҳои Русия низ калон мебошад. Олимонеро, ки дар инкишофи илми математикаи олӣ саҳми зиёд доранд, ёдовар мешавем.

Математики Санкт-Петербургӣ академик Эйлер натиҷаҳои асосиро қариб дар ҳамаи ҷабҳаҳои илми математика ба даст оварда аст. Корҳои анҷомдодаи ӯ имрӯзҳо ҳам аҳмияти худро гум накардаанд. Олими барҷастаи рус Лобачевский Н.И. (1792-1857) дар илми математика табаддулотро ба вуҷуд овард. Равняи илмӣ “Геометрияи Лобачевский”-ро ба вуҷуд овард. Ба Лобачевский баъзе натиҷаҳои дар соҳаи таҳлили математикӣ буда низ тааллуқ доранд. Олими намоён, академик М.В. Остроградский (1801-1861) дар назарияи “Интегралҳои каратӣ” таносуби заруриро дохил намуд, ки ҳоло татбиқи васеъ дорад. Олими барҷастаи рус Н.Л.Чебишев (1821-1894) қисми нави математик-“Назарияи беҳтарини наздикшавии функсияҳо”-ро ба вуҷуд овард. Ба ӯ қисмҳои дигари математика низ тааллуқ доранд: “Назарияи эҳтимолият”, “Назарияи ададҳо”, “Ҳисоби интегралӣ” ва ғайраҳо.

Математики шинохтаи рус С.В.Ковалевская (1850-1891) дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва механикаи назариявӣ натиҷаҳои беҳтаринро ба даст овардааст.

Дар инкишофи илми математика мавқеи математикони собиқ Иттиҳоди Шӯравӣ хеле бузург мебошад. Дар асри XX олимони Иттиҳоди Шӯравӣ дар соҳаи илми математика ба дастовардҳои бузурги илмӣ ноил гардиданд.

Китоби дарсии “Асосҳои математикаи олӣ барои иқтисодчиҳо” бо мақсади асосҳои математикаи олиро, бо назардошти барномаи нави таълимӣ, ба тарзи содда ва фаҳмо баён намудан навишта шудааст. Дар шароити имрӯза донистани математикаи олӣ барои ихтисосҳои иқтисодӣ зарур мебошад.

Дар ин китоб баъзе мафҳумҳои иқтисодӣ аз нуқтаи назари математикӣ шарҳ дода шуда, мисолу масъалаҳо оварда шудаанд.

Боби I. Элементҳои алгебраи хаттӣ

§ 1.Муайянкунандаҳо ва хосиятҳои онҳо

1. Муайянкунандаи тартиби ду ва се. Адади

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{-ро} \qquad (1.1.1)$$

муайянкунандаи тартиби ду меноманд:

ки дар инҷо ададҳои $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - элементҳои муайянкунандаи тартиби ду мебошанд. Муайянкунандаи тартиби ду аз ду сатр ва ду сутун иборат мебошад. Рақами якуми элементҳо рақами сатр ва рақами дуюми элементҳо рақами сутуни ҷойгиршавии элементҳоро нишон медиҳанд. Муайянкунандаи (1.1.1) чунин ҳисоб карда мешавад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1.2)$$

Ба монанди ҳамин муайянкунандаи тартиби се чунин намуд дорад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.1.3)$$

Чи тавре ки маълум аст, муайянкунандаи тартиби сеюм аз се сатр ва се сутун иборат буда, нӯҳ элементро дар бар мегирад. Ададҳои $a_{11}, a_{12} a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ элементҳои муайянкунандаи тартиби сеюм мебошанд. Муайянкунандаи тартиби сеюм чунин ҳисоб карда мешавад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (1.1.4)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Инро тарзи секунҷагии ҳисоб кардани муайянкунандаҳои тартиби се меноманд ё ки қоидаи Саррюс ҳам меноманд. Ҳамин тавр муайянкунандаҳои тартиби n-умро низ муайян кардан мумин аст.

Муайянкунандаи тартиби n-ум ҷадвали ададҳои зерин мебошад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2.Хосиятҳои муайянкунандаҳо: 1) Агар дар муайянкунанда ҷойи элементҳои сатрҳо бо сутунҳо мувофиқан иваз карда шавад он гоҳ қимати муайянкунанда тағйир намеёбад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2) Ҳангоми мувофиқан иваз намудани ҷойи элементҳои ду сатрҳо ё ду сутунҳо аломати муайянкунанда ба муқобилаш иваз мешавад.

3) Зарб задани ҳамаи элементҳои ягон сатр ё сутун ба ягон адади k баробарқувва аст ба зарб задани муайянкунанда ба ин адад.

4)Агар муайянкунанда ду сатр ё ду сутуни якхела дошта бошад, он гоҳ қимати вай баробари сифр мебошад.

5) Агар ҳамаи элементҳои ягон сатр ё сутуни муайянкунанда ба сифр баробар бошанд, он гоҳ ин қимати муайянкунанда ба сифр баробар аст.

6) Агар элементҳои мувофиқи ду сатр ё ду сутуни муайянкунанда мутаносиб бошанд, он гоҳ ин муайянкунанда ба сифр баробар аст.

7) Ба элементҳои ягон сатр ё сутун элементҳои ягон сатр ё сутуни дигар, ки мувофиқан ба ягон адади умумӣ зарб шудаанд, ҳамроҳ карда шаванд, он гоҳ қимати бузургии муайянкунанда тағийр намеёбад. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Хосияти 8. Агар ба элементҳои мувофиқи ягон сатр ё сутуни муайянкунанда элементҳои нав ҳамроҳ карда шаванд, он гоҳ муайянкунанда ба суммаи ду муайянкунанда баробар аст, яъне

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Таърифи минор ва пуркунандаи алгебравӣ

1. Минори μ_{ij} элементи a_{ij} - и муайянкунандаи тартиби n гуфта, ҳамин хел муайянкунандаи тартибаш $n-1$- ро меноманд, ки вай дар натиҷаи партофтани элементҳои сатри i ва сутуни j ҳосил мешавад.

2. Пуркунандаи алгебрави A_{ij} - и элементи a_{ij} гуфта, минори он элементро меноманд, ки бо аломати $(-1)^{i+j}$ гирифта мешавад, яъне $A_{ij} = (-1)^{i+j}\mu_{ij}$ мешавад.

Мисоли 1.1.1. Муайянкунандаи тартиби дуро бо формулаи (1.1.2) ҳисоб кунед

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 1\cdot 2 = 15 - 2 = 13 ,$$

Мисоли 1.1.2. Муайянкунандаи тартиби сеюмро ҳисоб кунед:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ҳал. Муайянкунандаи тартиби серо бо усули секунчаҳо ҳисоб мекунем (1.1.4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0\cdot 1 + (-2)\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 -$$

$$0\cdot 3\cdot 3 - (-2)\cdot(-2)\cdot 1 = 0 + 0 - 12 - 0 - 0 - 4 = -16$$

Мисоли 1.1.3. Пуркунандаи алгебравии элементҳои $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{32}$ -и муайянкунандаи тартиби сеюмро ёбед.

Ҳал. Ҳамин тавр, мувофиқи таъриф пуркунандаи алгебравии a_{11} чунин аст:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Айнан пуркунандаи алгебравии элменҳои a_{12}, a_{22}, a_{32} чунин муайян карда мешаванд:

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Муайянкунанда аз рӯи элементҳои сатр ё сутун бо формулаҳои зерин ҷудо карда мешавад.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2j} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 \ldots & a_{ij} \ldots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{jj} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}, \quad (a_{ij} \neq 0);$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ b_{i1} & b_{i2} \ldots b_{in} \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} = b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + \ldots + b_{in}A_{in};$$

Мисоли 1.1.4.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = a_{23}A_{23} = 5(-1)^{2+3}\mu_{23} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = -5\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) = 20.$$

Мисоли 1.1.5. Муайянкунандаи тартиби сеюмро бо усули минор ва пуркунандаи алгебравӣ ҳисоб кунед.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

§ 2. Ҳалли системаи муодилаҳо бо усули Крамер

1. **Системаи ду муодилаи хаттии дуномаълума.** Системаи ду муодилаи хаттии дуномаълума чунин намуди умумӣ дорад:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

ки x, y номаълумҳо, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ коэффитсиентҳо b_1, b_2 аъзоҳои озод мебошанд.

Моҳияти методи Крамер аз ҳисоб кардани бузургиҳои зерин иборат аст:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = x_0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = y_0.$$

Системаи (1.2.1) ҳамон вақт ҳалли ягона дорад, ки агар $\Delta \neq 0$ бошад. Яъне қиматҳои $(x, y) = (x_0, y_0)$ ҳалли системаи (1.2.1) мешавад.

Мисоли 1.2.1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$1)\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81, \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 6x + 10y = 15. \end{cases}$$

Ҳалҳо:

$$1)\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7.$$

Санҷиш нишон медиҳад, ки ҷуфти ададҳои $(x_0, y_0) = (16;7)$ системаи муодилаҳои якумро қаноат мекунонанд.

$$2)\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0.$$

Дар ин ҳолат системаи муодилаҳои дуюм ҳал надорад, чунки $\Delta = 0$ аст.

2. Системаи ду муодилаи сеномаълума. Системаи номбаршуда чунин намуди умумӣ дорад:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \end{cases} \qquad (1.2.2)$$

дар ин ҷо x, y, z - номаълумҳо, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23},$ - коэффисиентҳо, b_1, b_2 - аъзоҳои озод мебошанд.

Се ҳолат шуданаш мумкин:

$$1)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (1.2.3)$$

Агар яке аз ин муайянкунандаҳо аз сифр фарқ кунад, онгоҳ системаи (1.2.2) маҷмӯи бешумори ҳалҳоро дорост. Дар ин ҳолат ба ягон номаълум қимати дилхоҳро додан мумкин аст. Бигзор $\Delta_3 \neq 0$, онгоҳ ба номълуми z қимати ихтиёриро додан мумкин аст ва системаи (1.2.2)-ро чунин навиштан мумкин аст:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 - a_{23}z. \end{cases}$$

Ин система бо усули Крамер ҳал карда мешавад.

2) Ҳамаи муайянкунандаҳо $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ба сифр баробар мебошанд, вале яке аз муайянкунандаҳои

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.2.4)$$

аз сифр фарқ мекунад. Дар ин ҳолат системаи (1.2.2) ҳал надорад.

3) Ҳамаи муайянкунандаҳои (1.2.3) ва (1.2.4) ба сифр баробаранд. Дар ин ҳолат яке аз муодилаҳо натиҷаи муодилаи дигар мебошад ва система миқдори бешумори ҳалҳоро дорад. Дар ин ҳолат ба ду номаълум қимати ихтиёриро дода, номаълуми сеюмро ёфтан мумкин аст.

4) Муодилаи якҷинсаи (1.2.2)-ро мегирем, яъне ҳангоми $b_1 = b_2 = 0$ будан.

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x}{z} + a_{12}\dfrac{y}{z} = -a_{13} \\ a_{21}\dfrac{x}{z} + a_{22}\dfrac{y}{z} = -a_{23}. \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

Системаи ҳосилшударо нисбат $\dfrac{x}{z}$ ва $\dfrac{y}{z}$ ҳал намуда, ҳосил мекунем:

$\dfrac{x}{z} = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $\dfrac{y}{z} = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ ё $x = \Delta_x \cdot t$, $y = \Delta_y \cdot t$ дар куҷо $t = \dfrac{z}{\Delta}$. Аз ин ҷо ҳосил мекунем $z = t \cdot \Delta$. Акнун муайянкунандаҳоро барои системаи (1.2.5) тартиб медиҳем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}$$

Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки $\Delta_x = \Delta_1, \Delta_y = \Delta_2, \Delta_z = \Delta_3$ мебошанд. Ҳамин тавр, ҳалли системаи (1.2.5) ёфта мешавад: $x = t \cdot \Delta_1, y = -t \cdot \Delta_2, z = t \cdot \Delta_3$, дар куҷо t-адади ихтиёрӣ буда аз $-\infty$ то $+\infty$ қимат қабул менамояд.

б) Ҳамаи муайянкунандаҳои $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ба сифр баробаранд, онгоҳ система бо як муодила оварда мешавад. Ба дилхоҳ ҷуфти номаълумҳо қимати ихтиёрӣ дода, номаълуми сеюм бо ёрии ин номаълумҳо муайян карда мешавад.

Мисоли 1.2.2. Системаи муодилаи якҷинсаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

Ҳал. Формулаҳои овардашударо истифода бурда меёбем:

$$x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = -22\ t$$

$$y = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = 14\ t$$

$$z = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 2t,$$

дар ин ҷо ба сифати t адади ихтиёриро гирифтан мумкин.

Мисоли1.2.3. Системаро тадқиқ кунед:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 9x - 6y + 3z = 1. \end{cases}$$

Ҳал. Азбаски $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ система ҳал надорад, масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 36 = -33 \neq 0.$$

3. **Системаи се муодилаи бо сеномаълум.** Системаи се муодилаи бо сеномаълум чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Муайянкунандаҳои ин системаро тартиб медиҳем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ҳалли система бо методи Крамер ёфта мешавад

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Мисоли 1.2.4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

Ҳал.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 18 .$$

Азбаски $\Delta \neq 0$ бинобар ин система ҳалли ягона дорад. Аз ин ҷо муайянкунандаҳои $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ – ро меёбем:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 27 + 4 - 3 - 6 - 12 = 12,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 9 - 18 - 6 - 2 = -6,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 + 12 - 4 - 9 - 6 = 12,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3},$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

4. **Системаи n-муодилаҳои n-номаълума.** Системаи n-муодилаҳои n-номаълума чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n . \end{cases}$$

Барои ҳалли ин система муайянкунандаҳои тартиби n-ўмро тартиб медиҳем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

он гоҳ ҳалли системаро меёбем:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, \qquad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

§3. Матритса

1. Таъриф. Матритса гуфта ҷадвали росткунҷаи ададҳоеро меномем,ки аз m-сатр ва n –сутун иборат мебошад. Матритсаи m -сатр ва n –сутун доштаро тартиб медиҳем:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ададҳои a_{mn} -элементҳои матритса ва m – миқдори сатрҳо, n – миқдори сутунҳои матритса мебошанд.

Матритсаеро, ки ҳамаи элементҳояш сифр бошанд, матритсаи сифрӣ меномем. Матритсаи квадратӣ гуфта матритсаеро меномем, ки миқдори сатрҳо ва сутунҳояш баробар бошанд.

Матритса диогналӣ номида мешавад, агар он квадратӣ бошад ва ба ғайр аз диогнали асосӣ, ҳамаи элементҳояш сифр бошанд.

Матритса воҳидӣ номида мешавад, агар вай квадратӣ бошад ва ҳамаи элементҳои диогнали асоси ба як ва боқимондаи элементҳо ба сифр баробар бошанд. Матритсаи воҳидӣ бо ҳарфи E ишора карда мешавад.

Матритсаи A транспоронидашуда номида мешавад, агар ҳамаи сатрҳояш ба сутунҳояш иваз карда шаванд, матритсаи транспоронидашудаи A -ро бо A' ишора мекунем.

Матритсаҳои A ва B баробар номида мешаванд, агар ҳамаи элементҳои мувофиқи онҳо баробар бошанд. Барои матритсаҳо се амалҳо гузаронида мешаванд- ҷамъ, тарҳ ва зарб. Барои амали тақсим қоида вуҷуд надорад.

Бигузор матритсаҳои

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

дода шуда бошанд.

1. Суммаи матритсаҳои A ва B гуфта матритсаи C -ро меноманд, ки элементҳои он аз суммаи элементҳои мувофиқи ин матритсаҳо иборат бошанд, яъне

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots a_{2n} + b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ин қоидаҳои ҷамъ барои миқдори охирноки матритсаҳо низ ҷой дорад.

Масалан:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} = C .$$

Амали ҷамъи матритсаҳо ба қонунҳои коммутативӣ ва асосиативӣ итоат мекунад, яъне $A + B = B + A$

$$(A+B)C = AC + BC$$

Инчунин $A + 0 = 0 + A = A$ мебошад.

2. Ҳосили зарби матритсаи A ба адади k гуфта матритсаеро меноманд, ки ҳар элементаш ба адади k зарб шуда бошад, яъне

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.2.1)$$

Мисол: $2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

Маълум аст, ки барои ададҳои ҳақиқии k ва L

$k \cdot A = A \cdot k$. $\qquad (k + L) \cdot A = k \cdot A + L \cdot A;$

$L(k \cdot A) = (L \cdot k) \cdot A = (L \cdot A) \cdot k; \qquad 1 \cdot A = A;$

$k(A + B) = k \cdot A + k \cdot B; \qquad 0 \cdot A = 0.$

Ҳангоми дар баробарии (1,2,1) $k=-1$ будан матритсаи $-A$ хосил мешвад.

3. Фарқи матритсаҳои A ва B гуфта, суммаи матритсаҳои A ва $(-B)$-ро меноманд, яъне $A-B=A+(-B)$

4. Ҳосили зарби матритсаҳоро дохил мекунем. Бигузор матритсаи A ченаки $m \cdot n$ ва матритсаи B ченаки $p \cdot q$ дошта бошад ва $n=p$ бошад. Ҳангоми $n \neq p$ будан зарби матритсаҳо ҷой надорад.

Таъриф: Ҳосили зарби матритсаи A ва B гуфта матритсаи C -ро меноманд, ки элементҳои он бо формулаи зерин муайян гардад:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{in}\cdot b_{nj},\ \text{ки}\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,q},$$

Аз ин таъриф мебарояд, ки элементи C_{ij} матритсаи $C=A\cdot B$ ба суммаи ҳосили зарбҳои элементҳои сатри i -юми матритсаи A ба элементҳои мувофиқи сутуни j -юми матритсаи B баробар аст.

Зарби ду матритсаҳои тартиби дуюми A ва B гуфта матрисаи C -ро меномем, ки чунин муайян карда мешавад:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Амали зарби матритсаҳои A ва B ҳамон вақт имконпазир аст, ки агар миқдори сутунҳои матритсаи A ба миқдори сатрҳои матритсаи B баробар бошанд. Масалан

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Ҳал. Ҳосили зарб мавҷуд аст, чунки миқдори сутунҳои матритсаи A ва сатрҳои матритсаи B баробаранд.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

Мисоли 1.3.1.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 31 \end{pmatrix}$$

Аз ин ҷо маълум аст,ки $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix},$$

$$A_1 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 + 16 \end{pmatrix} = 30 ,$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A, \qquad E \cdot E = E, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Матритсаи A^{-1} барои матритсаи A матритсаи баръакс номида мешавад, агар $A \cdot A^{-1} = E$ бошад. Агар матритсаи A матритсаи баръакс дошта бошад, пас вай ягона аст.

Баръакси матритсаи баръакс A^{-1} матритсаи A мебошад, яъне

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Тартиби ёфтани матритсаи баръакс чунин аст:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Пуркунандаҳои алгебравии матритсаи A - ро тартиб медиҳем:

$A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$ онгоҳ ҳосил мекунем

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Пас матритсаи баръаксро меёбем:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ мешавад.

Мисоли 1.3.2. Дода шудааст матритсаи

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, матритсаи баръакс A^{-1} ёфта шавад.

Ҳал.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 8 = -1 \neq 0,$$

$$A_{11} = 7, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 1,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Барои санҷиш хосияти $A \cdot A^{-1} = E$ – ро истифода мебарем.

$$A \cdot A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7-8 & 28-28 \\ -2+2 & -8+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Мисоли 1.3.3. Матритсаи баръакс ёфта шавад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ҳал. Муайянкунандаи тартиби сеюмро ҳисоб мекунем.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матритсаҳои транспоронидашуда ва ҳамроҳшударо тартиб медиҳем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пас, ҳосил мекунем:

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{D} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранги матритсаи A гуфта тартиби минори калонтарини аз нол фарққунандаро меноманд ва бо $R(A)$ ишора мекунем.

Бигузор матритсаи $A_{mn}=(a_{ij})$ дода шуда бошад. Аз ин матритса ба таври ихтиёри k сатр ва k сутунро интихоб мекунем $(1 \le k \le \min(m,n))$. Элементхое, ки дар бурриши ин сатру сутунҳо ҷойгиранд, матритсаи квадратии тартиби

k -ро ташкил медиҳаед. Муайянкунандаи ин матритсаро минори тартиби k -юми матритсаи A меноманд.

Мисоли 1.3.4. Ранги матритсаро ёбед:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ҳал. Элементҳои мувофиқи сатрҳои як ва серо ҷамъ мекунем:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Элементҳои сатри якумро ба 4 тақсим менамоем:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Аз элементҳои сатри якум элементҳои мувофиқи сатри дуюмро тарҳ мекунем:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Сатри якумро хат мезанем:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранги матритсаи ҳосилшуда ба 2 баробараст. Масалан;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Табдилдиҳии элементарии матритсаҳо гуфта табдилдиҳиҳои зеринро меноманд.

1) Ҷойивазкунии ду сатр ё ду сутун

2) Ба ягон адад зарб задан сутун ё сатре.

3) Ҳосили ҷамъи ягон сатр ё сутуни ба адад зарбшуда ба сатр ё сутуни дигар.

Ду матритса эквиваленти номида мешаванд, агар якеаш аз дигараш бо воситаи табдилдиҳии элементарии охирнок ҳосил шуда бошад. Дар натиҷаи табдилдиҳии элементари ранги матритса тағйир намеёбад. Ҳар гуна матритсаро бо ёрии табдилдиҳии элементари ба матритсаи диогоналӣ овардан мумкин аст.

5. **Ҳалли системаи муодилаҳо бо намуди матрисавӣ.** Системаи n - муодилаи , n -номаълуми хаттиро ба намуди матритсавӣ чунин навиштан мумкин аст: $A \cdot X = B$,

дар ин ҷо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Агар муайнкунандаи матритсаи A аз сифр фарқ кунад $(\det A \neq 0)$ он гох ин система ҳалли ягона дорад.

Дар ин ҳолат ҳалли матритсавии системаи муодилаҳо намуди зеринро мегирад:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Мисоли 1. 3.5. Ҳалли системаро бо усули матритсавӣ ёбед:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Ҳал. Дар намуди матритсавӣ ин муодила чунин аст.

$$A \cdot X = B, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9- & 3 & 0 \\ 31-3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} -64+9+88 \\ 36-3+0 \\ 124-3-88 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ҳамин тавр, $x = y = z = 1$ ҳалли системаи додашуда мебошад.

§4. Назарияи системаи муодилаҳои хаттӣ

Бигузор системаи m муодилаҳои хаттӣ дода шуда бошад.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

Усулҳои ҳалли системаи хаттӣ бо ёрии матритсаи баръакс ва қоидаи Крамер як қатор норасоиҳои ҷиддӣ доранд.

1. Бояд микдори муодилаҳою номаълумҳо бо ҳам баробар бошанд: m = n.

2. Муайянкунандаи матритсаи асосӣ сифр набошад $(\det A \neq 0)$.

3. Ҳисоби бисёреро талаб мекунад.

Дар ҳолати иҷро нашудани ақалан яке аз шартҳои 1) ё 2) ин усулҳо татбиқ нашавандаанд. Усули Гаусс аз ин камбудиҳо озод аст.

Усули Гаусс ё пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо. Бигузор системаи m муодилаи хаттии n номаълума (1.4.1) дода шуда бошад. Фарз менамоем, ки $a_{11} \neq 0$ аст. Агар $a_{11} = 0$ бошаду коэффисиенти назди x_1 дар ягон муодилаи дигар аз сифр фарқ кунад, он гоҳ ин муодиларо ба ҷои муодилаи якум менависем. Ғояи усули Гаусс аз пай дар пай хориҷ кардани номаълумҳо иборат аст. Ҷараёни хориҷи номаълумҳоро шарҳ медиҳем.

Қадами 1. Муодилаи якумро нигоҳ дошта, бо ёрии он аз муодилаҳои дигар номаълуми x_1 -ро хориҷ мекунем. Муодилаи якумро бо навбат ба ададҳои $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \ -\frac{a_{31}}{a_{11}},\dots,-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ зарб карда, натиҷаҳоро мувофиқан ба муодилаҳои дуюм, сеюм, …., m - ум ҷамъ мекунем. Дар натиҷа системаи нави ба системаи (1.4.1) баробарқувва пайдо мешавад.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_n \end{cases} \qquad (1.4.2)$$

Қадами 2. Бигузор $d_{22} \neq 0$ бошад. Муодилаҳои якум ва дуюми системаи (1.4.2)-ро бетағйир нигоҳ дошта, бо ёрии $a_{11} \neq 0$ муодилаи дуюм аз муодилаҳои $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \ -\frac{a_{31}}{a_{11}},\dots,-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ сеюм, чорум, …, m-ум номаълуми x_2 -ро хориҷ мекунем. Барои ин муодилаи дуюмро ба

$-\frac{a_{32}}{a_{22}}$, $-\frac{a_{42}}{a_{22}}$,....,$-\frac{a_{m2}}{a_{22}}$ зарб карда, натиҷаҳоро мувофиқан бо муодилаи сеюм, чорум, ..., m -ум ҷамъ кунем. Дар натиҷа системае пайдо мешавад, ки муодилаҳои он аз сеюмаш сар карда, номаълуми x_2-ро дарбар намегиранд.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}\,x_2 + \ldots + a'_{2n}\,x_n = b'_2 \\ \qquad\quad a''_{33}\,x_3 + \ldots + a''_{3n}\,x_n = b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ \qquad a''_{m3}\,x_3 + \ldots + a''_{mn}\,x_n = b''_n \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Ин раванд беохир набуда, пас аз микдори муайяни қадамҳо ба охир мерасад. Се ҳолати зерин имконпазиранд.

Ҳолати 1. Системаи ниҳоӣ намуди секунҷашаклро мегирад.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\quad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{mn}x_n = d_n \end{cases} \tag{1.4.4}$$

ки дар ин ҷо $c_{ii} \neq 0$ $\quad i = \overline{1,n}$ мебошанд. Ин система ҳалли ягона дорад, чуеки муайянкунандаи системаи асосии он $\det c = c_{11} \cdot c_{12} \cdot \ldots \cdot c_{nm} \neq 0$ аст. Сохтори махсуси ин система имконият медиҳад, ки ҳалли онро бо осонӣ ёбем. Аз муодилаи охирон x_n-ро меёбем: $x_n = \frac{d_n}{c_{mn}}$. Муодилаи $(n-1)$-ум бошад, номаълумҳои x_{n-1} ва x_n -ро дар бар мегирад. Қимати x_n-ро дар ин муодила гузошта, номаълуми x_{n-1} -ро меёбем. Ин равандро давом дода, аз муодилаи сеюм x_3, аз муодилаи дуюм x_2 ва аз муодилаи якум x_1 -ро меёбем.

Мисол. Системаро бо усули Гаусс ҳал кунед.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=13 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-3 \\ 3x_1+x_2+3x_3+x_4=12 \end{cases}$$

Ҳал. Қадами 1. Азбаски $a_{11}=1\neq 0$ аст, пас муодилаи якумро бо навбат ба -2, -1, ва -3 зарб карда, натиҷаро мувофиқан бо муодилаи дуюм, сеюм ва чорум ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ \quad -5x_2+5x_3 \quad =-5 \\ \qquad -x_3-2x_4=-7 \\ \quad -5x_2+6x_3-2x_4=12 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ \quad x_2-x_3 \quad =1 \\ -5x_2+6x_3-2x_4=0 \\ \qquad x_3+2x_4=7 \end{cases}$$

Қадами 2. $a_{22}=1\neq 0$ аст. Муодилаҳои якум ва дуюмро нигоҳ дошта, бо ёрии муодилаи дуюм аз муодилаҳои дигар x_2 -ро хориҷ мекунем. Барои ин муодилаи дуюмро ба 5 зарб карда, натиҷаҳоро мувофиқан бо муодилаҳои сеюм ва чорум ҷамъ мекунем.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ \quad x_2-x_3 \quad =1 \\ \qquad -x_3+2x_4=0 \\ \qquad x_3+2x_4=7 \end{cases}$$

Қадами 3. $a_{33}=-1\neq 0$ аст. Муодилаҳои якум, дуюм ва сеюмро бетағйир нигоҳ дошта, бо ёрии муодилаи сеюм аз муодилаҳои чорум x_3 -ро хориҷ мекунем. Барои ин муодилаи сеюмро ба 1 зарб карда, бо муодилаи чорум

чамъ мекунем. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 \quad = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_4 = 12 \end{cases}$

Аз муодилаи охирон x_4-ро меёбем: $x_4 = 3$. Ин қимати x_4-ро ба муодилаи сеюм гузошта, x_3-ро меёбем: $x_3 = -5 + 2 \cdot 3 = -5 + 6 = 1$. Ин қиматҳои x_3 ва x_4-ро ба муодилаи дуюм гузошта, x_2-ро меёбем: $x_2 = 0$. Ниҳоят аз муодилаи якум x_1-ро меёбем: $x_1 = 2$. Ҳамин тавр $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$. шуд.

Системаи се муодилаи се номаълумаро бо усули Гаусс ба намуди ошкор мушахас нишон медиҳем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \Rightarrow \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ 0 + \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} - a_{22}\right)x_2 + \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{13} - a_{23}\right)x_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1 - b_2 \Rightarrow \\ 0 + \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{12} - a_{32}\right)x_2 + \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{13} - a_{33}\right)x_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot b_1 - b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ 0+\left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{12}-a_{22}\right)x_2+\left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{13}-a_{23}\right)x_3=\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1-b_2 \\ 0+0+\left(\dfrac{a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{31}(a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23})+a_{11}(a_{32}a_{23}-a_{22}a_{33})}{a_{11}}\right)x_3= \end{cases}\Rightarrow$$

$$=\frac{b_1(a_{31}a_{22}-a_{21}a_{32})+a_{12}(a_{21}b_3-a_{31}b_3)+a_{11}(a_{32}b_2-a_{22}b_3)}{a_{11}}$$

$$x_3=\frac{b_1(a_{31}a_{22}-a_{21}a_{32})+a_{12}(a_{21}b_3-a_{31}b_3)+a_{11}(a_{32}b_2-a_{22}b_3)}{a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{31}(a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23})+a_{11}(a_{32}a_{23}-a_{22}a_{33})}$$

Мисол. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=-2 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$

$a_{11}=2,\ a_{12}=1,\ a_{13}=3,\ a_{21}=1,\ a_{22}=-1,\ a_{23}=-1,\ a_{31}=1,\ a_{32}=1,\ a_{33}=2,$
$b_1=-1,\ b_2=-2,\ b_3=0.$

$$x_3=\frac{-1(1\cdot(-1)-1\cdot1)+1(1\cdot0-1\cdot(-2))+2(1\cdot(-2)+1\cdot0)}{1\cdot(1\cdot2-3\cdot1)+1\cdot(3\cdot(-1)-1\cdot(-1))+2(1\cdot(-1)+1\cdot2)}=\frac{2+2-4}{-1+2+2}=\frac{0}{3}=0$$

$$x_2=\frac{a_{21}b_1-a_{11}b_2}{a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}}=\frac{1\cdot(-1)-2\cdot(-2)}{1\cdot1-2\cdot(-1)}=\frac{-1+4}{1+2}=\frac{3}{3}=1,$$

$2x_1+1\cdot1=-1,\quad 2x_1=-2,\ x_1=-1.$

Санчиш. $\begin{cases} 2\cdot(-1)+1+3\cdot0=-1 \\ -1-1-0=-2 \\ -1+1+2\cdot0=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -1=-1 \\ -2=-2 \\ 0=0 \end{cases}$

§5. Шакли квадратӣ

Таъриф. Шакли квадратии $F(x_1x_2,\ldots x_n)$ аз n-номаълум гуфта суммаи ҳар як ҷамшавандаро меномем, ки ҳар як ҷамъшаванда дар квадрат аст ё аз ҳосили зарби ду номаълуми гуногун иборат мебошад. Масалан, суммаи $x^2 - 3xy + 2y^2$ -шакли квадратӣ мебошад аз ду номаълум, суммаи $x^2 + 2xy - 3xz + 4y^2 - yz$ шакли квадратӣ аз се номаълум мебошад.

Барои мухтасар навиштани намуди квадратӣ суммаи $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ истифода карда мешавад. Дар ин ҷо як индексро қайд намуда, суммаро бо индекси дигар кушода, пас аз он суммаро бо индекси дигараш кушодан мумкин аст

Шакли квадратиро дар намуди умумӣ чунин навиштан мумкин аст:

$$F(x_1 x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad (1.4.1)$$

ки дар ин ҷо

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1}\, a_{i2} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\, a_{j2} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коэффисиентҳои шакли квадратӣ (1.4.1) a_{ij} матритсаи квадратиро ташкил медиҳанд ва ранги ин матритса ранги шакли квадратиро муайян мекунад.

Мисоли 1.4.1. Шакли квадратии зеринро ба намуди умуми матритсави нависед ва матритсаи онро ёбед:

$$A(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 3yz + z^2 + yz.$$

Ҳал. Пас аз аъзои якхеларо ҷамъ намудан ҳосил мекунем.

$$x^2+4xy+2y^2-2yz+z^2=x^2+2xy+2yx+2y^2-yz-zy+z^2=$$
$$=x\cdot x+2xy+0xz+2yx+2yy-yz+0zx-zy+z\cdot z.$$

Дар ин ҳолат матритсаи шакли квадратӣ чунин навишта мешавад:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Қайд мекунем, ки матритсаи А онгоҳ ва фақат онгоҳ симметрӣ мебошад, ки бо матрисаи транспоронидашудааш ҳамҷоя шавад, яъне $A=A'$. Сутун матритсаро тартиб медиҳем:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Шакли квадратӣ дар намуди матритсавӣ чунин аст:

$$F=X'AX.$$

Мисоли 1.4.2. Шарти мисоли дар боло овардашударо ба намуди матритсавӣ нависед:

Ҳал. Матрисаи дар мисоли боло овардашударо истифода бурда менависем:

$$F(x,y,z)=(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Таъриф. Мо мегӯем, ки шакли квадратӣ намуди оддитаринро дорад, агар матрисаи он диогнали бошад $(a_{ij}=0$ ҳангоми $i\neq j)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Шакли квадратии одитаринро барои се номаълум менависем

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 :$$

Мисоли 1.4.3. Шакли квадратии зерин дода шудааст:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1.$$

Ба намуди шакли квадратии оддитарин биёред.

Ҳал. Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки табдилдиҳии хатти

$$x_1 = y_1 + 3y_2 + 2y_3,$$
$$x_2 = y_1 - y_2 - 2y_3,$$
$$x_3 = y_2.$$

ин шакли квадратиро ба намуди оддитарин меорад. Матритсаи шакли квадратӣ чунин намуд дорад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матритсаи A-ро табдилдиҳӣ намуда ҳосил мекунем.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Намуди оддитарини шакли квадратии додашуда чунин мебошад

$$F(y_1, y_2, y_3) = 2x_1^2 + 6y_2^2 - 8y_3^2$$

Мисоли 1.4.4. Намуди оддитарини шакли квадратии

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

ёфта шавад.

Ҳал. Аъзоҳои x_1 -ро мегирем, квадрати пурра тартиб медиҳем, пас аъзоҳои x_2-ро мегирем, квадрати пурра тартиб медиҳем ва дар охир аъзоҳои x_3 доштаро гирифта квадрати пурра тартиб медиҳем:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4\left(x_3^2 + x_1x_2\right) = \left(x_1 + x_2 - 2x_3\right)^2 +$$
$$+ \left(2x_2 + x_3\right)^2 - 9x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Аз ин ҷо системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_3 = y_3 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} y_1 & 1 & -2 \\ y_2 & 2 & 1 \\ y_3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6y_1 + y_3 + 4y_3 - 3y_2,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & -2 \\ 0 & y_2 & 1 \\ 0 & y_3 & 3 \end{vmatrix} = 3y_2 - y_3,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 2 & y_2 \\ 0 & 0 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Аз ин ҷо

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3, \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{1}{3}y_3.$$

Ҳамин тавр, шакли квадратӣ бо тағийрёбандаи нав намуди дигари соддатарро мегирад.

$$F(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

дар он

$$y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$y_2 = 2x_2 + x_3$$
$$y_3 = 3x_3.$$

Кори мустақилонаи 1.1.1

а) Муайянкунандаҳои тартиби дуюмро ҳисоб кунед:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

б) Муайянкунандаҳои тартиби сеюмро ҳисоб кунед:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Кори мустақилонаи 1.2.1.

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$a) \begin{cases} 2x + 7y = 8, \\ 6x + 5y = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 2y = 3, \\ 7x - 2y = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x + 3y = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4x + 3y = 8; \end{cases}$$

$$б)\begin{cases}3x-2y+5z=0,\\ x+2y-3z=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}3x-2y+z=0,\\ 6x-4y+3z=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-3y+z=0,\\ 2x-9y+3z=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x+2y-z=0,\\ 3x-5y+2z=0;\end{cases}$$

$$в)\begin{cases}2x+y+2z=1,\\ x+2y+2z=2,\\ 2x+2y+z=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x+2y+z=2,\\ 2x+y+z=1,\\ x+y+2z=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-4y+9z=28,\\ 7x+3y-6z=-1,\\ 7x+9y-9z=5;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x+y=5,\\ x+3z=16,\\ 5y-z=10.\end{cases}$$

Кори мустақилонаи 1.3.1.

Сумма ва фарқи ду матрисаро ёбед:

$$a)A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 4 & -5 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

б). Ҳосили зарби матрисаҳоро ёбед:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\\ 0 & -5\end{pmatrix}; \qquad (4 \;\; -5 \;\; 6)\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}4\\ 6\\ 8\end{pmatrix}\cdot(-3 \;\; -2 \;\; 1); \quad \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}.$$

в). Матрисаи баръакс ёфта шавад:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & 5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 6\\ 13 & 10 & 8\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 7 & 3 & 10\\ 15 & 6 & 20\end{pmatrix}.$$

Кори мустақилонаи 1.4.1.

Табдилдиҳии ортогоналиро ёбед, ки шакли квадратии намуди оддитаринро гирад:

$$1) F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

$$2) F(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Ҷавобҳо:

К.М 1.1.1.

1) 9, -6, 0, 31, 32, 9, 10.

2) -4, -5, 18, 5, -2, -14, 4, 0.

К.М 1.2.1.

1) (-3,2); (1,-3); (5,-4); (5,-4); (0,2); ҳал надорад.

2) (-2t, 7t, 4t,); (2t, 3t, 0); (0, t, 3t,); (t, 5t, 11t,).

3) $\left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$; (2, 3, 4); (1, 3, 5).

К.М 1.3.1.

Матритсаҳо:

1) $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 11 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; $A - B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -3 & -13 & 15 \end{pmatrix}$.

2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot B = (-1)$; $\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -13 & -14 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

КМ 1.4.1.

1) $F(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2, x_1 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3,$

$x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3.$

2) $F(x_1, x_2, x_3) = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2, x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3,$

$x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3.$

Боби II. Геометрияи аналитикӣ дар ҳамворӣ

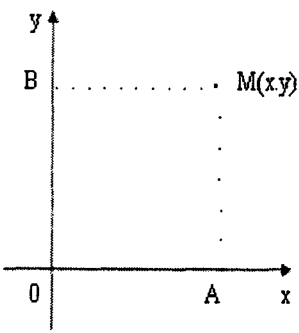
§1. Системаҳои координатӣ

1.Системаи координатаи росткунҷаи декартӣ. Системаи координатаи росткунҷаи декартӣ дар ҳамворӣ додашуда номида мешавад, агар ду тири бо ҳам перпендикуляр бурранда бо масштаби муайян рақамгузорӣ шуда ва ибтидои он маълум бошад.

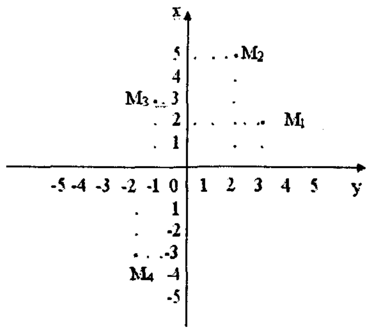
Нуқтаи бурриши тирҳо ибтидои координата ва худи тирҳо тирҳои координатӣ (тири OX, тири абсисса, тири OY, тири ордината) номида мешаванд. Ҳар гуна нуқта дар системаи координатаи росткунҷаи декартӣ, яъне дар ҳамворӣ ду координата дорад - $(x;y)$ (ниг. ба расми 2.1.1)

Бигзор, дар системаи координатаи росткунҷаи декартӣ нуқтаи ихтиёрии M(x;y) дода шуда бошад. Кординатаҳои он чунин муайян карда мешаванд:

$x=OA$, $y=OB$



расми 2.1.1

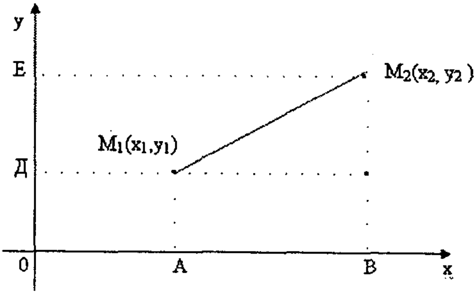


расми 2.1.2

Масъалаи 2.1.1. Нуқтаҳои зеринро дар ҳамворӣ созед (ниг. ба расми 2.1.2):

$$M_1(3;2),\quad M_2(2;5),\quad M_3(-1;3),\quad M_4(-2;-3).$$

2. **Масофаи байни ду нуқта дар ҳамворӣ.** Бигзор нуқтаҳои $M_1(x_1;y_1)$ ва $M_2(x_2;y_2)$ дода шуда бошанд (расми 2.1.3):



Расми 2.1.3.

Аз нуқтаҳои M_1 ва M_2 ба тирҳои координатӣ перпендикулярҳо мефарорем. Он гоҳ (OB)= x_2 ,(OA)= x_1 ,(AB)= $x_2 - x_1$.Айнан (ДЕ)= $y_2 - y_1$. Аз $\Delta M_1 M_2 C$ дар асоси теоремаи Пифагор ҳосил мешавад:

$|M_1 M_2| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Дар ин ҷо масофаи байни нуқтаҳои $M_1 M_2$-ро бо d - ишора кардем.

Масъалаи 2.1.2. Масофаи байни нуқтаҳои M1(3;8), ва M2(-5;4)-ро ёбед.

Ҳал. Барои ёфтани масофаи байни нуқтаҳои M_1 ва M_2 аз формулаи

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ истифода мебарем

$d = |M_1 M_2| = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10$ воҳид.

Масъалаи 2.1.3. Дарозии тарафҳои секунҷа, ки қуллаҳои A=(-3;-3), B(-1;3), C(11;-1) аст, ёфта шавад.

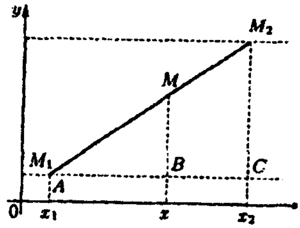
Ҳал. Барои ёфтани дрозии тарафҳои секунҷаи ΔABC аз формулаи масофаи байни ду нуқта истифода мебарем:`

$$|AB| = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$|AC| = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{196+4} = \sqrt{200}$$

$$|BC| = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$$

3.Тақсими порча ба нисбати додашуда. Бигзор, нуқтаҳои $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2\ (x_2; y_2)$ дода шудаанд. Координатаҳои нуқтаи $M(x; y)$- ро бо нисбати додашуда $\lambda = \frac{|M_1M|}{|M_2M|}$ ёфта шаванд: (расмн 2.1.4).



Расми 2.1.4

Аз геометрияи мактабӣ маълум аст, ки порчаи хатҳои рост, ки дар байни хатҳои рости параллелӣ ҷойгиранд, мутаносибанд ё худ $\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \lambda = \frac{|AB|}{|BC|}$

Аз ин ҷо $$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Аз ин баробарӣ абссисаи нуқтаи М-ро меёбем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Айнан ординатаи нуқтаи М ёфта мешавад:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Агар нуқтаи M порчаи M_1M_2 -ро ба қисмҳои баробар тақсим намояд ($\lambda = 1$), он гоҳ ҳосил мекунем.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Масъалаи 2.1.4. Охирҳои порчаи AB: A(-2;5), B(4;17) дода шудаанд. Дар порчаи AB нуқтаи C гузошта шудааст, ки масофааш аз нуқтаи A ду маротиба зиёдтар нисбат ба масофа аз B мебошад. Координатаҳои нуқтаи $C(x;y)$ муайян карда шаванд.

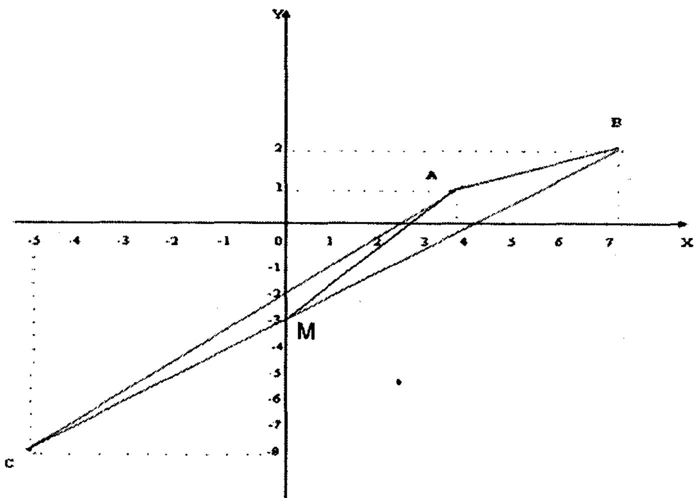
Ҳал. Маълум аст, ки $\overline{AC} = 2\overline{CB}$ пас $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 2$,

Дар ин ҷо x_1=-2, y_1=5, x_2=4, y_2=17.

$$x = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2, \qquad y = \frac{5+2\cdot 17}{1+2} = 13,$$

аз ин ҷо C(2;13).

Масъалаи 2.1.5. Қуллаҳои секунҷаи ΔABC дода шудаанд: A(4;1), B(7;2), C(-5;-8). Дарозии медианаи аз қуллаи A фаровардашуда ва нуқтаи бурриши медианаҳо ёфта шавад (расми 2.1.5).



расми 2.1.5.

Ҳал. Координатаҳои нуқтаи бурриши медианаи аз қуллаи ба асос фаровардашударо меёбем, маълум аст, ки λ=1 мебошад.

$$x_м = \frac{7-5}{2} = 1, \quad y_м = \frac{2-8}{3} = -3.$$

$$d = |AM| = \sqrt{(4-1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Акнун нуқтаи бурриши медианаҳоро меёбем. Азбаски медианаҳои секунҷа дар нуқтаи бурриш нисбати 2:1-ро доранд, яъне $\lambda = 2$ нуқтаи бурриш медианаҳо $Д\left(x_1;\, y_1\right)$ аз формулаи тақсими порча ба нисбати маълум муйян карда мешавад

$$x = \frac{x_A + \lambda\, x_M}{1+\lambda} = \frac{4+2\cdot 1}{1+2} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$y = \frac{y_A + \lambda y_M}{1+\lambda} = \frac{1-3\cdot 2}{1+2} = -\frac{5}{3}.$$

Нуқтаи бурриши координатаҳои медианаҳои секунҷаи додашуда $x = 2$, $y = -\frac{5}{3}$ мебошад, яъне $Д\left(2;\, -\frac{5}{3}\right)$.

4.Системаи координатаи қутбӣ. Мавќеи нуқта дар системаи координатаи қутбӣ дар ҳамворӣ, масофа аз қутби O то нуқтаи M ва кунҷи θ, ки порчаи OM бо тири қутб OX-ро ташкил медиҳад, муайян карда мешавад. Кунҷи θ мусбат шуморида мешавад, ҳангоми ҳисобкунӣ аз тири қутб ба муқобили ақрабаки соат гирифта шудан.

Агар дар системаи координатаи росткунҷаи декартӣ тири OX-ро бо тири қутб равона кунем, он гоҳ координатаҳои росткунҷаи x ва y бо координатаҳои қутби ρ ва θ чунин муносибат доранд:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Масъалаи 2.1.6. Координатаҳои нуқтаи M(1;-$\sqrt{3}$) дода шудааст ρ ва θ -ро ёбад, агар қутб бо ибтидои координата ҳамҷоя бошад ва тири қутбӣ бо равиши мусбати тири OX равона шуда бошад.

Ҳал. Аз таносуби байни координатаҳои декартӣ ва қутбӣ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\theta=\arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{5}{3}\pi.$$

Нуқтаи M дар чоряки чорум мехобад.

Масъалаи 2.1.7. Координатаҳои росткунҷа (x, y) ёфта шаванд, агар тири қутбӣ бо тири OX равона карда шуда бошад ва нуқтаи M(2 $\sqrt{2}$; $\frac{3\pi}{4}$) бо координатаҳои қутбӣ дода шуда бошад.

Ҳал. Ҳосил мекунем $x=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2,$

$$y=2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$$

Ҳамин тавр, $x=-2$, $y=2$ мебошад.

5.Ҳисоб намудани масоҳати секунҷа. Бигзор, $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ қуллаҳои секунҷа бошанд. Он гоҳ масоҳати секунҷа бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}.$$

Агар ҳар се нуқта дар як хати рост хобанд, онгоҳ масоҳати секунҷа ба сифр баробар аст:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}$$

Мисоли 2.1.8. Нуқтаҳои $M_1(5;-2)$, $M_2(-3;6)$, $M_3(0;3)$ дар як хати рост мехобанд;

$$\begin{vmatrix} 5-0 & -2-3 \\ -3-0 & 6-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0$$

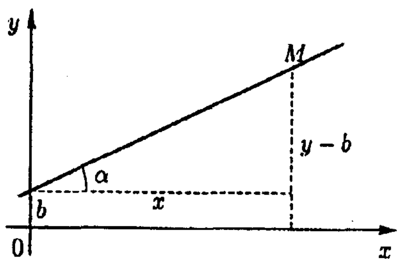
Масъалаи 2.1.9. Масоҳати секунҷаи қуллаҳояш A(-2;2), B(-1;5), C(4;8) буда ёфта шавад.

Ҳал. Аз формулаи дар боло овардашуда истифода мебарем

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[(-1+2)(8-2)-(4+2)(5-2)\right] = 6.$$

§2.Хатҳои рост дар ҳамворӣ

1.Муодилаи хати рост бо коэффисиенти кунҷӣ. Бизор, дар системаи росткунҷаи декартӣ ягон хати рост дода шуда бошад. Тангенуси кунҷи байни хати рост ва тири OX коэффисиенти кунҷи ин хати рост номида мешавад. Муодилаи хати ростро ҳангоми муайян будани коэффисиенти кунҷӣ ва бузургии b тартиб медиҳем:



Расми 2.2.1.

Координатаҳои нуқтаи M -ро бо тағирёбандаҳои х ва у ишора мекунем. Аз (расми 2.2.1) маълум аст, ки агар нуқтаи $M(x,y)$дар хати рост хобад, пас

$$tg\alpha = k = \frac{y-b}{x} \quad \text{ё} \quad y=kx+b.$$

Муодилаи $y=kx+b$ муодилаи хати рост бо коэффисиенти кунҷӣ номида мешавад. Ҳангоми ҳосил намудани ин муодила шарт карда мешавад, ки хатти рост бо тири оу параллел намебошад. Агар хати рост бо тири oy параллел бошад, он гоҳ муодилаи он $x=a$ мешавад.

2. Муодилаи умумии хатти рост. Муодилаи умумии хати рост нисбат ба x ва у дар ҳамворӣ чунин намуд дорад

$$Ax+By+C=0,$$

ки дар ин ҷо $A, B.C$ -ададҳои доимӣ буда, x, y -координатаҳои ҷорӣ мебошанд. Бигзор, В≠О бошад, он гоҳ ҳар ду тарафи муодиларо ба B тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=kx+b, \qquad k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}.$$

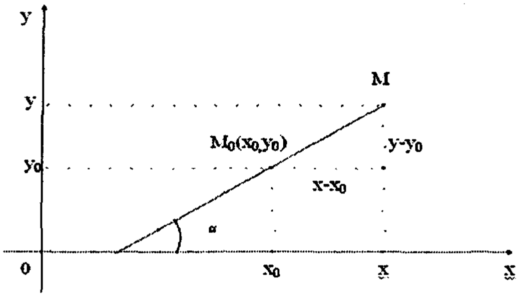
Дар ин ҳолат муодилаи хатти рост бо коэффисиенти кунҷӣ ҳосил мешавад;

1) Агар $C=O$бошад, пас $Ax+By=0$ хати рост аз ибтидои системаи координата мегузарад.

2) Ҳангоми $B=O$будан $Ax+C=0$ хати рост бо тири оу параллел мешавад.

3) Дар холати $A=O$будан хатти рости $By+C=O$ бо тири ox параллел мешавад.

4) **Муодилаи хатти рости аз нуқтаи додашуда гузаранда.** Бигзор, нуқтаи $M_0(x_0;y_0)$ дода шуда бошад, коэффисиенти кунҷи k равиши хати ростро муайян мекунад. Муодилаи хати рости аз нуқтаи $M_0(x_0;y_0)$ гузарондаро тартиб медиҳем.



Расми 2.2.2

Дар хати рост нуқтаи $M(x,y)$ро мегирем:

Маълум (расми 2.2.2) аст, ки $tg\alpha = \dfrac{y-y_0}{x-x_0} = k$, аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$y-y_0 = k(x-x_0)$$

5. **Муодилаи хати рости аз ду нуқтаи додашуда гузаранда.** Бигзор, нуқтаҳои $M_1(x_1;y_1)$ ва $M_2(x_2;y_2)$ дода шуда бошанд. Муодилаи хати рости аз ин нуқтаҳо гузарондаро тартиб диҳед. Коэффисиенти кунҷи k дар ин ҳолат чунин муайян карда мешавад:

$$tg\alpha = k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Қимати коэффисиенти кунҷиро дар муодилаи хати рости аз як нуқта гузаранда гузошта, муодилаи хати рости аз ду нуқта гузарандаро ҳосил мекунем;

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_2}{x_2-x_2}(x-x_1) \quad \text{ё} \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Масъалаи 2.2.1. Муодилаи хати рости аз нуқтаи $M_o(2;4)$ гузаранда бо коэффисиенти кунҷи $k=3$ тартиб дода шавад.

Ҳал. Аз муодилаи хати рости аз як нуқта гузаранда истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$y-4=3(x-2) \quad \text{ё} \quad y-3x+2=0.$$

Масъалаи 2.2.2. Муодилаи хати рости аз нуқтаҳои $M(-1;3)$ ва $N(2;5)$ гузарандаро тартиб диҳед.

Ҳал. Дар асоси муодилаи хати рости аз ду нуқта гузаранда ҳосил мекунем:

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x+1}{2+1}, \quad \frac{y-3}{2}=\frac{x+1}{3}, \qquad 3(y-3)=2(x+1), \quad 3y-2x-11=0.$$

6. Муодилаи хати рост дар порчаҳо. Бигзор, ҳамаи коэффисиентҳои муодилаи хати рост аз сифр фарқ кунанд яъне $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ ва он муодиларо бо намуди $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ овардан мумкин аст, ки $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$ мебошанд. Ин муодила муодилаи хати рост дар порчаҳо ном дорад.

Аз геометрияи мактабӣ маълум аст, ки аз ду нуқта танҳо як хати рост мегузарад. Барои ҳамин сохтани хати рост, бо истифода аз ин муодила, қуллай мебошад. Барои сохтани хати рост кифоя аст: Ҳангоми $x=0$, $y=b$ ва $y=0$, $x=a$ - ро ёбем.

Масъалаи 2.2.3. Муодилаи хати росте, ки аз нуқтаи $M(1;1)$ мегузарад ва бо тирҳои координата бурида шуда, масоҳати ду воҳиди квадратиро ҷудо мекунад, ёфта шавад.

Ҳал. Азбаски хати рост аз нуқтаҳои $M(1;1)$ мегузарад, бинобар ин координатаҳои ин нуқта муодилаи хати ростро қаноат мекунанд:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \qquad \text{ё} \qquad a+b=ab.$$

Масоҳати секунҷаи ҳосилшуда $\pm S=\frac{1}{2}a\cdot b=2$ ё $ab=\pm 4$.

Ҳамин тавр, системаи ду муодилаи ду номаълумаро ҳосил кардем:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = 4 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} a + b = -4 \\ a \cdot b = -4 \end{cases}$$

Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

а) $b = 4 - a, \quad a(4-a) = 4a - a^2 = 4, \quad . \; a_1 = 2, \quad b_1 = 2$

б) $b = -4 - a, \quad a(4+a) = 4, \quad a^2 + 4a - 4 = 0, \quad a_2 = -2 + 2\sqrt{2} \cdot$
$a_3 = -2 - 2\sqrt{2}, \quad b_2 = -2 - 2\sqrt{2}, \quad b_3 = -2 + 2\sqrt{2} \cdot$

Шарти масъаларо се хати рост қаноат мекунанд:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1, \quad \frac{x}{2\sqrt{2}-2} + \frac{y}{-2-2\sqrt{2}} = 1, \text{ ва } \quad \frac{x}{-2-2\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}-2} = 1.$$

Масъалаи 2.2.4. Муодилаи хати рости аз тирҳои координат порчаҳои $a = 3, \; b = 4$ -ро мебуррад тартиб диҳед.

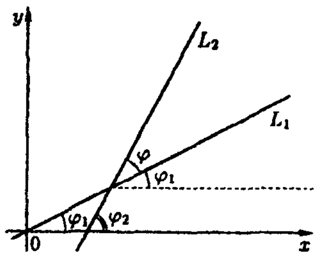
Ҳал.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$$

Ин муодиларо дар намуди умумӣ чунин навиштан мумкин аст:

$$4x + 3y - 12 = 0$$

7. **Кунҷи байни ду хати рост.** Бигзор, ду хати рост дода шуда бошанд, кунҷи байни онҳоро бо φ ишора мекунем. Бо φ_1 ва φ_2 кунҷи байни ин хатҳоро бо тири OX ишора мекунем. (расми 2.2.3).



Расми 2.2.3.

Бо k_1 ва k_2 мувофиқан коэффисиентњои кунҷи хатҳои рости L_1 ва L_2-ро бо тири OX ишора мекунем. Он гоҳ ҳосил мекунем (нигар ба расми 2.2.3):

$$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{tg\varphi_2-tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1 tg\varphi_2};$$

азбаски $к_1=\mathrm{tg}\varphi_1$, $к_2=\mathrm{tg}\varphi_2$, бинобар ин,

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{к_2-к_1}{1+к_1к_2}$$ мешавад.

Агар муодилаҳои хатҳои рост ба намуди умумии $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ дода шуда бошанд, он гоҳ кунҷи байни ин хатҳои рост бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

Ҳолатҳои хусусӣ:

1) Агар яке аз хатҳои рост бо тири оу параллел бошад, он гоҳ коэффисиенти кунҷи вай ба беохир баробар мешавад, ки дар ин ҳолат ин формула маъно надорад. Кунҷи байни ин хатҳои рост бевосита ҳисоб карда мешавад.

2) Агар хатҳои рост параллел бошанд, он гоҳ кунҷи байни онҳо ба сифр баробар аст. Пас, $\mathrm{tg}\varphi=0$ аз ин ҷо мешавад.

3) Ҳангоми перпендикуляр будани хатҳои рост кунҷи байни онҳо $\varphi=\frac{\pi}{2}$ мебошад, бинобар $\mathrm{tg}\varphi=\infty$. Дар ин ҳолат махраҷ $1+к_1.к_2$ ба сифр баробар мешавад, яъне $k_1\cdot k_2=-1$, $k_1=-\frac{1}{k_2}$ шарти перпендикулярии ду хатҳои рост мебошад.

4) Дар ҳолати умумӣ тангенси кунҷи байни ду хати рост бо формулаҳои

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{\kappa_2-\kappa_1}{1+\kappa_1\kappa_2}\right| \quad \text{ё} \quad \mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$$

муайян карда мешавад.

Масъалаи 2.2.5. Кунҷи байни хатҳои рости $y=2x+5$ ва $y=-3x+1$ муайян карда шавад.

Ҳал. Дар формулаи $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{1+\kappa_1\kappa_2}\right|$ қимати $k_1=2,\ k_2=-3$ -ро гузошта, ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3-2}{1-2\cdot 3}=\frac{-5}{-5}=1,\quad \text{яъне}\quad \varphi=\frac{\pi}{4}\ \text{мебошад.}$$

Масъалаи 2.2.6. Хати рости $2x+3y+4=0$ дода шудааст. Муодилаи хати рости аз нуқтаи $M(2;1)$ дар зери кунҷи 45^0 бо хати рости додашуда гузарандаро тартиб диҳед.

Ҳал. Азбаски дар шарти масъала гуфта нашудааст, ки ҳисобкунӣ аз кадом хати рост сурат мегирад, бинобар ин масъала ду ҳал дорад:

1) $k_1=-\dfrac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\varphi=tg45^0=1$, k_2 - коэффисиенти кунҷи иомаълум, он гоҳ $\dfrac{\kappa_2+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}\kappa_2}=1$. Аз ин ҷо $k_2=\dfrac{1}{5}$ ва $y-1=\dfrac{1}{5}(x-2)$ ё $x-5y+3=0$

2) $k_2=-\dfrac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\varphi=tg45^0=1$ k_1 -коэффисиенти номаълум

$\dfrac{-\frac{2}{3}-\kappa_1}{1-\frac{2}{3}\kappa_1}=1$. Аз ин ҷо $k_1=-5$, $y-1=-5(x-2)$ ё $5+y-11=0.$

Масъалаи 2.2.7. Нишон диҳед, ки хатҳои рости $4x-6y+7=0$ ва $20x-30y-11=0$ параллеланд.

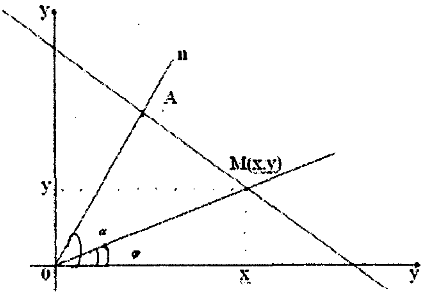
Ҳал. Ҳар ду муодиларо ба намуди коэффисиенти кунҷӣ менависем:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}\quad \text{ва}\quad y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{30}.$$

аз ин ҷо $k_1=k_2$ мебошад.

Хатҳои рости додашуда параллел мебошанд.

4. Муодилаи нормалии хати рост. Бигзор, ягон хати рост дода шуда бошад. Аз ибтидои координата ба йн хати рост, хати рости перпендикулярӣ мегузаронем. Бигзор, А нуқтаи бурриши ин ду хатҳои рост бошад. Бо $p=|OA|$ - дарозӣ ва α - кунҷи байни нормалӣ гузаронида шуда бо тир ох-ро ишора мекунем.



Расми 2.2.4

Дар ин хати рост нуқтаи ихтиёрии М(х;у)-ро мегирем (расми 2.2.4), пас

$$x=|OM|\cos\varphi, \qquad y=|OM|\sin\varphi,$$

$$p=|OA|=|OM|\cos(\alpha-\varphi)=|OM|\cos\alpha\cos\varphi+|OM|\sin\alpha\sin\varphi=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$

$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ муодилаи нормалии хати рост мебошад.

5. **Масофаи аз нуқта то хати рост.** Бигзор, муодилаи умумии хати рост $Ax+By+C=0$ дода шуда бошад. Масофаи аз нуқтаи $M_0(x_0;y_0)$ бо хати ростро ҳисоб кардан лозим аст. Барои ин, аз нуқтаи $M_0(x_0;y_0)$ бо хати рости додашуда перпендикуляр мегузаронем ва масофаи аз нуқтаи M_0 то хати ростро бо d-ишора мекунем. Масофаи аз нуқтаи $M_0(x_0;y_0)$ то хати рости додашуда бо формулаи

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 2.2.8. Масофаи аз нуқтаи $M_0(2;3)$ то хати рости $4x+3y+8=0$ ёфта шавад.

Ҳал. Аз формулаи масофа аз нуқта то хати рост истифода бурда ҳосил мекунем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 + 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Масъалаи 2.2.9. Масофаи аз нуқтаи $(M_0 1;2)$ то хати рости $20x-21y-58=0$ ёфта шавад.

Ҳал. Ҳосил мекунем

$$d = \frac{|20 \cdot 1 - 21 \cdot 2 - 58|}{\sqrt{20^2 + 21^2}} = \frac{|20 - 24 - 58|}{\sqrt{400 + 441}} = \frac{|-80|}{\sqrt{841}} = \frac{80}{29}.$$

Масъалаи 2.2.10. Нуқтаи бурриши хатҳои рости $3x-2y+1=0$ ва $2x+5y-12=0$-ро ёбед.

Ҳал. Барои ёфтани нуқтаи бурриши ин хатҳои рост системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 12 = 0 \end{cases} \text{-ро}$$

ҳал мекунем. Ин системаи муодилаҳоро табдилдиҳӣ намуда, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 5y = 12. \end{cases}$$

Акнун бо усули Крамер ҳал менамоем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 24 = 19,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 36 + 2 = 38,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2.$$

Хатҳои додашуда дар нуқтаи M(1;2) якдигарро мебуранд.

Масъалаи 2.2.11. Муодилаи хатти рости аз нуқтаи M(-2;-5) гузаранда ва бо хати рости $3x + 4y + 2 = 0$ параллелро тартиб диҳед.

Ҳал. Муодилаи додашударо нисбат ба у ифода мекунем:

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

Маълум аст, ки коэффисиенти кунҷии ин хати рост $к = -\frac{3}{4}$ мебошад. Акнун муодилаи хати рости аз як нуқта гузарандаро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$y-(-5) = -\frac{3}{4}[x-(-2)] \qquad \text{ё худ} \qquad 3x + 4y + 26 = 0$$

Коэффисиенти кунҷии ҳарду хати рост баробаранд ба $к_1 = к_2 = -\frac{3}{4}$ бинобар ин, хатҳои рост параллел мебошанд.

Масъалаи 2.2.12. Қуллаҳои секунљa дода шудаанд:
A(0;1), B(6;5) ва C(12;-1). Муодилаи баландии секунҷа, ки аз қуллаи C фаровarда шудааст, тартиб дода шавад.

Ҳал. Муодилаи тарафи AB-ро тартиб медиҳем. Азбаски координатаҳои нуқтаҳои A ва B маълуманд. Муодилаи тарафи AB-ро ҳамчун муодилаи хати рости аз ду нуқтаи додашуда гузаранда тартиб медиҳем:

$$\frac{y-1}{5-1} = \frac{x}{6} \qquad \text{ё} \qquad 2x - 3y = 0$$

Аз муодилаи ҳосилшуда маълум аст, ки коэффисиенти кунҷй ба $\frac{2}{3}$ баробар аст. Хати рости ёфташуда ба баландии аз қуллаи C фаровардашуда перпендикуляр мебошад. Бинобар ин, коэффисиенти кунҷи хати рости баландӣ ба $-\frac{3}{2}$ баробар аст. Муодилаи баландии матлубро тартиб медиҳем:

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-12) \quad \text{ё} \quad 3x+2y-34=0$$

Масъалаи 2.2.13. Масофаи байни хатҳои рости параллелӣ $3x+y-3\sqrt{10}=0$ ва $6x+2y+5\sqrt{10}=0$ -ро ёбед.

Ҳал. Маълум аст, ки коэффисиентҳои кунчии ин хатҳои рост баробаранд, аз ин ҷо онҳо параллел мебошанд. Масъала чунин аст: муайян намудани масофа аз ягон нуқтаи хати рост то хати рости дигар. Масалан, дар хати рости якум, фарз мекунем, ки $x=0$ аст, он гох ҳосил мекунем: $y=3\sqrt{10}$. Ҳамин тавр, нуқтаи $M(0;3\sqrt{10})$ дар хати рости якум мехобад. Масофаи ин нуқтаро то хати дуюм муайян мекунем:

$$d=\frac{\left(6\cdot 0+2\cdot 3\sqrt{10}+5\sqrt{10}\right)}{\sqrt{36+4}}=\frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{11}{2}=5{,}5.$$

Масъалаи 2.2.14. Муодилаи хати рости аз нуқтаи $M(5;1)$ гузаранда ва бо хати рости $2x+y=0$ кунҷи 45^0 ташкилкунандаро тартиб диҳед.

Ҳал. Бигзор, коэффисенти яке аз хатҳои рост k бошад. Коэффисиенти хати рости додашуда ба -2 баробар аст. Азбаски кунҷи байни ин хатҳои рост ба 45^0 баробар мебошад, пас

$$tg\,45^0=\frac{\kappa+2}{1-2\kappa}=1, \quad \text{ё} \quad 1-2k=k+2 \qquad k=-\frac{1}{3}.$$

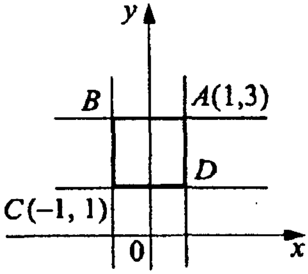
Ҳамин тавр, коэффисиенти кунҷии хати рости дуюмро муайян намудем. Муодилаи хати рости дуюмро тартиб медиҳем, ҳамчун хати рости аз нуқтаи $M(5;1)$ гузаранда бо коэффисенти кунҷии $-\frac{1}{3}$:

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-5) \quad \text{ё худ} \quad x+3y-8=0$$

Масъалаи 2.2.15. Ду қуллаҳои муқобили квадрат дода шудаанд A(1;3) ва C(-1;1). Муодилаҳои тарафҳо ва диогналҳои онро тартиб диҳед.

Ҳал. Муодилаи диогналии AC -ро тартиб медиҳем:

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-3}{1-3}, \qquad x-1=y-3, \qquad x-y+2=0, \qquad k=1.$$



Расми 2.2.5

Коэффисиенти кунҷии AB -ро меёбем (ниг. ба расми 2.2.5):

$$tg\,45^0=1=\left|\frac{K_{AC}-K_{AB}}{1+K_{AC}\cdot K_{AB}}\right|, \qquad K_{AB}=0$$

Маълум аст, ки AB//ДС//ОХ, АД//ВС; АД$\perp OX$, ВС$\perp OX$, шартҳои параллелӣ ва перпендикулярии хатҳои ростро истифода намуда, ҳосил мекунем:

АВ: у-3=0, ДС: у-1=0, АД: х-1=0, ВС: х+1=0, В (-1;3), Д (1;1),

аз ин ҷо $\dfrac{x+1}{1+1}=\dfrac{y-3}{1-3}$ ё $x+y-2=0$.

§3. Хатҳои каҷи тартиби ду

Муодилаи умумии хати каҷи тартиби ду дар ҳамворӣ чунин намуд дорад:

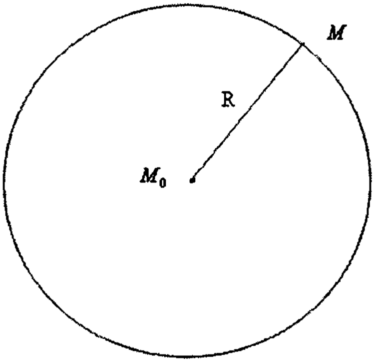
$$AX^2+Bxy+Cy^2+Дx+Ey+F=0,$$

ки дар ин ҷо A, B, C, Д, E, F – ададҳои доимӣ буда, коэффисиентҳои муодила номида мешаванд, x, y – координатаҳои ҷорӣ мебошанд.

Дар ин мавзӯъ хатҳои каҷи тартиби ду: давра, эллипс, гипербола ва парабола омӯхта мешаванд.

1. **Давра.** Дар геометирияи аналитикӣ ҳаргуна хат ҳамчун ҷои геометрии нуқтаҳо тасаввур карда мешаванд.

Давра гуфта маҷмӯи нуқтаҳоеро меномем, ки аз нуқтаи



Расми 3..1.1.

$M_0(x_0;y_0)$дар якхел масофа ҷойгиранд. Нуқтаи $M_0(x_0;y_0)$ марказ ва масофа аз марказ то нуқтаҳои сарҳадиро радиус меноманд, радиусро бо R-ишора мекунанд. Бигзор, M (x;y) нуқтаи ихтиёрии давра бошад, он гоҳ $R = \left|\overline{M_0M}\right|$ мешавад:

Аз формулаи масофаи байни ду нуқта истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\left|\overline{M_0M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R.$$

Ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2, \qquad (2.3.1)$$

ки дар ин ҷо x_0, y_0 – координатаҳои маркази давра, x,y – координатаҳои ҷорӣ ва R – радиуси давра мебошанд. Баробарии (2.3.1)-ро муодилаи умумии давра меноманд.

Дар ҳолати хусусӣ, агар маркази давра дар ибтидои (x_0=y_0=0) системаи координата хобад, он гоҳ муодилаи давра чунин намуд дорад:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2.3.2)$$

Дар (2.3.1) қавсҳоро кушода ҳосил мекунем, ки муодилаи давра ба синфи муодилаҳои дараҷаи дуюм мансуб мебошад:

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + (x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - R^2) = 0.$$

Масъалаи 2.3.1. Марказ ва радиуси давраи $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ -ро ёбед.

Ҳал. Барои марказ ва радиуси давраи мазкурро ёфтан аввало ба намуди (2.3.1) навиштан лозим аст ва аз ин ифода квадрати пурра ҷудо менамоем:

$$x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = x^2 - 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 - 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 - \frac{17}{4} = 0.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$(x-1,5)^2 + (y+1)^2 = \frac{17}{4} \qquad \text{ё} \qquad (x-1,5)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{17}{4}\right)^2.$$

Яъне координатаҳои маркази давра $x_0 = 1,5$ $y_0 = -1$ ва радиуси он $R = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ мебошанд.

Масъалаи 2.3.2. Муодилаи давраи аз нуқтаҳои A(5;0), B(1;4) гузаранда ва марказаш дар хати рости $x + y - 3 = 0$ ҷойгиршударо тартиб диҳед.

Ҳал. Бигзор, маркази давра $C(a;b)$ бошад, аз шарти масъала маълум аст, ки AC=BC= R. Пас

$$(a-5)^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-4)^2 \quad \text{мебошад.}$$

Қавсҳоро кушода, ҳосил мекунем $a = 1 + b$.

Аз тарафи дигар, a, b дар хати рости додашуда мехобанд, яъне қимати a - ро зузошта, ҳосил мекунем:

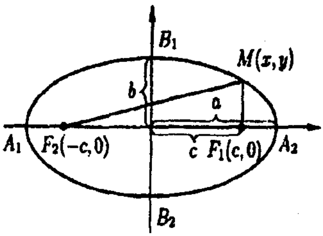
$$1 + b + b = 3, \quad 2b = 2, \quad b = 1, \quad \text{пас} \quad a = 2.$$

Маркази давра дар нуқтаи C(2;1) мехобад. Масофат байни нуқтаҳои $|AC| = R$ мебошад. Аз формулаи масофаи байни ду нуқта истифода карда, меёбем:

$$|AC| = R = \sqrt{(5-2)^2 + 1^2} = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}.$$

Акнун муодилаи давраро тартиб медиҳем $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$

2.Эллипс. Эллипс гуфта ҷои геометрии нуқтаҳои ҳамвориро меноманд, ки суммаи масофаҳояшон то ду нуқтаҳои додашудаи фокус номидашавандаи F_1, F_2 бузургии доимӣ мебошад ва онро бо $2a$ ишора мекунанд:



Расми 2.3.1

Талаб карда мешавад, ки доимї $2a$ аз масофаи байни фокусҳо зиёд бошад.

Барои ҳосил кардани муодилаи эллипс ибтидои координатро дар миёнаҷои порчаи F_1F_2 мегузорем. Он гоҳ F_1, F_2 мувофиқан координатаҳои (c;o) ва (-c;o) дорад. Бигзор, M(x;y) нуқтаи ихтиёрии эллипс бошад. Аз таъриф маълум аст, ки $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ ё худ $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ мебошад (ниг. ба расми 2.3.1).

Нуқтаи M(x;y) ҳамон вақт дар эллипс мехобад, ки координатаҳои он муодилаи

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$ - ро қаноат кунонанд.

Акнун ин муодиларо содда мекунем

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2,$$

$$x^2-2xc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2,$$

$$-4xc=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$xc+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$c^2x^2+2ca^2x+a^4=a^2\left(x^2+2cx+c^2\right)+y^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2=a^2\cdot c^2+y^2a^2-a^4$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=-a^2c+a^4$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right),$$

a^2-c^2 – ро бо b^2 ишора мекунем $(a>c)$; $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

Ҳарду тарафи баробарии охиронро ба a^2b^2 тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.3.3)$$

Ин муодилаи намуди оддитарини эллипс мебошад. Ададҳои a ва b мувофиқан нимтирҳои калон ва хурди эллипс номида мешаванд. Адади $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $\left(\varepsilon<1, c=\sqrt{a^2-b^2}\right)$ экссентриситети эллипс номида мешавад.

Радиус вектори фокалии эллипс чунин ифода карда мешавад: $r_1=a-\varepsilon x$ - радиуси вектори рост, $r_2=a+\varepsilon x$ - радиуси вектори чап.

Масъалаи 2.3.3. Муодилаи эллипсе тартиб дода шавад, ки аз нуқтаиҳои $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ ва $N\left(-2,\ \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ гузарад.

Ҳал. Бигзор, муодилаи эллипс матлуб $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ бошад. Ин муодила бояд координатаҳои нуқтаҳои додашударо қаноат кунонад. Координатаҳои нуқтаҳои M ва N –ро гузошта ҳосил мекунем:

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1 \quad \text{ва} \quad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$200b^2+12a^2=32a^2b^2 \quad \text{ва} \quad 20b^2+3a^2=5a^2b^2$$

Системаи зерин ҳосил шуд:

$$\begin{cases} 3a^2+50b^2=8a^2b^2 \\ 3a^2+20b^2=5a^2b^2. \end{cases}$$

Системаро ҳал мекунем:

$$30b^2=3a^2b^2, \quad a^2=10, \quad b^2=\frac{1}{10}3\cdot 10=1.$$

Қиматҳои a^2 ва b^2 -ро дар муодилаи эллипс гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{10}+y^2=1.$$

Масъалаи 2.3.4. Дарозии тирҳо, координатаҳои фокусҳо ва экссентристети эллипси $x^2+4y^2=16$ -ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи эллипсро менависем:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

Аз ин ҷо $2a=2\cdot 4=8$, $a=4$, $2b=2\cdot 2=4$, $b=2$ он гоҳ

$c^2=a^2-b^2=16-4=12$

Координатаҳои фокусҳои эллипс чунинанд: $F_1(2\sqrt{3};0)$, $F2(-2\sqrt{3};0)$,

$$\varepsilon=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Масъалаи 2.3.5. Хати рости $2x-5y-30=0$ ба эллипси $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{24}=1$ мерасад. Координатаҳои нуқтаи расишро ёбед.

Ҳал. Ҳарду муодиларо ҳамҷоя ҳал мекунем:

$$\begin{cases}2x-5y=3\\24x^2+75y^2=1800\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{5}x-6\\24x^2+75\left(\frac{2}{5}x-6\right)^2=1800\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{5}x-6\\24x^2+75\frac{4}{25}x^2-150\frac{2}{5}x\cdot 6+36=180(\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y-\frac{2}{5}x-6\\36x^2-360x=1764\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=-4.\end{cases}$$

Ҳамин тавр, координатаҳои нуқтаи расиш N (5;-4) мебошад.

Масъалаи 2.3.6. Муодилаи $3x^2+4y^2=12$ кадом хати каҷро ифода мекунад?

Ҳал. Ҳарду тарафи муодиларо аъзо ба аъзо ба 12 тақсим мекунем:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\quad \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$$

Муодилаи эллипсро бо нимтирҳои $a=2$, $b=\sqrt{3}$ ҳосил намудем. Он гоҳ $c^2=4-3$, $c=1$, $F_1(-1;0)$ ва $F_2(1;0)$ фокусҳои эллипс мебошанд.

3.Гипербола. Гипербола гуфта ҷои геометрии нуқтаҳои ҳамвориро меномем, ки қимати мутлақи фарқи масофаҳои онҳо то ду нуқтаҳои қайд карда шуда F_1 ва F_2 бузургии доимӣ аст, яъне:

$$|MF_2|-|MF_1|=\pm 2a,$$

ки дар ин ҷо нуқтаи M(x;y) дар ҳамворӣ мехобад ва a - адади доимӣ мебошад. Масофаи байни фокусҳо $F_1F_2=2c$. Бигзор, M(x;y) нуқтаи ихтиёрии гипербола бошад. Масофаҳои $|MF_1|$ ва $|MF_2|$ - ро меёбем:

$$|MF_2|-|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

Муодилаи гиперболаро содда мекунем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a,$$

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,$$

$$xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad (xc-a^2)^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right],$$

$$x^2c^2-2ca^2x+a^4-a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)$$

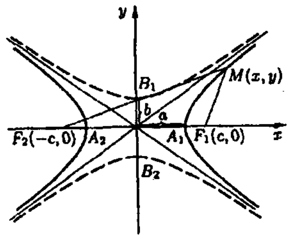
$$x^2c^2-2ca^2x+a^4=a^2x^2-2ca^2x+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) \quad c^2-a^2=b^2,$$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

ҳарду тарафро ба a^2b^2 тақсим намуда, муодилаи соддаи гиперболаро ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Расми 2.3.2.

Гепербола нисбат ба тирҳои координата симметрӣ мебошад. Тири OX –ро дар нуқтаҳои $A_1(a;0)$ ва $A_2(-a;0)$ мебурад. Нуқтаҳои A_1 ва A_2 қуллаҳои гипербола номида мешавад (ниг. ба расми 2.3.2).

Порчаи A_1A_2 тири ҳақиқӣ ва порчаи B_1B_2 тири мавҳуми гипербола номида мешаванд. Адади $\frac{c}{a}=\varepsilon$ эксцентрситенти гипербола номида мешавад.

Ҳангоми $a = b$ будан гипербола баробартараф номида мешавад. Хатҳои рости ℓ_1 ва ℓ_2 асимптотаҳои гипербола номида мешаванд ва аз муодилахои $y = \pm\frac{b}{a}x$ муайян карда мешаванд.

Масъалаи 2.3.7. Муодилаи $4x^2 - 9y^2 = 36$ кадом хати каҷро муайян мекунад?

Ҳал. Ҳарду тарафи муодилаи додашударо ба 36 тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Нимтирҳои ин гипербола $a = 3$, $b = 2$ мебошанд.

Масъалаи 2.3.8. Муодилаи гипербола тартиб дода шавад, ки фокусҳояш дар тири OX ҷойгиранд, симметрӣ нисбат ба ибтидои системаи координата буда, асимптотаҳояш дода шудаанд $y = \pm\frac{4}{3}x$ ва масофаи байни фокусҳояш $c = 10$ мебошад.

Ҳал. Азбаски муодилаҳои асиптотаҳо $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$ мебошанд, пас $a = 3k$, $b = 4k$, $k > 0$. коэффисиентҳои мутаносибӣ мебошанд. Қимати $a = 3k$ $b = 4k$-ро дар формулаи $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ гузошта, ҳосил мекунем, ки $k = 2$, аз ин ҷо $a = 6$, $b = 8$. Муодилаи гипербола чунин намуд дорад:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Масъалаи 2.3.9. Дар шохаи рости гиперболаи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. нуқтаеро ёбед, ки масофа аз фокуси тарафи росташ ду маротиба нисбат ба масофааш аз фокуси чап хурдтар бошад.

Ҳал. Барои шохаи рости гипербола радиуси вектор $r_1 = \varepsilon x - a$ ва тарафи чап $r_2 = \varepsilon x + a$ мебошад. Мувофики шарти масъала $\varepsilon x + a = 2(\varepsilon x - a)$ мебошад. Аз ин чо

$\varepsilon x + a = 2\varepsilon x - 2a, \ \ \varepsilon x = 3\,a, \ \ x = \dfrac{3a}{\varepsilon}$ мебошад.

Маълум аст, ки $a = 4$, b=3, мебошад:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{9+16}}{4} = \frac{5}{4}, \qquad x = 9{,}6.$$

Аз муодилаи гипербола қимати у-ро меёбем:

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 16} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{110}.$$

Ҳамин тавр, шарти масъаларо ду нуқта қаноат мекунонанд:

$$M_1\left(9{,}6;\ \frac{3}{5}\sqrt{119}\right) \text{ ва } M_2\left(9{,}6;\ -\frac{3}{5}\sqrt{119}\right).$$

Масъалаи 2.3.10. Экстсентриситети гипербола $\varepsilon = \sqrt{2}$ мебошад. Муодилаи гиперболаеро, ки аз нуқтаи $M(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$ мегузарад, тартиб диҳед.

Ҳал. Маълум аст, ки $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$ ё $c^2 = 2a^2$ мебошад. Аз тарафи дигар,

$c^2 = a^2 + b^2$ мебошад. $2a^2 = a^2 + b^2$ ё $a^2 = b^2$, яъне гипербола баробарпаҳлӯ мебошад. Аз тарафи дигар координатаҳои нуктаи M_1 муодилаи гиперболаро қаноат мекунонанд:

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$$

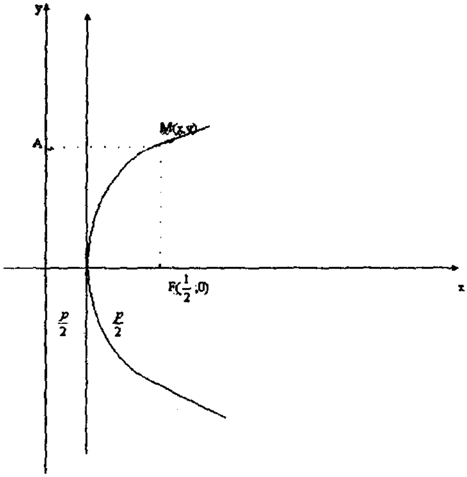
Азбас ки $a = b$ мебошад,

$$\frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1, \qquad 3 - 2 = a^2, \qquad a = 1.$$

Муодилаи гиперболаи матлуб чунин намуд дорад:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

4. Парабола. Парабола гуфта ҷои геометрии нуктаҳои ҳамвориро меномем, ки масофаашон то нуктаи додашудаи фокус F ва хати рости директриса номидашавандаи d бузургии доимӣ мебошад. Фокуси параболаро бо F ишора намуда, масофа аз нуқтаи M то хати рост директриса бо p – ишора мекунем:



Расми 2.3.3

Барои тартиб додани муодилаи парабола (нигаред ба расми 2.3.3) нуқтаи ихтиёрии M(x;y) – ро дар парабола интихоб мекунем. Аз таърифи парабола бармеояд, ки $|FM| = |MA|$ мебошад ё

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + O^2}, \qquad \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Нуқтаи ихтиёрии M(x;y) ҳамон вақт дар парабола мехобад, ки координатаҳои он муодилаи параболаро қаноат кунонанд.

Барои ҳосил намудани муодилаилаи соддаи парабола муодилаи дар боло овардашударо табдилдиҳӣ мекунем:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \qquad x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

аз ин ҷо $y^2=2px$ мешавад ё $y=\pm\sqrt{2px}$.

Ибтидои координата нуқтаи O(0;0) қуллаи парабола номида мешавад, p – параметри парабола мебошад.

Муодилаи директрасаи парабола $x=-\frac{p}{2}$ аст.

Радиус- вектори нуқтаи M (x;y) бо формулаи $r=x+\frac{p}{2}$ ҳисоб карда мешавад.

Масъалаи 2.3.11. Координатаҳои фокус ва муодилаи директрисаи параболаи $y^2=16x$ - ро ёбед. Масофаи аз нуқтаи M(1;4) то фокусро ҳисоб кунед.

Ҳал. Муодилаи $y^2=16x$ –ро бо муодилаи парабола муқоиса намуда ҳосил мекунем:

$$2p=16, \qquad p=8, \qquad \frac{p}{2}=4.$$

Муодилаи директрисаи параболаи матлуб $x=\frac{p}{2}=-4$ мебошад. Масофаи аз нуқтаи M(1;4) то фокусро ҳисоб мекунем

$$r=x+\frac{p}{2}=1+4=5.$$

Масъалаи 2.3.12. Муодилаи параболаи бо тири OX симметриро тартиб диҳед, агар қуллааш дар ибтидои координата хобида, дарозии хордаи ин парабола бо тири OX перпендикуляр ба 16 баробар бошад, масофа аз ин хорда то қулла ба 6 баробар мебошад.

Ҳал. Азбаски дарозии хорда ва масофаи он аз қулла маълум аст, бинобар ин, координатаҳои нуқтаи охири хорда M(x;y), ки дар парабола мехобад, маълум мебошанд. Дар муодилаи парабола $y^2=2px$ қиматҳои $x=6$, y=8 -ро гузошта, ҳосил мекунем $8^2 = 2p\cdot 6,\ 2p = \frac{32}{3}$ ва аз ин ҷо муодилаи

параболаи матлубро меёбем. $y^2 = \frac{32}{3}x$

Масъалаи 2.3.13. Муодилаи параболаи бо тири OX симетрӣ буда, ки аз нуқтаҳои M(5;4), N(15;-6) мегузарад, тартиб диҳед.

Ҳал. Дар ин масъала нуқтаи ҷойгиршавии қуллаи парабола маълум нест, аз ин лиҳоз, дар ин ҳолат муодилаи парабола чунин намуд дорад $y^2 = 2px + c$ с – ягон доимӣ мебошад. Шарти масъаларо бо инобат гирифта, р ва с –ро меёбем. Нуқтаҳои M ва N дар парабола мехобанд, бинобар ин, координатаҳои ин нуқтаҳо муодилаи онро қаноат мекунонанд:

$$4^2 = 2p\cdot 5 + c, \qquad (-6)^2 = 2p\cdot 15 + c.$$

Аз муодилаҳо р ва с – ро меёбем: 16=10p+c, 36=30p+c аз ин ҷо p=1, c=6.

Муодилаи параболаро тартиб медиҳем

$$y^2 = 2x + 6 \quad \text{ё} \quad y^2 = 2(x+3).$$

Масъалаи 2.3.14. Муодилаи ҷои геометрии нуқтаҳои аз нуқтаи F(2;0) ва аз хати рости y=2 дар як хел масофа ҷойгиршуда тартиб диҳед.

Ҳал. Бигзор, M(x;y) нуқтаи ихтиёрии ин бошад, пас $|MF| = |MA|$ ё $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(y-2)^2}$, дар куҷо A(x;2) – нуқтаи бурриши перпендикуляри аз нуқтаи M ба y=2 гузаронидашуда мебошад. Муодилаи ҳосилшударо ба квадрат бардошта ҳосил мекунем:

$$(x-2)^2 + y^2 = (y-2)^2,\ y = x - \frac{1}{4}x^2.$$

Кори мустақилонаи 2.1.1

1. Дар системаи координатаи росткунҷаи декартӣ нуқтаҳои $M_1(0;4)$, $M_2(3;-2)$, $M_3(-1;5)$, $M_4(3;-2)$, $M_5(-4;-3)$ – ро созед.

2. Масоҳати секунҷа бо қуллаҳои додашуда ёфта шаванд:

а) A (1;1), B (4;5), C (13;-4)

б) A (1;1), B (2; 1+$\sqrt{3}$), C (3;1)

3. Қуллаҳои секунҷа дода шудаанд A (5;-1), B (1;7) ва C (1;2). Дарозии биссектрисаи дохилии аз қуллаи A фаровардашударо ёбед.

4. Тарафҳои секунҷа додашудаанд $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ ва $5x-3y-14=0$. Муодилаҳои баландиҳои секунҷа тартиб дода шаванд.

5. Муодилаҳои биссектрисаҳои кунҷҳои байни хатҳои рости $3x+4y-20=0$ ва $8x+6y-5=0$ тартиб дода шаванд.

6. Ду қуллаи ҳамсояи пареллелограм A(-2;6), B(2;8) ва нуқтаи бурриши диогоналҳои он (2,2) дода шудаанд. Ду қуллаи дигар ёфта шаванд.

7. Нуқтаҳои A(4;3), B(0;0), C(-3;-4), Д(6;8), E(3;4) дода шудаанд. Масофаи байни нуқтаҳои

1) AB, 2) AC, 3) AД, 4) BC, 5) BД, 6) ДE ёфта шавад.

8. Координатаҳои нуқтаи миёнаи порча ёфта шавад, агар: 1) $M_1(3;-7)$, $M_2(5;9)$,

2) $M_1(-5;-1)$, $M_2(-3;-1)$, 3) $M_1(2;6)$, $M_2(-8;-12)$, 4) $M_1(4;8)$, $M_2(-4;-10)$, 5) $M_1(1;-4)$, $M_2(-1;4)$ дода шуда бошанд.

9.Бигзор, нуқтаҳои A(6;-10), B(-2 ;4) охирҳои порчаи AB бошанд. Нуқтаеро ёбед, ки ин порчаро ба ду қисми баробар ҷудо кунад.

10.Масоҳати секунҷа бо қуллаҳои зерин ҳисоб карда шавад:

1) A (-2;2), B (6;2), C (4;8)

2) A (-1;5), B (4;8), C (6;2)

3) A (-3;1), B (-2;4), C (3;7).

4) Муодилаи хати рости аз нуқтаи C(4;3) ва ибтидои координата гузарондаро нависед.

Кори мустақилонаи 2.2.1.

1. Кунҷи байни хатхои рост ёфта шавад:

1) $y=\frac{4}{3}x-2$, $y=\frac{1}{7}x+3$, 2) $y=\frac{3}{5}x+1$, y=4x-5, 3) $y=\frac{1}{2}x+6$, $x-2y-6=0$, 4) $y=\frac{4}{7}x-2$, $7x+4y-10=0.$

2. Нишон диҳед, ки кадоме аз ин хатҳо хатҳои ба ҳамдигар параллеланд ё перпендикуляр.

1) $2x-7y+3=0$ 2) $4x-14y+1=0$

3) $7x+2y-5=0$ 4) $3x+5e-2=0$

3. Аз нуқтаи M(-2;5) хати рости ба хати рости $4x-5y+7$ перпендикулярро гузаронед.

4. Дар тири абсиса нуқтаеро ёбед, ки масофааш аз хати рости $8x+15y+10=0$ ба 1 баробар бошад.

5. Дода шудааст қуллаи секунҷа A (3;9) ва муодилаи медианаҳо y-6=0, $3x+4y+9=0$ Координатаҳои ду қуллаҳои дигар ёфта шаванд.

6. Муодилаҳои се тарафи квадрат тартиб дода шаванд, агар маълум бошад, ки тарафи чорумаш порчаи хати рости $4x+3y-12=0$ буда, охирҳояш дар тирҳои координата мехобанд.

7. Масоҳати квадрати дар хатҳои рости параллелӣ сохташударо ёбед:

а) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$

б) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$

8. Муодилаи хати рости аз нуқтаи бурриши хатҳои рости $5x+3y+10=0$, $x+y-15=0$ ва ибтидои координата гузарандаро тартиб диҳед.

9. Дода шудааст хати рости $3x-4y-10=0$. Муодилаи хати рости ба ин параллел ва дар масофаи 3 воҳид ҷойгирбударо ёбед.

Кори мустақилонаи 2.3.1.

1.Координатаҳои марказҳо ва радиусҳои давраҳо муайян карда шаванд:

а) $x^2+y^2-8x+6y=0$

б) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$

в) $x^2+y^2-4x+14y+54=0$

2. Муодилаи давраи аз нуқтаҳои A (7;7) ва B (-2;4) гузарандаро тартиб диҳед, агар маълум бошад, ки марказаш дар хати рости $2x-y-2=0$ мехобад.

3. Таърифи эллипсро истифода намуда, муодилаи онро тартиб диҳед, агар $F_1(0;0)$, $F_2(1;1)$ фокусҳои эллипс бошанд ва дарозии тири калонаш ба 2 баробар бошад.

4. Муодилаи хати рост тартиб дода шавад, агар аз фокуси тарафи чап ва қуллаи поёнии эллипси $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ гузарад.

5. Муодилаи давра тартиб дода шавад, дар ҳолатҳои зерин:

а) Давра аз ибтидои системаи координата гузарад ва марказаш дар нуқтаи B(6;-8) хобад.

б) нуқтаҳои A(3;2) ва B(-1;6) охирҳои як диаметр бошанд.

в) Агар аз нуктаҳои $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$ ва $M_3(5;5)$ гузарад.

6. Муодилаи эллипс тартиб дода шавад, агар фокусҳояш дар тири абстеисса хобанду, нисбат ба тири ox симметрӣ Буда, маълум бошад, қи:

а) Масофаи байни фокусҳо 2c=6 ва L=0,6.

б) Эллипс аз нуқтаҳои $A(2;\sqrt{3})$ ва $B(0,2)$ гузарад.

в) Нимтирҳои ба 5 ва 2 баробар бошанд.

7. Муодилаи гиперболаро тартиб диҳед, агар фокусҳояш дар тири абстсисса хобанду нисбат ба тирҳои координата симметрӣ бошанд ва маълумотҳои зерин дода шудаанд:

а) Тирҳои $2a = 10$, $2b = 8$.

б) Масофаи фокусҳо $2C = 10$ ва тираш $2b = 8$.

Кори мустақилонаи 2.3.2

1. Муодилаи гипербола тартиб дода шавад, агар аз нуқтаи $M(9,8)$ гузараду асимптотаҳояш муодилаи $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$ - ро қаноат кунонанд.

2. Аз нуқтаи $M(0;-1)$ ва қуллаи рости гиперболаи $3x^2 - 4y^2 = 12$ хати рост гузаронида шудааст. Нуқтаи бурриши дуюми хати ростро бо гипербола муайян кунед.

3. Муодилаи гипербола тартиб дода шавад, агар экстсентриситети он ℓ =2 ва фокусҳояш бо фокусҳои эллипси $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ҳамҷоя бошанд.

4. Муодилаи оддитарини парабола тартиб дода шавад, агар фокуси он дар нуқтаи бурриши хати рости $4x - 3y - 4 = 0$ бо тири OX ҷойгир шуда бошад.

5. Дар параболаи $y^2 = 32x$ нуқтаеро ёбед, ки масофааш аз хати рости $4x - 3y + 10 = 0$ ба 2 баробар бошад.

6. Муайян кунед, ки барои кадом қиматҳои m хати рости

$y = \frac{5}{2}x + m$, гиперболаи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ - ро мебурад.

7. Муодилаҳои зеринро ба намуди соддатарин биёред ва расми онҳоро тасвир кунед:

а) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x - 18y - 139 = 0;$

б) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0;$

в) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0;$

г) $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0;$

д) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0;$

е) $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$;

8. Муодилаи хатеро тартиб диҳед, ки масофа аз ҳар нуқтааш то $F(-2;-3)$ баробар аст ба масофаи то хати рости $x=-5$.

Ҷавобҳо

К.М. 2.1.1.

1. а) 31,5, б) $\sqrt{3}$.

2. $d=\frac{14}{3}\sqrt{2}$

3. x-y=0, 5x+3y-26=0. $3x+5y-26=0$

4. 14x+14y-45=0, 2x-2y+35=0

5. C(6;-2), Д(2;-4).

6. 1) 5 , 2)$7\sqrt{2}$, 3) $\sqrt{29}$, 4) 5, 6)15, 7)5.

7. 1) $C_1(4;1)$, 2) $C_2(-4;-1)$, 3) $C_3(-3;-3)$.

8. C(2;-3).

9. 1)24, 2) 18, 3) 6.

10. 3x-4y=0

К.М. 2.2.1.

2. 2) 45^0

3. 7x-4y+34=0

4. $\left(\frac{7}{8};\ 0\right)$ ва $\left(-\frac{27}{8};\ 0\right)$.

5. B (1;3), C (11;6).

6. 3x-4y-9=0, 3x-4y+16=0, 4x+3y-37=0.

7. 6,25;9.

8. 17x+11y=0

9. 3x-4y-25=0, 3x-4y+5=0

К.М. 2.3.1.

1.а) (4;-3), r=5, б) (-5;2), r=0 муодилаи нуқтаро муайян мекунанд в) (2;-7), r^2=-1- муодила маъно надорад.

2. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

3. $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$

4. $4x+3y+12=0$

5. а) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$

б) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$

в) $(x-2)^2+(y-4)^2=25$

6. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{16}\frac{y^2}{4}=1$, в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$,

7. а $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{15}=1$,

К.М.2.3.2.

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{14}=1$, 2. N(-4;-3) 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$,

4. y=4x. 5. M (0;0), N (18;-24). 6. $|m|>4,5$

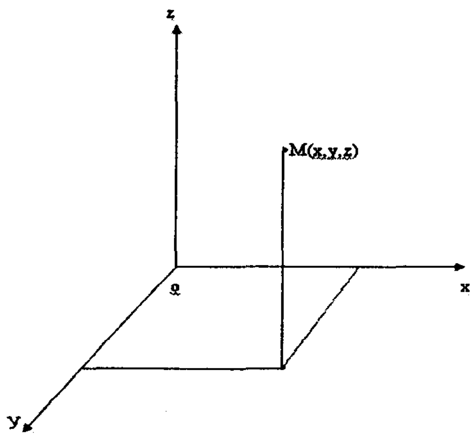
7. а) $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{5}=1$, б) $9x^2-16y^2=5$; в) $x^2-4y^2=0$; г) $2x^2+3y^2=-1$;

д) $x^2+2y^2=0$; е) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. 8. $x=\frac{1}{6}y^2+y-2$

Боби III. Геометрияи аналитики дар фазо

§1. Системаи координатаи росткунҷаи декартӣ дар фазо

1. **Системаи координатаи росткунҷаи декартӣ.** Системаи координатаи росткунҷаи декортӣ дар фазо додашуда номида мешавад, агар се тири ба ҳам перпендикуляр дар як нуқта бурранда бо масштаби муайян рақамгузорӣ шуда, ибтидо ва равиши тирҳо маълум бошанд. Нуқтаи бурриши тирҳо ибтидои системаи координата номида шуда тири якумаш, тири абссиса (ox), тири дуюмаш, тири ордината (oy), тири сеюмаш, тири аппликата (oz) номида мешаванд. Ҳар гуна нуқта дар фазо се координата (x;y;z) дорад. Бигзор, дар фазо нуқтаи M(x;y;z) дода шуда бошад. Аз ин нуқта ба тирҳои координати ox, oy, oz перпендикуляр мефарорем. Асосҳои ин перпендикулярҳоро дар тирҳои координатаи мувофиқан бо M_x, M_y, M_z ишора мекунем. Координатаҳои нуқтаи M дар системаи координатаи дода шуда гуфта ададҳои $x=OM_x$, $y=OM_y$, $z=OM_z$-ро меномем. Нуқтаи M – ро дар фазо бо координатаҳои (x;y;z) чунин ишора мекунем: M(x;y;z). Нуқта дар фазо бо се ченак муайян карда мешавад (нигар ба расми 3.1.1).



Расми 3.1.1

Бигзор, нуқтаҳои $M_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $M_2(x_2;y_2;z_2)$ дода шуда бошанд, он гоҳ масофаи байни онҳо бо формулаи

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

муайян карда мешавад. Ин формула айнан ба монанди формулаи масофаи байни ду нуқта дар ҳамворӣ ҳосил карда мешавад.

Дар ҳолати хусусӣ масофа аз ибтидои координата то нуқтаи $M(x,y,z)$ бо формулаи

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

муайян карда мешавад.

Агар порчаи байни нуқтаҳои $M_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $M_2(x_2;y_2;z_2)$ бо нуқтаи $M(x;y;z)$ бо нисбати маълум ҷудо карда шуда бошад, пас координатаҳои нуқтаи M аз формулаҳои

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

муайян карда мешаванд.

Мисоли 3.1.1. Масофаи байни нуқтаҳои M(4; -3; 5) ва N (6; -2; 3) - ро ёбед.

Ҳал. Аз формулаи масофаи байни ду нуқта дар фазо истифода карда, ҳосил менамоем:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(-2+3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3.$$

Мисол 3.1.2. Нуқтаҳои $M_1(2; 4;-2)$ ва $M_2(-2; 4; 2)$ дода шудаанд. Дар порчаи M_1M_2 координатаҳои нуқтаи M-ро ёбед, ки ин порчаро ба нисбати $\lambda=3$ тақсим намояд.

Ҳал. Барои ҳалли ин мисол формулаи тақсими порча ба нисбати додашударо истифода мекунем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 3 \cdot (-2)}{1 + 3} = \frac{2 - 6}{4} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + 3 \cdot 4}{1 + 3} = \frac{4 + 12}{4} = \frac{16}{4} = 4,$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 3 \cdot 2}{1 + 3} = \frac{-2 + 6}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Аз ин ҷо нуқтаи M(x;y;z)= M(-1;4; 1) мебошад.

Мисоли 3.1.3. Дар тири OX нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои A(2; -4; 5) ва B(-3; 2; 7) дар якхел масофа ҷойгир шуда бошад.

Ҳал. Бигзор, M – нуқтаи матлуб бошад. Мувофиқи шарти масъала AM=MB. Азбаски ин нуқта дар тири OX меҳобад, бинобар ин, координатаҳои он (x;0;0) мебошанд. Аз формулаи масофаи байни ду нуқта дар фазо истифода мебарем:

$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2}, \qquad MB = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2 + 7^2},$$

Аз ин ҷо пас аз ба квадрат бардоштан ҳосил мекунем:

$$(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53, \qquad x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 + 6x + 9 + 53,$$

$$-4x + 45 = 6x + 62 \qquad 10x = 45 - 62, \qquad 10x = -17, \qquad x = -1{,}7.$$

Ҳамин тавр нуқтаи матлуб M(-1,7;0; 0) мебошад.

Мисоли 3.1.4. Секунҷа ба қуллаҳои A (1; 1; 1), B(5; 1; -2), C(7; 9; 1) дода шудааст. Координатаҳои нуқтаи Д бурриши биссектрисаи кунҷи A бо тарафи CB ёфта шавад.

Ҳал. Дарозии тарафҳои секунҷаро меёбем.

$$AC = \sqrt{(7-1) + (9-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2 + 0^0} = \sqrt{100} = 10,$$

$$AB = \sqrt{(5-1) + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем $\frac{AC}{AB} = \frac{10}{5} = 2.$

Акнун аз формулаи тақсими порча ба нисбати маълум $\lambda = 2$ истифода мебарем:

$$x_Д = \frac{x_c + \lambda x_b}{1+\lambda} = \frac{7+2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},$$

$$y_Д = \frac{y_c + \lambda y_b}{1+\lambda} = \frac{9+21}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_Д = \frac{z_c + \lambda z_b}{1+\lambda} = \frac{1+2(-2)}{1+2} = -1$$

Ҳамин тавр, координатаҳои нуқтаи Д-ро муайян кардем $Д\left(\frac{17}{3}; \frac{11}{3}; -1\right)$

§2. Элементҳои алгебраи векторӣ

1.Бузургиҳои скалярӣ ва векторӣ. Вектор гуфта порчаи равишдорро меноманд. Вектор бо ду ҳарф $\vec{AB}$ ё бо як ҳарф $\vec{a}$ ишора карда мешавад. Аввали вектор гуфта нуқтаеро меномем, ки аз он вектор ибтидо мегирад. Вектореро, ки аввал ва охири он ҳамҷоя мебошанд, вектори сифрӣ меномем. Векторҳое, ки дар як хати рост ё дар хатҳои рости параллелӣ мехобанд, векторҳои коллинеарӣ номида мешаванд, ин векторҳо баробар мебошанд.

Дарозии вектор гуфта қимати мутлақи онро меномем ва ишора мекунем $|\vec{a}|$.

Агар $|\vec{a}| = 1$ бошад, он гоҳ ин гуна векторро, вектори воҳидӣ меноманд. Вектори воҳидие, ки бо вектори додашуда равиши якхела дорад, орти вай номида мешавад. Бигзор, ягон тири $\vec{l}$ ва вектори $\vec{AB}$ дода шуда бошанд.

Проексияи вектори $\vec{AB}$ дар тири $\vec{l}$ гуфта ададеро меномем, ки ба бузургии дарозии порчаи $A'B'$ -и, тири $\vec{l}$ баробар аст, ки дар ин ҷо A', B' мувофиқан сояҳои нуқтаҳои А ва В дар тири $\vec{l}$ бо қимати мутлақ ва кунҷи моили он муайян карда мешавад. Сояи вектори ихтиёрии $\vec{a}$ дар системаи координатаи додашудаи фазои бо a_x, a_y, a_z, ишора карда мешавад, яъне $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z,\}$ чунин маъно дорад, ки a_x, a_y, a_z -мувофиқан сояҳои вектори $\vec{a}$ дар тири ox, oy, oz мебошанд. Бигзор, аввали вектори $\vec{a}$ дар ибтидои системаи координата ва охираш дар нуқтаи M хобад, вектори $\vec{OM}=\vec{a}$ - ро радиус вектори нуқтаи M меноманд ва бо $\vec{r}$ ишора карда мешавад.

Дарозии вектори $\vec{a}$ бо формулаи

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \quad \text{ё} \quad \left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

муайян карда мешавад.

Агар аввал ва охири вектори $\vec{AB}$ дар нутаи $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ хобанд, пас дарозии он ҳамчун масофаи байни ду нуқта бо формулаи

$$d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

муайян карда мешавад.

Агар вектори $\vec{a}$ бо тирҳои координат ox, oy, oz мувофиқан кунҷҳои α,β,γ-ро ташкил кунад, он гоҳ ҳосил мекунем

$$x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha, \quad y=\left|\vec{a}\right|\cos\beta, \quad z=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma,$$

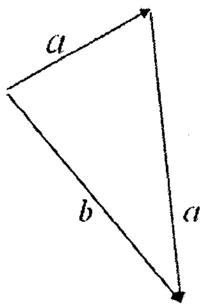
ки дар ин ҷо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, косинусҳои равишдиҳандаи вектори $\vec{a}$ мебошанд. Аз ин ҷо ҳосил мекунем

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

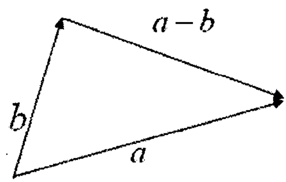
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Амалҳо бо векторҳо. Бигзор, векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ дода шуда бошанд.

а) Суммаи ду вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ гуфта вектори $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$-ро меномем, ки аз авали вектори $\vec{a}$ ба охири вектор $\vec{b}$ равона шудааст ё ки аввали вектори $\vec{c}$ дар охири вектори $\vec{a}$ гузошта шудааст (нигар ба расми 3.2.1):

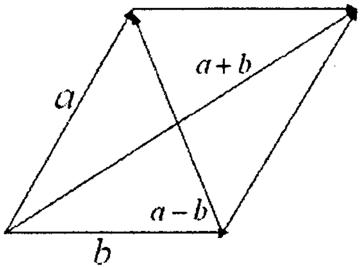


Расми 3.2.1.



Расми 3.2.2.

б) Фарқи ду вектори $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ гуфта вектори $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$-ро меномем, ки суммаи он бо вектори $\vec{b}$ вектори $\vec{a}$ - ро медиҳад. Агар ҳар ду вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ аз як нуқта ибтидо гиранд, он гоҳ фарқи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ - векторе мебошад, ки аз охири $\vec{b}$ ба охири $\vec{a}$ равона шудааст (нигар ба расми 3.2.2): Дар намуди умуми ҷамъ ва тарҳи ду векторро бо расми 3.2.3 ифода карда мешавад.



Расми 3.2.3.

в) Зарби вектори $\vec{a}$ ба адади доимии λ вектори $\lambda \cdot \vec{a}$ мебошад, ки бо вектори $\vec{a}$ коллинеарӣ буда, дарозии $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$-ро дорад. Он равиши вектори $\vec{a}$ -ро дорад ҳангоми $\lambda > 0$ будан, равиши ба $\vec{a}$ муқобил дорад, агар $\lambda < 0$ бошад.

е) Зарби скаляри ду вектори $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ гуфта ададеро меномем, ки ба ҳосили зарби дарозии ин векторҳо ва косинуси кунҷи байни онҳо баробар мебошад, яъне

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi .$$

Зарби скаляри векторҳо дорои чунин хосиятҳо мебошад:

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right), \qquad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\lambda a; b) = (a; \lambda b) = \lambda(a; b)$$

Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ перпендикуляр бошанд, он гоҳ ҳосили зарби скалярии онҳо ба сифр баробар мебошад. Тасдиқоти баракс ҳам ҷой дорад, агар ҳосили зарби скаляри векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ба сифр баробар бошад пас онҳо перпендикуляр мебошанд. Дилхоҳ вектори $\vec{a}$ - ро чунин навиштан мумкин аст: $\vec{e}\,\vec{a}$, ки дар ин ҷо $\vec{e}$-вектори воҳидӣ мебошад. Вектори $\vec{e}$ воҳидӣ номида мешавад, агар дарозиаш ба як баробар бошад, яъне $|\vec{e}| = 1$ аст.

Агар вектори $\vec{a}$ дар системаи координатаи фазоӣ дода шуда бошад, он гоҳ ин векторро бо чунин намуд навиштан мумкин аст:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{ё} \quad \vec{a} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right) = \left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right) = \left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right) = 0, \quad \left(\vec{i}\,\vec{i}\right) = \left(\vec{j}\,\vec{j}\right) = \left(\vec{k}\,\vec{k}\right) = 1.$$

Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ бо координатаҳои худ дода шуда бошанд:

$$\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}\,a_y + \vec{k}\,a_z \quad \text{ва} \quad \vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}\,b_y + \vec{k}\,b_z.$$

Он гоҳ зарби скалярии онҳо чунин ҳисоб карда мешавад:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right) = \left(\vec{i}\,a_x + \vec{j}\,a_y + \vec{k}\,a_z\right)\left(\vec{i}b_x + \vec{j}\,b_y + \vec{k}\,b_z\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Аз ин ҷо шарти зарурӣ ва кифоягии перпендикуляри ду векторро ҳосил мекунем: $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$

Бигзор, ду вектор $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ва $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ дода шуда бошанд, он гоҳ кунҷи байни ин векторҳо бо формулаи

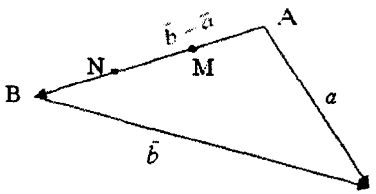
$$Cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

муайян карда мешавад.

Мисоли 3.2.1. Дар секунҷаи ABC тарафи AB бо ёрии нуктаҳои M ва N ба се қисми баробар ҷудо карда шудааст: AM=MN=NB. Вектори $\vec{CM}$ ёфта шавад, агар $\vec{CA}=\vec{a}$, $\vec{CB}=\vec{b}$ бошанд.

Ҳал. Ҳосил мекунем: $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$. Аз ин ҷо $\vec{AM}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}$ мешавад. Азбаски $\vec{CM}=\vec{CA}+\vec{AM}$ аст, пас

$$\vec{CM}=\vec{a}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$ мешавад. (нигар ба расми 3.2.4):



Расми 3.2.4.

Мисоли 3.2.2. Дарозӣ ва косинусҳои равишдиҳандаи вектори

$$\vec{a}=20\vec{i}+30\vec{j}-60\vec{k}$$ - ро ёбед.

Ҳал. Аз формулаи дарозии вектор истифода мекунем:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{20^2+30^2+60^2}=\sqrt{400+900+3600}=$$
$$=\sqrt{4900}=70,$$

$$Cos\alpha=\frac{20}{70}=\frac{2}{7},\qquad Cos\beta=\frac{30}{70}=\frac{3}{7},\qquad Cos\gamma=\frac{-60}{70}=-\frac{6}{7}.$$

Мисоли 3.2.3. Вектори $\vec{a}=\vec{AB}$ ёфта шавад, агар A (1;3;2) ва B (5;8;-1) бошанд.

Ҳал. Сояҳои вектори $\vec{a}$ -ро дар тирҳои координата меёбем:

$$a_x = 5-1=4, \qquad a_y = 8-3=5, \qquad a_z = -1-2=-3$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки вектори $\vec{a}$ чунин мешавад:

$$\vec{a} = 4i + 5i - 3k.$$

Мисоли 3.2.4. Векторҳои $\vec{a}=(1;-2;1)$ $\vec{b}$=(2;-1;3), $\vec{c}$=(1;-2;1)дода шудаанд.Вектори $\vec{d}$=(12; -9; 11) – ро ба векторҳои $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$ ҷудо намоед.

Ҳал. Бигзор, $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ бошад, α,β,γ - ададҳои доимӣ, коэффисиентҳо мебошанд. Азбаски векторҳои баробар координатаҳои баробарро доранд, аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \alpha+2\beta+\gamma=12 \\ \alpha-\beta-2\gamma=-9 \\ -\alpha+3\beta+\gamma=11. \end{cases}$$

Системаи се муодилаи се номаълумаро ҳосил намудем. Системаро ҳал мекунем

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-1+3+4-1+6-2=9,$$

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ -9 & -1 & -2 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12-27-44+11+72+18=18,$$

$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 1 & -9 & -2 \\ -1 & 11 & 1 \end{vmatrix}=-9+11+24-9+22-12=27,$$

$$\Delta_\gamma=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & -9 \\ -1 & 3 & 11 \end{vmatrix}=-11+36+18+12+27-22=36.$$

Ҳамин тавр, $\alpha=\frac{18}{9}=2$, $\beta=\frac{27}{9}=3$, $\gamma=\frac{36}{9}=4$ мебошанд. Акнун вектори $\vec{d}$ - ро меёбем: $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$.

Мисоли 3.2.5. Зарби скалярии векторҳои $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}$ ва $\vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$ -ро ёбед.

Ҳал. Аз формулаи зарби скалярии ду вектор меёбем

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left(3\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}\right)\left(\left(2\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}\right)\right)=3\cdot2-4\cdot5+7\cdot2=6-20+14=0$$

Азбаски $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=0$ аст, бинобар ин, векторҳо перпендикуляр мебошанд.

Мисоли 3.2.6. Вектори воҳидиеро ёбед, ки равиши вектори $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ - ро дошта бошад.

Ҳал. Дарозии вектори $\vec{a}$-ро меёбем:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3.$$

Азбаски $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$ аст, аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\vec{e}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}.$$

д) Зарби векторӣ. Зарби вектории векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ гуфта вектори $\vec{c}$ - ро меномем, ки бо се шарти зерин муайян карда мешавад:

1) $\left|\vec{c}\right|=\left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$,

2) вектори $\vec{c}$ ба ҳаряки векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ перпендикуляр мебошад:

$$\left(\vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}\right).$$

3) самти вектори $\vec{c}$ нисбат ба самти векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ бошад, чун самти $\vec{c}$, тири oz нисбат ба тирҳои ох ва оу мебошад.

Хосиятҳои зарби векторӣ:

1) $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\vec{a}\right]$,

2) $\left[\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right] = \left[\vec{a}\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\vec{c}\right]$,

3) $\left[\vec{a}\lambda\vec{b}\right] = \left[\lambda\,\vec{a}\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}\vec{b}\right]$

Қимати мутлақи зарби векторӣ одатан ба масоҳати параллелограми дар заминаи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ сохташуда баробар аст. Зарби вектории ду векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ҳамон вақт ба сифр баробар мешавад, ки агар ин векторҳо коллинеарӣ бошанд, дар холати хусусӣ $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=0$ мебошад.

Барои зарби вектириро ба намуди координатӣ ифода намудан, ҳар ду векторро зарб мезанем ва $\left[\vec{i}\,\vec{i}\right] = \left[\vec{j}\,\vec{j}\right] = \left[\vec{k}\,\vec{k}\right] = 0$.

$$\left[\vec{i}\vec{j}\right] = -\left[\vec{j}\vec{i}\right] = \vec{k}, \qquad \left[\vec{i}\vec{k}\right] = -\left[\vec{k}\vec{i}\right] = \vec{j}, \qquad \left[\vec{j}\vec{k}\right] = -\left[\vec{k}\vec{j}\right] = \vec{i}$$ -ро

ба инобат мегирем.

Бигзор, векторҳои $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ва $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ дода шуда бошанд, он гоҳ

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\left(\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\left(\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)\right] =$$

$$= i\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

е) Зарби омехтаи се векторҳо. Зарби омехтаи се векторҳои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ гуфта ададеро меномем, ки ба ҳосили зарби вектории $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ ва зарби скаляри $\vec{c}$ баробар аст, яъне

$$\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right).$$

Агар векторҳои $\vec{a}, \vec{b}$ ва $\vec{c}$ ба намуди координати дода шуда бошанд, он гоҳ зарби омехта чунин навишта мешавад.

$$\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_y \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Айнияти зерин ҷой дорад:

$$\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \left(\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right) = \left(\left[\vec{c}\vec{a}\right]\vec{b}\right) = \vec{b}\left(\left[\vec{c}\,\vec{a}\right]\right) = \left(\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\vec{a}\right).$$

Зарби омехта ададан ба ҳаҷми параллелопипеди дар заминаи векторҳои $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ сохташуда баробар аст. Агар векторҳои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компленарӣ бошанд, яъне дар як ҳамворӣ ё дар ҳамвориҳои параллелӣ хобанд, он гоҳ зарби омехтаи онҳо ба сифр баробар аст ва баракс, агар зарби омехтаи векторҳои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ба сифр баробар бошад пас онҳо компленарӣ мебошанд.

Мафҳуми векторҳоро дар фазои бисёрченака ҳам паҳн намудан мумкин аст. Дар ин ҳолат миқдорӣ координатаҳои векторҳо ба шумораи ченаки фазои бисёрченака баробар мешаванд.

Системаи векторҳо хаттӣ вобаста номида мешаванд, агар чунин ададҳои $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\ldots\lambda_n$ аз сифр фарққунанда мавҷуд бошанд, ки

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} + \ldots\ldots + \lambda_n \vec{a_n} = 0, \qquad \text{мешавад.}$$

Дар ҳолати муқобил векторҳои $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots\ldots \vec{a}_n$ хати новобаста номида мешаванд.

Мисоли 3.2.7. Нурие $\vec{a} = (3; -1; -2)$ ва $\vec{b} = (1;\ 2; -1)$ дода шудаанд. Ёфта шавад $[\vec{a}\vec{b}]$, $[(2\vec{a}+\vec{b})\vec{b}]$

Ҳал.

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1+4)\vec{i} - (2-3)\vec{j} + (1+6)\vec{k} = 5\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k};$$

$$[(2\vec{a}+\vec{b})\vec{b}] = 2[\vec{a}\vec{b}] = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 14\vec{k};$$

Мисоли 3.2.8. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ва

$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. - ро ёбед

Ҳал. Маълум аст, ки

$$Cos\varphi = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\cdot6+2\cdot4+3\cdot2}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{36+16+4}} = \frac{5}{7}$$

мебошад. Аз ин ҷо $\phi = \arccos \frac{5}{7}$.

Мисоли 3.2.9. Зарби вектории векторҳои $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ ва $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ - ро ёбед.

Ҳал. Аз формулаи зарби вектории ду вектор истифода намуда $[\vec{a}\vec{b}]$ - ро меёбем:

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3\vec{i}-4\vec{k}+5\vec{j}-3\vec{k}+10\vec{i}-2\vec{j}=13\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}.$$

Мисоли 3.2.10. Масоҳати параллелограми дар заминаи векторҳои $\vec{a}=6\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$ ва $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ сохташударо ёбед.

Ҳал. Зарби вектoриро меёбем:

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}=-18\vec{i}-12\vec{k}-6\vec{j}+9\vec{k}-4\vec{i}-36\vec{j}=22\vec{i}-42\vec{j}-3\vec{k}.$$

$$\left|22\vec{i}-42\vec{j}+-3\vec{k}\right|=\sqrt{22^2+(-42)^2+(-3)^2}=\sqrt{484+1764+9}=\sqrt{2257},$$

$$\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|=\sqrt{2257}.$$

Мисоли 3.2.11. Зарби омехтаи вектрҳои $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ ва $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$ - ро ёбед.

Ҳал. Зарби омехтаи ин се векторҳоро меёбем

$$\left([\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(12+1)-4+1-2=26-5=21.$$

Мисоли 3.2.12. Нишон диҳед, ки векторҳои $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$ ва $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ компленарӣ мебошанд.

Ҳал. Зарби омехтаи ҳар се векторро ҳисоб мекунем:

$$\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(1+2)+5(1+1)+7(2-1)=6+10=16.$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки векторҳои компленарӣ мебошанд.

§ 3. Муодилаи ҳамворӣ

1. Муодилаи умумии ҳамворӣ. Бигзор, дар системаи координатаи росткунҷаи декартӣ ягон ҳамворӣ дода шуда бошад. Дар ин ҳамворӣ нуқтаи ихтиёрии $M_0(x_0;y_0;z_0)$- ро интихоб мекунем ва ягон вектори аз сифр фарқкунандаи перпендикулярро ба ин ҳамвори мегирем ($\vec{n}$=(A; B; C)). Нуқтаи $M(x;y;z)$ дар ин ҳамворӣ мехобад ва векторҳои $\vec{n}$=(A; B; C), $\overrightarrow{M_0M}$=($x-x_0$; $y-y_0$; $z-z_0$), байни худ перпендикуляр мебошанд, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$\left(\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right)=0 \qquad \text{ё} \qquad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

ин аст муодилаи ҳамвории аз нуктаи $M_0(x_0;y_0;z_0)$ гузаранда ва ба вектори $\vec{n}$ перпендикуляр. Қавсҳои баробарии охиронро кушода, ҳосил мекунем:

Ax+By+Cz+Д=0, ки дар ин ҷо

Д=-Ax_0By-Cz_0 – мебошад.

Ҳолатҳои хусусиро дида мебароем

1) Д=0, Ax+By+Cz=0 – ҳамворӣ аз ибтидои координата мегузарад;

2) А=0, By+Cz+Д=0 – ҳамворӣ ба тири ОХ параллел мебошад;

3) B=0, Ax+Cz+Д – ҳамворӣ бо тири oy параллел мебошад;

4) C=0, Ax+By+Д=0 – ҳамворӣ бо тири oz параллел мебошад;

5) A=B=0, ҳамворӣ бо тири oz перпендикуляр мебошад;

6) A=C=0, ҳамворӣ бо тири oy перпендикуляр мебошад;

7) B =C=O, ҳамворӣ бо тири ox перпендикуляр мебошад;

8) A=Д=0, ҳамворӣ аз тири ox мегузарад;

9) B=Д=о, ҳамворӣ аз тири oy мегузарад;

10) C=Д=0, ҳамворӣ аз тири oz мегузарад;

11) A=B=Д=0, ҳамворӣ бо ҳамвории xoy ҳамҷоя мешавад;

12) A=C=Д=0, ҳамворӣ бо ҳамвории xoz ҳамҷоя мешавад;

13. B=C=Д, ҳамворӣ бо yoz ҳамҷоя мешавад.

Агар дар муодилаи умумӣ ҳамвории $Д \neq 0$ бошад, он гоҳ вайро ба –Д тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

дар ин ҷо $a=\frac{Д}{A}$, $b=\frac{Д}{B}$, $c=\frac{Д}{C}$, ин муодилаи ҳамвори дар порчаҳо номида мешавад.

2.Мавқеи ҷойгиршавии ду ҳамворӣ. Бигзор, ду ҳамворӣ дода шуда бошанд

$$A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0 \quad \text{ва} \quad A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0.$$

1)Агар ҳамвориҳо параллел бошанд, он гоҳ векторҳои $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ ва $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ колениариянд. Шарти параллели ду ҳамворӣ чунин аст:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

2. Агар ҳамвориҳо перпендикуляр бошанд, он гоҳ векторҳои нормалии $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ пепендикуляранд, аз ин ҷо шарти перпендикулярии ин ду ҳамвори чунин аст.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Аз таърифи зарби скалярии ду векторҳои $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ истифода бурда, кунҷи байни ду ҳамвориро муайян мекунем:

$$Cos\varphi = \frac{\left(\vec{n}_1\ \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

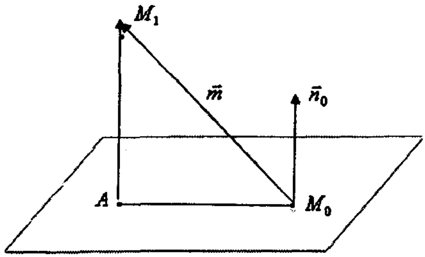
3. **Муодилаи нормалии ҳамворӣ.** Азбаски ба сифати вектори нормалии $\vec{n}(A;B;C)$, дилхоҳ вектори аз сифр фарққунандаи ба ҳамворӣ перпендикулярро гирифтан мумкин аст, бинобар ин, векторҳои воҳидиро гирифта

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{i} + c\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

муодилаи нормалии ҳавориро ҳосил мекунем:

$$\frac{Ax + By + Cz + Д}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \qquad Д = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \ .$$

Ин муодила барои ёфтани масофаи аз нуқта то ҳамворӣ қуллай мебошад. Дар ҳақиқат, бигзор, нуқтаи $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ дода шуда бошад. Масофаи аз ин нуқта то ҳамвориро ҳисоб кардан лозим аст, ё худ $|AM|$ (ниг ба расми 3.3.1):



Расми 3.3.1.

$$\vec{m} = \overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - x_0;\ \ y_1 - y_0;\ \ z - z_0),$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + K\vec{c}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \left(\vec{m}\,\vec{n}_0\right) = \left|\vec{n}_0\right| \cdot np_{\vec{n}_0}\vec{m}\cdot$$

масофаи аз нуқтаи $M_1(x_1;y_1;z_1)$ то ҳамвории $Ax + By + Cz + Д = 0$ бо формулаи

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Д|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

муайян карда мешавад.

Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи $M_0(x_0;y_0;z_0)$ гузаранда ва ба вектори

$$N = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

перпендикуляр чунин аст:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Барои λ ихтиёрӣ муодилаи ҳамвории аз хати рост гузаранда чунин намуд дорад:

$$A_1x + B_1y + C_1z + Д_1 + \lambda\ (A_2x + B_2y + C_2z + Д_2) = 0,$$

ки ҳангоми бурруши ду ҳамворӣ ин хати рост ҳосил мешавад ва бо ҷуфти муодилаҳои

$$A_1x + B_1y + C_1z + Д_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + Д_2 = 0,$$

муайян карда мешавад.

Муодилаи ҳамвории аз ду нуқта гузаранда ба шакли координати чунин намуд дорад:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

ки дар ин ҷо A,B,C- коэффисиентҳо муодилаи ҳамвории перпендикуляр Ax+By+Cz+Д=0 мебошанд.

Акнун муодилаи ҳамвории аз нуқтаҳои $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ гузарандаро дар шакли координатӣ менависем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_2 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

Масъалаи 3.3.1. Масофа аз нуқтаи $M_0(3;5;-8)$ то ҳамвории $6x - 3y + 2z - 28 = 0$ -ро ёбед.

Ҳал. Масофа аз нуқта $M_0(3;5;-8)$ то ҳамвории истифодакардаро меёбем:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + Д}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|6 \cdot 3 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 - 28|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{41}{7}.$$

Мисоли 3.3.2. Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи $M(2;3;-1)$ гузаранда ва ба ҳамвории $5x-3y+2z-10=0$ параллелро ёбед.

Ҳал. Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи $M(2\ ;\ 3;\ -1)$ гузарандаро менависем

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0.$$

Барои он ки ин ҳамворӣ ба ҳамвории додашуда параллел бошад, бояд шарти $\frac{A}{5}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{2}$ иҷро шавад. Аз ин ҷо $A=5t$, $B=-3t$, $C=2t$, муодилаи ҷусташаванда чунин намуд мегирад:

$$5t(x-2)-3t(y-3)+2t(z+1)=0.$$

Муодилаи ҳосилшударо содда намуда, t-ро ихтисор мекунем

$$5x-3y+2z+1=0.$$

Мисоли 3.3.3. Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи M(2;-1;5) гузаранда ва ба ҳамвориҳои $5x-3y+z+7=0$ ва $5x-4y+3z+1=0$ перпендикулярро тартиб диҳед.

Ҳал. Муодилаи ҳамвории матлубро ба чунин намуд менависем:

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-5)=0.$$

Азбаски ин ҳаморӣ ба ҳамвориҳои додашуда перпендикуляр мебошад бинобар ин, шартҳои

$$5A-3B+C=0,$$

$$5A-4B+3C=0.$$

иҷро мешаванд.

Аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} A(x-2)+B(y+1)+C(z-5)=0, \\ 5A-3B+C=0, \\ 5A-4B+3C=0. \end{cases}$$

коэффисиентҳои A; B; C – ро ихтисор намуда, ҳосил мекунем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ё} \qquad 5x+12y+11z-53=0$$

Мисоли 3.3.4. Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи $A(5;4;3)$ гузаранда ва дар тирҳои координат порчаҳои баробар буррандаро тартиб диҳед.

Ҳал. Маълум аст, ки $a=b=c$ аст. Муодилаи хати рост дар порчаҳоро истифода намуда ҳосил мекунем:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Координатаҳои нуқтаи A муодилаи ҳамвориро қаноат мекунанд, яъне $\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$. аз ин ҷо $a=12$

Дар муодила қимати $a=12$ - ро гузошта пас аз содда намудан ҳосил мекунем:

$$x-y+z-12=0.$$

Мисоли 3.3.5. Кунҷи байни ду ҳамвориҳои $5x+4y-2z-3=0$ ва $20x+16y-8z+5=0$ – ро ёбед.

Ҳал. Аз формулаи кунҷи байни ду ҳамворӣ истифода мебарем:

$$Cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{5\cdot 20+4\cdot 16+2\cdot 8}{\sqrt{5^2+4^2+2^2}\sqrt{20^2+16^2+8^2}}=$$

$$=\frac{100+64+16}{\sqrt{25+16+4}\sqrt{400+256+64}}=\frac{180}{\sqrt{45\cdot 720}}=\frac{180}{\sqrt{32400}}=\frac{180}{180}=1,$$

$$Cos\varphi=1, \qquad \varphi=\arccos 1=0.$$

Мисоли 3.3.6. Муодилаи ҳамвории аз се нуктаҳои $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$ гузарандаро тартиб диҳед.

Ҳал. Дар асоси формулаи муодилаи ҳамвории аз се нуқта гузаранда ҳосил мекунем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ё} \qquad 15x+10y-6z-60=0$$

§ 4. Хати рост дар фазо

1.**Муодилаи хати рост**. Бигзор, ягон хати рост дар фазо дода шуда бошад. Ҳар гуна вектори ғайрисифрӣ, ки дар ин хати рост мехобад ё ба вай параллел аст, вектори равишдиҳандаи хати рост мебошад. Ин векторро бо ҳарфи $\vec{a}$ ишора мекунем, координатаҳои он $(\ell; m; n)$ мебошад.

Фарз мекунем, ки ин хати рост аз нуқтаи $M_0(x_0;y_0;z_0)$ мегузарад ва дорои вектори равишдиҳандаи $\vec{a}$ (ℓ, m, n) мебошад. Он гоҳ нуқтаи ҷории $M(x;y;z)$ дар ҳамин хати рост мехобад, агар вектори $\vec{M_0M_1} = (x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z - z_0)$ бо вектори $\vec{a}$ (ℓ, m, n) коллинеарӣ бошад. Аз ин ҷо координатаҳои вектории $\overrightarrow{M_0M}$ бо координатаҳои вектории $\vec{a}$ мутаносиб мебошанд:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Ин аст муодилаи хати рости аз нуқтаи M_0 гузаранда ва дорои вектори равишдиҳандаи $\vec{a}$. Ин муодилаи кононикии хати рост мебошад.

2.Муодилаи параметрӣ ва аз ду нуқта гузарандаи хати рост. Муодилаи каноникии (оддитарин) хати ростро чунин ишора мекунем:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$x=x_0+lt, \qquad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt$$

Ин муодилаи параметрии хати рост номида мешавад. Дар ин ҷо t параметр мебошад, ки соҳаи тағирёбиаш тамоми тири ҳақиқӣ $-\infty<t<\infty$ аст.

Бигзор ду нуқтаҳои $M_1(x_1; y_1; z_1)$, ва $M_2(x_2; y_2; z_2)$ дода шуда бошанд. Ба сифати вектори равшандиҳандаи ин хати рост вектори $\vec{a}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$,- ро мегирем.Он гоҳ аз муодилаи каноникии хати рост ҳосил мекунем:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Ин аст муодилаи хати рости аз ду нуқтаи додашуда гузаранда.

3.Хати рост ҳамчун бурриши ду ҳамворӣ. Хати ростро дар фазо ҳамчун хати бурриши ду ҳамворӣ дида баромадан мумкин аст.Ҳар гуна ду ҳамвории ғайри параллелӣ бо муодилаи умумӣ

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+Д_2=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0, \end{cases}$$

дар бурриш хати ростро медиҳанд.

4.Мавқеи хати рост ва ҳамворӣ дар фазо. Бигзор, ду хати рост дар фазо дода шуда бошанд:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{ва} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Он гоҳ кунҷи байни ин хатҳои рост бо векторҳои равишдиҳандаи $\vec{a_1}=(l_1;m_1;n_1)$ ва $\vec{a_2}=(l_2;\ m_2;\ n_2)$ чунин муайян карда мешавад $\left(\vec{a_1}\,\vec{a_2}\right)=\left|\vec{a_1}\right|\left|\vec{a_2}\right|\cos\varphi$ аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$Cos\varphi=\frac{\left(\vec{a_1}\,\vec{a_2}\right)}{\left|\vec{a_1}\right|\left|\vec{a_2}\right|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\,2}+m_1^{\,2}+n_1^{\,2}}\ \sqrt{l_2^{\,2}+m_2^{\,2}+n_2^{\,2}}}.$$

Шарти параллелии ду хати рост чунин мебошад:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Шарти перпендикулярии ду хати рост чунин аст:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Бигзор муодилаи умумии ҳамворӣ $Ax+By+Cz+Д=0$ ва муодилаи каноникии хати рост $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ дода шуда бошанд. Хати рост бо ҳамворӣ ҳамон вақт параллел мешавад, ки агар вектори равишдиҳандаи $\vec{a_1}=(l;m;n)$ бо вектори нормалӣ $\vec{n}$=(A;B;C) ҳамворӣ перпендикуляр бошад. Он гоҳ шарти параллели хати рост бо ҳамворӣ чунин намуд дорад:

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Хати рост бо ҳамворӣ ҳамон вақт перпендикуляр мебошад, ки агар вектори равишдиҳандааш $\vec{a}$ ба вектори нормалии $\vec{n}$-и ҳамворӣ коллениарӣ бошад, яъне

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ бо формулаи

$$\sin\varphi = \frac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

майян карда мешавад.

Мисоли 3.4.1. Муодилаи хати рости $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{array}\right\}$ ба намуди каноники (соддатарин) оварда шавад.

Ҳал. Аз ин муодилаҳо аввал y, пас z-ро хориҷ намуда, ҳосил мекунем:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-4y+12z-4=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow 13x+11z-11=0;$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 15x+12y-3z-27=0 \end{cases} \Rightarrow 17x+11y-22=0;$$

акнун аз системаи ҳосилшуда x – ро меёбем:

$$\begin{cases} 13x+11z-11=0 \\ 17x+11y-22=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x=11-11z \\ 17x=22-11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11(z-1)}{-13} \\ x=\dfrac{11(y-2)}{-17} \end{cases}.$$

Муодилаи каноникии хати рости додашуда чунин мебошад:

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Мисоли 3.4.2. Муодилаи каноникии хати рости $x-2y+3z-4=0$, $3x+2y-5z-4=0$-ро тартиб диҳед.

Ҳал. Шарт мекунем, ки $z_0=0$, аз ин ҷо ҳосил мекунем $x-2y-4=0$ ва $3x+2y-4=0$. Ин системаро ҳал намуда x_0,y_0 –ро муайян мекунем, яъне

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow 4x=8, \qquad x_0=2,$$

$$2y=x-4=2-4=-2, \qquad y_0=-1.$$

Ҳамин тавр, координатаҳои $M_0(2;-1;0)$ муайян карда шуданд. Акнун вектори равишдиҳандаи $\vec{a}$ - ро меёбем:

$$\vec{a}=\left[\vec{n}_1\vec{n}_2\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}= 10\vec{i}+2\vec{k}+9\vec{j}+6\vec{k}-6\vec{i}+5\vec{j}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Аз ин ҷо муодилаи каноникии хати рости матлуб чунин намуд дорад:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8} \quad \text{ё} \quad \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

Мисоли 3.4.3. Аз ибтидои координат ба хати рости $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}$ перпендикуляр фаворед.

Ҳал. Муодилаи ҳамвории аз ибтидои координата гузаранда ва перпендикуляр ба хати рости дод шударо тартиб медиҳем. Пас аз он шарти перпендикуляри хати рост бо ҳамвориро истифода мебарем. Барои ин ҳамворӣ $A=l,\ B=m,\ C=n,\ Д=0$ мебошад. Он гоҳ муодилаи ҳамвории матлуб чунин намуд дорад:

$$2x+3y+z=0.$$

Муодилаи параметрии хати рости додашударо меёбем

$$x=2t+2, \quad y=3t+1, \quad z=t+3,$$

барои муайян намудани t муодилаи $2(2t+2)+3(3t+1)+t+3=0$ – ро ҳосил мекунем. Ин муодиларо ҳал мекунем:

$$4t+4+9t+t+3=0$$

$$14t+10=0, \quad t=-\frac{10}{14}=-\frac{5}{7}.$$

Координатаҳои нуқтаи бурришро меёбем:

$$x=2\left(-\frac{5}{7}\right)+2=-\frac{10}{7}+2=\frac{4}{7}$$

$$y=3\left(-\frac{5}{7}\right)+11=-\frac{15}{7}+1=-\frac{8}{7},$$

$$z=-\frac{5}{3}+3=-\frac{5}{7}=\frac{16}{7}$$

Нуқтаи бурриш $M\left(\frac{4}{7};-\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$ мебошад. Акнун муодилаи хати рости аз ибтидои координата ва аз нуқтаи M гузарандаро тартиб медиҳем:

$$\frac{x}{\frac{4}{7}}=\frac{y}{-\frac{8}{7}}=\frac{z}{\frac{16}{7}} \quad \text{ё} \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}.$$

Мисоли 3.4.4..Кунҷи байни ду хати рости додашуда ёфта шавад:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-5}{7}=\frac{z+6}{8} \quad \text{ва} \quad \frac{x+1}{8}=\frac{y-5}{-11}=\frac{z+9}{-7}.$$

Ҳал. Хати рости якум дорои вектори равишдиҳандаи $\vec{a}=(2;\ 7;\ 8)$ ва хати рости дуюм $\vec{b}=(8;\ -11;\ -7)$ мебошанд. Мувофиқи таърифи кунҷи байни ду векторҳои равишдиҳандаи онҳо муайян намудан мумкин аст. Дар асоси формулаи кунҷи байни ду вектор ҳосил мекунем:

$$Cos\varphi=\frac{2\cdot 8+7(-11)+8(-7)}{\sqrt{2^2+7^2+8^2}\sqrt{8^2+(-11)^2+(-7)^2}}=$$

$$= \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{234}} = -\sqrt{\frac{117}{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$Cos\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^0.$$

Мисоли 3.4.5. Кунҷи байни хати рости $x = 7+2t,\ y = 8-t,\ z = 5-t$ ва ҳамвории $2x+2y+4z-3=0$ – ро ёбед.

Ҳал. Барои муайян намудани кунҷи байни хати рост ва ҳамвории додашуда аз формулаи кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ истифода мебарем

$$Sin\phi = \frac{|2\cdot 2+2(-1)+4(-1)|}{\sqrt{2^2+2^2+4^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{24}\sqrt{6}} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6},$$

$$Sin\,\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = \arcsin\frac{1}{2} = 30^0.$$

Мисоли 3.4.6. Аз хати рости $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ ҳамворие гузаронед, ки ба хати рости $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$ параллел бошад.

Ҳал. Муодилаи хати рости якумро бо ёрии муодилаҳои ду хамвории онро мувофиқан ба ҳамвориҳои хоу ва yoz иникоскунанда менависем:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} \quad ё \quad x+2y-1=0, \qquad \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3} \quad ё \quad 2y+z-5=0.$$

Муодилаҳои дастаи ҳамвориҳои аз ин хати рост гузарандаро тартиб медиҳем

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5) = 0,$$

$$x+(2+3\lambda)y+\lambda Z-(1+5\lambda) = 0,$$

Шарти параллелии ҳамворӣ ва хати ростро истифода бурда

$$Al+Bm+Cn=0,$$

λ - ро чунин муайян мекунем, ки дастаи ҳамвориҳо ба хати рости дуюми додашуда параллел бошанд. Ҳамин тавр, меёбем:

$$-1\cdot 1+2(2+3\lambda)-3\lambda=0,\qquad 3\lambda+3=0,\qquad \lambda=-1.$$

Ҳамин тавр, ҳамвории ҷусташаванда бо муодилаи $x-y-z+4=0$ муайян карда мешавад.

Мисоли 3.4.7. Дар тири оу нуқтаеро ёбед, ки аз ҳамвории $2x+3y-6z+7=0$ дар масофаи $d=5$ воқеъ бошад.

Ҳал. Бигзор нуқтаи матлуб M(0;y;0) бошад. Бо назардошти шарти масъала ва формулаи масофа аз нуқта то ҳамвори ҳосил мекунем.

$$d=\frac{|2\cdot 0+3y-6\cdot 0+7|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{|3y+7|}{\sqrt{49}}=\frac{|3y+7|}{7}=5,$$ аз ин ҷо

1) $|3y+7|=35,\qquad 3y=28,\qquad y_1=\dfrac{28}{3}$ ё

2) $3y=-35-7,\qquad y_2=\dfrac{-42}{3}=-14$

Ҳамин тавр, шарти масъаларо ду нуқта қаноат мекунанд:

$$M_1\left(0;\frac{28}{3};\ 0\right),\ M_2(0;-14;\ 0).$$

§5. Сатҳҳои тартиби дуюм

Муодилаи сатҳ дар намуди умумӣ чунин аст:

$$F(x;y;z)=0.$$

ки координатаҳои дилхоҳ нуқтаи сатҳ ин муодиларо қаноат мекунанд. Хати каҷ дар фазо ҳамчун бурриши ду сатҳҳои $F(x;y;z)=0$ ва $Q(x;y;z)=0$ муайян карда мешавад.

Сатҳи тартиби n гуфта, сатҳеро меномем, ки бо муодилаи дараҷаи n -ум нисбат ба координатаҳои декартӣ муайян карда шудааст.

Сатҳи тартиби дуюм гуфта, сатҳеро меномем, ки бо муодилаи алгебравии дарачаи дуюм нисбат ба координатахои декартӣ муайян карда мешавад.

Оддитарин сатҳҳо ин сфера, эллипсоид, гиперболоид ва параболоидҳо мебошанд.

Муодилаи сатҳи тартиби дуюм дар намуди умумӣ чунин аст:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Exz + 2Дyz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0,$$

ки дар ин чо A, B, C, D, E, F, G, H, K, L – ададҳои доимӣ буда, коэффисиентҳо ном доранд.

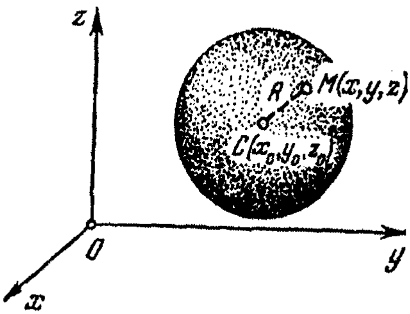
Аз ин муодила дар ҳолатҳои хусусӣ, муодилаҳои сфера, эллипсоид, гиперболид, параболид ва дигар сатҳҳоро ҳосил кардан мумкин аст.

1.Сфера. Дар системаи координатаи декартӣ сферае, ки марказаш дар нуқтаи $C(x_0; y_0; z_0)$ мехобад ва радиусаш R мебошад, бо муодилаи

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

муайян карда мешавад. (расми 3.5.1). Агар маркази сфера дар ибтидои системаи координата хобад, он гоҳ муодилаи он чунин намуд дорад:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



Расми 3.5.1.

Мисоли 3.5.1. Координатаҳои марказ ва радиуси сфераи

$x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$ - ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи сфераи додашударо ба намуди каноникии $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ мебиёрем, бо ин мақсад аз муодилаи додашуда квадрати пурраро ҷудо мекунем:

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+2y+1+z^2=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Аз ин муодила маълум аст, ки маркази сфера дар нуқтаи $C\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$ хобида, радиусаш $R=\frac{1}{2}$ мебошад.

Мисоли 3.5.2. Муодилаи сфера тартиб дода шавад, агар он аз нуқтаҳои А (1;2-4) , В (1;-3;1), С (2;2;3) гузарад ва марказаш дар ҳамвории хоу хобад.

Ҳал. Азбаски нуктаҳои А,В,С дар сфера мехобанд, пас координатаҳои онҳо муодилаи сфераро қаноат мекунонанд:

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=r^2,$$

$$(1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=r^2,$$

$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=r^2.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1-a)^2+(3-b)^2+1,$$

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(2-a)^2+(2-b)^2+9 \quad \text{ё}$$

$$4-4b+b^2+16=9+6b+b^2+1$$

$$20-4b=10+6b, \qquad 10b=10, \qquad b=1,$$

$$(1-a)^2+16=(2-a)^2+9$$

$$1-2a+a^2+16=4-4a+a^2+9,$$

$$17-2a=13-4a$$

$$2a=-4, \qquad a=-2.$$

Акнун радиуси сфераро меёбем:

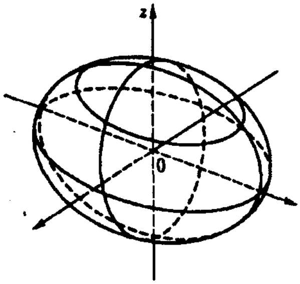
$$r^2=(1-a)^2+(2-b)^2+16=$$
$$(1-2)^2+(2-1)^2+16=3^2+1^2+16=9+1+16=26$$

Ҳамин тавр, ҳосил намудем, ки маркази сфера дар нуқтаи M(-2;1;0) хобида, радиусаш $r=\sqrt{26}$ мебошад.

2.Эллипсоид. Дар натиҷаи эллипсро дар атрофии ягон тири координата чарх занонидан элипсоидро ҳосил мекунем, ки муодилаи каноникии он чунин намуд дорад: (расми 3.5.2)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

дар ин ҷо a; b; c мувофиқан порчаҳо аз ибтидои системаи координата то нуқтаи сарҳади эллипсоид дар тирҳои ox, oy, ва oz мебошанд. Эллипсоид ба сфераи фишурдашуда шабоҳат дорад. Вобаста аз он, ки эллипс дар атрофи тири хурд ё калонаш чарх занонида мешавад, шакли эллипсоид намуди гунонгунро мегирад. Ҳангоми $a=b=c$ будан эллипсоид ба сфера табдил меёбад:



Расми 3.5.2.

Мисоли 3.5.3. Намуд ва параметрҳои сатҳи додашударо муайян намоед:

$$4x^2+9y^2+36z^2-16x+18y-72z+25=0.$$

Ҳал. Муодилаи додашударо табдилдиҳӣ мекунем:

$$4(x^2-4x+4)+9(y^2+2y+1)+36(z^2-2z+1)-16-9-36+25=0,$$

$$4(x-2)^2+9(y+1)^2+36(z-1)^2=36.$$

Ба системаи нави координата $x=x-2,\ y=y+1,\ z=z-1$ гузашта, муодилаи ҳосилшударо менависем

$4x^2+9y^2+36z^2=36,$ аз ин ҷо ба 36 ҳар ду тарафи баробариро тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{1^2}=1.$$

Муодилаи ҳосилшударо бо муодилаи каноникии эллипсоид муқоиса намуда ба хулосае меоем, ки ин муодилаи эллипсоид бо параметр ҳои $a=3;\ b=2;\ c=1$ мебошад. Маркази эллипсоид дар нуқтаи С(2;-1;1) мехобад.

Мисоли 3.5.4. Муодилаи сатҳи аз чархзанонидани хати каҷи $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ дар атрофи тири оу ҳосилшударо тартиб диҳед.

Ҳал. Ҳангоми эллипсӣ додашударо дар атрофи тири оу чарх занонидан эллипсоиде ҳосил мешавад, ки порчаҳои дар тирҳои ох ва oz хобидаи эллипсоид баробар мебошанд. Аз ин ҷо дар натиҷаи чарх занонидани эллипс дар атрофи тири оу муодилаи эллипсоид чунин намуд дорад:

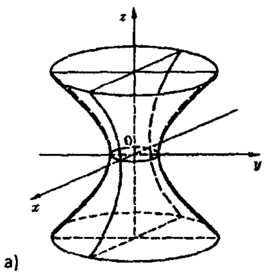
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

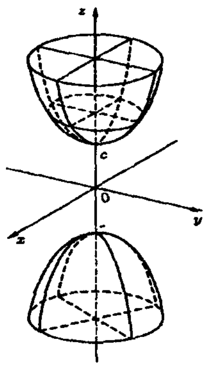
3.Гиперболоид. Гиперболоиди чархзанӣ вобаста аз он, ки дар атрофи тири ox ё оу чарх занонидани гипербола ҳосил мешавад як сатҳа ё ду сатҳа мешавад. Муодилаи каноникии гиперболоиди як сатҳа чунин намуд дорад:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \text{(расми 3.5.3 а)}$$

Муодилаи каноникии гиперболоиди ду сатҳа чунин аст:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad \text{(расми 3.5.3 б)}$$





Расм 3.5.3.

Мисоли 3.5.5. Муайян кунед, ки сатҳи додашуда кадом намуди сатҳҳоро муайян мекунад;

$$4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0.$$

Ҳал. Барои муайян намудани сатҳи додашуда онро табдилдиҳӣ мекунем:

$$4(x^2-6x+9)-36+(y^2-4y+4)-4-(z^2-2z+1)+1+35=0,$$

$$4(x-3)^2+(y-2)^2-(z-1)^2-4=0,$$

$$4(x-3)^2+\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{4}=1.$$

Ба системаи координатаи нав гузошта $X=x-3$, $У=y-2$, $Z=z-1$ ҳосил мекунем:

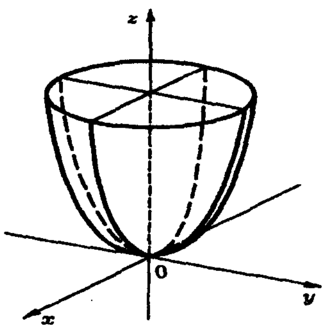
$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{2^2}=1,$$

Сатҳи ҳосилшуда гиперболоиди яксатҳа мебошад.

4. Параболоид. Параболаиди чархзани дар натиҷаи чарх занонидани парабола дар атрофии ягон тири координата вобаста аз мавқъеи ҷойгршавиаш ҳосил мешавад.

Муодилаи каноникии параболоид чунин намуд дорад: (расми 3.5.4)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \quad (a>0,\ \ b>0)$$



Расм 3.5.4.

Мисоли 3.5.6. Муодилаи каноникии параболоид тартиб дода шавад, агар қуллааш дар ибтидои координата хобад, тираш тири oz буда, ва нуқтаҳои M(-1;-2;2) N(1;1;1) дар сатҳи он хобанд.

Ҳал. Азбаски нуқтаҳои M ва N дар сатҳи параболоид мехобанд, бинобар ин, координатаҳои ин нуқтаҳо муодилаи параболоидро қаноат мекунонанд. Координатаҳои нуқтаҳои M ва N – ро дар муодилаи каноникии параболоид гузошта, ҳосил мекунем.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=4 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=2. \end{cases}$$

Системаи ҳосилшударо нисбат ба a ва b ҳал менамоем:

$$\begin{cases} b^2+4a^2=4a^2b^2 \\ b^2+a^2=2a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+4a^2=4a^2b^2 \\ 2b^2+2a^2=2a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow 2a^2-b^2=0, \qquad b^2=2a^2.$$

Қимати b^2 - ро дар яке аз муодилахои системаи ҳосилшуда гузошта a^2 - ро меёбем

$$2a^2b^2-b^2=a^2, \qquad b^2=\frac{a^2}{2a^2-1}, \qquad \frac{a^2}{2a^2-1}=2a^2$$

$$a^2=\frac{3}{4}, \qquad b^2=2a^2=2\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

Ҳамин тавр? қиматҳои a^2 ва b^2 -ро дар муодилаи параболоид гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{4x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=2z \qquad\qquad 2x^2+y^2=3z$$

Кори мустақилонаи 3.1.1.

1. Дода шудаанд нуктаҳои A(3; 3; 3) ва B (-1; 5; 7). Координатаҳои нуктаҳои C ва Д- ро ёбед, ки ин нуқтаҳо порчаи AB- ро ба се қисми баробар тақсим мекунанд.

2. Дар тири oz нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои $M_1(2; 4; 1)$ ва $M_2(-3; 2; 5)$ дар масофаҳои баробар мехобад.

3. Косинусҳои равишдиҳандаи вектори $\vec{a} = (12; -15; -16)$- ро ёбед.

4. Дода шудаанд нуқтаҳои $M_1(1; 2; 3)$ ва $M_2(3; -4; 6)$. Дарози ва равиши вектори M_1M_2 – ро ёбед.

5. Векторҳои $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ва $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ дода шудаанд. Сояҳои $np_{a}\,\vec{b}$ ва $np_{b}\,\vec{a}$-ро ёбед.

6. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ ва $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$- ёфта шавад.

Кори мустақилонаи 3.2.1.

1. Масоҳати секунҷа ба қуллаҳои A(2; 2; 2), B(4; 0; 3) ва C(0; 1; 0) ёфта шавад.

2. Зарби скалярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ёфта шавад, агар

1) $\vec{a} = (1; -3; 4)$, $\vec{b} = (5; 1; 2)$ 2) $\vec{a} = (6; -2; 1)$, $\vec{b} = (1; 8; -3)$

3) $\vec{b} = (3; 7; 0)$, $\vec{b} = (3; 7; 0)$ 4) $\vec{b} = (2; 6; 4)$ $\vec{b} = (2; 6; 4)$

3. Зарби вектории векторҳои $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ ва $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ёфта шавад.

4. Зарби вектории $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ ду векторҳои зеринро ёбед:

а) $\vec{a}=2\vec{i}+11\vec{j}+10\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$

б) $\vec{a}=(1;2;-2)$, $\vec{b}=(8;6;4)$

а) $\vec{a}=(1;-5;8)$, $\vec{b}=(3;6;-2)$

5. Зарби омехтаи $\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right)$ – ро ёбед, агар:

а) $\vec{a}=(4;-3;9)$, $\vec{b}==(1;0;-1)$, $\vec{c}=(-5;-4;3)$;

б) $\vec{a}==(1;2;1)$, $\vec{b}==(1;2;-2)$, $\vec{c}=(8;6;4)$;

в) $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}==(3;1;2)$, $\vec{c}=(2;3;1)$;

6. Ҳаҷми пирамидаи секунҷа бо қуллаҳои

А(0; 0; 1), В(2; 3; 5) С(6; 2; 3) ва Д(3; 7; 2) –ро ёбед.

Кори мустакилонаи 3.3.1.

1.Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи М(2;3;5) гузаранда ва ба вектори $\vec{N}=\vec{4i}+\vec{3j}+\vec{2k}$ перпендикуляр бударо тартиб диҳед.

2. Масофаи аз нуқтаи $M_0(1;3;-2)$ то ҳамвории 2х-3у-4z+12=0 – ро ёбед.

3. Муодилаи ҳамвории аз нуқтаи $M_1(2;0;-1)$ ва $M_2(1;-1;3)$ гузаранда ва ба ҳамвории $3x+2y-z+5=0$ перпендикулярро ёбед.

4. Муодилаи ҳамвории аз нуктаҳои О(0;0;0), Р(4;-2;1) ва Q(2;4;-3) гузарандаро тартиб диҳед.

5. Кунҷи байни ду ҳамвориҳои додашудаи зерин ёфта шавад, агар:

а) 3х-2у-5z+2=0, х+4у+z-4=0;

б) 11х-8у-7z+6=0, 4х-10у+z-5=0;

в) 5х-у-3z-2=0, -х+2у+10z-7=0;

г) x-2z+8=0,   y+5z+7=0.

6. Масофаи аз нуқтаи M_1M_2 то ҳамвориҳои овардашуда ҳисоб карда шавад:

а) x-2y+2z-3=0, $M_1(4;2;-1)$, $M_2(-3;5;-7)$

б) 2x+3y-6z-7=0, $M_1(-2;5;1)$, $M_2(9;1;2)$

7. Масофаи байни ҳамвориҳои параллелии додашударо ҳисоб кунед:

а) 2x+y-2z-6=0, 2x+y-2z-15=0; б) 3x-2y+6z-7=0, 3x-2y+6z-35=0;

Кори мустақилонаи 3.4.1.

1. Муодилаи хати рост ба намуди каноникӣ оварда шавад:

$$\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0, \\ 3x+y-17z=0. \end{cases}$$

2. Муодилаи каноникӣ хати рости аз ду нуқтаи додашуда гузарандаро тартиб диҳед:

а) $M_1(1;-2;\ 1)$ ва $M_2(3;1;\ -1)$.

б) $M_1(3;-1;\ 0)$ ва $M_2(1;0;\ -3)$.

3. Муодилаи хати рости аз нуқтаи $M\,(2;-3;\ -5)$ гузаранда ва бо ҳамвории 6x-3y-5z+2=0 – параллелро тартиб диҳед.

4. Кунҷи байни хати рости

$$\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-3z+8=0. \end{cases}$$

ки бо тирҳои координат ташкил мекунад, ёфта шавад.

5. Муодилаи хати рости аз нуқтаи $M\,(5;-1;-3)$ гузаранда ва бо хати рости

$$\begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ 4x-5y-z+2=0. \end{cases}$$

параллел бударо тариб диҳед.

6. Нуқтаи бурриши хатҳои рост ёфта шавад:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{2} \quad \text{ё} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

7. Муодилаи параметрии хати рости аз нуқтаҳои $M_1(2;-5;1)$, ва $M_2(-1;1;2)$ гузарандаро тартиб диҳед.

Кори мустақилонаи 3.4.2.

1. Кунҷи байни хатҳои рост ёфта шавад:

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-t-2=0. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

2. Муодилаи ҳамвории аз хати рости $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ гузаранда ва бо ҳамвории $3x+y-z+2=0$ перпендикулярро тартиб диҳед.

3. Секунҷа бо қуллаҳои A(1;2;-4), B(5;-6;2), C(3;8;-10) дода шудааст. Муодилаҳои медианҳои секунҷаро тартиб диҳед.

4. Косинусҳои равишдиҳандаи хатҳои рост ёфта шаванд:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-5}{1}$

б) $\frac{x+8}{6}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+4}{-3}$

в) $x=4-10t, \quad y=9+2t, \quad z=3-11t$

г) $x=7-12t, \quad y=9+5t, \quad z=4.$

5. Косинуси кунҷи байни ду хати рост ёфта шавад:

а) $\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{-2}$ ва $\frac{x-8}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{2}$;

а) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{7}=\frac{z+2}{8}$ ва $\frac{x+5}{-8}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+4}{7}$;

6. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ ёфта шавад:

а) $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$ ва $2x-4y-2z-9=0,$:

б) $\begin{cases} x-3y+z+3=0, \\ 3x+y-2z-6=0. \end{cases}$ ва $x-2y-z+5=0,$:

7. Нисбат ба ҳамвории $3x+4y-2x-1=0$ нуқтаеро ёбед, ки ба нуқтаи M(8;9;-1) симметрӣ бошад.

Кори мустақилонаи 3.5.1.

1.Координатаҳои марказ ва радиуси сфераро муайян кунед:

а) $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=25$

б) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0$

в) $2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0$

г) $x^2+y^2+z^2=2x.$

2. Муодилаи эллипсоид тартиб дода шавад, агар тирҳои координата тирҳои симметриаш бошанд ва дар сатҳи он нуқтаҳои A(3;0;0), B $(-2;\frac{5}{3};0)$, $C(0;-1;\frac{2}{\sqrt{5}})$ хобанд.

3. Муодилаи сатҳи додашударо ба намуди каноникӣ биёред:

$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$

4. Параметрҳо ва намуди сатҳҳои додашударо муайян кунед:

а) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-12z-7=0$

б) $4x^2+4y^2+4z^2-8x-12y-16z-1=0$

в) $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$

г) $2x^2+3y^2-6z^2-8x-6y-12z-1=0$

д) $4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0$

5.Нишон диҳед, ки муодилаи додашуда кадом сатҳро ифода мекунад.

а) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$

б) $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$

Ҷавобҳо

К.М. 3.1.1.

1. $C\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$, $Д\left(\frac{1}{3};\frac{13}{3};\frac{17}{3}\right)$ 2. $M\left(0;0;\frac{17}{8}\right)$.

3. $Cos\alpha=\frac{12}{15}$, $Cos\beta=-\frac{3}{5}$, $Cos\gamma=-\frac{3}{7}$.

4. $|M_1M_2|=7$, $Cos\alpha=\frac{2}{7}$, $Cos\beta=-\frac{6}{7}$, $Cos\gamma=-\frac{3}{7}$.

5. $\frac{20}{3}$ ва $\frac{20}{7}$.

6. $\arccos\frac{17}{50}$.

К.М. 3.2.1.

1. $S=\frac{1}{2}\sqrt{65}.$ 2. 0 3. $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=17\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}$

4. $38\vec{i}+26\vec{j}-21\vec{k}$, б) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=(20;-20;-10)$ в) $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=(-38;-26;-21)$

5. а) 46; б) -30; в) 18. 6. 20 (в. кв).

К.М. 3.3.1.

1.3x+3y-2z-27=0 2. $d=\frac{13}{\sqrt{29}}$, 3. 7x-11y-z-15=0

4. x+7y+10z=0

5. *а)* $\varphi=90^0$, *б)* $\varphi=45^0$, *в)* $\varphi=67^042'$, *г)* $\varphi=28^042'$.

6. *а*) $d_1=\frac{5}{3}$, *б*) $d_2=10$, *в*) $d_1=d_2=\frac{2}{7}$.,

7. *а*) $d=3$, *б*) $d=4$.

К.М. 3.4.1.

1. $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$.

2. а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+}{3}=\frac{z+5}{5}$; б) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$

3. $\frac{x-}{-6}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+5}{5}$

4. $Cos\alpha=\frac{6}{7}$, $Cos\beta=\frac{3}{7}$, $Cos\chi=\frac{2}{7}$

5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}$.

6. M(0;7;-2)

7. $\begin{cases} x=-3t-1 \\ y=6t+1 \\ z=t+2 \end{cases}$

К.М. 3.4.2.

1. $Cos\varphi=\frac{20}{21}$.

2. x-5y-2z+11=0

3. x=2+3t, y=5-11t, z=-7+9t а) $0\le t\le 1$

4. а) $Cos\alpha=\frac{2}{3}$, $Cos\beta=\frac{-2}{3}$, $Cos\chi=\frac{1}{3}$

   б) $Cos\alpha=\frac{6}{7}$, $Cos\beta=\frac{2}{7}$, $Cos\chi=-\frac{3}{7}$

5. а) $Cos\varphi = 0$, б) $Cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

6. а) 30^0, б) 30^0. 7. N(-3;-3;2;3;6).

К.М. 3.5.1.

1.а) C(-1;-2;0), r=5, б) C(2;-3;-1), в) (0;-1; $\frac{3}{4}$), r= $\frac{3}{4}$ г) (1;0;0), r=1

2. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z^2 + 2) = 9$

3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = \frac{z^2}{1} = 1$,

4. $\frac{{x_0}^2}{9} + \frac{{y_0}^2}{4} + \frac{{z_0}^2}{1} = 1$,

5. а) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{115}{2}$, $O\left(1; -\frac{3}{2}; 2\right)$.

б) $x^2 + y^2 + 4z^2 = \frac{15}{2}$.

в) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, $O(1;-2;3)$

г) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{1} = 1$, $O(1;1;-1)$

д) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{1} = 1$, $O(-1;-2;1)$.

6. а) $x^2 + y^2 = 4z$ б) $x^2 - \frac{z^2}{9} = 2y$.

Боби IV. Ибтидои таҳлили математикӣ

§ I. Ададҳои ҳақиқӣ

I. **Ададҳои ирратсионалӣ**. Ададе, ки дар намуди касри $\frac{p}{q}$, $p, q \neq 0$ -ададҳои бутуни мусбат ва манфӣ) тасвир кардан мумкин аст, адади ратсионалӣ номида мешавад. Маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ аз ададҳои бутун, касри мусбату манфӣ ва сифр иборат мебошанд.

Таърифи1. Ҳар гуна касри даҳии беохири ғайридаврӣ адади ирратсионалӣ номида мешавад.

Таърифи2. Маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ дар якҷоягӣ ададҳои ҳақиқӣ номида мешаванд.

II. **Усули идуксияи математикӣ**. Усули идуксияи математикӣ аз он иборат аст, ки ягон далел ё формуларо барои ҳаргуна адади натуралии n исбот кардан талаб карда мешавад. Барои ин аввало дурустии ин далел ё формуларо дар ҳолати $n = 1$ месанҷем, баъд фарз мекунем, ки ин далел ё формула барои $n = k$ дуруст аст. Пас аз он исбот мекунем, ки ин далел ё формула барои $n = k + 1$ ҳам дуруст мебошад.

III.**Бузургии мутлак**. Агар x –адади ҳақиқӣ бошад, пас бузургии мутлақи адади x гуфта, адади ғайриманфии $|x|$ -ро меномем, ки ин бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$|x| = \begin{cases} x, & агар \quad x > 0 \\ 0, & агар \quad x = 0 \\ -x, & агар \quad x < 0 \end{cases}$$

Барои ду адади ҳақиқии дилхоҳи x ва y таносубҳои зерин ҷой доранд:

$$1. |x| \leq a, \quad ё \quad -a \leq x \leq a$$

2. $|x| \geq a$, *яъне* $x \geq a$ *ё* $x \leq -a$,

3. $|x+y| \leq |x| + |y|$,

4. $|x-y| \geq |x| - |y|$,

5. $|x.y| = |x| \cdot |y|$,

6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$.

I V. **Сарҳади аниқи поёнӣ ва болоӣ.** Бигзор, $\{x\}$ - маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ бошад.

Таърифи 3. Калонтарин аз сарҳадҳои поёнии маҷмӯи $\{x\}$ -ро сарҳади аниқи поёнии маҷмӯи $\{x\}$ меномем ва онро чунин ишора мекунем

$$m = \inf \{x\}.$$

Таърифи 4. Хурдтарин аз сарҳадҳои болоии маҷмӯи $\{x\}$ - ро, сарҳади аниқи болои маҷмӯи $\{x\}$ меномем ва онро чунин ишора мекунем

$$M = \sup \{x\}.$$

Аз ин таърифҳо маълум аст, ки $x \geq m$ ва $x \leq M$ мебошад. Агар маҷмӯи $\{x\}$ аз поён ва боло маҳдуд набошад, дар ин ҳолат ба сифати сарҳади аниқи поёнӣ ва болоӣ $-\infty$ ва $+\infty$ қабул карда мешаванд, яъне

$$\inf\{x\} = -\infty, \ \sup\{x\} = +\infty,$$

Мисоли 4.1.1. Маҷмӯи ҳамаи қиматҳои ратсионалии x -ро ёбед, ки $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ адади ратсионалӣ шавад.

Ҳал. Бигзор, x ва y ададҳои ратсионалӣ бошанд. Акнун x -ро бо ёрии q ифода мекунем:

$$y - x = \sqrt{x^2 + x + 3} - x = q,$$
$$\sqrt{x^2 + x + 3} = x + q,$$
$$x^2 + x + 3 = (x + q)^2,$$
$$x^2 + x + 3 = x^2 + 2xq + q^2,$$
$$x + 3 = 2xq + q^2,$$
$$x - 2xq = q^2 - 3,$$
$$x = \frac{q^2 - 3}{1 - 2q}. \quad q \neq \frac{1}{2}$$

Азбаски x -адади ратсионалӣ мебошад, бинобар ин, $q \neq \frac{1}{2}$ мешавад.

Акнун баръаксашро исбот мекунем: яъне ифодаи $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ ҳамон вақт ратсионалӣ мешавад, ки агар $x = \frac{q^2 - 3}{1 - 2q}$ бошад, ки дар ин ҷо q -адади ихтиёрии ратсионалӣ нобаробари $\frac{1}{2}$ аст.

Дар ҳақиқат

$$y = \sqrt{x^2 + x + 3} = \sqrt{\frac{(q^2 - 3)^2}{(1 - 2q)^2} + \frac{q^2 - 3}{1 - 2q} + 3} =$$
$$= \sqrt{\frac{(q^2 - 3)^2 + (q^2 - 3)(1 - 2q) + 3(1 - 2q)^2}{(1 - 2q)^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{q^4 - 2q^3 + 7q^2 - 6q + 9}{(1 - 2q)^2}} = \sqrt{\frac{(q^2 - q + 3)^2}{(1 - 2q)^2}} = \frac{|q^2 - q + 3|}{|1 - 2q|}$$

Ифодаи охирон барои дилхоҳ q -ратсионалӣ, адади ратсионалӣ мебошад.

Мисоли 4.12. Исбот кунед, ки адади $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ – иррратсионалӣ мебошад.

Ҳал. Фарз мекунем, ки $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ – ратсионалӣ бошад. Пас адади $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ низ адади ратсионалӣ мешавад, чунки нисбати ду адади ратсионалӣ адади ратсионалӣ мебошад. Пас адади $\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]$ чун фарқи ду адади ратсионалӣ, ратсионалӣ мешавад. Мо ба зиддият омадем, чунки $\sqrt{2}$ – адади иррратсионалӣ аст.

Мисоли 4.1.3. Исбот кунед, ки адади $\ell g\ 5$ - ирратсионалӣ аст.

Ҳал. Фарз мекунем, ки $\ell g\ 5$ -адади ратсионалӣ аст, ё худ $lg\,5=\dfrac{m}{n}$ $m,\ n\neq 0$ – ададҳои бутунанд.

Пас, $5=10^{\frac{m}{n}}$, $10^m=5^n$, $2^m5^m=5^n$ аст.

Вале баробарии охирон номумкин аст. Адади 2 дар қисми чапи баробарӣ зарб мешавад, аммо дар қисми рост нест. Дар тарафи чап адади ҷуфт ҳосил мекунад, дар тарафи рост бошад, адади тоқ мешавад, ки ин номумкин аст. Ин зиддият нишон медиҳад, ки $\ell g\ 5$ -ирратсионалӣ мебошад.

Мисоли 4.1.4. Методи индуксияи математикиро истифода бурда, баробарии $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$ – ро барои дилхоҳ адади натуралии n исбот кунед.

Ҳал. Бигзор, $n=1$, пас $1=1$ баробарии дуруст аст. Акнун фарз мекунем, ки ин баробарӣ барои n - дуруст аст, исбот мекунем, ки барои $n+1$ низ дуруст мебошад.

Дар ҳақиқат

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}+2^n=2^n-1+2^n=$$
$$=2\cdot 2^n-1=2^{n+1}-1$$

мебошад.

Яъне баробарии додашуда барои $n+1$ ҳам дуруст будааст.

Мисоли 4.1.5. Нобаробариро исбот кунед:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ҳал. Дар ҳолати $n=1$ иҷрошавии нобаробарӣ маълум аст. Акнун фарз мекунем, ки барои n ин нобаробарӣ дуруст аст ва исбот мекунем, ки барои $n+1$ иҷро мешавад.

Дар ҳақиқат

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(2n+2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}},$$

мебошад.

Мисоли 4.1.6. Нобаробариро ҳал кунед:

$$\left|x^2-7x+12\right| > x^2-7x+12.$$

Ҳал. Аввало решаҳои муодилаи $x^2-7x+12=0$ – ро меёбем

$$x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2} = \frac{7\pm1}{2}, \qquad x_1 = 3, \qquad x_2 = 4.$$

Аз ин ҷо нобаробарии додашуда барои ҳамаи қиматҳои x, ки $x^2-7x+12 < 0$ аст, дуруст мебошад, яъне дар ҳолати $3<x<4$ будан $(x-3)(x-4)<0$

Мисоли 4.1.7. Муодиларо ҳал кунед $x^2-2|x|-3=0$.

Ҳал. Муодиларо ба намуди $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$ менависем.

Бо $y = |x|$ – ро ишора карда, ҳосил мекунем:

$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

$$y_{1.2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

$$y_1 = -1 \,.\, y_2 = 3 \quad \text{аз ин ҷо} \quad y_1 = |x_1|, \quad y_2 = |x_2|$$

Азбаски $y = |x| \geq 0$ аст, бинобар ин, $y_1 = -1$ -дуруст намеояд.

Ҳолати $y = 3$ дуруст меояд:

$$y = |x| = 3 \quad \text{ё худ} \quad x_0^1 = -3, \; x_0^2 = 3$$

Мисоли 4.1.8. Сарҳади аниқи болоӣ ва поёнии маҷмӯи $\{x\} = [0,1)$ -ро ёбед.

Ҳал. Ин маҷмӯъ элементи калонтарин надорад. Маҷмӯи сарҳадҳои болоӣ барои нимитервали $[0,1)$ маҷмӯи $[1;\infty)$ мебошад, бо элементи хуртарин

1. Бинобар ин, $\sup [0,1) = 1$, мебошад, ки $1 \notin [0,1)$ аст.

Аз тарафи дигар, барои маҷмӯи $[0,1)$ элементи хурдтарин мавҷуд аст ва ба 0 баробар мебошад. Маҷмӯи сарҳадҳои поёнии маҷмӯи $[0,1)$, маҷмӯи $(-\infty,0]$ мебошад бо элементи калонтарини 0, ки 0 сарҳади аниқи поёнии нимитирвали $[0,1)$ мебошад. Ҳамин тавр, ҳосил мекунем:

$$\min [0;1) = \inf [0;1) = 0, \qquad 0 \in [0;1).$$

§ 2. Назарияи пайдарпаиҳо

Таърифи1. Адади a ҳудуди пайдарпаии $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$, номида мешавад, агар барои ҳар гуна $\varepsilon > 0$, чунин номери $N(\varepsilon)$ ёфта шавад, ки барои ҳамаи $n > N(\varepsilon)$ нобаробарии $|x_n - a| < \varepsilon$ иҷро шавад. Агар $\lim x_n = a$ бошад, пас мегӯянд, ки пайдарпаи $\{x_n\}$ дар ҳолати $n \to \infty$ наздикшаванда аст ва дар ҳолати муқобил дуршаванда.

Таърифи 2. Пайдарпаи $\{x_n\}$ беохир хурд номида мешавад, агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ бошад.

Таърифи 3. Пайдарпаи дорои ҳудуди беохир ё номуайян, дуршаванда номида мешавад.

I. Критерияи Коши .Барои он ки пайдарпаи $\{x_n\}$ наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳар гунна $\varepsilon > 0$ чунин номери $N(\varepsilon)$ ёфта шавад, ки дар ҳолати $n > N(\varepsilon)$ будан ва дилхоҳ адади натуралии p нобаробарии

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad \text{иҷро шавад.}$$

II. Адади e. ҳудуди пайдарпаии $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ -ро ҳангоми $n \to \infty$ адади e меномем ва чунин ишора мекунем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,, \quad e = 2{,}7182 \ \ldots .$$

III. Теоремаҳои асосии ҳудуди пайдарпаиҳо. Бигзор, пайдарпаиҳои $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ наздикшаванда бошанд, он гоҳ:

1) $x_n \le y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0, \quad (y_n \ne 0)$.

мебошад.

Пайдарпаии наздикшаванда фақат ва фақат якто ҳудуд дорад.

Мисоли 4.2..1. Бигзор, $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad (n = 1,2,3..)$ бошад.

Исбот кунед, ки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, мебошад. Барои ҳар гуна $\varepsilon \rangle 0$ чунин $N = N(\varepsilon)$-ро майян кунед, ки дар ҳолати $n \ge N$ будан нобаробарии $|x_n - 1| \langle \varepsilon$ иҷро шавад.

Ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000001
N	9	99	999	9999	99999

Ҳал. Дар асоси таъриф ва шарти мисол, пайдо мекунем:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \qquad n+1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon).$$

Аз формулаи $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ истифода бурда, ҷадвалро пур мекунем:

$$N(0,1)=\frac{1}{0,1}-1=10-1=9,$$

$$N(0,01)=\frac{1}{0,01}-1=100-1=99,$$

$$N(0,001)=\frac{1}{0,001}-1=1000-1=999,$$

$$N(0,0001)=\frac{1}{0,0001}-1=10000-1=9999.$$

Мисоли 4.2.2. Аз таърифи ҳудуд истифода бурда, нишон диҳед, ки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ *аст, агар* $x_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ бошад. Аз кадом n -саркарда нобаробарии $|x_n - 1| < 0,01$ иҷро мешавад.

Ҳал. Барои ҳар гуна $\varepsilon > 0$ чунин адади натуралӣ ёфта мешавад, ки дар ҳолати $n > N(\varepsilon)$ будан нобаробарии $|x_n - 1| < \varepsilon$ иҷро мешавад. Аз ин ҷо

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1}-1\right| \le \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1} < \varepsilon, \quad \frac{2}{2n+1} < \varepsilon, \qquad 2n > \frac{2}{\varepsilon}-1, \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}.$$

Ба сифати $N(\varepsilon)$ қисми бутуни $\dfrac{1}{\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$ -ро мегирем ё худ:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\right], \quad N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{0.,01}-\frac{1}{2}\right] = \left[100-\frac{1}{2}\right] = [99,5] = 99$$

Нобаробририи $|x_n - 1| \le 0,01$ аз номери 99 -сар карда иҷро мешавад.

Мисоли 4.2.3. Критерияи Коширо истифода бурда, наздикшавии пайдарпаии $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \ldots$ -ро исбот кунед.

Ҳал. Бигзор, $\varepsilon > 0$ бошад, он гоҳ дар асоси критерияи Коши ҳосил мекунем:

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}-\right.$$

$$\left.-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\ldots-\frac{1}{n^2}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\le\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

Аз ин ҷо ҳосил меунем, ки дар ҳолати $n > N(\varepsilon)$, барои ҳамаи ададҳои натуралӣ n, ин пайдарпаи наздикшаванда мешавад.

Мисоли 4.2.4. Ҳудуд ҳисоб карда шавад: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$.

Ҳал. Аз формулаи адади e истифода бурда, ҳудуди зеринро ҳисоб мекунем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2.$

Мисоли 4.2.5. Ҳудудро ҳисоб кунед

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+3}-\frac{1+5n^2}{5n+1}\right)$$

Ҳал. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+3}-\frac{1+5n^2}{5n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-17n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3}.$$

Сурат ва махраҷи касрро ба дараҷаи калонтарини номаълум n^3 тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{17}{n}+\frac{3}{n^3}}{10+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Мисоли 4.2.6. Ҳудуди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ -ро ёбед, агар $x_n=\sqrt[n]{5n}$ бошад.

Ҳал. Барои ҳал намудани ин мисол мо аз формулаи зерин истифода мебарем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

Яъне $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\ \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 5^{\frac{1}{n}} = 5^0 = 1.$

§ 3.Функсияи яктағйирёбанда

Таърифи 1. Агар ба ҳар як қимати x аз маҷмӯи $\{x\}$ бо ягон қонун ё қоидаи муайян адади y аз маҷмӯи $\{y\}$ мувофиқ гузашта шавад, пас мегуянд, ки дар маҷмӯи $\{x\}$ функтияи $y=f(x)$ муайян карда шудааст.

Дар ин ҷо x -ро аргумент, y -ро функсия меноманд. Маҷмӯи $\{x\}$ соҳаи муайянии функсия ва маҷмӯи $\{y\}$ -соҳаи қиматҳои функсия мебошанд. Соҳаи муайянии функсия шуда метавонанд:

интервал $(a;b)$, $a\langle x\langle b$,

$[a;b)$, $a\le x<b$,

ниминтервал $(a;b]$, $a\langle x\le b$, ё

порча $[a;b]$, $a\le x\le b$,

интервали беохир $(-\infty;+\infty)$, $-\infty\langle x\langle +\infty$ аст.

Графики функсияи $y=f(x)$ гуфта маҷмӯи нуқтаҳои ҳамвории xoy бо координатаҳои $(x, f(x))$ – ро меномем, ки $x\in\{x\}, f(x)\in\{y\}$ аст.

Функсияи $f(x)$ ҷуфт номида мешавад, агар $\forall x\ f(-x)=f(x)$ шавад ва тоқ номида мешавад, агар $f(-x)=-f(x)$ шавад. Қайд мекунем, ки графики функсияи ҷуфт бо тири ордината симметрӣ буда, графики функсияи тоқ бо ибтидои координата симметрӣ мебошад.

Функсияи $f(x)$ даврӣ номида мешавад, агар чунин адади мусбати T ёфта шавад, ки $f(x+T)=f(x)$ шавад, T -даври функсия номида мешавад.

Мисоли 4.3.1. Соҳаи муайянии функсияи

$$f(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$$ -ро ёбед.

Ҳал. Ҷамъшавандаи якум дар ҳолати $1-2x\geq 0$ қимати ҳақиқиро қабул мекунад, ҷамшавандаи 2-юм дар ҳолати $-1\leq\frac{3x-1}{2}\leq 1$ муайян мебошад. Ҳамин тавр, барои ёфтани соҳаи муайянии функсияи додашуда, системаи зеринро

$$\begin{cases} 1-2x\geq 0, \\ \dfrac{3x-1}{2}\geq -1, \\ \dfrac{3x-1}{2}\leq 1, \end{cases}$$

ҳал кардан лозим аст.

Ин системаро ҳал намуда, ҳосил мекунем:

$$x\leq\frac{1}{2}, \quad x\leq 1, \quad x\geq -\frac{1}{3}.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки соҳаи муайяни функсияи додашуда порчаи $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ мебошад.

Мисоли 4.3.2. Маҷмӯи қиматҳои функсияи додашударо ёбед:

$$f(x)=2+3\sin x.$$

Ҳал. Азбаски $|\sin x|\le 1$ аст, аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$-1\le\sin x\le 1.$ Ин нобаробариро ба 3 зарб мезанем:

$-3\le 3\sin x\le 3.$ Акнун 2-ро ҳамроҳ мекунем:

$-1\le 2+3\sin x\le 5$, ки аз ин ҷо маълум аст, ки соҳаи қиматҳои функсияи додашуда порчаи $[-1\,;5]$ мешавад.

Мисоли 4.3.3. Қиматҳои хусусии $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ функсияи

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\le 0\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Барои ҳисоб намудани қиматҳои $f(-1)$, $f(0)$ функсия - $f(x)=1+x$ - ро истифода мебарем ва барои ҳисоб намудани қиматҳои $f(2)$, $f(4)$ функсияи $f(x)=2^x$ -ро истифода мебарем. Яъне

$$f(-1)=1-1=0,\qquad f(2)=2^2=4,$$
$$f(0)=1+0=1,\qquad f(4)=2^4=16.$$

Мисоли 4.3.4. Графики функсияи

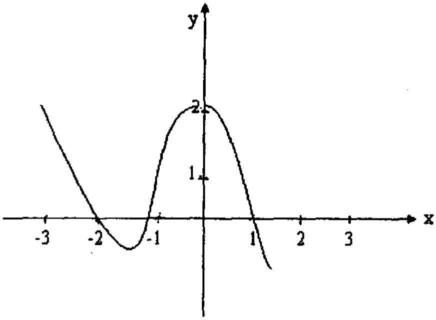
$$y=(1-x^2)(2+x)$$ –ро созед.

Ҳал. Соҳаи муайянии функсия интервали $(-\infty,+\infty)$ мебошад. Функсия дар ҳолати $x=\pm 1$ ва $x=-2$ ба сифр мубаддал мегардад. Агар $-\infty\langle\, x\langle -2$ *ва* $-1\,\langle\, x\,\langle\, 1$ бошад, $y\rangle 0$ ва агар $-2\langle x\langle -1,\ \ 1\langle x\langle\,\infty$ бошад, $y\,\langle\, 0$ мешавад. Ҷадвали қиматҳои функсияро тартиб медиҳем:

$$y=-(x^2-1)(2+x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$$

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	1,5
y	8	0	-0,625	0	1,125	2	0	-4,375

Дар асоси ҷадвал графики ин функсияро месозем (Ниг. ба расм):



Мисоли 4.3.5.. Ҷуфт ё тоқ будани функсияҳои зеринро нишон диҳед:

$$a)\ f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x,$$

$$б)\ f(x) = 2^x + 2^{-x}.$$

Ҳал. a) x –ро ба - x иваз намуда, ҳосил мекунем:

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) =$$

$$= x^2\left(-\sqrt[3]{x}\right) - 2\sin x = -\left(x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x\right) = -f(x)$$

Функсияи додашуда тоқ мебошад.

$$б)\ f(-x) = 2^{-x} + 2^x = 2^x + 2^{-x} = f(x)$$

Яъне функсияи додашуда ҷуфт мебошад.

Мисоли 4.3.6. Даврӣ будани функсияро нишон диҳед ва даври онро муайян кунед, агар

$f(x) = \sin 6x + tg4x$ бошад.

Ҳал. Барои ҷамъшавандаи якум даври асосӣ $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ ва барои ҷамъшавандаи дуюм даври асосӣ $\frac{\pi}{4}$ мебошад. Маълум аст, ки даври асосии ин функсия каратнокии хурдтарини умумии ададҳои $\frac{\pi}{3}$ ва $\frac{\pi}{4}$ мебошад, ё худ π.

Аз ин ҷо:

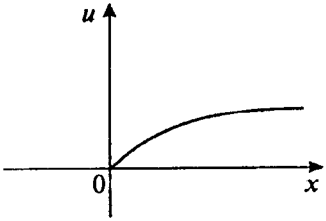
$$f(x+\pi) = \sin 6(x+\pi) + tg4(x+\pi) = \sin(6x+6\pi) + tg(4x+4\pi) =$$
$$= \sin 6x + tg4x = f(x)$$

мебошад.

§ 4. Татбиқи мафҳуми функсия дар иқтисодиёт

Мафҳуми функсия дар ҳалли масъалаҳои иқтисодӣ васеъ истифода бурда мешавад. Баъзе функсияҳоеро, ки дар иқтисодиёт бисёр истифода мешаванд дида мебароем.

Функсияи манфиатноки (судмандӣ) u аз миқдори мол x вобаста аст (ниг. ба расми 4.4.1):



расми 4.4.1.

Функсияи барориш - ҳаҷми маҳсулоти истеҳсолшаванда аз ҳаҷми коркарди захираҳои мавҷуда x вобаста мебошад. Функсияи барориш ҳолати хусусии функсияи истеҳсолот мебошад, ки вобастагии натиҷаи фаъолияти истеҳсолиро аз омилҳои хизматрасонӣ ифода менамояд.

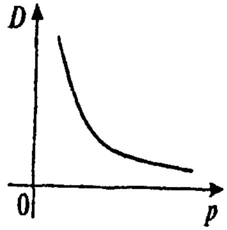
Функсияи хароҷот – вобастагии хароҷоти истеҳсолот аз ҳаҷми маҳсулот. Функсияи хароҷот низ ҳолати хусусии функсияи истеҳсолот мебошад.

Функсияи тақозо ва арза вобастагии ҳаҷми тақозо D ва арза S -ро аз нархи мол P –ро муайян мекунад.

Ягон навъи молро мегирем. Бигзор, D(p) миқдори моле бошад, ки харидор хоҳиши харидан дорад. D=D(p) – Ин функсия, функсияи тақозо ба мол мебошад. Ин функсияи камшаванда буда, одатан чунин намуд дорад:

$$D(p) = \kappa p^{a} + c,$$

ки дар ин ҷо $a<0$ мебошад (нигар ба расми 4.4.2):

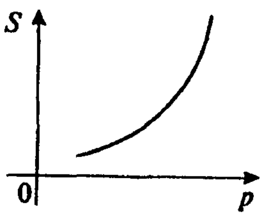


Расми 4.4.2. Графики функсияи тақозо

Аз тарафи дигар, бигзор S(p) миқдори моле бошад, ки фурӯшанда дар бозор бо нархи p арза мекунад. Маълум аст, ки арза бо болоравии нарх меафзояд. Барои ҳамин ҳам функсияи арза S=S(p) функсияи афзоянда мебошад. Одатан ин функсия чунин намуд дорад:

$$S = p^{b} + d$$

ки дар ин ҷо b>1 (нигар ба расми 4.3.3).



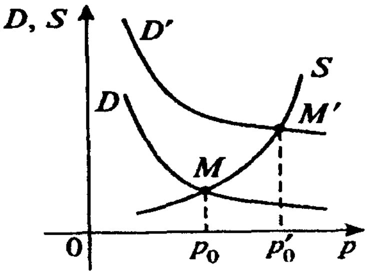
расми 4.4..3

Графики функсияи пешниҳод

Дар иқтисодиёт қулай аст, агар арза бо тақозо мувофиқ ояд ё худ

$$D(p)=S(p).$$

Нархи $p=p_0$, ки шарти баробарии арза ва тақозоро қаноат мекунонад, ҳолати мувозинатӣ номида мешавад. Нуқтаи бурриши графикҳои функсияҳои $D=D(p)$ ва $S=S(p)$ нуқтаи мувозинатӣ номида мешавад(ниг. ба расми 4.4.4):



Расми 4.4.4.

§5. Ҳудуд ва бефосилагии функсия

I. Адади A ҳудуди функсияи $f(x)$ ҳангоми $x \to a$ номида мешавад, агар барои ҳаргуна $\varepsilon > 0$ чунин $\delta > 0$ ёфт шавад, ки дар ҳолати $|x-a| < \delta$ будан нобаробарии $|f(x)-A| < \varepsilon$ иҷро шавад. Инро чунин ишора мекунанд:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A .$$

Агар $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ шавад, он гоҳ мегуянд, ки $f(x)$ бузургии беохир калон аст ҳангоми $x \to a$.

Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки $f(x)$–бузургии беохир хурд мебошад дар ҳолати $x \to a$.

Формулаҳои асоси ҳудуди функсия

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin}{x}=1 \qquad 5)\ \lim_{x\to o}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$2)\ \lim_{x\to o}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad 6)\ \lim_{x\to o}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad 7)\ \lim_{x\to o}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to o}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad 8)\ \lim_{x\to a}u^v=e^{\lim\limits_{x\to a}(u-1)-v}$$

Функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x=a$ бефосила номида мешавад, агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ шавад.

Аз ин таъриф мебарояд, ки агар функтсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x=a$ бефосила бошад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=f(\lim\limits_{n\to\infty} x)$ навиштан мумкин аст.

Функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x=a$ бефосила номида мешавад, агар барои ҳаргуна $\varepsilon \rangle o$ чунин $\delta \rangle 0$ ёфта шавад, ки ҳангоми $|x-a| \langle \delta$ будан нобаробарии $|f(x)-f(a)| \langle \varepsilon$ иҷро шавад.

Бефосилагӣ аз тарафи чап ва рост чунин навишта мешавад:

$$\lim_{x\to a-o} f(x)=f(a-o). \qquad \lim_{x\to a+o}(x)=f(a+o)$$

Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a дорои хосияти бефосилагӣ набошад, пас вай дар ин нуқта каниш дорад.

Каниши бартарафшаванда:

$$f(a-o)=f(a+o)\neq f(a).$$

Каниши ҷинси якум:

$$f(a-o)\neq f(a+o).$$

Каниши ҷинси дуюм, ақаллан яке аз ҳудудҳои яктарафа вуҷуд надошта бошад.

Агар функсияи $f(x)$ дар ҳамаи нуқтаҳои соҳа бефосила бошад, он гоҳ мегӯянд, ки вай дар ин соҳа бефосила аст.

. Функсияи $f(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$ мунтазам бефосила номида мешавад, агар $f(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$ муайян бошад ва барои ҳар гуна адади $\varepsilon \rangle o$ чунин $\delta(\varepsilon)\rangle 0$ ёфта шавад, ки барои дилхоҳ ду қимати $x_1, x_2 \in \{x\}$ гирифташуда, ҳангоми $|x_1-x_2|<\delta$ будан нобаробарии $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ иҷро шавад.

Теоремаи Кантор. Агар функсия $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ муайян ва бефосила бошад, пас вай дар ин порча мунтазам бефосила аст.

Мисоли 4.5.1. Ёфта шавад: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Ҳал. Дар ҳолати ба ҷои x гузоштани 3 номуайянии $\dfrac{o}{o}$ ҳосил мешавад, бинобар ин, мо ин касрро табдилдиҳӣ мекунем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\frac{3+3}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Мисоли 4.5.2. Таърифи ҳудудро истифода бурда, исбот намоед, ки

$\lim\limits_{x\to 1}(3x-8)=-5$ мешавад.

Ҳал. Дар асоси таърифи ҳудуди функсия бо ибораи "$\varepsilon-\delta$" ҳосил мекунем:

$$|x-1| \langle \delta \ , \ |f(x)-f(a)| = |3x-8+5| = |3x-3| =$$

$$= 3|x-1| \langle \varepsilon \ , \quad |x-1| \langle \frac{\varepsilon}{3} = \delta \ , \ \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$$

ҳамин тавр, ҳангоми $|x-1| \langle \ \delta$ будан нобоўробарии $|3x-8+5| < \varepsilon$ иҷро мешавад, бинобар ин $\lim\limits_{x \to 1}(3x-8) = -5$ аст.

Мисоли 4.5.3.. Ёфта шавад:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} .$$

Ҳал. Аз формулаҳои асосӣ истифода мебарем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Мисоли 4.5.4. Ҳудудро ҳисоб кунед:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x .$$

Ҳал. Табдилдиҳӣ намуда ҳисоб мекунем:

$$\lim_{x \to \infty} = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[1 + \left(\frac{-2}{x+1} \right) \right]^x = \lim_{x \to \infty} \left\{ \left[1 + \left(\frac{-2}{x+1} \right) \right] \left(\frac{x+1}{2} \right) \right\}^{-\frac{2x}{1+x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x}} = e^{-2} . = \frac{1}{e^2}$$

Мисоли 4.5.5. Ҳисоб карда шавад:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}.$$

Ҳал. Ишора мекунем: $x-1=y,\ x\to 1,\ y\to o$ аз ин ҷо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{\sqrt[4]{1+y}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}}{\frac{\sqrt[4]{1+y}-1}{y}}=\frac{4}{3}.$$

Мисоли 4.5.6. Ҳудудро ҳисоб кунед:

$$\lim_{x\to o}\frac{\ln(1+x)}{3^x-1}.$$

Ҳал. Аз формулаҳои асосӣ истифода мебарем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3^x-1}{x}}=1\cdot\frac{1}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}.$$

Мисоли 4.5.7. Ҳудуд ҳисоб карда шавад $\lim\limits_{x\to o}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin\ x}\right)^{\frac{1}{\sin\ x}}$

Ҳал. Аз формулаи (8) истифода мебарем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}-1\right)\frac{1}{\sin x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to o}\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to o}\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}}=e^{o}=1.$$

Мисоли 4.5.8. Функсияҳои $a)\ (tgx)^2,\ б)\ \sqrt{9+x}-3$ – ро бо функсияи беохир хурди $g(x)=x$ дар ҳолати $x\to o$ будан муқоиса кунед.

Ҳал. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(tgx)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^2\cdot\ \ x=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=1\cdot\ \ 0=0$

Функсияи $(tgx)^2$ нисбат ба функсияи $g(x)=x$ функсияи беохир хурди тартиби олӣ мебошад, ё худ $(tgx)^2=o(x)$.

б) $\lim\limits_{x\to o}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\lim\limits_{x\to o}\frac{9+x-9}{x\left(\sqrt{9+x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to o}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{6}$

Фуксияи беохир хурди $\sqrt{9+x}-3$ нисбат ба x функсияи беохир хурди тартиби якхела мебошад.

Мисоли 4.5.9. Нишон диҳед, ки функсияи $y=\frac{x^2-25}{x-5}$ дар нуқтаи $x=5$ каниш дорад.

Ҳал. Маълум аст, ки дар нуқтаи $x=5$ ин функсия номуайян мебошад $\frac{0}{0}$. Дар нуқтаҳои дигар ба $x-5$ касрро тақсим намудан мумкин аст, чунки $x-5\neq 0$. Аз ин ҷо $\lim\limits_{x\to 5-0}y=\lim\limits_{x\to 5+0}y=10$. Яъне $f(5-0)=f(5+0)\neq f(5)$. Функсия дар нуқтаи $x=5$ каниши бартарафшаванда дорад.

Мисоли 4.5.10. Нишон диҳед, ки функсияи $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ дар нуқтаи $x=0$ каниши ҷинси якум дорад.

Ҳал. Дар ҳақиқат

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{-x}=-1$$

мебошад, яъне $f(0+0)\neq f(0-0)$, бинобар ин, функсия дар нуқтаи $x=0$ каниши ҷинси якум дорад.

Мисоли 4.5.11. Мунтазам бефосилагии функсияро татқиқ намоед:

$a)\quad f(x)=x^2, \qquad x\in(-\ell\,;\ell),$

$б)\, f(x)=\sin\frac{\pi}{x} \qquad , \quad x\in(0,1)$

Ҳал. a) Дар интервали $(-\ell\,;\ell)$ функсияи додашуда мунтазам бефосила мебошад, чунки барои ҳаргуна $\varepsilon>0$ чунин $\delta(\varepsilon)>0$ ёфт мешавад, ки дар ҳолати $|x'-x''|<\delta$ будан нобаробарии $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ иҷро мешавад, яъне

$$|f(x')-f(x'')|=|x'^2-x''^2|=|x'-x''|\cdot|x'+x''|.$$

Маълум аст, ки $|x'+x''|<2\ell$ аст, бинобар ин, ҳосил мекунем, ки, $|f(x')-f(x'')|<2\ell\cdot|x'-x''|<\varepsilon$ дар ҳолати $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2\ell}$ будан функсияи додашуда мунтазам бефосила мебошад.

б) Функсияи $\sin\dfrac{\pi}{x}$ дар интервали $(0;1)$ - маҳдуд ва бефосила мебошад. Вале ин функсия дар интервали додашуда мунтазам бефосила намебошад. Дар ҳақиқат дар интервали $(0;1)$ пайдарпаити нуқтаҳои $x'_n=\dfrac{1}{n}$ ва $x''_n=\dfrac{2}{2n+1}$ -ро мегирем. Он гоҳ

$$\left|x'_n - x''_n\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Вале

$$\left|f(x'_n) - f(x''_n)\right| = \left|\sin\frac{\pi}{x'_n} - \sin\frac{\pi}{x''_n}\right| =$$

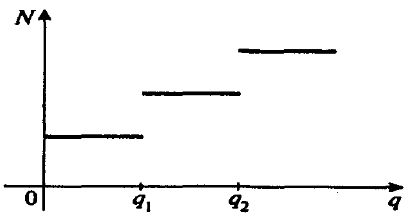
$$= \left|\sin n\pi - \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right| = \left|-\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \rangle \varepsilon$$

мешавад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки функсияи додашуда дар интервали $(0;1)$ ғайримунтазам бефосила мебошад.

§6.Маънои иқтисодии бефосилагии функсия

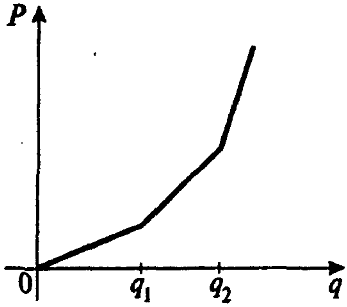
Аксари функсияҳои дар масъалаҳои иқтисодӣ истифодашаванда q бефосила намебошанд. Масалан, функсияҳои тақозо ва арза метавонанд функсияҳои канишнок бошанд.

Функсияи меъёри андоз N дар фоиз, ки аз бузургии даромад q вобаста аст, функсия канишнок мебошад(ниг. расми4.6.1):



Расми 4.6.1. Графики функсияи андоз

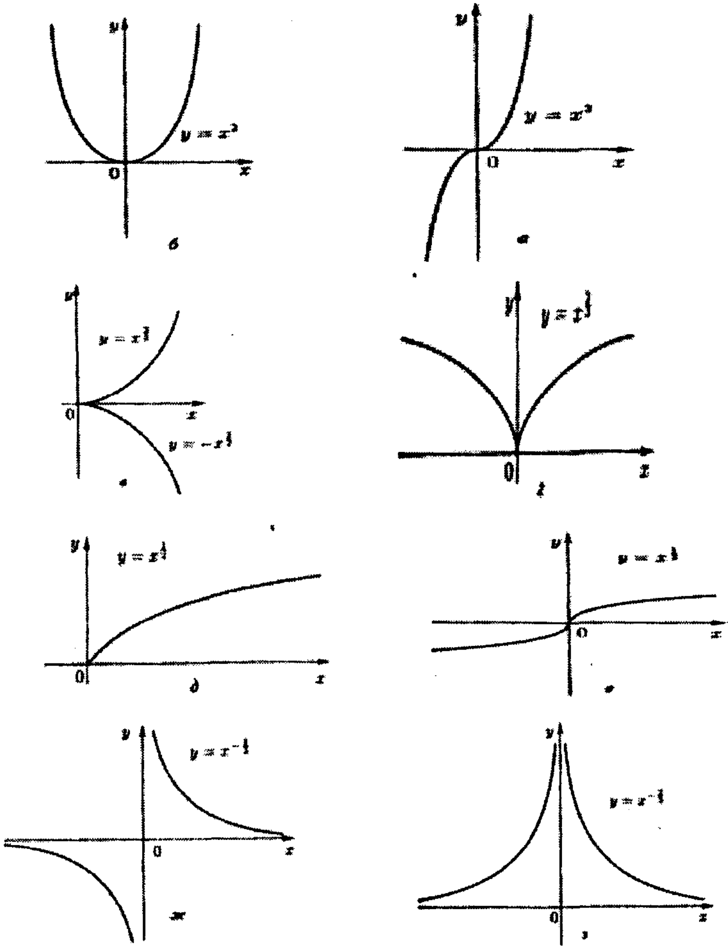
Аммо бузургии андоз аз маош P функсияи бефосила аз даромади солона q мебошад (ниг. ба расм 4.6.2):

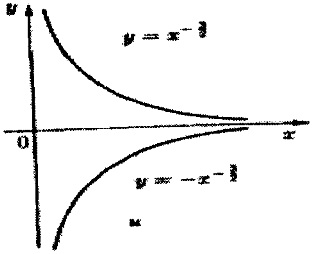


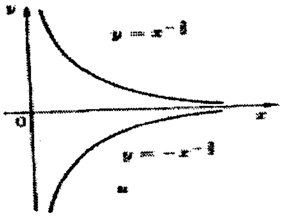
Расми 4.6.2. Графики функсияи андоз аз музди кор

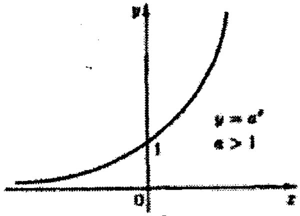
Аз бефосилагии функсияи $P=P(q)$ дар ҳолати хусусӣ мебарояд, ки даромади андозсупоранда кам бошад, бузургии андоз аз музди кор низ зиёд нест. Чӣ тавре ки маълум аст, ду намуди асосии муносибатҳои бозорӣ - тақозо ва арза мавҷуданд. Ҳар дуи ин мафҳум аз омилҳои зиёд вобастагӣ доранд ва дар байни ин омилҳо аз ҳама асосӣ нархи мол мебошад. Нархи молро бо р –ишора мекунем, ҳаҷми тақозоро бо D – ишора мекунем, бузургии арзаро бо S – ишора менамоем. Мазмунан функсияҳои $D=D(p)$ ва $S=S(p)$ аз р бефосила вобастагӣ доранд. Яъне бо кам тағйирёфтани нарх, тақозо ва арза ҳам кам тағйир меёбанд. Вале дар баъзе ҳолатҳо тақозо ҷаҳишнок тағйир меёбад, ки ҳангоми болоравии нарх дар баъзе молҳо, тақозо ба ин молҳо паст мешавад, агар нарх якбора боло равад, тақозо ба ин мол тез паст мешавад. Ҳангоми таҳлили функсияҳои $D=D(p)$ ва $S=S(p)$ хосиятҳои функсияҳои бефосиларо истифода бурдан мумкин аст. Фарқи $D(p)-S(p)$- ро мегирем. Ҳангоми паст будани нарх р $D(p)-S(p)>0$ (тақозо аз арза боло меравад) ва дар акси ҳол $D(p)-S(p)<0$ мешавад. Барои фарқи $D(p)-S(p)$ теоремаи Болсано - Коширо истифода бурда, ба чунин хулоса меоем: нархи P_0 - мавчуд аст, ки $D(p_0)-S(p_0)= 0$ мешавад, ё худ $D(p_0)=S(p_0)$. Ин нархи мувозинатӣ номида мешавад.

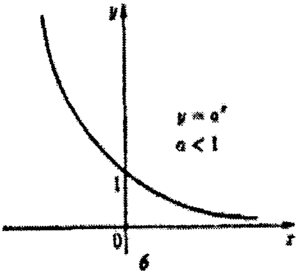
§7.Графики баъзе функсияҳои элементарӣ



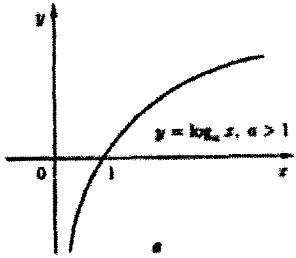


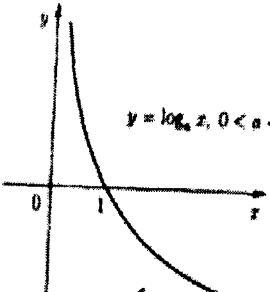






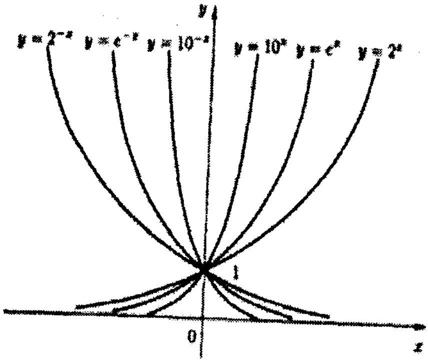
б



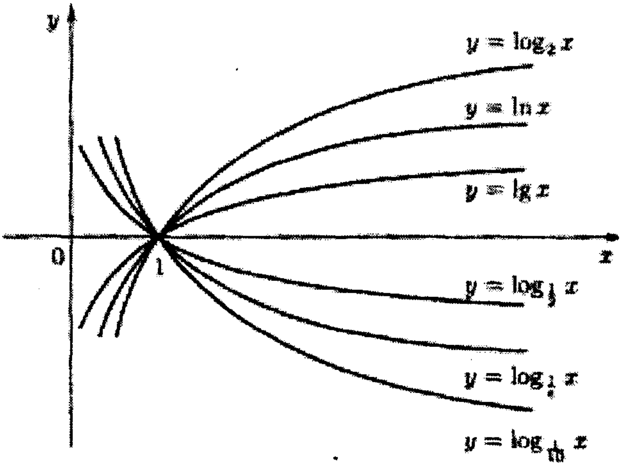


y
$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$
0
1
x

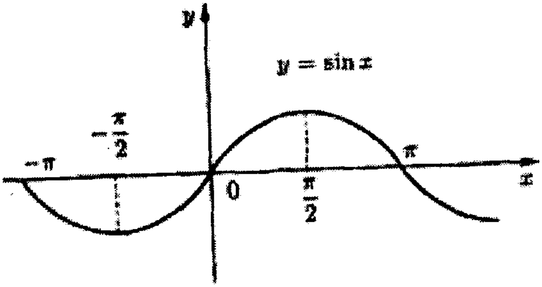
б

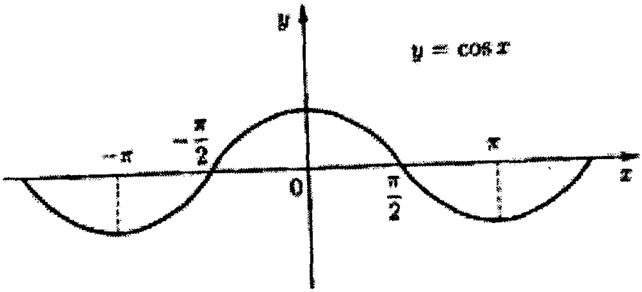


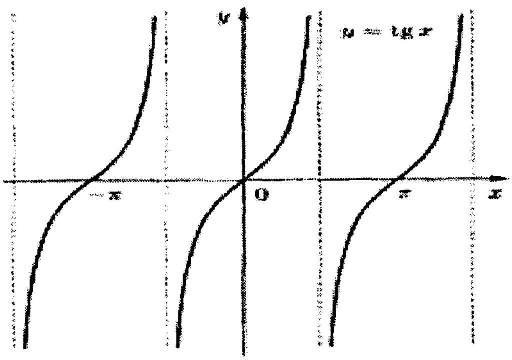
y
$y = 2^{-x}$
$y = e^{-x}$
$y = 10^{-x}$
$y = 10^x$
$y = e^x$
$y = 2^x$
1
0
x

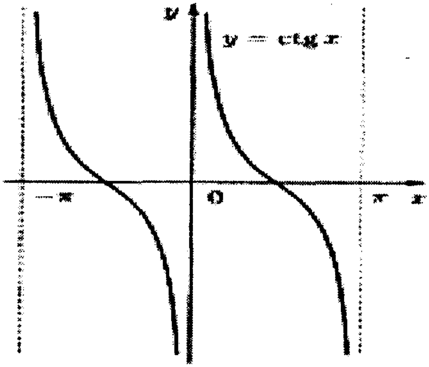


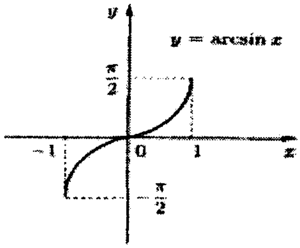
y
$y = \log_2 x$
$y = \ln x$
$y = \lg x$
0
1
x
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$y = \log_{\frac{1}{e}} x$
$y = \log_{\frac{1}{10}} x$

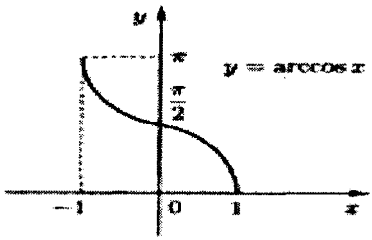

y
y = sin x
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
π
x
0
$\frac{\pi}{2}$

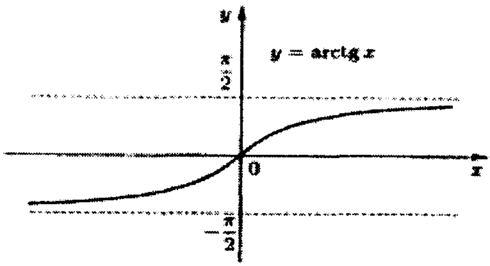

y
y = cos x
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
π
x
0
$\frac{\pi}{2}$

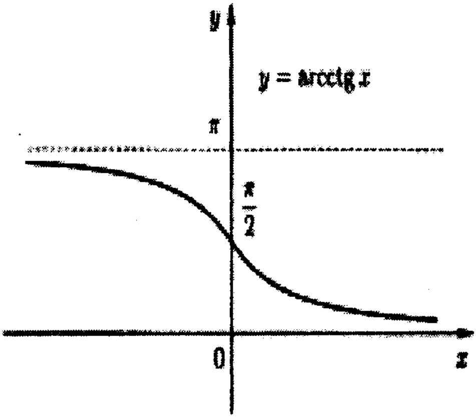

y
y = tg x
$-\pi$
O
π
x


y
y = ctg x
−π
O
π
x


y
y = arcsin x
π/2
−1
0
1
x
−π/2


y
π
y = arccos x
π/2
−1
0
1
x


y
y = arctg x
π/2
0
x
−π/2



Кори мустақилонаи 4.1.1.

1) Исбот кунед, ки ададҳои зерин ирратсионалӣ мебошанд:

а) $2+x=\alpha\sqrt{t}$,   б) $\sqrt{3}$.

2) Сарҳади поёнӣ ва болоии ададҳои ратсионалии z -ро ёбед, ки нобаробарии $z^2<2$ -ро қаноат кунонанд.

3) Бо методи идуктсияи математикӣ дурустии ифодаҳои зеринро исбот кунед:

а) $1+2^2+3^2+\ldots n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

б) $2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n$, $n>1$;

в) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{n}$; $n\geq 2$.

Кори мустақилонаи 4.1.2.

1) Нобаробариро ҳал кунед:

а) $|x-2|\geq 1$,   *б*) $|2x-1|\langle\ |x-1|$

2) Муодиларо ҳал кунед:

$$a)\ |3x-4|=\frac{1}{2}, \qquad б)\ |x|=x+5.$$

3) Исбот кунед, ки

$$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

4) Бигзор, $\{x\}=\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\ldots,\right\}$ бошад. Ёфта шавад $\inf\{x\}$ *ва* $\sup\{x\}$.

Кори мустақилонаи 4.2.1.

1) Аз таърифи ҳудуд истифода бурда, нишон диҳед, ки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{5n^2-1}=\frac{3}{5}$ мешавад. Аз кадом номер сар карда, нобаробарии $\left|x_n-\frac{3}{5}\right|\langle 0.01$ иҷро мешавад?

2) Ҳудудҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}, \qquad б)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5},$$

$$в)\lim_{n\to\infty}n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right), \qquad г)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

Кори мустақилонаи 4.2.2.

1. Ҳудудро ҳисоб кунед:

$$a)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n};$$

$$б)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$$

2. Нишон диҳед, ки пайдарпаии $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ якзайл камшаванда мебошад.

3. Критерияи Коширо истифода бурда, дуршавии пайдарпаи $\{x_n\}$ ро исбот

кунед, агар $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ бошад.

Кори мустақилонаи 4.3.1.

1. Бигзор, $f(x) = arc\cos(l\,gx)$ бошад, пас (ниг. ба расми 4.4.1) ёфта шавад:

$$f\left(\frac{1}{10}\right), \quad f(1) \text{ ва } f(10)$$

2. Функсияи хаттии $f(x)$-ро муайян кунед, агар

$$f(-1) = 2 \quad ва \quad f(2) = -3 \quad \text{бошад.}$$

3. Соҳаи муайянии функсияҳоро нишон диҳед:

$$а)\ y = \lg\frac{2+x}{2-x}, \qquad б)\ y = \arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right),$$

$$в)\ y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}, \qquad г)\ y = \sqrt[3]{x+1}.$$

4. Маҷмӯи қиматҳои функсияи $y = x^2 - 6x + 5$ -ро ёбед.

Кори мустақилонаи 4.3.2.

1. Графики функсияи $y = x^2(2-x)^2$-ро дар порчаи $[-3;3]$ созед.

2. Муайян намоед, ки кадоме аз ин функсияҳо ҷуфт ё тоқанд:

$$а)\ f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right), \quad б)\ f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x},$$

$$в)\ f(x) = x^4 \sin 7x, \qquad г)\ f(x) = x^2 + \sin x$$

3. Даври асосии функсияи $f(x) = \cos x$-ро ёбед.

Кори мустақилонаи 4.5.1.

1) Таърифи ҳудудро истифода бурда, исбот намоед, ки $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}=2$ аст.

2)Ҳудудро ҳисоб кунед:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{tg\, mx}{\sin nx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{x^2+1}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{2x}-1}{x}$

Кори мустақилонаи 4.5.2.

1) Ҳудуди функсияро ҳисоб намоед:

а) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

2) Ҳудудҳои яктарафа ёфта шаванд:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{|\sin x|}{x}$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x-1}{|x-1|}$

3) Бигзор, $x\to 0$ бошад. Пас тартиби функсияҳои беохир хурди зеринро нисбат ба х муайян кунед:

а) $f(x)=2\sin^4 x-x^5$, б) $f(x)=e^x\cos x$,

в) $f(x)=tgx+x$.

Кори мустақилонаи 4.5.3.

1) Нишон диҳед, ки функсияҳои додашуда дар нуқтаи $x=x_0$ кадом намуди канишро доранд:

а) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-5}$, $\quad x_0=5$; $\qquad$ б) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$, $\quad x_0=0$;

в) $f(x)=tgx$, $\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

2) Доир ба бефосилагӣ тадқиқ намоед:

а) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; $\quad$ б) $y=\dfrac{x}{|x|}$; $\quad$ в) $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

3) Мунтазам бефосилагии функсияро тадқиқ кунед:

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $(1\le x\le\infty)$; $\quad$ б) $f(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$, $\quad -2\le x\le 2$.

Ҷавобҳо

К.М. 4.1.2.

1) а) $(-\infty;1]U[3;\infty)$, $\quad$ б) $0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

2) а) $\left\{\dfrac{7}{6};\dfrac{3}{2}\right\}$, $\quad$ б) -2,5, $\quad$ 4) 0; 1..

К.М. 4.2.1.

1) N=5, $\quad$ 2) а) 3, $\quad$ б) 1, $\quad$ г) $\frac{1}{2}$.

К.М. 4.2.2.

1) а) e^4, $\quad$ б) 2.

К.М. 4.3.1.

1) $\pi;\dfrac{\pi}{2};0$, $\quad$ 2) $f(x)=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{3}$, $\quad$ 3) а) $-2<x<2$.

б) $1\le x\le 100$, $\quad$ в) $-2<x\le 0$, $\quad$ г) $-\infty<x<\infty$,

4) $-\infty<x<\infty$.

К.М. 4.3.2.

2) а) ҷуфт, $\quad$ б) тоқ, $\quad$ в) тоқ, $\quad$ г) на тоқ ва на ҷуфт,

3) 45^0

К.М. 4.5.1.

2) а) 0,5, б) $\frac{m}{n}$, в) 0,25, г) e , з) 2lnα.

К.М. 4.5.2

1) а) -2 , б) $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$, в) e, г) $\sqrt{e}$.

2) а) -1;1, б) -1;1.

3) а) чор, б) як, в) як.

К.М. 4.5.3.

1) якум, б) якум, в) дуюм.

2) а) $x=2$ каниши ҷинсӣ 2-юм; б) х=0 ҷинсӣ як

в) $x=1$ ҷинсӣ як.

Боби V. Ҳосила ва дифференсиал

§1 Ҳосила

Таърif 1. Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи қайдкардашудаи x гуфта ҳудуди охирноки ифодаи $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$-ро дар ҳолати $\Delta x \to 0$ меномем ва онро чунин ишора мекунем: y'_x, $f'(x)$, $D_x f$, $\frac{dy}{dx}$.

I. Қоидаҳои асоси ҳосила:

1) $(c)' = 0$,   с- доимӣ

2) $(cu)' = cu'$,

3) $(x)' = 1$,

4) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

5) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$,

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

7) $y = f(u)$, $u = u(x)$ пас $y_x' = f_u'[u(x)]u_x'(x)$.

II. Ҷадвали ҳосилаи функсияҳои асосӣ

1) $(x^m)' = mx^{m-1}$

2) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

4) $(a^x) = a^x \ln a$

11) $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $(arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $(arc\,tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

14) $(arc\,tgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$5)(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $15)(shx)' = chx$

$6)(\log ax)' = \dfrac{1}{x\lg a}$ $\qquad$ $16)(chx)' = shx$

$7)(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $17)(thx)' = \dfrac{1}{ch^2x}$

$8)(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $18)(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2x}$

$9)(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $19)(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$10)(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $20)\left([u(x)]^{v(x)}\right)' = u^v\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$

Ифодаҳои

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{ва} \quad f'_-(x) = \lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

мувофиқан ҳосила аз тарафи рост ва чап дар нуқтаи x номида мешаванд. Шарти зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти ҳосилаи функсия чунин аст:

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

Агар $f'(x) = \infty$ бошад, он гоҳ мегуянд, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x ҳосилаи беохирро дорад.

Таърифи 2. Дифференсиали функсияи $y=f(x)$ гуфта қисми хаттии афзоиши функсияро нисбат ба Δx меноманд ва бо символи $dy = f'(x)dx$ ишора мекунанд.

Барои ҳисоб намудани дифференсиали функсия аввало ҳосилаи функсияро гирифтан лозим аст , баъд онро ба dx зарб задан даркор.

Агар функсия ба намуди параметрӣ $x=\varphi(t)$ ва $y=\psi(t)$ дода шуда бошад, он гоҳ ҳосилаи функсия бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$y_x' = \frac{\Psi_t'(t)}{\varphi_t'(t)} = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Мисоли 5.1.1. Афзоиши Δy ва нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро барои функсияи $y = \sqrt{x}$ ёбед, дар ҳолати $x = 0$ *ва* $\Delta x = 0{,}0001$ будан.

Ҳал. Маълум аст, ки

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{0 + 0{,}0001} - \sqrt{0} = \sqrt{0{,}0001} = 0{,}01 \quad \text{аст.}$$

Акнун нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -ро меёбем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}01}{0{,}0001} = 100.$$

Мисоли 5.1.2. Аз таърифи ҳосила истифода бурда, ҳосилаи функсияи $y = -ctgx - x$ -ро ёбед.

Ҳал. Аз таърифи афзоиши функсия истифода бурда меёбем:

$$\Delta y = -ctg(x + \Delta x) + ctgx - (x + \Delta x) + x = ctgx - ctg(x + \Delta x) - \Delta x$$

Формулаи $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ -ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - \Delta x$$

Аз ин ҷо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 \quad \text{аст.}$$

Дар асоси таърифи ҳосила меёбем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = ctg^2 x.$$

Мисоли 5.1.3. Ҳосилаи функсияи

$$y = x^2 e^x + \frac{\arcsin x}{x} + 3\cos x \quad - \textit{ро ёбед}.$$

$$Хал.\, y = \left(x^2 e^x\right)' + \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' + \left(3\cos x\right)' =$$

$$= \left(x^2\right)' e^x + x^2 \left(e^x\right)' + \frac{\left(\arcsin x\right)' x - \left(x\right)' \arcsin x}{x^2} + 3\left(\cos x\right)' =$$

$$= 2xe^x + x^2 e^x + \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arcsin x}{x^2} - 3\sin x =$$

$$= xe^x\left(2 + x\right) - 3\sin x + \frac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

Мисоли 5.1.4. Барои фуннксияи $f(x) = \sqrt[3]{x^4}\sin x, \quad f'(o)$ ёфта шавад.

Ҳал.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' \sin x + \sqrt[3]{x^4}\left(\sin x\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' \sin x + \sqrt[3]{x^4}\cos x =$$

$$\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\sin x + \sqrt[3]{x^4}\cos x.$$

Аз ин ҷо $f'(0) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{0}\sin 0 + \sqrt[3]{0^4}\cos 0 = 0$ аст.

Мисоли 5.1.5. $f'(1)$ -ёфта шавад, агар $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x^{10}$ бошад.

Ҳал:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + 2\left(x^{10}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + 20x^9,$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 20 = 20.$$

Мисоли 5.1.6. Ҳосилаи функсияи $y=x^{3/2}(3\ln x-2)$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. $y'=\left(x^{3/2}\right)'\cdot(3\ln x-2)+x^{3/2}(3\ln x-2)'=$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x-2)+x^{3/2}\cdot 3\frac{1}{x}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}=$$

$$=\tfrac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$$

Мисоли 5.1.7. Нишон диҳед, ки функсияи $y=3|x|+1$ дар нуқтаи $x=0$ ҳосила надорад.

Ҳал. Дар ҳолати $\Delta x\to+0$ будан $\Delta y|_{x=0}=3(0+\Delta x)+1-1=3\Delta x$ аст.

бинобар ин $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3=f_+'(0)$ мешавад.

Бигзор, $\Delta x\to-0$ бошад, пас

$\Delta y|_{x=0}=-3(0+\Delta x)+1-1=-3\Delta x$ мешавад.

Аз ин ҷо $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-3$ мебошад.

Азбаски $f_-'(0)\neq f_+'(0)$ аст, бинобар ин, функцияи $f(x)=3|x|+1$ дар нуқтаи $x=0$ ҳосила надорад.

Мисоли 5.1.8. Қимати $\arcsin 0{,}51$ - ро тақрибӣ ҳисоб кунед.

Ҳал. Формулаи тақрибӣ ҳисобкуниро истифода бурда, мисоли додашударо ҳал мекунем:

$$f(x_o+\Delta x)\approx f(x_o)+f'(x_o)\Delta x$$

$$\arcsin 0{,}51\approx\arcsin 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01=$$

$$=\frac{\pi}{6}+0{,}011=0{,}513$$

Мисоли 5.1.9. Қимати $\sqrt[5]{33}$ -ро тақрибӣ ҳисоб кунед.

Ҳал. Барои тақрибӣ ҳисоб намудани қимати $\sqrt[5]{33}$ аз формулаи зерин истифода мебарем:

$$\sqrt[5]{x_o+\Delta x}\approx\sqrt[5]{x_o}+\frac{1}{5\sqrt[5]{x_0^{\ 4}}}\Delta x.$$

Фарз мекунем, ки $x_o=32$ *ва* $\Delta x=1$ бошад, он гоҳ

$$\sqrt[5]{33}=\sqrt[5]{32+1}=\sqrt[5]{32}+\frac{1}{5\sqrt[5]{32^{4}}}\cdot 1=$$

$$=\sqrt[5]{2^5}+\frac{1}{5\sqrt[5]{2^{5\cdot 4}}}=2+\frac{1}{5\cdot 2^4}=2+\frac{1}{80}=2.0125$$ мешавад.

Мисоли 5.1.10. y'_x - ёфта шавад, агар

$x(t)=t^3+3t+1$ *ва* $y(t)=15t^4+15t^2$ бошад

Ҳал. Маълум аст, ки $x'_t=3t^2+3$,

$y'_t=\left(15t^4+15t^2\right)'=60t^3+30t$ мешавад.

Аз ин ҷо

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{60t^{3+}30t}{3x^2+3}=\frac{30t(2t^2+1)}{3(t^2+1)}=\frac{10t(2t^2+1)}{t^2+1}$$ аст.

Мисоли 5.1.11. Ёфта шавад y'_x, агар $y=x^{x^2}$ бошад,

Ҳал. Дар асоси формулаи $\left(u^v\right)'=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$ ҳосил мекунем:

$$y'_x=x^{x^2}\left(2x\ln x+x^2\tfrac{1}{x}\right)=x^{x^2}\left(2x\ln x+x\right)=x^{x^2+1}\left(2\ln x+1\right).$$

§2. Ҳосилаи тартиби олӣ ва теоремаҳои асосӣ

I. Ҳосилаи тартиби олӣ. Ҳосилаи тартиби олӣ гуфта ҳосилаи тартиби ду ва аз ин зиёдаро меномем.

Барои ҳосилаи тартиби дуюмро ёфтан аз ҳосилаи тартиби якум бори дигар ҳосила гирифтан лозим аст, барои ҳосилаи тартиби сеюмро ёфтан аз ҳосилаи тартиби дуюм як бори дигар ҳосила мегирем ваҳоказо; барои ёфтани ҳосилаи тартиби n –ум аз ҳосилаи тартиби $n-1$– ум бори дигар ҳосила гирифтан лозим аст.

Формулаҳои зерин ҷой доранд:

1) $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$,

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $(a > o)$, $(e^x)^{(n)} = e^x$,

3) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$,

4) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$,

5) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Формулаи Лейбнитс

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v^{I} + n(n-1)u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

II. Теоремаҳои асосӣ

1. **Теоремаи Ролле.** Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошад, дар нуқтаҳои дохилиаш ҳосилаи $f'(x)$ - ро дошта бошад ва $f(a)=f(b)$ бошад, он гоҳ дар байни a ва b чунин нуқтаи ξ -ёфт мешавад, ки $f'(\xi)=0$ мешавад.

2. **Теоремаи Лагранж.** Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошад ва дар нуқтаҳои дохилиаш ҳосилаи $f'(x)$ - ро дошта бошад, он гоҳ дар байни a ва b чунин нуқтаи ξ-ёфт мешавад, ки $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ мешавад.

3. **Теоремаи Коши.** Агар функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошанд дар, нуқтаҳои дохилиаш, онҳо ҳосоила дошта бошанд, ки

ин ҳосилаҳо якбора ба сифр мубаддал нашаванд $(g(a) \neq g(b))$, пас формулаи зерин ҷой дорад:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad a < \xi < b.$$

III.Қоидаи Лапитал. Барои кушодани номуайянии $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ чунин қоида ҷой дорад. Агар функсияҳои $f(x)$ *ва* $g(x)$ дар атрофи ягон нуқтаи a дифференсиронидашаванда бошанд, $g'(x) \neq 0$ ва агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ *ё* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

Бошад, он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ба шарте ки $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ - мавҷуд бошад. Бо ёрии табдилдиҳиҳои алгебравӣ номуайяниҳои $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty; 1^\infty$, ∞^0 *ва* 0^0 ба номуайяниҳои намуди $\frac{0}{0}$ ё $\frac{\infty}{\infty}$ оварда мешаванд.

4. Формулаи Тейлор. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошад, ҳосилаи бефосилаи тартиби $n-1$ - умро дошта бошад ва дар нуқтаҳои дохилии ин порча ҳосилаи охирноки n -умро дошта бошад, пас барои $x\in[a;b]$ формулаи зерин ҷой дорад:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}+R_n(x).$$

Агар дар ин формула $a=o$ бошад, пас формулаи Маклоренро ҳосил мекунем:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),$$

$R_n(x)$ -аъзои боқимонда номида мешавад. Аъзои боқимондаи формулаи Тейлор, ба намуди Лагранж чунин намуд дорад:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n,(0\langle\theta\langle 1),$$

мувофиқан аъзои боқимондаи формулаи Маклорен ба намуди Лагранж чунин аст

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

Мисоли 5.2.1. Ҳосилаи тартиби n - уми функсияи $y=\sin 5x\cdot\cos 2x$ - ро ёбед.

Ҳал. Аз формулаҳои тригонометрӣ истифода мекунем:

$$y=\sin 5x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}[\sin 7x+\sin 3x],$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[(\sin 7x)^{(n)}+(\sin 3x)^{(n)}\right]=\frac{1}{2}\left[7^n\sin\left(7x+n\frac{\pi}{2}\right)+3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Мисоли 5.2.2. Формулаи Лейбнитсро татбиқ намуда, ҳосилаи тартиби 25-уми функсияи $y=x^2\sin x$ - ро ёбед.

Ҳал. $y^{(25)}=(x^2\sin x)^{(25)}=(\sin x)^{(25)}x^2+$

$$+25(\sin x)^{(24)}(x^2)'+\ldots+\frac{25\cdot 24}{2}\sin x(x^2)^{(25)}=$$

$$=x^2\sin\left(x+25\frac{\pi}{2}\right)+50x\sin(x+12\pi)+$$

$$+600\sin\left(x+25\frac{\pi}{2}\right)+0=(x^2-600)\cos x+50x\cdot\sin x$$

Мисоли 5.2.3. Шартҳои теоремаи Ролле барои функсияҳои $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ дар порчаи $[-1;1]$ иҷро мешаванд ё не?

Ҳал. Маълум аст, ки функсия дар порчаи $[-1;1]$ бефосила ва

$f(-1)=f(1)=0$ аст. Аз ин ҷо мебарояд, ки ду шарти теоремаи Ролле иҷро мешаванд. Акнун шарти 3-ро месанҷем. Ҳосилаи $f'(x)=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^{-1}}$ дар ҳамаи нуқтаҳои порчаи $[-1;1]$, ба ғайр аз нуқтаи $x=0$, мавҷуд аст. Азбаски нуқтаи $x=0$ дохилӣ мебошад, бинобар ин, теоремаи Ролле барои функсияи додашуда татбиқ намешавад.

Мисоли 5.2.4. Санҷед, ки функсияҳои

$$f(x)=x^2-2x+3 \quad \text{ва} \quad g(x)=x^3-7x^2+20x-5$$

дар порчаи $[1;4]$, шартҳои теоремаи Коширо қаноат мекунанд ё не.

Ҳал. Функсияҳои $f(x)$ *ва* $g(x)$ дар порчаи $[1,;4]$ бефосила мебошанд ва ҳосилаҳои онҳо $f'(x)=2x-2$, $g'(x)=3x^2-14x+20$ мавҷуданд, ғайр аз ин, барои ҳамаи қиматҳои ҳақиқии x, $g'(x)\neq 0$, ҳамин тавр, барои ин функсияҳо формулаи Коши татбиқшаванда мебошад:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{ё худ} \quad \frac{11-2}{27-9}=\frac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20}, \quad (1<\xi<4).$$

Мисоли 5.2.5. Ёфта шавад $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

Ҳал. Маълум аст, ки дар ҳолати $x\to 0$ номуайянни $\frac{0}{0}$ ҳосил мешавад. Қоидаи Лопиталро такроран татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cdot 3x}=\frac{1}{6}.$$

Мисоли 5.2.6. Ёфта шавад $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$.

Ҳал. Дар ин ҳолат номуайянии намуди $\frac{\infty}{\infty}$ - ро ҳосил мекунем. Боз ҳам қоидаи Лапиталро такроран татбиқ намуда, меёбем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{x/2}}=0$$

Мисоли 5.2.7. Қимати $\sin 49^0$ - ро бо саҳеҳии 10^{-6} тақрибӣ ҳисоб кунед.

Ҳал. Барои он ки қимати $\sin 49^0$ -ро тақрибӣ ҳисоб намоем, аввало, формулаи Тейлорро барои функсияи $\sin x$ менависем:

$$\sin x=\sin a+\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{(x-a)}{1!}+\sin(a+\pi)\frac{(x-a)^2}{2!}+$$

$$+\ldots+\sin\left(a+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}+R_n,$$

$$R_n\le\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)}\quad,\qquad \textit{чунки}\ |\sin\alpha|\le 1$$

Бигзор , $x=\frac{\pi}{180}\cdot 49^0$ *ва* $a=\frac{\pi}{180}\cdot 45^0$ бошанд, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$x-a=\frac{\pi}{180}(49-45)=\frac{\pi}{45},$$

$$\sin 49^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{1!45}-\frac{\pi^2}{2!45^2}-\frac{\pi^3}{3!45^3}+\ldots+\frac{\pi^n}{n!45^n}\right)+R_n,$$

$$|R_n|\le\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!45^{n+1}},$$

барои муайян намудани миқдори аъзоҳое, ки дараҷаи саҳеҳии додашударо таъмин намоянд, аъзои боқимонда R_n-ро пайдарпай баҳо медиҳем:

$$|R_1|\le\frac{\pi^2}{2!45^2}\langle 0{,}003 \qquad |R_2|\le\frac{\pi^3}{3!45^3}\langle 0{,}0006$$

$$|R_3|\le\frac{\pi^4}{4!45^4}\langle 0{,}0000009\langle 10^{-6}$$

Барои то саҳеҳии 10^{-6} ҳисоб намудани қимати $\sin 49^0$ кифоя аст гирифтани чор аъзои аввала:

$$\sin 49^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{45}-\frac{\pi^2}{2!45^2}-\frac{\pi^3}{3!45^3}\right)\approx$$

$$\approx 0{,}7071068(1+0{,}0698113-0{,}0024369-0{,}0000567)\approx 0{,}754709.$$

Мисоли 5.2.8. Функсияи $f(x)=e^{2x-x^2}$ -ро то дараҷаи x^5 ба фомулаи Маклерон паҳн намоед.

Ҳал. Маълум аст, ки формулаи Маклерон барои функсияи e^x чунин аст:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n).$$

Аз ин формула истифода бурда ҳосил мекунем

$$e^{2x-x^2} = 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2!}(2x-x^2)^2+\ldots+\frac{1}{n!}(2x-x^2)^n+0(x^n)$$

Акнун то дараҷаи x^5 -ро мегирем:

$$e^{2x-x^2} = 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(2x-x^2)^2+\frac{1}{6}(2x-x^2)^3+\frac{1}{4!}(2x-x^2)^4+$$

$$+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+0(x^5)=1+2x-x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+0(x^5).$$

§3. Истифодабарии ҳосила дар иқтисодиёт

1. **Маънои иқтисодии ҳосила. Маҳсулнокии меҳнат.** Бигзор, функсияи $g = g(t)$ ҳаҷми маҳсулоти истеҳсолшуда дар мудати вақти t бошад, талаб карда мешавад, ки маҳсулнокии меҳнат дар лаҳзаи вақт t_0 муайян карда шавад. Мудати вақти t_0 то $t_0+\Delta t$ - ро мегирем. Дар ин мудат ҳаҷми маҳсулоти истеҳсолшуда $g(t_0+\Delta t)-g(t_0)$ - ро ташкил медиҳад. Истеҳсоли миёнаи маҳсулоти истеҳсолшуда дар ин мудат ба $\frac{\Delta g}{\Delta t}$ баробар аст. Дар

лаҳзаи вақти t_0 маҳсулнокии меҳнатро ҳамчун ҳудуди қимати миёнаи $\frac{\Delta g(t)}{\Delta t}$, ҳангоми $\Delta t > 0$ муайян мекунем, яъне $g'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g(t)}{\Delta t}$.

Ҳамин тариқ, масъалаи истеҳсоли маҳсулот дар лаҳзаи вақт t_0 бо масъалаи ёфтани ҳосилаи функсия дар ин лаҳза оварда шуд.

Масъаларо ба тарзи дигар ҳам маънидод кардан мумкин аст. Бигзор миқдори маҳсулот дар аксар мавридҳо g аз сарфи меҳнат x вобаста бошад $g = g(x)$.

Барои баҳодиҳии маҳсулнокии истеҳсолот барориши миёнаро интихоб мекунанд, ки дар ин ҳолат бо танасуби $\frac{g}{x}$ ифода мешавад.

Саволи дигаре ба миён меояд: Бо тағйирёбии миқдори кормандон ҳаҷми маҳсулот чӣ тавр тағйир меёбад? Ҷавобро бо дохил намудани мафҳуми ҳаҷми ҳудудии истеҳсолӣ пайдо кардан мумкин аст, ки ин ҳосилаи ҳаҷми маҳсулоти g нисбат ба сарфи меҳнати x аслӣ аст. Яъне

$$g' = \frac{dg}{dx}$$

ҳаҷми ҳудудии истеҳсолии тағйирёбии ҳаҷми маҳсулотҳо ҳангоми ба як воҳид тағйир додани миқдори корғаронро ифода мекунад.

Агар миқдори коргарон a зиёд бошад, он гоҳ афзоиши Δa -ро кифоя хурд шуморида баробарии тақрибиро истифода мебарем:

$$g(a) = \frac{\Delta g}{\Delta a} \approx \frac{g(a+1) - g(a)}{1} = g(a+1) - g(a),$$

аз ин ҷо $$g(1+a) \approx g(a) + g'(a)$$ мешавад.

Дар ин ҷо $g'(a)$ маҳсулоти иловагӣ ҳангоми ба як воҳид зиёд намудани миқдори коргарон, истеҳсол мешавад.

2. Арзиши маҳсулот. Вобастагии арзиши маҳсулоти истеҳсолшуда C аз ҳаҷми вай $g : C = C(g)$.

Арзиши ҳудудӣ гуфта бузурги $MC = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta g} = C'(g)$ - ро меноманд.

Дар баробари арзиш дар иқтисодиёти хурд боз як нишондиҳандаи ҳудудӣ мафҳуми чандирӣ мавқеъи зиёд дорад.

II. Татбиқи ҳосила дар иқтисодиёт

1. Даромади максималӣ. Теоремаи Фермаро аз нуқтаи назари иқтисодӣ чунин маънидод кардан мумкин аст:

Бигзор, S=S(x) функсияи хароҷот, $D = D(x)$ - функсияи даромад, $P = P(x)$ - функсияи фоида бошанд. Он гоҳ $P(x) = D(x) - S(x)$ мешавад. Дараҷаи баландтарини истеҳсолот ҳамоне мебошад, ки фоидаи максималӣ медиҳад, ё худ ҳамин гуна қимати барориш x_0 - ро ёфтан лозим аст, ки функсияи фоида P(x) қимати максималӣ гирад. Дар асоси теоремаи Ферма дар нуқтаи $x=x_0$ ҳосила ба сифр баробар аст: $P'(x_0) = 0$

Азбаски $P'(x) = D'(x) - S'(x)$ аст, $D'(x_0) = S'(x_0)$ мешавад.

Ҳосилаи $S'(x)$ хароҷоти ҳудудӣ MS-ро ифода мекунад, ҳосилаи $D'(x)$ - даромади ҳудудӣ МД- ро ифода мекунад. Ҳамин тавр, баробарии бо ёрии теоремаи Ферма ҳосилшуда чунин намудро мегирад:

$$MS(x_0) = MD(x_0).$$

Яъне фоидаи максималӣ ҳамон вақт ба даст оварда мешавад,ки агар хароҷоти ҳудудӣ ва даромади ҳудудӣ баробар шаванд.

2. Чандирӣ. Акнун ба омӯзиши ҳосилаи функсияи логарифмӣ ва татбиқи он машғул мешавем. Бигзор, функсияи $y = f(x)$ мусбат ва дифференсирондашаванда дар нуқтаи x бошад, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{ё} \quad (\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Дар аксари масъалаҳои амалӣ мафҳуми чандирии функсия истифода мешавад.

Чандирии функсияи $y = f(x)$ бо таносуби зерин муайян карда мешавад:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

Чандирӣ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

1) $E(UV) = E(U) + E(V)$,

2) $E\left(\frac{U}{V}\right) = E(U) - E(V)$,

ки ба хосиятҳои логарифм мувофиқ аст.

Чандирии функсия ҳангоми таҳлили тақозо ва арза истифода бурда мешавад. Чандирнокӣ нисбат ба нарх чунин муайян карда мешавад:

$$E = \frac{\text{фоизи ттағйирёби тақозо}}{\textit{фоизи тағйирёбии нарх}}$$

Бигзор, D=D(p) – функсияи талабот аз нархи мол p бошад. Фоизи тағйирёбии талабот $\frac{\Delta D}{D}100\%$, фоизи тағйирёбии нарх $\frac{\Delta p}{p}100\%$ аст. Аз ин ҷо $E = \left(\frac{\Delta D}{D}\cdot 100\right) : \left(\frac{\Delta p}{p}\cdot 100\right)$ ё $E = \frac{p}{D}\ \frac{\Delta D}{\Delta p}$ мебошанд.

Ҳангоми $\Delta p \to 0$ будан ΔD аз Δp бефосила вобаста мебошад, $\frac{\Delta D}{\Delta p}$ - ро ба ҳудуд иваз намуда ҳосил мекунем:

$$E(D) = p\cdot\frac{D'(p)}{D(p)}.$$

Азбаски D(p)- функсия камшаванда аст, ҳосилаи он манфӣ ва аз ин ҷо чандирии тақозо манфӣ мешаванд.

Се намуди тақозо мавҷуд аст:

1) Чандир, агар $|E(D)| > 1$;

2) Мӯътадил, агар $|E(D)| = 1$;

3) Ғайричандир, агар $|E(D)| < 1$

Мисоли 5.3.1. Функсияи тақозо $Д = \sqrt{240 - p}$ мебошад. Чандири тақозоро бо нархи p=176 муайян кунед.

Ҳал. $E(D) = p\dfrac{D'(p)}{D(p)} = P\dfrac{1}{-2(240-p)}$, ки дар ин ҷо $D'(p) = -\dfrac{1}{2\sqrt{240-p}}$ мебошад.

Қимати $p = 176$- ро гузошта, ҳосил мекунем:

$$E(D) = \frac{-176}{128} = -1{,}375; \qquad |E(D)| = 1{,}375 > 1$$

тақозо чандир мебошад.

Андозбандии оптималӣ. Бигзор t- андоз аз як воҳид маҳсулоти баровардашуда, $S = S(x)$ функсияи хароҷот, $D = D(x)$ функсияи даромад, $B = B(x)$ функсияи фоида бошанд.

Он гоҳ, функсияи фоида чунин намудро мегирад:

$$P(x) - D(x) - S(x) - tx$$

Бигзор, нарх ба маҳсулот $V(x) = a - bx$ бошад (яъне хаттӣ кам шавад бо зиёдшавии ҳаҷми маҳсулот), функсияи хароҷот намуди $S(x) = x^2 + c$- ро дошта бошад ва a, b, c – доимиҳои мусбат бошанд. Дар ин ҳолат функсияи фоида чунин намуд мегирад:

$$P(x) = x(a - bx) - x^2 - c - t\,x.$$

Бо мақсади фоидаи максималӣ муассиса ҳаҷми оптималии истеҳсолотро меҷӯяд. Шарти кифоягии мавҷудияти фоидаи максималӣ $P'(x) = 0$ мебошад. Яъне

$$P'(x) = a - t - 2bx - 2x = 0$$

Аз нн чо $x_0 = \dfrac{a-t}{2b+2}$

Барои ин қимати x_0 ҳаҷми маҳсулот, дар маҷмӯи маблағи андози Т намуди $T = \dfrac{t(a-t)}{2(1+b)}$ - ро мегирад.

Давлат ҳавасманд аст, ки бузургии Т - максималӣ бошад.

Функсияи T - ро нисбат ба t дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$T'(t) = \frac{a-2t}{2(1+b)}, \quad T'(t) = 0, \quad a - 2t = 0, \quad t_0 = \frac{a}{2}.$$

Мисоли 5.3.2. Бигзор, a=80, b =1, с=10 бошад. Он гоҳ t_0=40, $x_0 = 10$ аст, ки бо ин қиматҳо дараҷаи балантарини фоида P_0=190, даромади давлат $T_0 = t_0 \cdot x_0 = 400$ мешавад.

§ 4. Тадқиқи функсия

I. Афзуншавӣ ва камшавӣ. Функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ афзуншаванда номида мешавад, агар барои дилхоҳ $x_1, x_2 \in [a;b]$, ки нобаробарии $x_1 \langle x_2$ -ро қаноат кунонида, нобаробарии $f(x_1) \langle f(x_2)$ иҷро шавад.

Функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ камшаванда номида мешавад, агар барои дилхоҳ $x_1, x_2 \in [a;b]$, ки нобаробарии $x_1 \langle x_2$ -ро қаноат кунонида нобаробарии $f(x_1) \rangle f(x_2)$ иҷро шавад.

Агар $f'(x_0) \rangle o$ бошад, он гоҳ функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 - афзуншаванда мебошад.

Агар $f'(x_0) \langle 0$ бошад, он гоҳ функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 камшаванда мебошад.

II. Экстремуми функтсия. Бигзор, функсияи $f(x)$ дар атрофи ягон нуқтаи x_0 муайян бошад. Мо мегуем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0

максимум (минимум) дорад, агар чунин атрофи нуқтаи x_0 ёфт шавад, ки барои ҳамаи нуқтаҳои ин атроф нобаробарии $f(x) \le f(x_0)$, $(f(x) \ge f(x_0))$ иҷро шавад.

Максимум ва минимумро дар якҷоягӣ экстремум меноманд. Агар функтсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 экстремум дошта бошад, он гоҳ $f'(x_0) = 0$ аст, x_0 нуқтаи статсионарӣ номида мешавад.

Қоидаи якум. Бигзор, функсияи $f(x)$ дар артроф ягон нуқтаи x_0 ҳосила дошта бошад ва дар нуқтаи x_0 бефосила бошад. Агар ҳосилаи функсияи $f'(x)$:

1) Аз тарафи чапи нуқтаи x_0 мусбат ва аз тарафи рости нуқтаи x_0 манфӣ бошад, пас функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 максимум дорад.

2) Аз тарафи чапи нуқтаи x_0 манфӣ ва аз тарафи рост мусбат бошад, пас функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 минимум дорад. Ва агар ҳосилаи функсияи $f'(x)$ дар ҳарду тарафи нуқтаи x_0 аломати якхела дошта бошад, он гоҳ функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 экстремум надорад.

Қоидаи дуюм. Бигзор, функсияи $f(x)$ дар нуқтаи шубҳаноки x_0 ҳосилаи охирноки тартиби дуюмро дошта бошад. Он гоҳ функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 максимум дорад, агар $f''(x_0) < 0$ бошад ва минимум дорад, агар $f''(x_0) > 0$ бошад.

III. Барҷастагӣ, фурӯхамидагӣ ва нуқтаи қадшавии графики функсия. Графики функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ барҷаста номида мешавад, агар вай дар ҳудуди ин порча, поён аз расандаи худ хобад.

Графики функсияи $f(x)$ дар порча $[a;b]$ фурӯхамида номида мешавад, агар вай дар ҳудуди ин порча боло аз расандаи худ хобад.

Агар дар ҳудуди порчаи $[a;b]$, $f''(x)<0$ бошад, пас графики функсияи $y=f(x)$ дар $[a;b]$, барҷаста аст. Ва агар дар $[a;b]$, $f''(x)>0$ бошад, пас графики функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;b]$, фурӯхамида мешавад.

Нуқтаи $(x_0, f(x_0))$ – и графики функсия, нуқтаи қадшавии графики функсияи $y=f(x)$ номида мешавад, агар ҳангоми аз ҳамин нуқта гузаштан функсия аз барҷастагӣ ба фурӯхамидагӣ (ё баръакс) иваз шавад.

Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 ҳосилаи бефосилаи тартиби дуюмро дошта бошад ва x_0 нуқтаи қадшавии графики функсия бошад, он гоҳ $f''(x_0)=0$ аст.

IV. Асимптотаҳо. Хати рости L асимптотаи графики функсияи $y=f(x)$ номида мешавад, агар масофаи байни нуқтаи $M(x;y)$ - и хати каҷ ва хати рости L дар ҳолати аз ибтидои координат беохир дуршавӣ ба сифр майл кунад.

Хати рости $x=a$ асимтотаи вертикалии графики функсияи $y=f(x)$ номида мешавад, агар ақаллан яке аз ифодаҳои $\lim_{x\to a+0} f(x)$ ё $\lim_{x\to a-0} f(x)$ ба $-\infty$ ё $+\infty$ баробар шавад.

Хати рост $y=ax+b$ ҳангоми $x\to\pm\infty$ асимптотаи моили графики функсияи $y=f(x)$ номида мешавад, агар функсияи $f(x)$-ро ба намуди $f(x)=ax+b+\alpha(x)$ тасвир намудан мумкин бошад, ки дар ин ҷо $\lim_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$ мебошад.

Барои он ки графики функсияи $y = f(x)$ ҳангоми $x \to \pm\infty$, асимптотаи моили $y = ax + b$ -ро дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки ҳудудҳои зерин мавҷуд бошанд:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{ва} \quad \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b.$$

Мисоли 5.4.1. Интервалҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияи $f(x) = x^2 e^{-x}$ -ро ёбед.

Ҳал. Дар ин ҳолат ҳосилаи функсияи $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ дар нуқтаҳои $x = o$ ва $x = 2$ ба сифр баробар мешавад. Дар интервалҳои $(-\infty; 0)$ ва $(2; \infty)$ ҳосилаи функсия $f'(x) \langle 0$ аст, бинобар ин, графики функсияи $f(x)$ дар ин интервалҳо кам мешавад, дар интервали $(0; 2)$ ҳосилаи $f'(x) \rangle 0$ аст, бинобар ин, графики функсия дар интервали $(0, 2)$ меафзояд.

Мисоли 5.4.2. Интрвалҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияи $f(x) = x - 2\sin x$ -ро ёбед, агар $0 \le x \le 2\pi$ бошад.

Ҳал. Ҳосилаи функсияро меёбем $f'(x) = 1 - 2\cos x$. Маълум аст, ки дар интервали $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$, $f'(x) > 0$ мебошад ва дар интервалҳои $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$, $f'(x) > 0$ аст. Ҳамин тавр, дар интервали $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$, графики функсия афзуншаванд буда, дар интервалҳои $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ камшаванда мебошад.

Мисоли 5.4.3. Қоидаи якумро истифода бурда экстремуми функсияи $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$ - ро ёбед.

Ҳал. Функсияи мазкур дар тамоми тири ададӣ муайян ва бефосила мебошад. Ҳосиларо меёбем:

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right).$$

Акнун решаҳои муодилаи $f'(x)=0$ -ро меёбем:

$$2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right)=0,\quad x^{\frac{2}{3}}-1=0,\quad x=\pm1$$

Илова бар ин ҳосилаи функсия дар нуқтаи $x=0$ ба беохир мубаддал магардад. Бинобар ин, нуқтаҳои шӯбҳанок, нуқтаҳои $x_1=-1$, $x_2=0$,$x_3=1$ мебошанд. Аломати ҳосилаи функсия дар ҳолати аз болои ин нуқтаҳо гузаштан чунинанд: аз тарафи чапи нуқтаи $x_1=-1$ мусбат, аз тарафи рост манфӣ, дар нуқтаи $x_2=0$, аломати ҳосилаи аз чап ба рост аз минус ба плюс иваз мешавад, дар нуқтаи $x_3=1$ аломати ҳосила аз тарафи чап мусбат ,буда, дар тарафи рост манфӣ мебошад. Ин тадқиқот нишон медиҳад, ки ин функсия ду максимум $f_{max}(-1)=2$, $f_{max}(1)=2$ ва як минимум $f_{min}(0)=0$-ро дорад.

Мисоли 5.4.4. Қоидаи дуюмро истифода бурда, функсияи $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ - ро ба экстремум тадқиқ намоед.

Ҳал. Азбаски функсия даврӣ мебошад, бинобар ин, бо порчаи $[0;2\pi]$ маҳдуд мешавем. Ҳосилаҳои тартиби якум ва дуюми функсияро меёбем.

$$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x),$$

$$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x.$$

Нуқтаҳои шӯбҳаноки функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[0;2\pi]$ меёбем:

$$f'(x)=0,\quad 2\cos x\cdot(1-2\sin x)=0,\quad \cos x=0,\quad \sin x=0,\quad \sin x=\frac{1}{2},$$

$$x_1=\pi\frac{\pi}{5},\quad x_2=\frac{\pi}{2},\quad x_3=\frac{5\pi}{5},\quad x_4=\frac{3\pi}{2}$$

Акнун аломати ҳосилаи тартиби дуюми функсияро дар ин нуқтаҳо месанҷем:

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3<0$, $f(x)$ дар нуқтаи $x_1=\frac{\pi}{6}$ максимум дорад, $f_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$;

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2>0$, дар нуқтаи $x_2=\frac{\pi}{2}$, функсия минимум дорад, $f_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

$f''\left(\frac{5\pi}{2}\right)=-3<0$ дар нуқтаи $x_3=\frac{5\pi}{2}$,функсия максимум дорад, $f_{\max}\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$;.

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=6>0$ дар нуќтаи $x_4=\frac{3\pi}{2}$ функсия минимум дорад, $f_{\min}(\frac{3\pi}{2})=-3$

Мисоли 5.4.5. Интервалҳои барҷастагӣ ва фурухамидагии графики функсияи $y=x^5+5x-6$ -ро ёбед.

Ҳал. $y'=5x^4+5$, $y''=20x^3$. Агар $x<0$ бошад, пас $y''\angle 0$ аст, графики функсия барҷаста мебошад. Агар $x>0$ бошад, он гоҳ $y''>0$ аст, графики функсия фурӯхамида мебошад. Ҳамин тавр, графики функсия дар интервали $(-\infty;0)$ барҷаста ва дар интервали $(0;\infty)$ фурӯхамида мебошад.

Мисоли 5.4.6. Интервалҳои барҷастагӣ ва фурӯхамидагӣ ва нуқтаҳои қадшавии графики функсияи $f(x)=e^{-x^2}$ - ро муайян кунед.

Ҳал. $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$ ҳосилаи тартиби дуюмро ба сифр баробар намуда, меёбем: $f''(x)=0$, $4x^2-2=0$, $x^2=\frac{1}{2}$,

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ва} \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ин нуқтаҳо тири OX -ро ба се қисм ҷудо мекунанд:

$$\left(-\infty-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ва} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right).$$

Дар интервалҳо $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *ва* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$, $f''(x)>0$ графики функсия

фурӯхамида мебошад. Дар интервали $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $f''(x)<0$ графики функсия барҷаста мешавад. Нуқтаҳои $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ нуқтаҳои қатшавии графики функсия мебошанд.

Мисоли 5.4.7. Асимптотаҳои графики функсияи $f(x) = x + 2\,arctgx$ -ро ёбед.

Ҳал. Бо осон дидан мумкин аст, ки асимптотаҳои уфуқӣ ва амудӣ мавҷуд нестанд. Акнун асимптотаҳои моилро муайян мекунем:

1. $\kappa_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2arctgx}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{2arctgx}{x}\right) = 1,$

$b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(x + 2arctg\,x - x) = 2arctg\infty = 2\dfrac{\pi}{2} = \pi,$ аз ин ҷо

$y = x + \pi$ - асимптотати моили тарафи рост мебошад.

2. $\kappa_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2arctgx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{2arctgx}{x}\right) = 1,$

$b_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}(x + 2arctg\,x - x) = 2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\pi$, бинобар ин, $y = x - \pi$ -асимптотаи моили тарафи чап мебошад.

Мисоли 5.4.8. Асимптотаҳои хати каҷи $y = x^2e^{-x}$-ро ёбед.

Ҳал. Маълум аст, ки асимптотаи амудӣ вуҷуд надорад. Агар $x \to \infty$, пас $y \to 0$ мешавад. Бинобар ин, тири OX асимптотаи уфуқӣ мебошад. Акнун асимптотаи моилро муайян мекунем:

$$\kappa = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0,$$

ҳамин тавр, фақат якто асимптотаи уфуқӣ $y=0$ мавҷуд аст.

Сохтани графики функсия. Барои сохтани графики функсияи $y = f(x)$ тартиботи зеринро риоя намудан ба мақсад мувофиқ мебошад:

1) ёфтани соҳаи муайянии функсия;

2) муайян намудани ҷуфт ва тоқ будани функсия;

3) ёфтани нуқтаҳои бурриши графики функсия бо тирҳои координат;

4) ёфтани экстремуми функсия;

5) тадкики бефосилагии функсия;

6) ёфтани интервалҳои афзуншавӣ ва камшавии графики функсия;

7) ёфтани интервалҳои барҷастагӣ ва фурӯхамидагӣ, нуқтаҳои қадшавии графики функсия;

8) муайянкунии асимптотаҳо;

9) сохтани графики функсия.

Мисоли 5.4.9. Графики функсияи $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ -ро созед.

Ҳал. 1) Соҳаи муайянии функсия тамоми тири ададӣ, ба ғайр аз нуқтаи $x=0$, мебошад.

2) Функсия на ҷуфт ва на тоқ мебошад.

3) Нуқтаҳои бурриши графики функсияро бо тири OX меёбем:

$$\frac{x^3+4}{x^2}=0 \quad ; \qquad x=-\sqrt[3]{4}.$$

4) Нуқтаҳои экстремуми функсияро муайян мекунем:

$$f'(x)=\frac{x^3-8}{x^3} \quad ; \quad f'(2)=0 \qquad f'(0)=\infty$$

$$f''(x)=\frac{24}{x^4} \; ; \; f''(2)\rangle 0, \quad \textit{бинобар ин}, \quad f_{\min}(2)=3 \text{ аст.}$$

5) Дар ҳолати $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ нуқтаи $x=0$, нуқтаи каниши графики функсия мебошад.

6) Нуқтаи $x=0$ *ва* $x=2$ тири ададиро ба интервалҳои $(-\infty;0)$, $(0;2)$ *ва* $(2;\infty)$ ҷудо мекунанд. Дар интервалҳои $(-\infty;0)$, $(2;\infty)$, $f'(x)>0$ функсия меафзояд. Дар интервали $(0;2)$, $f'(x)<0$ функсия камшаванда мебошад.

7) Интервалҳои барҷастагӣ ва фурӯхамидагии графики функсияро меёбем. Азбаски $f''(x) \rangle 0$ аст, бинобар ин, графики функсия ҳамеша фурӯхамида мебошад, нуқтаи қадшавӣ надорад.

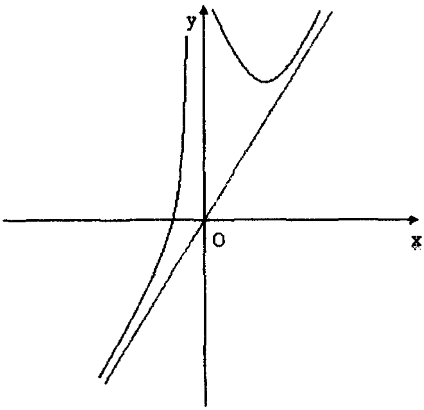
8) Асимтотаҳои графики функсияро меёбем. Хати $x = 0$ (тири 0У), асимптотаи амудии графики функсия мебошад. Акнун асимптотаҳои моили графики функсияро меёбем:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^3} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 0.$$

Асимптотаи моил чунин муодила дорад: $y=x$.

9) Ин маълумотҳоро ба назар гирифта, графики функсияро месозем:



§5. Ададҳои комплексӣ ва амалҳо бо онҳо

1. Адади комплексӣ. Адади комплексӣ гуфта ифодаи $z=x+iy$ – ро меномем, ки дар ин ҷо x ва y – ададҳои ҳақиқӣ буда, $i = \sqrt{-1}$ – воҳиди мавҳум мебошад. Ададҳои x ва y мувофиқан қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми адади комплексӣ z номида мешаванд. Қисми ҳақиқии адади комплексӣ бо $\operatorname{Re} z$ ишора карда шуда, қисми мавҳуми он бо $\operatorname{Im} z$ –ишора карда мешавад $(\operatorname{Re} z = x,\ \operatorname{Im} z = y)$. Аз ин ҷо адади комплексии z –ро чунин навиштан мумкин аст:

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Навишти адади комплексии $z = x + iy$ навишти намуди алгебравӣ номида мешавад.

Адади комплексии $\bar{z} = x - iy$ ба адади комплексии $z = x + iy$ ҳамроҳшуда номида мешавад ва бо осони ҳосил кардан мумкин аст, ки

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right), \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}\left(z - \bar{z}\right)$$ мешаванд.

Адади комплексӣ ҳамон вақт баробари сифр аст, ки агар $x = 0$ ва $y = 0$ бошанд.

Ду адади комплексии $z_1 = x_1 + i\,y_1$ ва $z_2 = x_2 + i\,y_2$ баробар номида мешаванд, агар мувофиқан $x_1 = x_2$ ва $y_1 = y_2$ бошанд.

Барои ададҳои комплексӣ мавҳуми калон ё хурд вуҷуд надорад.

2. Амалҳо бо ададҳои комплексӣ. а) Сумма ва фарқи ду ададҳои комплексии z_1 ва z_2 гуфта адади комплексии z -ро меномем, ки

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$ мебошад.

б) ҳосили зарби ду адади комплексӣ чунин

$$z = z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$ муайян карда мешавад.

В) Тақсими ду адади комплексии z_1 ва z_2 гуфта адади комплексии z-ро меномем, ки

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$ мебошад.

Аз ин таносуб дидан мумкин аст, ки ҳамроҳшудаи ҳосили тақсими ду адади комплексӣ дорои хосияти

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$ мебошад.

3. Намуди тригонометрии навишти адади комплексӣ. Ҳар гуна адади комплексии $z=x+iy$- ро дар системаи координатаи хоу ба намуди нуқтаи М(х;у) ифода намудан мумкин аст ва баракс ҳар гуна нуқтаи М(х;у) – и ҳамвории хоу – ро ҳамчун нақши геометрии адади комплексии $z = x + iy$ тасаввур намудан мумкин мебошад.

Ҳамин тавр, адади комплексиро дар ҳамворӣ ҳамчун нуқта ё вектор тасаввур намудан мумкин аст. Ҳамвориеро, ки дар он адади комплексӣ ифода карда шудааст, ҳамвории комплексӣ меноманд, тири ox -ро тири ҳақиқӣ, тири oy-ро тири мавҳум меноманд. Қимати мутлақи адади комплексӣ дар ҳамворӣ ин масофа аз ибтидои координата то нуқтаи М(х;у) – ро ифода мекунад $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Дар системаи координатаи қутбӣ адади комплексиро низ тасвир намудан мумкин аст. Чи тавре, ки маълум аст, байни координатаҳои декартӣ ва қутбӣ чунин таносуб ҷой дорад : $x = r\cos\varphi$ ва $y = r\sin\varphi$. Акнун ин алоқамандиро истифода намуда, шакли тригонометрии ададҳои комплексиро ҳосил мекунем:

$Z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ки дар ин ҷо $(r;\varphi)$ - координатаҳои қутбӣ мебошанд.

Аз алоқамандии байни координатаҳои декратӣ $(x;y)$ ва координатаҳои қутбӣ $(r;\varphi)$ истифода бурда, таносубҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = Argz = arctg\frac{x}{y} + 2k\pi,$$

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Дар ин ҷо r ва φ мувофиқан модул ва аргументи адади комплексии z номида мешаванд. Агрументи адади комплексии z яккимата муайян карда намешавад, бо аниқи $2k\pi$ (к- адади бутуни ихтиёрӣ) муайян намудан мумкин аст. Қимати аргумент дар интервали $0 \le Argz < 2\pi$, агар $r = 0$ бошад, он гоҳ адади комплексӣ ба сифр баробар аст. Агар $x = 0$ бошад, он гоҳ адади комплексии $z = iy$ адади мавҳум номида мешавад. Адади комплексиро ба намуди функсияи нишондиҳандагӣ ҳам навиштан мумкин аст, барои ин аз формулаи Эйлер истифода мекунем:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{ёхуд} \qquad Z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Мисоли 5.5.1. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $(1+i)(1-4i)-6+4i,$

б) $(3-2i)^2+(1-i)(1-3i),$

в) $z = \dfrac{1-3i}{1-i},$

г) $= \dfrac{5i}{(1-4i)^2}.$

Ҳал. а) $(1+i)(1-4i)-6+4i = 1+i-4i+4+4i-6 = -1+i$;

б) $(3-2i)^2+(1-i)(1-3i) = 9-12i-4+1-i-3i-3 = 3-16i$;

в) $Z = \dfrac{1-3i}{1-i} = \dfrac{1-3i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1-3i+i+3}{1+1} = 2-i$;

г) $Z = \dfrac{5i}{(1+4i)^2} = \dfrac{5i}{15+8i} = \dfrac{5i(-15-8i)}{(-15+8i)(-15-8i)} = \dfrac{40-75i}{289} = \dfrac{40}{289} - \dfrac{75}{289}i.$

Мисоли 5.5.2. AB ҳисоб карда шавад, агар :

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+3i \\ 1 & 3+i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3-i & 3i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Ҳал.

$$AB = \begin{pmatrix} 1+i & 2+3i \\ 1 & 3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-i & 3i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)(3-i)+2+3i & 3i(1+i)-i(2+3i) \\ 3-i\ +3+i & 3i-i(3+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5i & i \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Мисоли 5.5.3. Ҳалли ҳақиқии муодилаҳои зеринро ёбед:

а) $(3+4i)x+(1-i)y=5+2i,$

б) $(x-y)(2-i)+(x+y)(1+i)=4+2i$

Ҳал.

а) $3x+4xi+y-iy=5+2i,\qquad 3x+y+i(4y-y)=5+2i$

$$\begin{cases}3x+y=5\\4x-y=2\end{cases}\Rightarrow 7x=7,\quad x=1,\quad y=2.$$

б) $2x-2y-ix+iy+x+y+ix+iy=4+2i,$

$3x-y+i(0+2y)=42i$

$$\begin{cases}3x-y=4\\2y=2\end{cases}\Rightarrow y=1,\quad x=\frac{5}{3}.$$

Мисоли 5.5.4. Муодиларо ҳал кунед:

$x^2+4x+20=0.$

$x_{12}=-2\pm\sqrt{4-20}=-2\pm\sqrt{-16}=-2\pm 4i,\quad x_1=-2+4i,\quad x_2=-2-4i.$

Мисоли 5.5.5. Ададн комплексии $z=1+i\sqrt{3}$ - ро ба шакли тригонометрӣ нависед.

Ҳал. Азбаски $x=1,\quad y=\sqrt{3}$ мебошанд, аз ин ҷо $r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}-2$ ва $tg\varphi=\sqrt{3},\quad \varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ мешавад. Ҳамин тавр, ҳосил мекунем:

$Z=1+i\sqrt{3}=r\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right),$ ҳангоми $k=0$ будан:

$$Z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Мисоли 5.5.6. Қисми ҳақиқӣ ва мавҳуми адади комплексии $z=z_1+z_2$ - ро ёбед, агар

$z_1=2+i\sqrt{3}$ ва $z_2=\sqrt{3}-2i$ бошад.

Ҳал. $z=z_1+z_2=2+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-2i=2+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-2)$

Аз ин ҷо $\operatorname{Re}z=2+\sqrt{3},\qquad \operatorname{Im}z=\sqrt{3}-2$ мебошад.

Мисоли 5.5.7. Адади комплексии $z=\sqrt{3}-i$ - ро ба шакли тригонометрӣ нависед.

Ҳал. $r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,$

$$\arg z=arctg\frac{y}{x}=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$z=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Кори мустақилонаи 5.1.1.

1. Ҳосилаи функсияро ёбед:

$a)y=\left(x^2+2x+2\right)\cdot e^{-x}$. $\quad$ $б)y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$.

$в)y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. $\quad$ $г)y=\cos^3\frac{x}{3}$

2. Афзоиши функсияи Δy ва нисбати $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ёфта шаванд, агар:

$a)\ y=\lg x,\quad x=100000,\quad \Delta x=-90000;$

$б)y=2^x.$ бошанд.

3. Аз таърифи ҳосила истифода бурда y_x' -ро ёбед, агар $y=5\sin x3\cos x$ бошад.

4. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$-ёфта шавад, агар $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ бошад.

Кори мустақилонаи 5.1.2.

1. $f_+'(0)$ ва $f_-'(0)$ ёфта шаванд, агар $f(x)=\arcsin\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ бошад.

2. $f'(x)$ -ёфта шавад, агар $f(x)=x|x|$ бошад.

3. Ҳосилаи $f(x)=(arctgx)^x$ -ро ёбед.

4. y'_x -ёфта шавад, агар:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t, \end{cases}$ бошад.

5. Қимати ифодаҳои зеринро тақрибӣ ҳисоб мекунем:

а) $\lg o{,}3$; б) $arctg\ 1{,}05$ в) $\sqrt[3]{200}$

Кори мустақилонаи 5.2.1.

1. $f'''(2)$ -ро ёбед, агар $f(x) = \ln(x-1)$ бошад.

2. Формулаи Лейбнитсро истифода бурда, ҳосилаи тартиби 20- уми функсияи $f(x) = (x^2 - x)\cdot e^x$ -ро ёбед.

3. Формулаи Лагранжро барои функсияи $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 3x$ дар порчаи $[0,1]$ нависед ва қимати ξ -ро дар порчаи додашуда ёбед.

4. Формулаи Коширо барои функсияҳои $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ ва $g(x) = x^2 + 4$ дар порчаи $[0;1]$ нависед ва қимати ξ -ро ёбед.

5. Татбиқшавии формулаи Лагранжро санҷед, агар функсияи $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$ дар порчаи $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ додашуда бошад.

Кори мустақилонаи 5.2.2.

1. Ҳудудро ҳисоб кунед:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3 e^x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$ в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg5x}$

2. То саҳеҳи 10^{-3} тақрибӣ ҳисоб карда шавад:

а) $\sin 36''$, б) $\sqrt[7]{129}$.

Кори мустақилонаи 5.4.1.

1) Интервалҳои афзуншавӣ, камшавии графики функсияро ёбед:

а) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$, б) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$

в) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

2) Доир ба экстремум тадқиқ кунед:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3}$

б) $f(x)=2\sin 2x+\sin 4x$

в) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$

Кори мустақилонаи 5.4.2.

1) Интервалҳои барҷастагӣ, фурӯхамидагӣ ва нуқтаҳои қадшавии графики функтсияро ёбед:

а) $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$

б) $f(x)=x-\sin x$

в) $f(x)=(1+x^2)e^x$

2) Асимтотаҳои графики функсияро муайян намоед:

а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

б) $f(x)=e^{-x^2}+2$

в) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

Кори мустакилонаи 5.5.1.

1. Ададҳои комплексии зеринро ба шаклҳои тригонометрӣ ва нишондиҳандагӣ нависед:

а) $z=1+i$, б) $z=-1+i$, в) $z=1-i$ г) $z=3-4i$.

2. Ба шакли $Z=x+iy$ ифода кунед:

а) $i+i^2+i^3+i^4$, б) $\dfrac{1+i}{1-i}$, в) $\left(\sqrt{8}-i\right)^2$, г) $\left(\sqrt{2}+i\right)^2$.

3. Муодилаҳои зеринро ҳал намоед:

а) $z^4+9=0$, *б*) $z^5+1-i=0$, *в*) $z^3+i=0$ *г*) $z^8-1=0$.

4. Модул ва аргументи ададҳои зеринро нависед:

а) $1+i$, *б*) $-1+i$, *в*) $2+5i$.

Ҷавобҳо

К.М. 5.1.1.

1) *а*) $-x^2\ell^{-x}$ б) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}$ в) $\dfrac{1}{\cos x}$ г) $-\cos^2\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

2) *а*) -1; 0,000011" б) $2^x(2^{\Delta x}-1);\dfrac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$

3) 5cosx-3sinx 4) 2

К.М. 5.1.2.

1) $-\dfrac{2}{a};\dfrac{2}{a}$; 2) $|2x|$; 3) $(arctgx)^x[\ln arctgx+\dfrac{x}{(1+x^2)arctgx}]$

4) *а*) $-\dfrac{2t}{t+1}$; б) $-\dfrac{в}{\alpha}tgt$; 5) *а*) -0,045 ; б) 0,81 ; в) 3,85.

К.М. 5.2.1.

1) 2. 2) $\ell^x(x^2+39x+740)$ 3) $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 4) $\xi_1-0,5;\xi_2=\dfrac{5}{3}$

К.М. 5.2.2.

1) *а*) $-\dfrac{1}{3}$, б) 1, в) 5,

2) *а*) 0,587 б) 2,002

К.М. 5.4.1.

1) *а*) $(0,1)$ - камшаванда, $(1,\infty)$ – афзоянда,

б) (-∞;∞) – меафзояд.

в) (-∞;0) ва $(0,1)$ – кам мешавад, (1;∞)- меафзояд.

2) *а*) экстремум нест, б) $f\min[(k-\dfrac{1}{6})\pi]=-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$,

в) $f\min(0)=0, f\max(2)=\frac{4}{e^2}$.

К.М. 5.4.2.

1) *а*) (-∞; 2) – фурӯхамида, (2, ∞) – барҷаста, (2; 12) – нуқтаи қадшавӣ.

б) $[2k\pi;(k+1)\pi]$- барҷаста, $[(2k-1)\pi;2k\pi]$- фурӯхамида, абсиссаи нуқтаҳои қадшавӣ $x=k\pi$ $(k=0;\pm 1;\pm 2...)$.

в) (-∞;-3) ва (-1; ∞) –барҷаста, (3;-1) фурӯхамида, $M(-3;\frac{10}{\ell^2})$ ва $N(-1;\frac{2}{\ell})$.

2) *а*) $x=\pm 2$, $f(x)=1$, б) $f(x)=2$, в) $y=0$.

КМ 5.5.1.

а) $1+i=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

б) $-1+i=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

в) $1-i=\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$;

г) $3-4i=5[cos\left(-arctg\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(-arctg\frac{4}{3}\right)=5e^{-iarctg\frac{4}{3}}$;

2. *а*) 0; б) i; в) $7-4\sqrt{2i}$; г) $-\sqrt{2}+5i$;

3. *а*) $\frac{\sqrt{6}}{2}(\pm 1\pm i)$ б) $\frac{\sqrt{6}}{2}(\pm 1\pm i)$ в) $\frac{\sqrt{6}}{2}(\pm 1\pm i)$ г) $\frac{\sqrt{6}}{2}(\pm 1\pm i)$

Боби VI. Интеграли номуайян

§1. Мафҳуми интеграли номуайн

I. Таъриф. Функсияи $F(x)$, барои функсияи $f(x)$, функсияи ибтидоӣ номида мешавад, агар $F'(x)=f(x)$ шавад.

Агар функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$ -ро дошта бошад, пас вай микдори беохири функсияҳои ибтидоиро дорад ва ҳамаи функсияҳои ибтидоиро бо $F(x)+C$ ишора мекунем, ки C -доимии ихтиёри аст.

Маҷмӯи ҳамаи функсияҳои ибтидоии функсияи $F(x)$ -ро интеграли номуайян аз функсияи $f(x)$ меноманд ва бо рамзи $\int f(x)dx = F(x)+C$ ишора менамоянд. Дар ин ҷо $\int$ -аломати интеграл, $f(x)$ функсияи зеринтегралӣ, $f(x)dx$ ифодаи зеринтегралӣ ва C -ададӣ доимии ихтиёрӣ мебошад.

II. Хосиятҳои асосии интеграли номуайян:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$,
3. $\int dF(x) = F(x)+C$,
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, ($a$ -доимӣ)
5. $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
6. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Ҷадвали интегралҳои асосӣ:

1) $\int dx = x + C$,

2) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+C$, $(m \neq -1)$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$, $(a \neq 0)$

5) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

6) $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$

7) $\int \sin xdx = -\cos x + C$

8) $\int \cos xdx = \sin x + C$

9) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

I0) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

11) $\int e^x dx = e^x + C$

I2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

I3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arcsin \frac{x}{a} + C,$ $(a > 0)$

I4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + C$, $(a \rangle 0)$

I5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $(a \rangle 0)$

I6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$,

I7) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,

18) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+C$,

19) $\int shxdx=chx+C$,

20) $\int chxdx=shx+C$,

21) $\int\frac{dx}{sh^2x}=-cthx+C$,

22) $\int\frac{dx}{ch^2x}=thx+C$.

III. Усули гузориш ва бо хиссаҳо интегронӣ

Усули гузориш. Бигзор, $y=f(x)$ ва $x=\varphi(t)$ дода шуда бошанд. Фарз мекунем, ки $f(x)$ бефосила ва $x=\varphi(t)$ ҳосилаи бефосилаи тартиби якумро дорад. Он гоҳ чунин формула ҷой дорад:

$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ агар $\int f(x)dx=F(x)+C$ бошад, пас

$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]+C$ мешавад.

Усули бо кисмҳо интегронӣ. Агар функсияҳои $u(x)$ ва $v(x)$- дифференсиронидашаванда бошанд, он гоҳ

$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\,du(x)$ мешавад.

Мисоли 6.1.1. Нишон диҳед, ки функсияи $F(x)=arctge^x$ барои функсияи $f(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$ функсияи ибтидоӣ мешавад.

Ҳал. Ҳосилаи функсияи $f(x)=arctge^x$ -ро меёбем:

$$F'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\frac{1}{e^{-x}+e^x}=\frac{1}{e^x+e^{-x}}=f(x)$$

Мисоли 6.1.2. Исбот кунед, ки функсияи

$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\ \frac{tgx}{\sqrt{2}}$ барои функсияи $f(x)=\frac{1}{(tg^2x+2)\cos^2x}$, функсияи ибтидой мешавад.

Ҳал.

$$F'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(tgx)'}{1+\frac{tg^2x}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+tg^2x}=\frac{1}{(2+tg^2x)\cos^2 x}=f(x)$$

Мисоли 6.1.3. Интегралро ёбед

$$\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx.$$

Ҳал. Аз хосиятҳо ва ҷадвали интегралҳо истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx=2\int x^3dx-5\int x^2dx+7\int xdx-3\int dx=$$

$$=2\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-3x+c=$$

$$=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+c$$

Мисоли 6.1.4. Интегралро ёбед:

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}dx.$$

Ҳал. Табдилдиҳӣ намуда, интегралро ҳисоб мекунем:

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx=\int\sqrt{x^3+5}\,\frac{1}{3}d(x^3+5)=$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{x^3+5}\,d(x^3+5)=\frac{1}{3}\int(x^3+5)^{\frac{1}{2}}d(x^3+5)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(x^3+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3\cdot 3}(x^3+5)^{3/2}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+5)^3}+C.$$

Мисоли 6.1.5. Интегралро ёбед:

$$\int\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2\cos\frac{x}{2}dx.$$

Ҳал. $\int\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2\cos\frac{x}{2}dx=\int\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2d\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)=\dfrac{\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3}{3}+C=$

$$=\frac{1}{3}\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3+C.$$

Мисоли 6.1.6. Интегралро ёбед:

$$a)\ \int arctg\,x\,dx, \qquad б)\ \int x^2e^x\,dx.$$

Ҳал. Барои ҳал намудани ин интегралҳо формулаи бо ҳиссаҳо интегрониданро истифода мебарем:

$$a)\ \int arctgx\,dx = \begin{vmatrix} u = arctgx\ , & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}\ , & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\,arctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \int\frac{\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c = xarctgx - \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

$$б)\ \int x^2e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2\ , & dv = e^x dx \\ du = 2xdx\ , & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2\cdot e^x - 2\int xe^x x = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2e^2 - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

Мисоли 6.1.7. Итегралро ёбед:

$$\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}.$$

Ҳал. Барои ҳал намудани интеграли зерин, методи гузоришро истифода мебарем:

$$\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = \begin{vmatrix} t = \cos^2 x \\ dt = -\sin 2xdx \end{vmatrix} = -\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= C - \arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}.$$

§2. Методҳои асосии интегронӣ

I. Интегронидани касрҳои ратсионалӣ. Касри ратсионалӣ гуфта касри намуди $\frac{p(x)}{Q(x)}$ -ро меномем, ки $P(x)$ ва $Q(x)$ бисъёраъзогиҳо мебошанд.

Касрҳои оддитарин чунин намуд доранд:

а) $\frac{A}{x-a}$, б) $\frac{A}{(x-a)^m}$,

в) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, г) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$,

Интеграл аз функсиҳои 1) - 4) -ро бо осонӣ ҳисоб намудан мумкин аст, агар формулаи зерин истифода бурда шавад:

$$а)\ \int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

$$б)\ \int\frac{Adx}{(x-a)^m}=-\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$$

$$в)\ \int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C,\left(p^2-4q\langle\ 0\right)$$

$$г)\ \int\frac{dx}{x^2+px+q|^m}=\left|t=x+\frac{p}{2},a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{t}{2a^2(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}$$

–ро формулаи рекуррентӣ меноманд.

II. Интегронидани функсияҳои ирратсионалӣ ва тригонометрӣ. Барои интегронидани ифодаи $R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ аз методи гузориш истифода мебарем.

Аз ин ҷо

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\left|t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right|=\int R\left(\frac{at^n-1}{a--ct},t\right)\frac{ad-bc}{(a-ct^n)^2}dt.$$

Барои интегронидани ифодаҳои тригонометрии намудашон $R(\sin x, \cos x)$ аз гузориши васеъ татбиқшавандаи $t = tg\frac{x}{2}$ истифода мебарем. Дар ҳақиқат

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+t^1g^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Яъне $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$. мешавад.

Дар ҳарду ҳолат ҳам бо ёрии гузориш аз ифодаҳои ирратсионалӣ ва тригонометрӣ ба ифодаи ратсионалӣ гузаштем. Чӣ тавре ки маълум аст, ифодаи ратсионалиро бо осони интегронидан мумкин аст.

III. Гузоришҳои Эйлер ва интегронии дифференсиалии биномиалӣ.

Интеграли намуди $\int R\left(x; \sqrt{ax^2+вx+c}\right)$ -ро бо яке аз се гузориши зерин ҳисоб кардан мумкин аст:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x, \quad a>0$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}, \quad c>0$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t, \; ax^2 \pm bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta),$

α, β -решаҳои ҳақиқии се аъзогӣ квадратӣ мебошанд.

Се гузоришҳои овардашударо гузоришҳои Эйлер меноманд.

Ифодаи $x^m\left(a+вx^n\right)^p$ -ро дифференсиалии биномиалӣ меноманд.

Барои интегронидани ифодаи дифференсиалии биномиалӣ се ҳолати зеринро дида мебароем:

1) агар p -бутун бошад, дар ин ҳолат бо осони интегронида мешавад;

2) агар $\frac{m+1}{n}$ -ададн бутун бошад, дар ин мавридгузориши $a+bx^n=t^s$ қуллай мебошад, ки s - махраҷи касри P мебошад.

3) агар $\frac{m+1}{n}+p$ - ададн бутун бошад, пас гузориши $ax^{-n}+B=z^s$ -ро истифода мебарем.

Мисоли 6.2.1. Бо методи коэффитсиентҳои номаълум интеграли зеринро ёбед

$$\int\frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$$

Ҳал. Аз методи коэффисиентҳои номаълум истифода бурда ҳосил мекунем

$$\frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{cx+D}{x^2+1}.$$

Махраҷи умумӣ дода, пайдо мекунад:

$$x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+1\right)=Ax+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D=$$
$$=Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D;$$

Коэффисиентҳои назди дараҷаҳои якхелаи x -ҳоро баробар карда мегирем:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \left\{\begin{array}{l} 1=C \\ 0=D \\ -2=A+C \\ 0=B+D \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}$$

Аз ин ҷо $A=-3$, $B=O$, $C=1$, $D=O$ аст.

Бо назардошти ин қиматҳо, интеграли додашударо ба ду интеграл ҷудо менамоем:

$$\int\frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-3\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$
$$=-\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$$

Мисоли 6.2.2. Усули Остроградскийро истифода бурда, интеграли зеринро ёбед:

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}.$$

Ҳал. Дар асоси усули Остроградский ҳосил мекунем:

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}dx..$$

Баробарии охиронро дифференсиронида, махраҷи умумӣ медиҳем ва дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$x^2 = A\left(x^2+2x+2\right) - (Ax+B)(2x+2) + (Cx+D)\left(x^2+2x+2\right).$$

Барои муайян намудани коэффисиентҳои номаълум системаи зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = C, \\ x^2 & 1 = -A+2C+D, \\ x & 0 = -2B+2C+2D, \\ x^0 & 0 = 2B-2B+2D. \end{array}$$

Ин системаро ҳал намуда, меёбем:

$$A=0 \ : \ B=1 \ , \ C=D \ , \ D=1.$$

Аз ин ҷо

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)} + arctg(x+1) \text{ аст.}$$

Мисоли 6.2.3. Интегралро ёбед:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}.$$

Ҳал. Бо ёрии гузориш аз ифодаи ирратсионалӣ озод шуда, интеграли ҳосилшударо ҳисоб мекунем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \left| \begin{matrix} 2x-1=t^4 \\ dx=2t^3dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^3dt}{t^2-t} =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{t-1} = 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\int \frac{(t+1)(t-1)+1}{t-1}dt = 2\int (t+1)dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = t^2+2t+2\ln(t-1)+C =$$

$$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + \ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2 + C.$$

Мисоли 6.2.4. Ёфта шавад: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

Ҳал. Барои ҳал намудани ин интеграл гузориши тригонометриро истифода мебарем:

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} = \left| \begin{matrix} tg\,\dfrac{x}{2}=t \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{2dx}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{4t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)dt}{t\left(t^2-4t+3\right)}.$$

Интеграли ҳосилшударо бо методи коэффисиентҳои номаълум ҳал мекунем:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{D}{t-1}.$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$A=\frac{1}{3}\ ;\quad B=\frac{5}{3}\ ;\quad D=-1$$

Бинобар ин,

$$J = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} + \frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3} - \int\frac{dt}{t-1} = \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{5}{3}\ln|t-3| - \ln|t-1| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}\ln\left(tg\,\frac{x}{2}-3\right) - \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$ мебошад.

Мисоли 6.2.5. Гузоришҳои Эйлерро истифода барда интеграли зеринро ёбед

$$\int \frac{xdx}{\left(\sqrt{7x-x^2-10}\right)^3}.$$

Ҳал. Дар ин ҳолат $a < 0$, $c < 0$ сеаъзогии квадратии $7x-x^2-10$, дуто решаи ҳақиқии 2 ва 5 дорад, бинобар ин, гузориши сеюми Эйлерро татбиқ мекунем:

$$\sqrt{7x-x^2-10} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t,$$

$$5-x = (x-2)t^2,$$

$$x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}, \qquad dx = -\frac{6tdt}{\left(1+t^2\right)^2},$$

$$(x-2)t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{7x-x^2-10)^3}} = -\frac{6}{27}\int \frac{5+2t^2}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(-\frac{3}{t}+2t\right)+C = \frac{10(x-2)}{9\sqrt{7x-x^2-10}} - \frac{4}{9}\frac{\sqrt{7x-x^2-10}}{x-2}+C.$$

Мисоли 6.2.6. Усули дифференсиалии биномиалиро истифода бурда, интеграли зеринро ёбед:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Ҳал. Дар ин ҷо $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} : \frac{1}{3} = 1$ аст. Ҳолати 2 – юмро истифода мебарем: $1 + x^{-\frac{1}{3}} = t^2$; $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = 2t\,dt$.

Аз ин ҷо $\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = 6\int t^2dt = 2t^3+C = 2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+C$ аст.

Кори мустақилонаи 6.1.1.

1) Нишон диҳед, ки функсияҳои зерин

а) $F(x)=\ln|\sin x|$, б) $F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)\ln|\sin x|$

в) $F(x)=-3\cos\sqrt[3]{x}$, г) $F(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$

мувофиқан барои функсияҳои

а) $f(x)=ctg\,x$, б) $f(x)=\sin(ax+b)$,

в) $f(x)=\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ ва , г) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$,

функсияҳои ибтидоӣ мебошанд.

2) Хосиятҳои асосӣ ва ҷадвалии интегралҳоро истифода бурда, интегралҳои зеринро ёбед:

а) $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$, б) $\int\left(a+\frac{b}{x-a}\right)dx$,

в) $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$, г) $\int\frac{\left(a^x-b^x\right)^2}{a^xb^x}dx$.

Кори мустақилонаи 6.1.2.

1) Интегралро ёбед:

а) $\int x^3\left(1-2x^4\right)^3dx$; б) $\int\frac{\sin 4x}{\cos^4 2x+4}dx$;

в) $\int\frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}dx$; г) $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$.

2) Усули гузориш ва бо ҳиссаҳо интегрониро истифода бурда, интегралҳои зеринро ёбед:

а) $\int\ln xdx$, б) $\int(x+1)e^{xdx}$,

в) $\int x^5e^{x^2}dx$, г) $\int\sin\sqrt{x}dx$.

Кори мустақилонаи 6.2.1.

1) Бо усули коэффисиентҳои номаълум интегралҳои зеринро ёбед:

а) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

2) Усули Остроградскийро истифода бурда, интегралҳои зеринро ёбед:

а) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$, б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

Кори мустақилонаи 6.2.2.

1) Интегралро ёбед:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$, б) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$, в) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

2) Гузоришҳои Эйлерро истифода бурда, интегралҳои зеринро ёбед:

а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-2x+2}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

3) Гузоришҳои тригонометриро истифода бурда, интеграли зеринро ёбед

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$$

4) Гузоришҳои дифференсиалии биномиалиро истифода бурда, интегралҳои зеринро ёбед:

а) $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$, б) $\frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{x^4\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}}$.

Ҷавобҳо

К.М. 6.1.1.

2) а) $\frac{1}{2}x^2+x+2\ln x-1$; б) $\alpha x^2+2\alpha в\ln|x-\alpha|-\frac{в^2}{x-\alpha}$;

в) $2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x$; г) $\frac{1}{\ln\alpha-\ln в}(\frac{\alpha^x}{в^x}-\frac{в^x}{\alpha^x})-2x$.

К.М. 6.1.2.

1) $a)$ $-\frac{1}{32}(1-2x^4)^4$; б) $-\frac{1}{4}(x-3)^4$;

в) $-5\sqrt{3-x^2}+3arctg\sin\frac{x}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{4}arctg(x-3)/4$.

2) $a)$ $x(\ln x-1)$; б) $x\ell^x$; в) $\frac{1}{2}\ell^{x^2}(x^4-2x^2+2)$;

г) $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}$.

К.М. 6.2.1.

1) а) $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

б) $\frac{1}{3}arctgx\;-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}arctgx\;+C$.

2) а) $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{4}arctgx\;+C$;

б) $\frac{15x^6+40x^2+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}arctgx\;+C$.

К.М. 6.2.2.

1) а) $2arctg\sqrt{x+1}$; б) $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}}$;

в) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln+\left|x+\sqrt{x\;\;-1}\right|$.

2) а) $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}\right.$.

3) $a)$ $\ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+3}{tg\,\frac{x}{2}-3}\right|$. 4) а) $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $-2\sqrt{(x^{-3/4}+1)}$.

Боби VII. Интеграли муайян

§1. Интеграли муайян ва хосиятҳои он

1.Таърифи интеграли муайян. Бигзор фуксияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ муайян бошад. Порчаи $[a;b]$- ро бо ёрии нуқтаҳои $a = x_0 \langle x_1 \langle \ldots \langle x_n = b$ ба n - қисми ихтиёрӣ тақсим мекунем. Дар ҳар як порчаи хусусии $[a_\kappa; b_\kappa]$ нуқтаи дилхоҳи ξ_κ -ро мегирем ва дарозии ин порчаҳоро бо $\Delta x_n = x_\kappa - x_{\kappa-1}$ ишора менамоем:

Суммаи интегралӣ гуфта дар порчаи $[a;b]$ суммаи зеринро меномем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_\kappa)\,\Delta x_\kappa = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n. \qquad (7.1.1)$$

Ҳудуди охирноки ифодаи (7.1.1) - ро дар ҳолати $\lambda = \max \Delta x_n \to 0$ будан интеграли муайян дар порчаи $[a;b]$ аз функсияи $f(x)$ меномем ва онро чунин ишора мекунем:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_x)\Delta x_x.$$

Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ бефосила бошад, он гоҳ ҳудуди суммаи интегралӣ новобаста аз тарзи тақсимоти порчаи $[a;b]$ ва интахоби нуқтаи ξ_κ мавҷуд аст.

2. Хосиятҳои асосии интеграли муайян. Интеграли муайян дорои хосиятҳои зерин мебошад:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (a \langle c \langle b)$;

4) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$;

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \qquad C - \text{доими.};$

6) Агар $m \le f(x) \le M$ дар $[a;b]$ бошад, пас

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ мешавад;

7) Формулаи Нютон-Лейбнитс

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

дар ҳолате, ки $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ мебошад, яъне $F'(x) = f(x)$ аст.

8) Интегронӣ бо ҳиссаҳо $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

дар ҳолати $u(x)$ ва $V(x)$ - функсияҳои дифференсиронидашаванда дар $[a;b]$ мебошанд.

9) Иваз намудани тағйирёбанда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt,$$

ки дар ин ҷо $x = \varphi(t)$ функсияи бефосила ва дорои ҳосилаи $\varphi'(t)$ дар $[\alpha;\beta]$ $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ мебошанд.

10) Агар функсия $f(kx+m)$ дар порчаи $[a;b]$ интегронидашаванда бошад, он гоҳ формулаи зерин ҷой дорад: $\int_a^b f(kx+m)dx = \frac{1}{k}F(kx+m)\Big|_a^b$,

11) Агар $f(x)$ тоқ бошад, пас

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$$

ва агар ин функсия ҷуфт бошад, он гоҳ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

мешавад.

Мисоли 7.1.1. Интеграли $\int_0^1 x^2 dx$ -ро ҳамчун ҳудуди суммаи интегралӣ ҳисоб кунед.

Ҳал. Дар ин ҷо $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$ порчаи $[0;1]$-ро ба n -қисми баробар тақсим мекунем, он гоҳ $\Delta x_n = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ ва $\xi = x_k$ -интихоб мекунем. Он гоҳ пайдо мекунем, яъне

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = \frac{n}{n} = 1$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1 \quad \text{ва} \quad f(\xi_k)\cdot\Delta x_n = \left(\frac{k}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

мешавад.

Дар ин асос ҳосил мекунем:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Мисоли 7.1.2. Барои функсияи $f(x) = 2^x$ дар порчаи $[0;10]$ суммаҳои поёнӣ $\left(\underline{S}_n\right)$ ва болоӣ $\left(\overline{S}_n\right)$ Дарбуро тартиб диҳед. Порчаи додашуда ба n -қисми баробар тақсим карда шавад.

Ҳал. Азбаски функсияи нишондиҳандагии $f(x)=2^x$ афзоянда ва бефосила мебошад, бинобар ин, қиматҳои хурдтарин ва калонтарини худро мувофиқан дар аввал ва охири порчаи $[x_i\,;x_{i+1}]$ қабул мекунад. Мувофиқи шарти мисол пайдо мекунем:

$$b-a=10\ ,\ \Delta x_i=\frac{10}{n}\ ,\ x_i=\frac{10i}{n},\ x_i+1=\frac{10(i+1)}{n},$$

$f(\xi_i)=2^{\xi_i}$; $(i=0,1,\ldots n-1)$ ва барои суммаи поёнӣ $\xi_i=x_i$, барои суммаи болоӣ $\xi_i=x_{i+1}$ аст. Бинобар ин,

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n}2\frac{10i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}2^{\frac{10i}{n}}=1+2^{\frac{10}{n}}+2^{\frac{20}{n}}+\ldots+2^{\frac{10(n-1)}{n}}=\frac{10230}{2^{\frac{10}{n}}-1}\quad \text{аст.}$$

Ҳамин тавр, ҳосил $\underset{-}{S_n}\dfrac{10230}{n\left(2^{10/n}-1\right)}$ ва $\bar{S}_n=\dfrac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{10/n}-1\right)}$ мешаванд.

Мисоли 7.1.3. Аз таърифи интеграл истифода бурда, интеграли зеринро ҳисоб кунед: $\int\limits_0^1 x\,d\,x$

Ҳал. Дар асоси таърифи интеграли муайян ҳосил мекунем:

$$\int\limits_a^b xdx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\ \xi_i\,\Delta x_i,\quad \lambda=\max\Delta x_i\to 0$$

$$0=x_0\langle x_1\langle x_2\langle\ldots\langle x_n=1\ ,\qquad [x_i\,;x_{i+1}].$$

Порчаи $[0\,;1]$-ро ба n -қисми баробар тақсим мекунем бо ёрии нуқтаҳои $x_i=\dfrac{i}{n},\ (i=0,1,2,\ldots,n-1)$

Дарозии ҳар як порчаи хусусӣ ба $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ баробар аст, ки $\frac{1}{n} \to 0$, ҳангоми $n \to \infty$ аст.

Ба сифати нуқтаи ξ_i қисми рости порчаҳои хусусиро мегирем:

$$\xi_i = x_{i+1} = \frac{i+1}{n} \qquad (i = 0,1,2,...n-1).$$

Акнун суммаи интегралии тартиб медиҳем:

$$J_n = S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Ҳудуди суммаи интегралиро дар ҳолати $n \to \infty$ ҳисоб мукунем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Аз ин ҷо

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \qquad \text{мешавад.}$$

Нишон медиҳем, ки дар ҳолати дигар хел интихоби қимати ξ_i ҳудуди суммаи интегралӣ тағйир намеёбад.

Масалан, ба сифати қимати ξ_i миёнаи порчаи хусусиро мегирем:

$$\xi_i = \frac{i+\frac{1}{2}}{n}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Суммаи интегралӣ тартиб медиҳем

$$J_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2i+1}{2n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2}[1+3+5...+(2n-1)] = \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}.$$

Аз ин ҷо

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{2} \qquad \text{аст.}$$

Мисоли 7.1.4. Интегралро ҳисоб кунед:

$$I=\int_0^2 |1-x|\,dx.$$

Ҳал. Азбаски $1-x=\begin{cases}1-x\ , & 0\le x\le 1\\ x-1\ , & 1\le x\le 2\end{cases}$

мебошад, хосияти аддитивии инегралро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\int_1^2 |1-x|dx=\int_0^1 (1-x)dx+\int_0^1 (x-1)dx=-\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Мисоли 7.1.5. Интегралро баҳо диҳед $\quad J=\int_1^3 \sqrt{3+x^3}\ dx.$

Ҳал. Азбаски функсияи $f(x)=\sqrt{3+x^3}$ якзайл меафзояд дар порчаи $[1;3]$, бинобар ин, $m=2,\ \ b-a=2,\ \ M=\sqrt{30}$ мешавад. Аз ин ҷо интегралро чунин баҳо медиҳем:

$$2\cdot 2\le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\ dx\le \sqrt{30\cdot}\,2,\qquad \text{ё худ}$$

$$4\le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx\le 2\sqrt{30}\approx 10{,}95.$$

Мисоли 7.1.6. Интегралро баҳо диҳед:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}.$$

Ҳал. Азбаски $0\le cos^2x\le 1$ аст, бинобар ин, ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{8}\le\frac{1}{5+cos^2x}\le\frac{1}{5}\quad \text{ва}\quad \frac{\pi}{16}\le\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+\cos^2 x}\le\frac{\pi}{10}.$$

Мисоли 7.1.7. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx.$$

Ҳал. Усули бо ҳиссаҳо интегрониро ба асос гирифта, интегралро ҳисоб мекунем:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & e^{-x}dx = dv \\ du = x & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cdot e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + 1 - e^{-1} = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

Мисоли 7.1.8. Интегралро ҳисоб кунед:

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx .$$

Ҳал. Функсияи зериинтегралӣ тоқ аст, бинобар ин, дар асоси хосияти интеграли муайян $J = 0$ мешавад.

Мисоли 7.1.9. Интегралро ҳисоб кунед: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Ҳал. Гузориши $x = 2\sin t$ —ро истифода мебарем, ки $-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}$ аст. Функтсияи $x = \varphi(t) = 2\sin t$ дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ ҳамаи шартҳои теоремаи иваз намудани тағйирёбандаро қаноат мекунанд ва $\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ аст, ҳамин тавр, $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\ dt$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx = 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2t) = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

§ 2. Татбиқи геометрии интеграли муайян

1. **Ҳисоб намудани масоҳати фигураҳои геометрӣ.** Масоҳати трапетсияи каҷхатта, ки бо хати каҷи $y = f(x)$ ва хатҳои рости $x = a$, $x = b$ ва попчаи

$[a;b]$ -и тири OX маҳдуд карда шудааст, бо формулаи $S=\int_a^b f(x)dx$ ҳисоб карда мешавад.

Масоҳати фигураи геометрӣ, ки бо хатҳои каҷи $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ ва хатхои рости $x=a$ $x=b$ маҳдуд карда шудааст бо формулаи

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx \qquad \text{ҳисоб карда мешавад.}$$

Агар муодилаи хати каҷ ба намуди параметрӣ $x=x(t)$, $y=y(t)$ дода шуда бошад, он гоҳ масоҳати трапетсияи каҷхата бо формулаи

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

ёфта мешавад, ки дар ин ҷо t_1 *ва* t_2 аз баробариҳои $a=x(t_1)$, $b=y(t_2)$ муайян карда мешаванд.

Масоҳати сектори каҷхата, ки дар системаи кординатаи қутбӣ $\rho=\rho(\theta)$ дода шудааст ва бо ду кунҷҳои қутбӣ $\theta_1=\alpha$, $\theta_2=\beta$ маҳдуд аст, бо формулаи $S=\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta$ ҳисоб карда мешавад.

2. Ҳисоб намудани дарозии камони хати каҷ. Агар хати каҷи $y=f(x)$ дар $[a;b]$ суфта бошад, ($y'=f'(x)$ - бефосила бошад, пас дарозии камони ин хати каҷ бо формулаи

$$\ell=\int_a^b \sqrt{1+{y_x'}^2}$$

ҳисоб карда мешавад.

Дар ҳолати параметрӣ $x=x(t)$, $y=y(t)$ дода шудани муодилаи хати каҷ, дарозии камони он бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.$$

Агар хати каҷи суфта, дар системаи координатаи қутбӣ дода шуда бошад, бо муодилаи $\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$, пас дарозии камони он бо формулаи

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\; d\theta$$ ёфта мешавад.

3. Ҳисоб намудани ҳаҷми ҷисм. Агар масоҳати бурриши ҷисм, ки бо ёрии ҳамвории ба тири OX перпендикуляр бурида шудааст, ба намуди функсияи $S = S(x)$ ифода карда шавад $- a \le x \le b$, он гоҳ ҳаҷми ҷисм бо формулаи зерин:

$$V_x = \pi \int_{b}^{a} y^2 dx$$

ҳисоб карда мешавад.

Агар шакли геометрӣ бо хати каҷи $y = f(x)$ ва хатҳои рости $y = 0,\ x = a,\ x = b$ маҳдуд карда шуда бошад, он гоҳ ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи чархзании ин трапетсия дар атрофи тири OX ҳосил мешавад, бо формулаи

$$V_x = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx$$

ҳисоб карда мешавад.

Агар фигураи геометрӣ бо хатҳои каҷи $y_1 = f_1(x)$ $y_2 = f_2(x)$ ва хатҳои рости $x = a,\ x = b$ маҳдуд карда шуда бошад, он гоҳ ҳаҷми ҷисми чархзанӣ дар атрофи тири OX бо формулаи

$$V_x = \pi \int_{a}^{b} \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] dx$$

ҳисоб карда мешавад.

4. **Ҳисоб намудани масоҳати сатҳи чархзанӣ.** Агар камони хати каҷи $y = f(x)$ $(a < x < b)$ дар атрофи тири ox чарх занад, он гоҳ масоҳати сатҳии ҳосилшуда бо формулаи

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

ҳисоб карда мешавад.

Агар муодилаи хати каҷ ба намуди параметрӣ $x = x(t)$, $y = y(t)$ дода шуда бошад, пас масоҳати сатҳи чархзанӣ бо формулаи

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

ҳисоб карда мешавад.

Мисоли 7.2.1. Масоҳати фигураи геометрӣ, ки бо параболаи $y = \frac{x^2}{2}$ ва хатҳои рости $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ маҳдуд карда шудааст, ёфта шавад.

Ҳал. Масоҳати мазкур бо интеграли зерин ҳисоб карда мешавад:

$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{2\cdot 3}\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{2\cdot 3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{2} - \frac{1}{6} = \frac{27-1}{6} = \frac{26}{6} = 4\frac{1}{3} \text{ (в.к в).}$$

Мисоли 7.2.2. Масоҳати S, ки бо хатҳои каҷи $y = 2 - x^2$ *ва* $y^3 = x^2$ маҳдуд мебошад, ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Системаи $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x^{2/3} \end{cases}$ -ро ҳал намуда, ҳудудҳои интегралро меёбем,

яъне $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Пас дар асоси формулаи зерин ҳисоб мекунем:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{2/3}\right) = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^1 = 2\frac{2}{15} \text{ (в.кв.).}$$

Мисоли 7.2.3. Масоҳати фигураи геометреро, ки бо яке аз шохаҳои тсиклоиди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ ва тири ox маҳдуд гардидааст, ёбед.

Ҳал. Дар ин ҷо $dx=2(1-\cos t)dt$ *ва* $t_1=0$, $t_2=2\pi$ мебошад. Бинобар ин, ҳосил мекукнем:

$$S=\int_0^{2\pi}2^2(1-\cos t)^2dt=4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=4\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi}=12 \quad \text{(в.кв.)}.$$

Мисоли 7.2.4. Масоҳати фигураи геометрӣ, ки бо лемнискатаи $\rho^2=2\cos\theta$ маҳдуд карда шудааст, ёфта шавад.

Ҳал. Масоҳати аз чор як ҳиссаи фигураи ҳосилшударо меёбем:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}2\cos 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}, \qquad S=4S_1=2 \text{ (в.кв.)}.$$

Мисоли 7.2.5. Дарозии камони хати каҷи $y=x^{3/2}$ -ро аз $x=0$ то $x=1$ ҳисоб намоед.

Ҳал. Муодилаи хати каҷро дифференсиронида, меёбем: $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Аз ин ҷо дар асоси формулаи

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}$$

ҳосил мекунем:

$$\ell=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{14}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}-\frac{8}{27}=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13-1}\right)\approx 1{,}4397$$

Мисоли 7.2.6. Дарозии камони хати каҷи $x=\cos^5 t$,

$y=\sin^5 t$ *аз* $t_1=0$ *то* $t_2=\dfrac{\pi}{2}$ ёфта шавад.

Ҳал. Аввало ҳосилаҳоро нисбат ба параметр меёбем:

$$x_t'=5\cos^4 t\sin t\,,\qquad y_t'=5\sin^4 t\cos t\,.$$

Бинобар ин, ҳосил мекунем:

$$\ell=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(-5\cos^4 t\cdot\sin t\right)^2+\left(5\sin^4 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt=5\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=-\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\cdot\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{5}{8}\left[2-\frac{\ln\left|2-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}}\right].$$

Мисоли 7.2.7. Дарозии камони хати каҷи $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{2}\ [0\le\theta\le 3\pi]$ ёфта шавад.

Ҳал. Ҳосил мекунем: $p'=\dfrac{1}{2}a\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}$, $\rho'=a\sin^2\dfrac{\theta}{3}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{3}$, бинобар ин,

$$l=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}\cdot\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta=\frac{3\pi}{2}a\quad\text{мебошад.}$$

Мисоли 7.2.8. Ҳаҷми эллипсоидро муайян намоед:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ҳал. Бурриши эллипсоид бо ҳамвории $x=const$ эллипс мебошад, яъне

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

бо нимтирҳо $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Аз ин ҷо масоҳати ин эллипс чунин аст:

$$S(x) = \pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Бинобар ин,

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc \text{ мебошад.}$$

Дар ҳолати хусусӣ агар $a=b=c=r$ бошад, он гоҳ ҳамҷми кураро ҳосил мекунем.

Мисоли 7.2.9. Фигурае, ки бо хати каҷи $y^2 = (x-1)^3$ ва хати рости $x = 2$ маҳдуд мебошад, дар атрофи тири OX чарх мезанад. Ҳаҷми фигураи ҳосилшударо ёбед.

Ҳал. Дар асоси формулаи ҳисобкунӣ ҳаҷми фигураи чархзаниро пайдо мекунем:

$$V = \pi\int_1^2 y^2dx = \pi\int_1^2 (x-1)^3 = \frac{1}{4}\pi(x-1)^4\Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{(в. куб.)}$$

Мисоли 7.2.10. Масоҳати сатҳеро, ки дар натиҷаи чархзании шохаи синусоидаи $y = \sin 2x \left(\text{аз } x=0 \text{ то } x=\frac{\pi}{2}\right)$ дар атрофи тири OX ҳосил шудааст, ёбед.

Ҳал. Функсияи додашударо дифференсиронида, меёбем:

$$y' = 2\cos 2x, \quad \text{он гоҳ}$$

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx.$$

Тағйирёбандаро иваз мекунем:

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1+4\cos^2 2x}\, dx = \left| \begin{matrix} t=2\cos 2x, \ t_1=-2 \\ dt=-4\sin 2x dx, t_2=2 \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \right)$$

Мисоли 7.2.11. Масоҳати сатҳе, ки дар натиҷаи чархзании давраи $x = r\cos t$, $y = b + r\sin t$ дар атрофи тири OX ҳосил мешавад, ёфта шавад.

Ҳал. Аз ин ҷо маълум аст, ки $x'_t = -r\sin t$, $y'_t = r\cos t$ мешавад.

Масоҳати сатҳро ҳисоб мекунем:

$$S_x = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + r\sin t)\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = 2\pi r \int_0^{2\pi} (b + r\sin t) dt =$$

$$= 2\pi r (bt - r\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 br.$$

§ 3. Татбиқи интеграли муайян дар иқтисодиёт

1.Маънои иқтисодии интеграли муайян. Бигзор, функсияи $z = z(t)$ истеҳсолотро вобаса аз вақти t ифода кунад. Он гоҳ ҳаҷми маҳсулоти истеҳсол шуда дар муддати вақти аз лаҳзаи $t = t_0$ то лаҳзаи $t = T$ бо интеграли муайян аз функсияи $z(t)$ дар порчаи $[t_0; T]$ ифода карда мешавад:

$$V = \int_{t_0}^{T} z(t) dt.$$

2.Татбиқи интеграли муайян дар иқтисодиёт. Маълум аст, ки агар функсияи маҳсулнокии меҳнат муайян бошад, бо ёрии интеграли муайян ҳаҷми маҳсулоти истеҳсолшударо ифода кардан мумкин аст.

Мисоли 7.3.1. Истеҳсоли рӯзона Р-ро дар як рӯзи корӣ аз соати 8то14 , агар маҳсули меҳнат таҷрибавӣ дода шуда бошад, ёбед:

$$P = p(t) = -\frac{t^2}{4} + 5t - 15 .$$

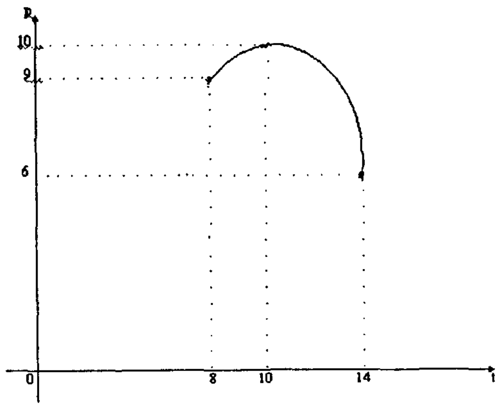
Ин функсия равандеро инъикос менамояд,ки маҳсулнокӣ дар ду соати аввал меафзояд , пас аз он паст меравад.

Ҳал. Функсияи маҳсулнокии дар порчаи $[8;14]$ овардашуда ва коркарди рӯзонаро бо ёрии интеграли муайян ифода мекунем:

$$P = \int_8^{14}\left(-\frac{t^2}{4} + 5t - 15\right)dt = \left(-\frac{t^3}{12} + \frac{5t^2}{2} - 15t\right)\Bigg|_8^{14} = -\frac{(14)^3 - 8^2}{12} + \frac{5}{2}\cdot\frac{(14)^2 8^2}{2} - 15(14-8) =$$

$$= -\frac{2744-512}{12} + 5\cdot\frac{196-64}{2} - 15\cdot 6 = -186 + 330 - 60 = 54.$$

Ҳамин тавр, дар муддати вақти нишондодашуда 54 воҳид маҳсулот истеҳсол карда шудааст.



Мисоли 7.3.2. Функсияи ҳудуди хароҷот дода шудааст:

$$MS = 3x^2 - 40x + 125, \qquad x \in [0;3]$$

Функсияи хароҷот S(x) ёфта шавад ва хароҷот ҳисоб карда шавад ҳангоми 20 воҳид истеҳсоли маҳсулот, агар маълум бошад, ки хароҷот барои истеҳсоли як воҳид маҳсулот 100 воҳиди пулиро ташкил медиҳад.

Ҳал. Функсияи хароҷотро бо ёрии интеграли муайян меёбем:

$$S(x)=\int_0^x MSdx+C$$

Дар ин ҳолат доимӣ C аз шарти S(1)=100 муайян карда мешавад, яъне C=100. Функсияи хароҷот :

$$S(x)=x^3-20x^2+125x+100 .$$

Қимати $x=20$-ро гузошта, ҳосил мекунем: $S(20)=2600$

§4.Тақрибӣ ҳисобкунии интеграли муайян

I. **Формулаи росткунҷаҳо.** Агар функсияи $y=f(x)$ дар порчаи охиронки $[a;b]$ дилхоҳ маротиба дифференсиронишаванда бошад ва $h=\frac{b-a}{n}$ $x_i=a+ih(i=1,2,...,n)$, $y_i=f(x_i)$ бошад, пас формулаи зерин ҷой дорад:

$$\int_a^b f(x)dx=h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+R_n, \qquad (7.4.1)$$

ки дар ин ҷо

$$R_n=\frac{(b-a)h}{2}f'(\xi) \qquad (a\le\xi\le b) \text{ мебошад.}$$

II. **Формулаи трапетсия.** Бо назардошти ишораҳои дар боло овардашуда формулаи трапетсия чунин аст:

$$\int_a^b f(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

ки дар ин ҷо

$$R_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi) \qquad (a\le\xi\le b) \text{ аст.}$$

III. **Формулаи парабола (Симпсон).** Бо иҷрошавии шартҳои дар (7.4.1) гуфташуда, формулаи зерин ҷой дорад:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + .. + y_{n-2})\right]$$

ки дар ин ҷо n - адади ҷуфт мебошад ва

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad (a \le \xi \le b) \text{ мебошад.}$$

Мисоли 7.4.1. Формулаи росткунҷаро ҳангоми $n = 12$ будан истифода бурда, интеграли $\int_0^{2\pi} x \sin xdx$ -ро тақрибӣ ҳисоб кунед ва бо қимати аниқаш муқоиса намоед.

Ҳал. $h = \frac{\pi}{6}$, $[0;2\pi]$ он гоҳ $x_i = i\frac{\pi}{6}$ $(i = 0,1,2, \ldots,12)$ аст, пас дар асоси формулаи росткунҷа ҳосил мекунем:

$$\int_0^{2\pi} x\sin xdx \approx \frac{\pi}{6}\sum_{i=0}^{11} i\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{36}\sum_{i=0}^{11} i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{36}\left(\sum_{i=0}^{11}\cos ix\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{1} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{\cos 6x \cdot \sin\frac{11}{2}x}{\sin\frac{x}{2}x}\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36}\left[\frac{\cos 6x \cdot \sin\frac{11}{2}x - \frac{11}{2}\cos\frac{11}{2}x \cdot \cos 6x}{\sin^2\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot \cos 6x \cdot \sin\frac{11}{2}x\right]_{x=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{\frac{11}{2}\cos\frac{11}{12}\pi \cdot \sin\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{11}{12}\pi}{\sin^2 \pi/12} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{72} \cdot \frac{11\cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{12}}{\sin^2 \pi/2} = -\frac{\pi^2}{6} ctg\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi^2}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx -6{,}2961$$

Қимати аниқи интегралӣ $J = -2\pi = -6{,}28$ мебошад

Мисоли 7.4.2. Интеграли $J = \int_1^9 \sqrt{6x - 5}\,dx$ -ро бо формулаи роскунҷа тақрибӣ ҳисоб кунед $(n=8)$. Баъд хатогии ҳисоби тақрибиро бо фоиз ифода намоед.

Ҳал.

$$x_0=1 \qquad y_0=\sqrt{1}=1.0000$$
$$x_1=2 \qquad y_1=\sqrt{7}=2.6458$$
$$x_2=3 \qquad y_2=\sqrt{13}=3.6056$$
$$x_3=4 \qquad y_3=\sqrt{19}=4.3589$$
$$x_4=5 \qquad y_4=\sqrt{25}=5,0000$$
$$x_5=6 \qquad y_5=\sqrt{31}=5,5678$$
$$x_6=7 \qquad y_6=\sqrt{37}=6,0828$$
$$x_7=8 \qquad y_8=\sqrt{43}=6.5574$$
$$x_8=9 \qquad y_8=\sqrt{49}=7,0000$$

$$J=\int_1^9\sqrt{6x-5}dx=(1,0000+2,6458+3,6056+4,3589+$$
$$+5,0000+5,5678+6,0828+6,5574)=34,8183$$

Қимати аниқи интеграл $J=38$ мебошад. Хатогии мутлақ $\delta=38-34,8183=3,1817$ ва хатогии нисбӣ баробар аст ба $\frac{3,1817\ \cdot 100\ \%}{38}\approx 8,37\,\%$.

Мисоли 7.4.3. Бо формулаи трапетсия интеграли $\int_1^2\frac{dx}{x}$ -ро то саҳеҳии 0,001 ҳисоб кунед.

Ҳал. Дар асоси формулаи аъзои боқимондаи формулаи трапетсия ҳосил мекунем: $R_n\langle 0,\quad |R_n|<\frac{1}{6n^2}$.

Дар ин ҳолат n = 10 -ро мегирем, пас $|R_{10}|\langle\frac{1}{600}1,7\cdot 10^{-3}$ -ро ҳисоб мекунем:

$$x_0 = 1{,}0 \qquad y_0 = 1{,}0000$$
$$x_1 = 1{,}1 \qquad y_1 = 0{,}9091$$
$$x_2 = 1{,}2 \qquad y_2 = 0{,}8333$$
$$x_3 = 1{,}3 \qquad y_3 = 0{,}7692$$
$$x_4 = 1{,}4 \qquad y_4 = 0{,}7145$$
$$x_5 = 1{,}5 \qquad y_5 = 0{,}6667$$
$$x_6 = 1{,}6 \qquad y_6 = 0{,}6250$$
$$x_7 = 1{,}7 \qquad y_7 = 0{,}5882$$
$$x_8 = 1{,}8 \qquad y_8 = 0{,}5558$$
$$x_9 = 1{,}9 \qquad y_9 = 0{,}5262$$
$$x_{10} = 2{,}0 \qquad y_{10} = 0{,}5000$$

$$\int_1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}0000 + 0{,}5000}{2} + 0{,}9091 + 0{,}8333 + 0{,}7692 + 0{,}7143 + 0{,}6667 + \right.$$

$$\left. + 0{,}6250 + 0{,}5882 + 0{,}5550 + 0{,}5263\right) = \frac{1}{10}(0{,}750 + 6{,}1877) = 0{,}63377.$$

Маълум аст, ки қимати $\ln 2$ дар байни сарҳади $0{,}69202 = 0{,}69377 - 0{,}00005$ *ва* $0{,}69382 = 0{,}69377 + 0{,}00005$ мехобад.

Мисоли 7.4.4. Бо формулаи Симпсон интеграли $\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 36}\, dx$ -ро тақрибӣ ҳисоб кунед.

Ҳал. Интеграли мазкурро бо формулаи парабола (Симпсон) тақрибӣ ҳисоб мекунем:

$$y = \sqrt{x^3 + 36}, \quad n = 10. \quad a = -3. \quad в = 7 \quad h = \frac{7+3}{10} = 1, \quad h = 1.$$

$$x_0 = -3 \qquad y_0 = \sqrt{9} = 3{,}0000$$
$$x_1 = -2 \qquad y_1 = \sqrt{28} = 5{,}2915$$
$$x_2 = -1 \qquad y_2 = \sqrt{35} = 5{,}9160$$

$x_3 = 0 \qquad y_3 = \sqrt{36} = 6{,}0000$

$x_4 = 1 \qquad y_4 = \sqrt{37} = 6{,}0827$

$x_5 = 2 \qquad y_5 = \sqrt{44} = 6{,}6332$

$x_6 = 3 \qquad y_6 = \sqrt{63} = 7{,}9372$

$x_7 = 4 \qquad y_7 = \sqrt{100} = 10{,}0000$

$x_8 = 5 \qquad y_8 = \sqrt{161} = 12{,}1885$

$X_9 = 6 \qquad y_9 = \sqrt{252} = 15{,}8742$

$X_{10} = 7 \qquad y_{10} = \sqrt{379} = 19{,}4679$

$$\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 36}\, dx = \frac{1}{3}\,[3 + 19{,}4679 + 4(5{,}2915 + 6 + $$
$$+ 6{,}6332 + 10 + 15{,}8745) + 2(5{,}9160 + 6{,}0827 + $$
$$+ 7{,}9372 + 12{,}6885) \approx 87{,}6378$$

§ 5. Татбиқи физикавии интегали муайян

1) **Лаҳзаи статикии камони хати каҷи**

$y = f(x) \quad (a \le x \le b),$ *бо формулахои*

$$Mx = \int_a^b y\,dl; \qquad My = \int_a^b x\,dl$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ дифференсиали камони хати каҷ мебошад.

2. Лаҳзаҳои инертсияи камони хати каҷи $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$ бо формулаҳои

$$J_x = \int_a^b y^2 dl; \qquad J_y = \int_a^b x^2 dl$$

ҳисоб карда мешаванд.

3. Лаҳзаи статикии трапетсия, ки бо хати каҷи $y = f(x)$, тири OX ва хатҳои рости $x = a$, $x = b$ маҳдуд аст, бо формулаҳои

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b yds=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx; \qquad M_y=\int_a^b xds=\int_a^b xyds$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо $ds=ydx$ - дифференсиали масоҳати трапетсияи каҷхата мебошад.

4. Лаҳзаи инертсияи трапетсияе, ки бо хати каҷи $y=f(x)$, тири OX ва хатҳои рости $x=a$, $x=b$ маҳдуд аст, бо формулаҳои

$$J_x=\frac{1}{3}\int_a^b y^3dx; \qquad J_y=\int_b^a x^2ds=\int_b^a x^2ydx$$ п

ҳисоб карда мешавад.

5. Координатаҳои маркази вазнинии камони хати каҷи $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ бо формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\bar{x}=\frac{1}{\ell}\int_a^b xd\ell; \qquad \bar{y}=\frac{1}{\ell}\int_a^b yd\ell,$$

ки дар ин ҷо $d\ell=\sqrt{1+y'^2}dx$ ва ℓ -дарозии камон мебошад.

6.Координатаҳои маркази вазнинии трапетсияи каҷхата бо формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{s}\int_a^b xds=\frac{1}{s}\int_a^b xydx; \quad \bar{\bar{y}}=\frac{1}{2s}\int_a^b yds=\frac{1}{2s}=\frac{1}{2s}\int_a^b y^2dx$$

Дар кучо $ds=ydx$ ва S -масохати трапетсия мебошанд.

Мисоли 7.5.1. Лаҳзаи статикии нимдавраи $y=\sqrt{r^2-x^2}$ $(-r\le x\le r)$ - ро нисбат ба тири OX ёбед.

Ҳал. Ҳосилаи y -ро меёбем:

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}; \qquad dl=\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$M_x=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\int_{-r}^{r}dx=2r^2.$$

Мисоли 7.5.2. Лаҳзаи статикии қисми болоии эллипси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ нисбат бо тири ox ёфта шавад.

Ҳал. Барои эллипс формулаи лаҳзаи статикиро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$ydl = y\sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}dx =$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx\ ; \qquad \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

$$M_x=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=\frac{26}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx=$$

$$=\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\ \varepsilon\right)=b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\ \varepsilon\right)$$

Мисоли 7.5.3. Лаҳзаи инертсияи нимдавараи $y=\sqrt{r^2-x^2}$ $(-r\le x\le r)$ нисбат ба тири ox ёфта шавад.

Ҳал. Лаҳзаи инертсияро нисбат ба тири ox меёбем:

$$J_x=\int_a^b y^2dl=\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\cdot\sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx=r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2r\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$$

Дар интеграли охирон гузориши $x=r\sin t$ -ро иҷро мекунем, $dx=r\cos t dt$ агар $x=0$, $t=0$; *онгох* $x=r$, $t=\frac{\pi}{2}$ мешавад. Бинобар ин

$$J_x=2r\int_a^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2t}\ r\cos t\,dt=$$

$$=r^3\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=r^3\left(t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi r^2}{2}$$

мешавад.

Мисоли 7.5.4. Лаҳзаи инертсияи камони астроидаи $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, ки дар якум чоряк мехобад, ҳисоб карда мешавад.

Ҳал. Дар асоси симметрӣ будани астроид нисбат ба тирҳои координата ҳосил мекунем, ки $J_x = J_y$ аст, барои ҳамин ҳам кифоя аст, ки лаҳзаи инертсияро нисбат ба тири ox ҳисоб кунем:

$$dl = \sqrt{x'_t + y'_t}\,dt = 3a\sin t\cos t dt$$

$$J_x = \int_a^b y^2 dl = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\cdot 3a\sin t\cdot\cos t dt = \frac{3}{8}a^3\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}a^3, \qquad J_y = \frac{3}{8}a^3.$$

Мисоли 7.5.5. Лаҳзаи статикии секунҷае, ки бо хати рости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ва тирҳои координата маҳдуд гардидааст, нисбат ба тирҳои ox ва oy ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Маълум аст, ки

$$y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$M_x = \frac{b^2}{2}\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{ab^2}{6}$$

ва

$$M_y = b\int_o^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{a^2 b}{6}$$

Мисоли 7.5.6. Лаҳзаи инертсияи масоҳати эллипси $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ нисбат ба тири oy ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Лаҳзаи инертсияи масоҳати эллипс нисбат ба тири oy ба $J_y = \int_{-a}^{a} x^2 ds$ баробар аст, ки $ds = 2ydx$ $ds = -2ab\sin^2 t dt$ мебошанд, аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$J_y = 2\int_o^{\pi/2} a^2\cos^2 t\, 2ab\sin^2 t\, dx = 4a^3 b\int_o^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt = \frac{1}{2}a^3 b\int_o^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

Мисоли 7.5.7. Координатаҳои маркази вазнинии камони хати каҷи

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = chx$$

аз нуқтаи $A(0;1)$ *то* нуктаи $B(a;c\,h\,a)$ ёфта шавад.

Ҳал. Ҳосил мекунем:

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+sh^2x}dx=ch\,x\,dx$$

аз ин ҷо

$$l=\int_0^a dl=\int_o^a chxdx=sha,$$

$$M_y=\int_l xdl=\int_o^a x\,chxdx=x\,shx\,|_0^a-\int_o^a shxdx=asha-cha+1$$

$$x=\frac{asha-cha+1}{sha}=a-th\frac{a}{2}$$

Айнан пайдо мекунем:

$$M_x=\int_l ydl=\int_o^a ch^2xdx-\frac{1}{2}\int_o^a(1+ch2x)dx=\frac{a}{2}+\frac{sh2a}{4},$$

$$\bar{y}=\frac{\frac{a}{2}+\frac{sh2a}{4}}{sha}=\frac{a}{2sha}+\frac{cha}{2}$$

Мисоли 7.5.8. Маркази вазнинии фигурае, ки бо эллипси $4x^2+9y^2=36$ ва давраи $x^2+y^2=9$ маҳдуд гардидааст ва дар чоряки якум мехобад, ёфта шавад.

Ҳал. Аввал лаҳзаи статистикиро ҳисоб мекунем:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_o^3\left[y_2^2-y_1^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_o^3\left[\left(9-x^2\right)-\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_o^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=5$$

$$M_y=\int_o^3 x\left[y_2-y_1\right]dx=\int_o^3 x\left[\sqrt{9-x^2}-\tfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx=\frac{1}{3}\int_o^3 x\sqrt{9-x^2}dx=3$$

Масоҳати доирае, ки дар чоряки якум мехобад ва радиусаш ба 3 баробар аст, ба $\frac{3\pi}{4}$ баробар мебошад, масоҳати аз чор як ҳиссаи эллипсе, ки нимтирҳои он $a=3$, $b=2$ аст, ба $\frac{3\pi}{2}$ баробар мебошад. Аз ин ҷо масоҳати фигураи мазкур $S = \dfrac{9\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$ мешавад. Ҳамин тавр, ҳосил мукунем:

$$\bar{x} = \frac{My}{s} = \frac{4}{\pi} \quad ; \qquad \bar{y} = \frac{Mx}{s} = -\frac{20}{3\pi}.$$

Кори мустақилонаи 7.1.1.

1. Барои функсияи $f(x) = \sqrt{x}$ дар порчаи $[0;1]$ суммаҳон поёнӣ S_n ва болоӣ $\bar{S}_n$ интегралиро тартиб диҳед.

2. Интегралҳои зеринро ҳамчун ҳудуди суммаи интегралӣ ҳисоб кунед:

$$a)\ \int_0^{10} 2^x\,dx \qquad\qquad б)\ \int_1^5 x^3\,dx.$$

3. Аз таърифи интеграли муайян истифода бурда, интегрели зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

4. Интеграли муайянро ҳисоб кунед:

$$J = \int_0^3 |2 - x|\,dx.$$

Кори мустақилонаи 7.1.2.

1. Интегралро баҳо диҳед:

$$a)\ \int_{\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad\qquad б)\ \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx.$$

2. Бо ёрии интнграли муайян ҳудуд ҳисоб карда шавад:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

3. Интегралҳоро ҳисоб кунед:

$$а)\ \int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) \quad ; \qquad б)\ \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2} \quad ;$$

$$в)\ \int_0^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} \quad ; \qquad г)\ \int_{\pi/4}^{\pi/4} tgxdx$$

Кори мустақилонаи 7.1.3.

1. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$а)\ \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx; \qquad б)\ \int_1^{e^{\pi/2}} (\ln x)dx;$$

$$в)\ \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}; \qquad г)\ \int_{-3}^{3} \frac{x^2\sin 2x}{x^2+1}.$$

2. Гузориши мувофиқро истифода бурда, интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$а)\ \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx; \qquad б)\ \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}.$$

Кори мустақилонаи 7.2.1.

1) Масоҳатеро, ки бо хати каҷи $y = 4x - x^2$ ва тири OX маҳдуд гаштааст, ёбед.

2) Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои каҷи $y^2 = 2px$ ва $x^2 = 2py$ маҳдуд гаштааст, ҳисоб кунед.

3) Масоҳатеро, ки дар дохили хати каҷи $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$ маҳдуд гаштааст, ёбед.

4) Масоҳати дар дохили астроиди $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$ ҷойгиршударо ёбед.

5) Масоҳати фигурае, ки дар дохили хати каҷи $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ (0 \le \varepsilon \le 1)$ маҳдуд гаштааст, ҳисоб карда шавад.

6) Масоҳати фигураи бо хати каҷи $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ (0 \le \varepsilon \le 1)$ маҳдудгаштаро ёбед.

Кори мустақилонаи 7.2.2.

1) Дарозии камони хати каҷи $y^2=x^3$ -ро аз ибтидои координата то нуқтаи $A(4;8)$ ёбед.

2) Дарозии камони хати каҷи $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{2}\right)$ -ро аз $r=1$ *то* $r=3$ ёбед.

3) Дарозии хати каҷи

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t,\quad \left(c^2=a^2-b^2\right)$$

ёфта шавад.

4) Дарозии камони хати каҷи

$y=\arcsin\left(e^x\right)$ *аз* $x=0$ *то* $x=1$ ёфта шавад.

5) Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи чархзании хати каҷи $y=\sin^2 x$ дар атрофи тири ox дар порчаи $[0,\pi]$ ҳосил шудааст, ёфта шавад.

6) Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи чархзании фигурае, ки бо хатҳои каҷи маҳдуд аст, дар атрофи тири ҳосил шудааст ёфта, шавад.

Кори мустақилонаи 7.2.3.

1) Ҳаҷми ҷисме, ки дар натиҷаи чархзании астроиди $x=\alpha\cos^3 t$, $y=\alpha\sin^3 t$ дар атрофи тири oy ҳосил мешавад, ҳисоб карда шавад.

2) Ҳаҷми дар натиҷаи чархзании кардиоиди $r=a(1+\cos\varphi)$ дар атрофи тири қутбии ҳосилшуда ёфта шавад.

3) Масоҳати сатҳи дар натиҷаи чархзании астроидаи $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ дар атрофи тири oy ҳосилшударо ёбед.

4) Масоҳати сатҳи дар натиҷаи чархзании як арки сиклоиди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ дар атрофи тири oy ҳосилшударо ёбед.

5) Масоҳати сатҳеи дар натиҷаи чархзании кардиоиди $r=2a(1+\cos\varphi)$ дар

атрофи тири қутбӣ ҳосилшударо ёбед.

Кори мустакилонаи 7.4.1.

1) Бо формулаи росткунҷа интеграли $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ -ро тақрибӣ ҳисоб кунед $(n = 8)$ ва хатогии содиршударо баҳо диҳед.

2) Бо формулаи трапетсия интеграли $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ -ро ҳисоб намоед ва хатогии содиршударо баҳо диҳед.

3) Бо формулаи трапетсия интеграли $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx$ $(n = 6)$ -ро тақрибӣ ҳисоб кунед.

Кори мустақилонаи 7.4.2.

1) Бо формулаи Симпсон интегралҳои зеринро тақрибӣ ҳисоб кунед :

$$а)\ \int_{-3}^{7} \sqrt{x^3+32}\, dx, \qquad б)\ \int_{2}^{12} \sqrt{x^3+9}\, dx,$$

$$в)\ \int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+8}\, dx, \qquad г)\ \int_{0}^{10} \sqrt{x^3+5}\, dx.$$

Кори мустақилонаи 7.5.1.

1) Лаҳзаи статикии камони параболаи $y^2 = 2px$, $\left(o \le x \le \frac{p}{2}\right)$ нисбат ба хати рости $x = \frac{p}{2}$ ёфта шавад.

2) Лаҳзаи статикии камони хати каҷи $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(0 \le x \le a)$ нисбат ба тири ox ёфта шавад.

3) Лаҳзаи инертсияи камони давраи $x^2 + y^2 = R^2$, ки дар чоряки якум мехобад, нисбат ба тири oy ёфта шавад.

4) Лаҳзаи инертсияи фигурае, ки бо хати каҷи $y^2=4ax$ ва хати рости $x=a$ маҳдуд гардидааст, нисбат ба тири OX ёфта шавад.

5) Лаҳзаи статикии фигурае, ки бо хатҳои каҷи $y=x^2$ *ва* $y=\sqrt{x}$ маҳдуд гардидааст, нисбат ба тири OX ҳисоб карда шавад.

Кори мустақилонаи 7.5.2.

1) Лаҳзаи инертсияи фигурае, ки бо ду параболаи $y^2=\dfrac{b^2}{2a}\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$ *ва* $y^2=\dfrac{b^2}{2a}\left(\dfrac{a}{2}-x\right)$ маҳдуд мебошад, нисбат ба тири OX ҳисоб карда шавад.

2) Координатаҳаи маркази вазнинии камони астроиди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ки дар чоряки якум мехобад, ёфта шавад.

3) Маркази вазнинии фигурае, ки бо хати каҷи $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ ва тирҳои координата маҳдуд аст, ёфта шавад.

4) Координатаҳои нуқтаи вазнинии фигурае, ки бо яке аз шохаҳои сиклоиди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ва тири OX маҳдуд аст, ёфта шаванд

Ҷавобҳо

К.М. 7.1.1

1) $S_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{\dfrac{i}{n}}$, $\quad \overline{S}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{\dfrac{i}{n}}$. $\qquad$ 2) а) $\dfrac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

б) Нишондод: тақсимот чунон интихоб намудан лозим, ки абсиссаи нуқтаҳои тақсимот прогрессияи геометриро ташкил диҳанд.

3) $\ln 2$, $\qquad$ 4) 1,5.

К.М. 7.1.2

1) а) $\frac{\sqrt{3}}{2} \le J \le \frac{\sqrt{2}}{6}$,

б) 3<J<5, нишондод: $M(0) \le \frac{5}{2}$, $m \le f(2)-1{,}5$.

2) а) 45^0; б) 0,5, 3) а) $33\frac{1}{3}$, б) $\ln\frac{9}{8}$, в) $\ln 2$, г) 0.

К.М. 7.1.3

1) а) $e-\sqrt{e}$, б) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$, в) $\ln\frac{2}{3}$, г) 0.

2) а) $2-\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{\pi}{2}$.

К.М. 7.1.4

1) $\frac{32}{3}$, 2) $\frac{4}{3}p^2$, 3) 15π , 4) $\frac{3}{8}\pi a b$, 5) а) a^2 ,

6) б) $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$.

К.М. 7.2.2

1) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{1-}-1\right)$ 2) $\ln\left(l-\sqrt{l^2-1}\right)$ 3) $\frac{4\left(a^2-b^3\right)}{a-b}$

4) $0{,}5(4+\ln 8)$ 5) $\frac{3}{8}\pi^2$ 6) $\frac{3}{10}\pi$.

К.М. 7.2.3

1) $\frac{32}{105}\pi a^2$ 2) $\frac{3}{8}\pi a^3$ 3) $\frac{12}{6}\pi a^2$ 4) $\frac{64\pi a^2}{3}\pi a^3$ 5) $\frac{128}{5}\pi a^2$.

К.М. 7.5.1

1) $\frac{p^2}{8}\left[\sqrt{2}+5\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ 2) $\frac{a^2\left(l^2-l^{-2}+4\right)}{8}$ 3) $\frac{\pi}{4}R^3$ 4) $\frac{8}{7}a^4$ 5) 0,15

К.М. 7.5.2

1) $\frac{a-b^3}{3}$ 2) $0{,}4a$ 3) $\frac{a}{5};\frac{a}{5}$ 4) $\pi a\frac{5}{6}a$.

Боби VIII. Функсиҳои бисёртағйирёбанда

§ 1. Мафҳуми функсияҳои бисёртағйирёбанда

1. **Соҳаи муайянии функсияҳои бисёртағйирёбанда.** Соҳаи муайянии функсияҳои бисёртағйирёбанда дар ҳолати оддитарин шуда метавонанд маҷмӯи нуқтаҳои ҳамвории xoy , ки дар онҳо функсияи $u = f(x, y)$ муайян мебошад. Соҳаи муайянии функсияи $u = f(x, y)$ шуда метавонад қисми охирнок ё беохири ҳамвории xoy , ки бо як ё якчанд хатҳои кач маҳдуд гардидааст. Айнан соҳаи муайянии функсияи се тағйирёбанда $w=f(x,y,z)$ ягон ҷисм дар фазои $oxyz$ мешавад.

Хати мувозинатии функсияи $u = f(x, y)$ гуфта хати $f(x, y) = c$ дар ҳамвории xoy -ро меноманд, ки дар нуқтаҳои он функсия қимати доимиро қабул мекунад.

2. **Ҳосилаи хусусӣ.** Ҳосилаи хусусӣ аз функсияи

$$u = f(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x\ (x, y) - po$$

меномем, ки дар ин ҳолат y -доимӣ шуморида мешавад.

Ҳосилаи хусусӣ нисбат ба y -гуфта

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_y\ (x, y)$$ -ро меномем.

Барои ҳисоб намудани ҳосилаи хусусӣ ҳамаи қоидаҳо ва формулаҳои ҳисобкунии ҳосилаҳои оддӣ истифода бурда мешаванд.

Афзоиши пурраи функсияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи M(x,y) гуфта фарқи $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ -ро меномем.

Функсияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи M(x,y) дифференсиронидашаванда номида мешавад, агар дар ин нуқта афзоиши пурраи онро чунин тасвир намудан мумкин бошад: $\Delta U = A\Delta x + B\Delta y + 0(\rho)$, дар куҷо $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Дифференсиалӣ пурраи фенксияи $u = f(x, y)$ гуфта қисми асосии нисбат ба Δx ва Δy хати афзоиши функсияро меномем $du = A\Delta x + B\Delta y$, ки А ва Вададҳои дилхоҳ ,буда, мувофиқан ба $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ баробар мебошанд.

Дифференсиали пурраи фӯ`нксияи $u = f(x, y)$ бо формулаи

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$ ҳисоб карда мешавад.

Дифференсиали пурраи функсияи се тағйирёбанадаи $W = f(x, y, z)$ бо формулаи $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$ ҳисоб карда мешавад.

Мисоли 8.1.1. $f(2, -3)$ ва $f(1, \frac{y}{x})$ ёфта шавад, агар

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$ бошад.

Ҳал. Қиматҳои $x=2$ ва $\Delta=-3$ –ро гузошта меёбем

$$f(2;-3) = \frac{(2)^2 + (3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{13}{12}$$

Фарз мекунем, ки $x = 1$ ва у -ро ба $\frac{y}{x}$ иваз мекунем ё худ

$$f(1, \frac{y}{x}) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x, y)$$

Мисоли 8.1.2. Соҳаи муайянии функсияи $u = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$ ёфта шавад.

Ҳал. Ҷамшавандаи якум ҳангоми $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ ё $-2 \le x \le 2$ муайян мебошад. Ҷамшавандаи дуюм бошад, дар ҳолати $xy \ge 0$ муайян мебошад. *Ду* ҳолат мешавад: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ ё $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$

Бинобар ин, соҳаи муайянии функсияи $\{-2 \le x \le 0; -\infty \le y \le 0\}$ ва $\{0 \le x \le 2; 0 \le y \le \infty\}$ мебошад.

Мисоли 8.1.3. Соҳаи муайянии функсияи $u = \ln(2r^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$ ёфта шавад.

Ҳал. Функсияи додашуда аз се тағйирёбанда вобаста мебошад ва ҳангоми $2z^2-6x^2-3y^2-6>0$ будан қимати ҳақиқӣ қабул менамояд, ки аз ин ҷо $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} < -1$ аст. Соҳаи муайянии функсия он қисми фазо мебошад, ки дар қабатҳои гиперболоиди дуқабата мехобад.

Мисоли 8.1.4. Сатҳи мувозинатии функсияи $W = x^2 - y^2 + z^2$ ёфта шавад.

Ҳал. Маҷмӯи сатҳҳои мувозинатии ин функсия чунин намуд доранд: $x^2 - y^2 + z^2 = C$. Агар C=0 бошад, он гоҳ $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ конус мебошад; агар $C \ne 0$ бошад, пас $x^2 - y^2 + z^2 = C$ -оилаи гиперболоидҳои якқабатаро ташкил медиҳанд, агар C<0 бошад, пас $x^2 - y^2 + z^2 = C$ маҷмӯи гиперболоидҳои дуқабата мебошад.

Мисоли 8.1.5. Ҳудуди функсияро ҳисоб кунед: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$

Ҳал. Барои ҳисоб кардани ин ҳудуд формулаҳои асосии ҳудудро истифода мебарем:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin\ xy}{x} = \lim_{y \to 2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin\ xy}{x}\right) = \lim_{y \to 2} y = 2 .$$

Мисоли 8.1.6. Дода шудааст: $u = e^{x^2+y^2}$, ёфта шаванд $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Ҳал. Меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Мисоли 8.1.7. Нишон диҳед, ки функсияи $u = y^{\frac{y}{x}} \sin(\frac{y}{x})$, муодилаи $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = yu$ -ро қаноат мекунонад.

Ҳал.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{\frac{y}{x}} \ln y(-\frac{y}{x^2})\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}(-\frac{y}{x^2}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = [y^{\frac{y}{x}} \ln\frac{1}{x} + \frac{y}{x}y^{\frac{y}{x}-1}]\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Дар тарафи чапи муодила гузошта ҳосил мекунем

$$-y^{\frac{y}{x}+1}\ln y\sin^{\frac{y}{x}} + y^{\frac{y}{x}+1}\cos\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}+1}\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}+1}\ln y\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}+1}\cos\frac{y}{x} =$$

$$= y^{\frac{y}{x}+1}\sin\frac{x}{y} = y\cdot y^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x} = yu$$

Мисоли 8.1.8. Қимати $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$ -ро тақрибӣ ҳисоб кунед, дар вақти ҳисоб намудан қимати функсияи $u=\sqrt{\sin^2 x+8e^y}$ -ро ҳангоми $x=\frac{\pi}{2}\approx 1.571$ ва y=0 будан истифода баред.

Ҳал. Қимати функсияи u -ро ҳангоми $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ будан меёбем. Аз инҷо

$u=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2}+8e^0}=\sqrt{9}=3$ аст. Акнун афзоиши функсияро меёбем: $(\Delta x=0{,}021, \Delta y=0{,}015)$,

$$\Delta u\approx du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y=\frac{\sin 2x\Delta x+8e^y\Delta y}{2\sqrt{\sin^2 x+8e^y}}=\frac{8\cdot 0{,}015}{6}=0{,}02$$

Бинобар ин, $\sqrt{\sin^2 1{,}55+8e^{0{,}015}}\approx 3{,}02$ мешавад.

Мисоли 8.1.9. $u=arctg\frac{x+y}{x-y}, du$ - ёфта шавад.

Ҳал. Аввало ҳосилаҳои хусусии функсияро меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2y}{(x-y)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Бинобар ин,

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=-\frac{ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$ мешавад.

Мисоли 8.1.10. $W=x^{y^2z}, dw$ - ёфта шавад.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусии функсияро меёбем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2.$$

Бинобар ин, дар асоси формулаи

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$, ҳосил мекунем:

$$dw = y^2 x \cdot x^{y^2 z - 1} dx + 2yzx^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

§2. ҲОСИЛАИ ХУСУСИИ ТАРТИБИ ОЛӢ

1. Ҳосилаи тартиби олӣ. Ҳосилаи тартиби дуюми функсияи $u = f(x, y)$ гуфта ҳосилаи хусусӣ аз ҳосилаи хусусии тартиби якуми онро меномем ва онро чунин ифода мекунем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

Айнан ҳосилаҳои тартиби дуюм аз функсияи сетағйирёбандаи $W = F(x, y, z)$ чунин ишора карда мешаванд:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F''_{xx}(x, y, z); \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F''_{yy}(x, y, z);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial xy} = F''_{xy}(x, y, z); \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial xz} = F''_{xz}(x, y, z);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial yz} = F''_{yz}(x, y, z); \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F''_{zz}(x, y, z).$$

Ҳамин тавр, ҳосилаи хусусии тартиби сеюм, чорум ва ғайраҳои тартиби n-уми функсияро ҳисоб намудан мумкин аст.

Дифференсиали тартиби дуюми функсияи $u = f(x, y)$ гуфта дифференсиал аз дифференсиали тартиби якумро меномем, яъне $d(du) = d^2u$.

Айнан муайян карда мешаванд дифференсиалҳои $d^3u,...,d^nu$ ё худ $d(d^{n-1}u) = d^nu$.

Агар функсияи $u = f(x, y)$ ҳосилаи хусусии бефосилаи тартиби n-умро дошта бошад, пас дифференсиали тартиби n-уми ин функсия бо формулаи $d^nu = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n u$ ҳисоб карда мешавад, ки шаклан бо қоидаи биноми Нютон кушода мешавад.

2. Дифференсиали функсияҳои мураккаби тартиби олӣ. Бигузор, $u = f(x, y)$, дар кучо $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$ ва функсияҳои $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\Psi(t)$ дифференсиронидашаванда мебошанд. Он гоҳ ҳосилаи функсияи $u = f[\varphi(t), \Psi(t)]$ бо формулаи

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$ ҳисоб карда шавад.

Агар $u = f(x, y)$ ва $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ бошад, пас ҳосилаҳои хусусӣ чунин ифода карда мешаванд:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Мисоли 8.2.1. Ҳосилаҳои хусусии тартиби 2-юми функсияи $u(x, y, t) = e^{xyt}$ -ро ёбед.

Ҳал. Пайдарпай дифференсиронида, ҳосил мекунем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yte^{xyt};\quad \frac{\partial u}{\partial x}=xte^{xyt};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xye^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2t^2e^{xyz};\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2t^2e^{xyz};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2e^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=t(1+xut)e^{xyz};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=y(1+xyt)e^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=x(1+xyt)e^{xyz}.$$

Мисоли 8.2.2. Нишон диҳед, ки функсияи $u(x,y)=2\cos^2(y-\frac{x}{2})$ муодилаи

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$ - ро қаноат мекунонад.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусии дар муодила бударо меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\cdot 2\cos(y-\frac{x}{2})\cdot\sin(y-\frac{x}{2})(-\frac{x}{2})'=2\cos(y-\frac{x}{2})\sin(y-\frac{x}{2})=\sin(2y-x);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\cos(2y-x);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\cos(2y-x).$$

Ин ҳосилаҳоро дар муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\cos(2y-x)+2\cos(2y-x)=0.$$

Мисоли 8.2.3. Дода шудааст $u(x,y)=\sin x\cdot\sin y$. Ёфта шавад d^2u.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусиро меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin x\cdot\sin y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cdot \sin y;$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial xy}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y dxdy - \sin x \sin y\, dy^2.$$

Мисоли 8.2.4. $u(x,y) = e^{x^2+y^2}$, дар ҷое, ки $x = \alpha \cos t$, $y = \alpha \sin t$ аст, ёфта шавад $\frac{du}{dt}$.

Ҳал. Ҳосилаи функсияи мураккабро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = e^{x^2+y^2} 2x(-\alpha \sin t) + e^{x^2+y^2} 2y(\alpha \cos t) =$$

$$= 2\alpha e^{x^2+y^2}(y \cos t - x \sin t).$$

Мисоли 8.2.5. Дода шудааст $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, дар ҷое, ки $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi}{\eta}$ аст.

Ёфта шавад: $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}$.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусиро меёбем:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\eta + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{2}{\xi};$$

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\xi + \frac{2y}{x^2+y^2}(-\frac{\xi}{\eta^2}) = \frac{2}{\eta}\frac{\eta^4-1}{\eta^4+1}.$$

§3. Экстремуми функсияи бисёртағйирёбанда

1. Максимум ва минимуми функсия. Мо мегўем, ки функсияи $u = f(M)$ дар нуқати M_0 максимум (минимум) дорад, агар қимати функсия дар ин нуқта нисбат ба нуқтаҳои атрофи он калонтарин (хурдтарин) бошад.

Максимум ва минимуми функсияро дар якҷоягӣ экстремуми функсия меноманд. Нуқтаи M_o -ро, ки дар он функсия максимум ё минимум дорад, нуқтаи экстремум меноманд.

Агар функсияи дифференсиронидашавандаи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи $M_0(x_0; y_0)$ экстремум дошта бошад, пас ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми он дар ин нуқта баробари сифр мешавад:

$$\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = 0,$$

(Шарти зарурии экстремум). Он нуқтаҳоеро, ки ҳосилаи тартиби якуми функсия баробари сифр аст, нуқтаҳои статсионарӣ меноманд. Бояд қайд намуд, ки на ҳамаи нуқтаҳои статсионарӣ нуқтаи экстремум мешаванд.

Бигузор, $M_o(x_o, y_o)$ нуқтаи статсионарии функсияи $u = f(x, y)$ бошад.

$$\text{Бо } A = \frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x \partial y}, \qquad C = \frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial y^2}$$

ишора мекунем ва дискриминанти $\Delta = AC - B^2$-ро тартиб медиҳем.

Агар $\Delta > 0$ бошад, он гоҳ функсияи $u = f(x, y)$ дар нуқтаи M экстремум дорад, агар $A < 0$ ё $(C < 0)$ бошад максимум ва агар $A > 0$ ё $(C > 0)$ бошад, минимум.

Агар $\Delta < 0$ бошад, он гоҳ функсия экстремум надорад. Дар ҳолати $\Delta = 0$ будан тадқиқи иловагӣ лозим аст.

2. Қимати калонтарин ва хурдтарин. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро бо максимум ва минимуми функсия якҷоя намудан лозим нест.

Функсияи $u = f(M)$, ки дар соҳаи маҳками маҳдуди D бефосила аст, албатта, дар ин соҳа қимати калонтарин ва хурдтарини худро қабул мекунад. Ин қиматҳо ё дар нуқтаҳои дохилӣ, ё дар нуқтаҳои сарҳадии D қабул карда мешаванд.

Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия чунин муайян карда мешаванд:

а) Нуқтаҳои статсионарии функсияро дар нуқтаҳои дохили соҳаи D меёбем ва қимати функсияро дар ин нуқтаҳо ҳисоб мекунем.

б) Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро дар сарҳади D меёбем.

в) ин қиматҳоро муқоиса менамоем, калонтаринаш қимати калонтарини функсия мебошад ва хурдтаринаш қимати хурдтарини функсия мешавад.

Мисоли 8.3.1. Функсияи $u(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$-ро доир ба экстремум тадқиқ намоед.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусиро ҳисоб мекунем ва система тартиб медиҳем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 12 = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 5 = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^4+5x^2+4=0 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, x_2=2, x_3=-1, x_4=-2 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases}.$$

Дар натиҷа чор нуқтаҳои статсионарӣ $P_1(1;2)$; $P_2(2;1)$; $P_3(-1;-2)$, $P_4(-2;1)$ -ро ҳосил мекунем. Акнун ҳосилаҳои тартиби 2-юмро меёбем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x.$$

ва дискриминанти $\Delta = AC - B^2$-ро тартиб медиҳем дар нуқтаҳои статсионарӣ:

1) $P_1(1;2)$; $A=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)p_1=6$. $A=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)p_1=12$,

$$A=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)p_1=6,$$

$\Delta=36-144=-108<0$, яъне дар нуқтаи $P_1(1;2)$ функсия экстремум надорад.

2) $P_2(2;1)$ $A=12$, $B=6$, $C=12$, $\Delta=108>0$ $A>0$.

Дар ин нуқта функсия минимум дорад. Ин минимум ба қимати функсия дар нуқтаи $x=2$, $y=1$ баробар аст.

$$U_{\min}(2,1)=8+6-30-12=-28$$

3) $P_3(-2;-1)$ $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$, $\Delta=-108<0$ экстремум нест.

4) $P_4(-2;1)$ $A=-12$, $B=-6$, $C=-12$, $\Delta=108>0$, $A>0$

Дар нуқтаи $P_4(-2;1)$ функсия максимум дорад

$$U_{\max}(-2,-1)=-8-6+30+12=28$$

Мисоли 8.3.2. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $u(x,y)=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ -ро дар соҳаи маҳками бо хатҳои $y=x^2$ ва $x=4$ маҳдуд ёбед.

Ҳал. Мувофиқи қоидаи дар боло овардашуда, аввало нуқтаҳои статсионарнро меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2+8x-2y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y-2x$$

аз ин ҷо $\begin{cases}6x^2+8x-2y=0\\2y-2x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2+4x-y=0\\y-x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2+4x-x=0\\y=x\end{cases};$

$$\begin{cases}3x^2+3x=0\\y=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0, x_2=-1\\y_1=0, y_2=-1\end{cases}.$$

Маълум аст, ки ягонае аз ин нуқтаҳои $P_1(0;0)$ ва $P_2(-1;-1)$ дар дохили соҳаи додашуда намехобанд. Бинобар ин, қимати калонтарин ва хурдтарини функсияро дар сарҳади соҳа меҷӯем.

Сарҳади соҳаи D аз қисмҳои AB ва AOB иборат мебошад, ки A(-2;4), O(0;0) ва B(2;4) аст.

Дар қисми AOB, $y=x^2$, $u_1(x)=4x^2+x^4$.

Акнун қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $u_1(x)$ -ро дар [-2;2] мекобем:

$$u_1'(x)=4x^3+8x=0, \quad x=0, \quad u_1(0)=0,$$

$$u_1(-2)=u_1(2)=32.$$

Қимати функсияи $u_1(x)$ -ро дар нуқтаи $x=0$ ва охирҳои порчаи $x=-2$, $x=2$ муқоиса намуда, ба чунин хулоса меоем, ки қимати калонтарини функсияи $u_1(x)$ дар порчаи [-2;0] ба 32 баробар аст, (дар нуқтаҳои $x=\pm 2$), қимати хурдтарин дар ин порча ба сифр баробар аст, дар нуқтаи $x=0$

Дар қисми AB $y=4$, $u_2(x)=2x^2+4x^2-8x+16$ дар ҷое, ки $-2\le x\le 2$ аст.

Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $u_2(x)$ -ро дар порчаи [-2;2] мекобем:

$$u_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8,\quad u_2(x) = 0,$$ дар нуқтаи

$$x = \frac{2}{3},\quad u_2\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{32}{27}$$

$$u_2(-2) = u_2(2) = 32$$

Қимати калонтарини функсияи $u_2(x)$ дар порчаи [-2;2] ба 32 баробар аст, $(x = \pm 2)$ ва қимати хурдтарини он дар ин порча ба $16\frac{32}{27}$ (дар нуқтаи $x = \frac{2}{3}$) баробар аст.

Қимати функсияи u -ро дар қисмҳои АОВ ва АВ муқоиса намуда ба хулосаи зерин меоем, ки дар тамоми сарҳади АОВА қимати калонтарини функсия ба 32 (дар нуқтаҳои А ва В) баробар аст, қимати хурдтарини он ба сифр (дар нуқтаи 0) баробар аст.

Чӣ тавре ки дар боло қайд намудем, функсия қимати калонтарин ва хурдтарини худро дар сарҳади соҳа қабул менамояд.

Дар нуқтаҳои сарҳадии А(-2;4) ва В(2;4) функсия қимати калонтарини худро қабул менамояд $u = u(A) = u(B) = 32$ ва дар нуқтаи сарҳадии 0(0;0) функсия қимати хурдтарини худро қабул мекунад $u = u(0) = 0$

§4. Усули квадратҳои хурдтарин

Усули квадратҳои хурдтарин дар ҳалли бисёр масъалаҳои иқтисодӣ васеъ истифода бурда мешавад. Махсусан, ҳалли масъалаҳои иқтисодие, ки дар он моделҳои математикӣ истифода мешаванд, дар онҳо барои баҳо додани параметрҳо, усули квадратӣ хурдтарин истифода карда мешавад.

Дар ҳалли масъалаҳои иқтисодӣ функсияҳои зерин васеъ истифода мешаванд:

1) $y = ax + b$ – хаттӣ,

2) $y = ax^2 + bx + b$ – параболӣ ,

3) $y = \frac{a}{x} + u$ – гиперболӣ,

4) $y = ae^{bx}$ – нишондиҳандагӣ.

Бо методи квадратҳои хурдтарин параметрҳои ин функсияҳо бо осонӣ муайян ва баҳо дода мешаванд.

Мақсад аз истифодаи усули квадратҳои хурдтарин аз он иборат аст, ки суммаи квадрати фарқиятҳои аслии (у) аз қиматҳои назариявии он (Y_x) хурдтарин бошад. Яъне $\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ix})^2 \to \min$.

Бо ибораи дигар баён кунем, аз ҳамаи хатҳои имконпазир ҳамоне интихоб мешавад, ки суммаи квадратҳои масофаи байни нуқтаҳои мушоҳидаҳо то ба ин хат хурдтарин бошанд.

Усули квадратҳои хурдтаринро барои функсияи $y = ax + b$ маънидод менамоем. Барои чунин қиматҳои параметрҳои a ва b-ро ёфтан зарур аст, ки функсияи

$$S(a;b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2,$$

қимати хурдтаринро қабул намояд. Дар ин ҷо S-функсия аз параметрҳои a ва b мебошад. Мувофиқи қоида барои ёфтани минимуми функсия аз он нисбат ба тағйирёбандаҳояш ҳосилаҳои хусусӣ гирифта, ин ҳосилаҳои хусусиро ба сифр баробар мекунем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0. \end{cases}$$

Пас, аз баъзе табдилдиҳиҳои элементарӣ ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a + \sum_{i=1}^{n} x_i b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$

Системаи ҳосилшуда нисбат ба a ва b хаттӣ мебошад, бо методи Крамер ҳал мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \neq 0.$$

Бинобар ин, система ҳалли ягона дорад. Акнун муайянкунандаҳои Δ_a ва Δ_b -ро меёбем:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ,$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$$

Нуқтаи ягонаи экстремум, нуқтаи (a ; b) мебошад ва бо осонӣ дидан мумкин аст, ки функсияи $S(a;b)$ дар ин нуқта минимум дорад.

Гуфтаҳои болоро дар мисол нишон медиҳем.

Мисол. Як гурӯҳ корхонаҳо маҳсулоти якҷинса истеҳсол мекунанд, ки бо функсияи $y = ax + b$ ифода мешаванд. Параметрҳои a ва b -ро муайян кунед, агар маълумотҳо дар ҷадвали зерин дода шуда бошанд:

I	X_i	Y_i	X_iY_i	X_i^2
1	1	30	30	1
2	2	70	14	4
3	4	150	600	16
4	3	100	300	9
5	5	170	850	25
6	3	100	300	9
7	4	150	600	16
$\sum$	22	770	2820	80

Аз ҷадвал истифода бурда, системаи муодилаҳоро тартиб медиҳем:

$$\begin{cases} 7b + 22a = 770 \\ 22b + 80a = 2820. \end{cases}$$

Системаро бо усули Крамер ҳал мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 22 \\ 22 & 80 \end{vmatrix} = 7 \cdot 80 - 22 \cdot 22 = 560 - 484 = 76,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 770 & 22 \\ 2820 & 80 \end{vmatrix} = 770 \cdot 80 - 22 \cdot 2820 = 61600 - 62040 = -440,$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 7 & 770 \\ 22 & 2820 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2820 - 22 \cdot 770 = 19740 - 16940 = 2800,$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-440}{76} = -5{,}79; \quad a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{2800}{76} = 36{,}84.$$

Аз ин ҷо функсияи хаттӣ намуди $y = -5.79 + 36.84x$ -ро мегирад. Коэффисиенти $a = 36{,}84$ маънои онро доранд, ки агар истеҳсоли маҳсулотро ба як воҳид зиёд намоем, хароҷоти истеҳсолӣ ба ҳисоби миёна ба 36,84 сомонӣ меафзояд.

§5. Функсияҳои ноошкор

1. Ҳолати яктағйирёбанда. Агар аз муодилаи $F(x,y)=0$, y-ро ҳамчун функсия аз x муайян карда шавад, он гоҳ ҳосилаи функсияи ноошкор дар ҳолати $F'_x(x,y)\neq 0$ будан бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-F'_x}{F'_y}.$$

Ҳосилаҳои тартиби олй дар натиҷаи пайдарпай дифференсиронидани баробарии охирон ҳосил карда мешавад.

2. Ҳолати якчанд тағйирёбанда. Айнан, агар аз муодилаи $F(x,y,u)=0$, u-ро ҳамчун функсия аз дутағийрёбандаҳои x, y муайян карда шавад ва $F'_u(x,y,u)\neq 0$ бошад, пас ҳосилаҳои хусусии функсия ноошкор бо формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y.u)}{F'_u(x,y,u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y.u)}{F'_u(x,y,u)}.$$

3. Системаи функсияҳои ноошкор. Агар аз системаи ду муодилаи

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases},$$

$u(x,y)$ ва $v(x,y)$ ҳамчун функсияҳои дифференсиронидашавандаи тағийрёбандаҳои x ва y муайян карда шаванд ва якобиян

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$$

бошад,

пас дифференсиали ин функсияҳо аз системаи

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0. \end{cases}$$

муайян карда мешавад.

4.Экстремуми шартӣ. Экстремуми шартии функсияи $u = f(x, y)$ гуфта эктремуми ин функсияро меномем, ки тағйирёбандаҳои x ва y бо муодилаи $\varphi(x, y) = 0$ алоқаманд бошанд.

Ҷустани экстремуми шартиро бо ёрии функсияи Лагранж $z = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, ки дар ин ҷо λ-зарбшавандаи доимии номуайян мебошад, ба тариқи экстремуми муқаррарӣ овардан мумкин аст. Шарти зарурии экстремуми функсияи Лагранж чунин намуд дорад:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y) = 0.$$

Аз ин система x , y ва λ -ро муайян намудан мумкин аст.

5. Ҳолати параметри додашудани функсия. Агар функсияи дифференсиронидашавандаи $u(x, y)$ бо намуди параметри $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $u = u(\xi, \eta)$ дода шуда бошад ва

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

шавад, пас дифференсиали ин функсия аз системаи зерин муайян карда мешавад:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \dfrac{\partial x}{\partial \eta} d\eta; \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \dfrac{\partial y}{\partial \eta} d\eta; \\ du = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \dfrac{\partial u}{\partial \eta} d\eta. \end{cases}$$

Маълум аст, ки $du = \rho dx + q dy$ мебошанд, пас аз ин ҷо ҳосилаҳои хусусиро меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \rho \quad \text{ва} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q.$$

Мисоли 8.5.1. Ҳосилаи функсияи ноошкори y - ро ёбед, ки бо муодилаи $F(x,y) = x^y - y^x = 0$ дода шудааст.

Ҳал. Маълум аст, ки функсияи ноошкор бо муодилаи $F(x,y) = x^y - y^x = 0$ дода шудааст.

Дар асоси формулаи дар боло овардашуда ҳосилаи функсияи $F'_x(x,y) = -y^x \ln y + yx^{y-1}$, $F'_y(x,y) = x^y \ln x - xy^{x-1}$ мешавад.

Дар асоси формулаи $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ ҳосил мекунем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-y^x \ln y + yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

Мисоли 8.5.2. Дода шудааст: $u^3 - 3xyu = \alpha^2$, ёфта шавад: $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Ҳал. Дар ин ҷо $F(x,y,u) = u^3 - 3xyu - \alpha^2 = 0$ аст, пас меёбем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yu, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xu, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -3u^2 - 3xy \quad \text{он гоҳ}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{-3yu}{3u^2-3xy} = \frac{yu}{u^2-xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{-3xy}{3u^2-3xy} = \frac{xy}{u^2-xy}.$$

Мисоли 8.5.3. Аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} u+v=x+y \\ xu+yv=1 \end{cases}$$

$u(x,y)$ ва $v(x,y)$ -ро муайян намуда, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ва $\frac{\partial v}{\partial y}$ -ро ёбед.

Ҳал. ҳарду муодиларо нисбат ба x медифференсиронем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v+x}{x-y}.$$

Айнан ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}$$

Мисоли 8.5.4. Экстремуми шартии функсияи $u = 6-4x-3y$ -ро бо шарти он, ки тағирёбандаҳои x ва y муодилаи $x^2+y^2=1$ -ро қаноат мекунонанд, ёбед.

Ҳал. Функсияи Лагранжро тартиб медиҳем:

$$z(x,y) = 6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$\frac{\partial z}{\partial x} = -4 + 2\lambda x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3+2\lambda y$. Шарти зарурӣ бо системаи зерин дода мешавад:

$$\begin{cases} -4+2\lambda x = 0 \\ -3+2\lambda y \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

ин системаро ҳал намуда, меёбем:

$$\lambda_1=\frac{5}{2},\quad x_1=\frac{4}{5},\quad y_1=\frac{3}{5}$$

ва $\lambda_2=-\frac{5}{2},\quad x_2=-\frac{4}{5},\quad y_2=-\frac{3}{5}.$

Азбаски

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\lambda,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\lambda$$, пас

$$d^2z=2\lambda(dx^2+dy^2)$$ мешавад.

Агар $\lambda=\frac{5}{2}, x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}$ бошад, пас $d^2F>0$ аст ва бинобар ин, дар ин нуқта функсияи $u(x,y)$ минимуми шартӣ дорад. Агар $\lambda=-\frac{5}{2}$, $x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$ бошад, пас $d^2F<0$ аст, бинобар ин, дар ин нуқта функсияи $u(x,y)$ максимуми шартӣ дорад.

Ҳамин тавр, ҳосил мекунем:

$$u_{\max}\left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11$$

$$u_{\min}\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)=6-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=1$$

Мисоли 8.5.5. Дифференсиали функсияи $u(x,y)$, ки бо муодилаҳои $x=\xi+\eta$, $y=\xi^2+\eta^2$, $u=\xi^3+\eta^3$ $(\xi\neq\eta)$ дода шуд аст, ёфта шавад.

Ҳал. Муодилаҳоро дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} dx = d\xi + d\eta \\ dy = 2\xi d\xi + 2\eta d\eta \\ du = 3\xi^2 d\xi + 3\eta^2 d\eta \end{cases}$$

Аз ду муодилаи аввала $d\xi$ ва $d\eta$ -ро меёбем:

$$d\xi = \frac{2\eta dx - dy}{2(\eta - \xi)}, \quad d\eta = \frac{dy - 2\xi dx}{2(\eta - \xi)}$$

Ин баробариҳоро дар муодилаи сеюм гузошта, ҳосил мекунем:

$$du = 3\xi^2 \frac{2\eta dx - dy}{2(\eta - \xi)} + 3\eta^2 \frac{dy - 2\xi dx}{2(\eta - \xi)} = \frac{6\xi\eta(\xi - \eta)dx + 3(\eta^2 - \xi^2)dy}{2(\eta - \xi)} =$$

$$= -3\xi\eta dx + \frac{3}{2}(\xi + \eta)dy.$$

Аз ин ҷо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3\xi\eta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}(\xi - \eta)$$ мебошад.

Кори мустақилонаи 8.1.1.

1. Ёфта шавад $f(\frac{1}{2}, 3), f(-1,1)$, агар $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ бошад.

2) Соҳаи муайянии функсияи $u = \arcsin\frac{y}{x}$ ёфта шавад.

3) Соҳаи муайянии функсияи $w = \ln(xyz)$ ёфта шавад.

4) Хатҳои мувозинатии фуксияи $u = x^2 + y^2$ ёфта шаванд.

5) Ҳудудро ҳисоб кунед: $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$.

6. Нуқтаҳои каниши функсияи $u = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$ ёфта шаванд.

Кори мустақилонаи 8.1.2.

1. Ҳосилаҳои хусусии функсияи $u = e^{\sin\frac{y}{x}}$ ёфта шаванд.

2. Нишон диҳед, ки функсияи $u = \ln(x^2 + yx + y^2)$ муодилаи $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2$ -ро қаноат мекунонад.

3. Нишон диҳед, ки функсияи $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1$ мешавад, агар $w = x + \frac{x-y}{y-z}$ бошад.

4) Қимати $arctg\frac{1,02}{0,05}$ тақрибӣ ҳисоб карда шавад. Ҳангоми ҳисобкунӣ аз функсияи $u = arctg\frac{y}{x}$ дар ҳолати $x = 1, y = 1$ будан истифода баред.

5. $u = \sin(x^2 + y^2)$ du -`ёфта шавад.

6. $w = \ell^{x\cdot y\cdot z}$, dw - ёфта шавад.

Кори мустакилонаи 8.2.1.

1) Ёфта шавад $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, агар $u = \ln(x + y)$ бошад.

2) Нишон диҳед, ки функсияи $u = (x, y) = arctg(x + 2y)$ муодилаи $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ -ро қаноат мекунонад.

3. $u(x, y) = x^2 y$ ёфта шавад $d^3 u$.

4. $u(x, y) = \cos(x + y)$ ёфта шавад $d^2 u$.

5. $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$ дар чое, ки $x=tg^2 t$, $y=ctg^2 t$ аст, ёфта шавад $\frac{\partial u}{\partial t}$.

6. $u(x,y)=x^2+y^2$, дар чое, ки $x=\xi+\eta$, $y=\xi-\eta$ аст, ёфта шаванд $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

Кори мустақилонаи 8.3.1.

1. Экстремуми функсияҳои зеринро ёбед:

а) $u(x,y)=x^3+y^2-15xy$;

б) $u(x,y)=(x^2+y^2)(\ell^{-(x^2+y^2)}-1)$.

2. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $u(x,y)=xy$-ро дар доираи $x^2+y^2\le 1$ ёбед.

3. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $u(x,y)=x^3+y^3-34y$ -ро дар соҳаи $0\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$ ёбед

Кори мустақилонаи 8.4.1.

Мисол. Маълумотҳои зерин оиди арзиши захираҳои асосӣ x ва даромади корхона y дода шудаанд:

x_i	110	132	154	176	198	220	242
y_i	40	43,2	52,8	67,2	64	78,4	96

Фарз карда мешавад, ки байни тағйирёбандаҳои x ва y вобастагии хаттӣ мавҷуд аст, усули квадратҳои хурдтаринро истифода бурда, функсияи мушоҳидавиро ёбед.

Кори мустақилонаи 8.5.1.

1. Ҳосилаи функсияи ноошкорро ёбед:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial x}-?$

б) $x\sin y+\cos 2y=\cos y$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|x=\dfrac{\pi}{2}-?$

2. Ҳосилаи хусусии функсияи ноошкорро ёбед:

а) $x^3+y^3+z-3xyz=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

б) $z=x+arctg\dfrac{y}{z-x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}-?$

3. $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{в^2}+\dfrac{u^2}{c^2}=1$, ёфта шавад $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

4. $\ln z=x+y+z-1$, ёфта шавад dz ва d^2z.

Кори мустақилонаи 8.5.2.

1.Функсияҳои ноошкори $y(x)$ ва $z(x)$ бо системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} xyz=\alpha \\ x+y+z=b \end{cases}$$

дода шудаанд, ёфта шавад: dy, d^2y, d^2z.

2. $x=u+v, y=u-v, z=u\cdot v$, ёфта шавад $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. $x=e^{u+v}, y=e^{u-v}, z=u\cdot v$, ёфта шавад dz.

4. Экстремуми шартии функсияи $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ ҳангоми $y-x=\dfrac{\pi}{2}$ будан ёфта шавад.

Ҷавобҳо

К.М. 8.1.1.

1) $\frac{5}{3}$;-2 2) ($-x\le y\le x$, $x>0$, $x\le y\le -x$, $x<0$).

3) I, III, VI, ва VII-октантаҳо (ба ғайр аз сарҳад).

4) Давраҳои дохили ҳам хобида бо маркази дар ибтидои координат буда;

5) а) e^k, б) $x^2+y^2=1$.

К.М. 8.1.2.

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}\ell^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\dfrac{y}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\ell^{\sin\frac{x}{y}}\cos\dfrac{y}{x}$.

4) 0,82, 5) $2\cos(x^2+y^2)(xdx+ydy)$,

6) $\ell^{xyz}(yzdx+xydz+xzdy)$.

К.М. 8.2.1.

1) $\dfrac{2}{(x+3)^3}$. 3) $6\,dx^{\;2}dy$. 4) $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$.

5) $\dfrac{u}{\sin\ 2t}$. 6) $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=4\xi$.

К.М. 8.4.1.

1) а) $u_{\min}=-125$, б) $u_{\min}=0{,}2$, 2) $u=-\dfrac{1}{2}$, $u=\dfrac{1}{2}$.

3) F(2,0)=13 (max. сарҳадӣ);

F(1,1)=-1 (min. сарҳдӣ).

К.М. 8.5.1.

1) а) $-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, б) -1.

2) а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy};\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y^2-xz}{z^2-xy}$, б) 1.

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c^2x}{\alpha^2z};\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{c^2y}{b^2z};\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{-c^4(b^2-y^2)}{\alpha^2b^2z^3}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{c^4xy}{\alpha^2b^2z^3};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{c^4(b^2-y^2)}{\alpha^2b^2z^3}$.

4) $dz = \frac{z}{1-z}(dx+dy); d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2 + 2dxdy + dy^2)$.

К.М. 8.5.2.

1) $du = \frac{y(z-x)}{x(y-z)}dx$; dz $\frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx$,

$$d^2z = -d^2z = -\frac{\alpha}{x^3(y-z)^3}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]dx^2 .$$

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(u+v); \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(u-v)$.

3) $dz = \frac{1}{2\ell^{2u}}[\ell^{u-v}(u+v)dx + \ell^{u+v}(v-u)du]$.

4) $Z\max = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ҳангоми $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi, y = \frac{5\pi}{8} + k\pi$,

$Z\min = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ҳангоми $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, y = \frac{5\pi}{8} + k\pi$.

Боби IX. Қаторҳо

§1.Қаторҳои ададӣ

1.Мафҳуми қатори ададӣ. Бигузор, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ пайдарпаии беохири ададӣ бошад. Ифодаи $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\alpha_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, (9.1.1)

-ро, ки дар ин ҷо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \ldots$ ададҳои доимӣ мебошанд, қатори ададӣ меноманд.

Суммаи n-аъзоҳои аввaларо бо S_n ишора мекунем, S_n - суммаи хусусии n-аъзои аввалаи қатори ададӣ номида мешавад ё худ $S_n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$

Қатори (9.1.1) наздикшаванда номида мешавад, агар пайдарпаии суммаҳои хусусии он $\{S_n\}$ дар ҳолати $n\to\infty$ будан ҳудуди охирнок дошта бошад, яъне

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{9.1.2}$$

Дар ин ҳолат ҳудуди S- суммаи қатори (9.1.1) номида мешавад. Агар $\lim_{n\to\infty} S_n$ беохир ё вуҷуд надошта бошад, он гоҳ қатори (9.1.2) дуршаванда номида мешавад.

Агар қатори (9.1.2) наздикшаванда бошад, онгоҳ шарти зерин иҷро мешавад:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 . \tag{9.1.3}$$

Баръаксаш на ҳама вакт ҷой дорад. Агар аъзои n – уми қатор ба сифр майл накунад, он гоҳ қатор дуршаванда мешавад.

Баробарии (9.1.3) шарти зарурии наздикшавандагии қатори ададӣ мебошад.

Критерияи Коши. Барои он ки қатори (9.1.1) наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳаргуна $\varepsilon > 0$ чунин номери $N=N(\varepsilon)$ ёфт шавад, ки барои ҳамаи $n>N$ ва $p=1,2,\ldots$, нобаробарии

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$$

ичро шавад.

2. Аломатҳои наздикшавӣ. 1) Агар қатори $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\ldots$ наздикшаванда бошад, пас қатори $\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\ldots$, ки дар натиҷаи партофтани миқдори охирноки аъзоҳои қатори наздикшавандаи аввала ҳосил шудааст, низ наздикшаванда мешавад ва баръакс, аз наздикшавии қатори охирон наздикшавии қатори аввала натиҷа мебарояд.

2) Агар қатори (9.1.1) наздикшаванда бошад, он гоҳ қатори $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot\alpha_n$ ва қатори $\sum_{n-1}^{\infty}(a_n+b_n)$ низ наздикшаванда мешавад, бо шарти $\sum_{n-1}^{\infty} b_n$ наздикшаванда будан.

3) Бигузор, ду қатор $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ дода шуда бошанд ва $\alpha_n \le \beta_n$. Он гоҳ аз наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ мебарояд ва аз дуршавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ дуршавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ ҳосил мешавад.

4) Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=C\neq 0$ мавҷуд ва охирнок бошад, он гоҳ ҳар ду қатор якҷоя наздикшаванда ё дуршаванда мешаванд.

5) **Аломати Коши**. Агар барои қатори (9.1.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=q$ мавҷуд бошад, он гоҳ дар ҳолати $q<1$ будан қатори (9.1.1) наздикшаванда ва дар ҳолати $q>1$ будан қатори (9.1.1) дуршаванда мешавад.

6) **Аломати Даламбер**. Агар барои қатрои (9.1.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=q$ мавҷуд бошад, он гоҳ дар ҳолати $q<1$ будан қатори (9.1.1) наздикшаванда ва дар ҳолати $q>1$ будан қатори (9.1.1) дуршаванда мешавад.

7) **Аломати интегралӣ.** Агар функсияи $f(x)$ дар ҳолати $x \geq 1$ бефосила мусбат ва якзайл камшаванда бошад, пас қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, дар ҷое, ки $\alpha_n = f(n)$ аст, наздикшаванда мешавад, агар интеграли $\int_N^{\infty} f(x)dx (N \geq 1)$ наздикшаванда бошад, ва қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ дуршаванда мешавад, агар $\int_N^{\infty} f(x)dx$ дуршаванда бошад.

8) **Аломати Раабе.** Агар аъзоҳои қатори (9.1.1) мусбат ва

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} - 1\right) = R$$

бошад, он гоҳ дар ҳолати $R > 1$ будан қатори (9.1.1) наздикшаванда ва дар ҳолати $R < 1$ будан ин қатор дуршаванда мешавад.

9) **Аломати Гаусс.** Агар аъзоҳои қатори (9.1.1) мусбат ва

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} - \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

бошад $\varepsilon>0$, $|\theta_n| < C$, он гоҳ дар ҳолати $\lambda>1$ будан қатори (9.1.1) наздикшаванда, дар ҳолати $\lambda<1$ будан ин қатор дуршаванда мешавад. Агар $\lambda=1$ бошад, он гоҳ қатори (9.1.1) дар ҳолати $\mu>1$ наздикшаванда, дар ҳолати $\mu<1$ дуршаванда мешавад.

10) **Аломати Лейбнитс.** Агар аъзоҳои қатори аломатбадалкунандаи

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots - (-1)^n \alpha_{n+\ldots} \quad (9.1.4)$$

бо қимати мутлақашон якзайл камшаванда бошанд, аъзои умумии ин қатор ба сифр майл кунад, он гоҳ қатори (9.1.4) наздикшаванда мешавад.

Мисоли 9.1.1. Наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ нишон дода шавад ва суммаи онро ёбед.

Ҳал. Касри зери суммаро чунин тасвир менамоем:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Пас, суммаи хусусии ин қаторро чунин менависем:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....$$
$$.....+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Аз ин ҷо дар ҳолати $n\to\infty$ будан ба ҳудуд гузашта, ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Ҳамин тавр, нишон додем, ки қатори додашуда наздикшаванда ва суммаи он ба як баробар аст.

Мисоли 9.1.2. Нишон диҳед, ки шарти зарурии наздикшавӣ барои қатори $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$ иҷро мешавад ё не?

Ҳал: Ҳудуди аъзои умумиро ҳисоб мекунем бо формулаи (9.1.3):

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Шарти зарурии (9.1.3) иҷро нашуд, бинобар ин, қатори додашуда дуршаванда мешавад.

Мисоли 9.1.3. Критерияи Коширо истифода бурда, наздикшавии қатори

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x^2}{2^2}+\dots+\frac{\cos x^n}{n^2}$$ - ро исбот кунед.

Ҳал. Чунин номери N -ро меёбем, ки барои ҳамаи $n\rangle N$ ва адади ихтиёрии p>0 нобаробарии $\left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon$ барои дилхоҳ ε>0 иҷро мешавад. Аз шарти Коши истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\dots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\le$$

$$\le\frac{\left|\cos x^{n+1}\right|}{(n+1)^2}+\frac{\left|\cos x^{n+2}\right|}{(n+2)^2}+\dots+\frac{\left|\cos x^{n+p}\right|}{(n+p)^2}\le$$

$$\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

Маълум аст, ки

$$\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$ аст.

Аз ин ҷо пайдо мекунем:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}.$$

Ба монанди мисоли 9.1.1. ҳосил мекунем:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

Фарз мекунем, ки $N = \frac{1}{\varepsilon}$ аст, пас дар асоси Критерияи Коши қатори додашуда наздикшаванда мебошад.

Мисоли 9.1.4. Аз наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ истифода бурда, наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - ро нишон диҳед.

Ҳал: Аз мисоли 9.1.1. маълум аст, ки қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ наздикшаванда аст, пас дар асоси нобаробарии

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

ва теоремаи муқоисакунӣ ҳосил мекунем, ки қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ наздикшаванда мешавад.

Мисоли 9.1.5. Наздикшавии қатори

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$$

тадқиқ карда шавад.

Ҳал: Маълум аст, ки қатори гармоникии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дуршаванда мебошад. Барои наздикшавӣ ё дуршавии қатори додашударо муайян намудан қатори гармоникиро истифода мебарем.

Дар асоси 4) пайдо мекунем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+5}{3n^2-2n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n-2}=\frac{2}{3}.$$

Азбаски қатори гармоникӣ дуршаванда аст, бинобар ин, қатори

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n}$$ низ дуршаванда мебошад.

Мисоли 9.1.6. Дар асоси аломати Даламбер наздикшавии қатори

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$$ -ро тадқиқ кунед.

Ҳал: Аъзои умумии қатори $\alpha_n=\dfrac{n^5}{2^n}$ аст, аз ин ҷо

$\alpha_{n+1}=\dfrac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$ мешавад. Дар асоси аломати Даламбер ҳосил мекунем:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5 2^n}{n^5 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}<1,$$

он гоҳ дар асоси аломати Даламбер қатори додашуда наздикшаванда мебошад.

Мисоли 9.1.7. Дар асоси аломати Коши наздикшавии қатори

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{2n-1}$$ - ро тадқиқ намоед.

Ҳал: Маълум аст, ки аъзои умумии қатор $a_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$ мебошад. Дар асоси аломати Коши ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \frac{4}{9} < 1$$

Аз ин ҷо қатори додашуда наздикшаванда мешавад.

Мисоли 9.1.8. Бо ёрии аломати интегралӣ наздикшавии қатори Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ -ро тадқиқ намоед.

Ҳал: Функсияи $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ҳамаи шартҳои аломати интегралиро қаноат мекунонад. Бинобар ин, тадқиқ намудани қатор бо тадқиқи интеграли $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ оварда мешавад.

Аз ин ҷо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}x^{-p}dx = \lim_{A\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(A^{1-p}-1\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Ин ҳудуд дар ҳолати $0 < p \leq 1$ будан ба ∞ ва дар ҳолати $p > 1$ будан ба $\frac{1}{p-1}$ баробар мешавад. Аз ин ҷо қатори умумикардашудаи гармоникии $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ дар ҳолати $p > 1$ будан наздикшаванда Буда, дар ҳолати $0 < p \leq 1$ будан дуршаванда мешавад.

Мисоли 9.1.9. Аз аломати Раабе истифода бурда, наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ -ро нишон диҳед.

Ҳал: Аввало нисбати $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ -ро табдилдиҳӣ мекунем:

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}},$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}}{\dfrac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+p+1}}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{(n+1)!e^{n+1}\, n^{p+n}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} =$$

$$= e^{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} = e^{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-1+1+\frac{p}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{p}{2n^2}+0\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= e^{\frac{p-0,5}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\frac{p-0,5}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

Акнун дар асоси аломати Раабе ҳосил мекунем:

$$R = \lim_{n\to\infty} n(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n[1 + \frac{p-0,5}{n} + 0(\frac{1}{n}) - 1] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n[\frac{p-0,5}{n} + 0(\frac{1}{n})] = \lim_{n\to\infty}[p - 0,5 + 0(1)]$$

Дар ҳолати P$>\frac{3}{2}$ будан қатори додашуда наздикшаванда мешавад.

Мисоли 9.1.10. Аломати Гауссро истифода бурда, наздикшавии қатори

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots\ldots$$ - ро тадқиқ кунед.

Ҳал: Нисбати $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ -ро меёбем:

$$a_n = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^p, \qquad a_{n+1} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)}\right)^p,$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^p \cdot \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+2)}\right)^p =$$

$$= \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^p.$$

Дар асоси аломати Гаусс, агар $\rho > 2$ бошад, қатор наздикшаванда Буда, дар ҳолати $\rho \le 2$ будан қатор дуршаванда мешавад.

Мисоли 9.1.11. Аз аломати Лейбнитс истифода бурда, наздикшавии қатори

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} + \cdots + (-1)^n \frac{n}{n^2+1} + \cdots$$ -ро нишон диҳед.

Ҳал: Азбаски

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+\frac{1}{3}},\ \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+\frac{1}{4}},\dots \text{ аст,}$$

бинобар ин,

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}>\dots \text{ мебошад.}$$

Аз ин ҷо шарти якуми теоремаи Лейбнитс иҷро шуд.

Акнун шарти дигари теоремаи Лейбнитсро месанҷем:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0\ .$$

§ 2. Ҳосили зарби беохир

1. Бигузор, пайдарпаии ададҳои

$$P_1,P_2,P_3,\dots P_n,\dots \qquad (9.2.1)$$

дода шуда бошад.

Ифодаи $P_1\cdot P_2\cdot P_3\dots P_n\dots$- ро ҳосили зарби беохир меномем ва чунин ишора мекунем:

$$P_1\cdot P_2\cdot P_3\dots\dots P_n\dots\dots=\prod_{n=1}^{\infty}P_n \qquad (9.2.2)$$

ҳосили зарби хусусии тартиби n-ум чунин навишта мешавад:

$$P_n=P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_n-=\prod_{i=1}^{n}P_i. \qquad (9.2.3)$$

Ҳудуди ҳосили зарби хусусии P_n (9.2.3) дар ҳолати $n\to\infty$ будан қимати ҳосили зарби беохир (9.2.2) номида мешавад:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P\ ,\quad \text{аз ин ҷо } P=\prod_{n=1}^{\infty}P_n\ .$$

Агар ҳосили зарби беохир (9.2.3) қимати охирноки (нобаробари сифр)-ро дошта бошад, он гоҳ вай наздикшаванда ва дар ҳолати муқобил дуршаванда номида мешавад.

Агар ҳосили зарби беохир (9.2.2) наздикшаванда бошад, он гоҳ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 1$ мешавад.

2. Барои он ки ҳосили зарби беохир (9.2.2) наздикшаванда шавад, зарур ва кифоя аст, ки қатори $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln P_n$ наздикшаванда бошад. Ҳосили зарби беохири зеринро мегирем:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)\cdots \quad . \qquad (9.2.4)$$

Барои он ки ҳосили зарби беохир (9.2.2) наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки қатори $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ наздикшаванда бошад.

Ҳосили зарби беохир (9.2.2) он вақт мутлақ наздикшаванда мешавад, агар қатори $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ мутлақ наздикшаванда бошад.

Мисоли 9.2.1. Қимати ҳосили зарби беохири

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right] \text{ - ро ҳисоб кунед.}$$

Ҳал: Ҳосили зарби беохири додашударо чунин ифода мекунем:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right]=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdots\cdot\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\cdots\cdots$$

Наздикшавии ин ҳосили зарби беохирро исбот мекунем ва қимати онро меёбем. Ҳосили зарби хусуии P_n-ро тартиб медиҳем:

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Аз формулаи дар боло овардашуда истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Аз ин ҷо маълум аст, ки $P = \frac{1}{3}$ мебошад.

Мисоли 9.2.2. Исбот кунед, ки ($|x|<1$,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n-1})\cdots = \frac{1}{1-x} \text{ аст.}$$

Ҳал: Дар ҳақиқат $P_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n-1})$ мебошад,

ба $(1-x)$ - зарб намуда, ҳосил мекунем:

$$(1-x)P_n = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n-1}) = 1-x^{2n},$$

аз ин ҷо меёбем: $$P_n = \frac{1-x^{2n}}{1-x}.$$

Дар ҳолати $n \to \infty$ будан ба ҳудуд гузашта, ҳосил мекунем:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{1-x}.$$

Мисоли 9.2.3. Аз дуршавии қатори гармоникӣ истифода бурда, дуршавии ҳосили зарби беохири

$$\prod_{\kappa=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\cdots \text{ - ро нишон диҳед.}$$

Ҳал: Азбаски қатори гармоникии $\sum \frac{1}{\kappa}$ дуршаванда аст, бинобар ин, дар асоси теоремаҳои муқоисакунии дар боло гуфташуда ҳосили зарби беохири $\prod_{\kappa=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)$ низ дуршаванда мешавад.

Мисоли 9.2.4. Наздикшавии ҳосили зарби беохири $\prod_{\kappa=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\kappa^2 n^2}\right)$ - ро тадқиқ кунед.

Ҳал: Азбаски қатори $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ наздикшаванда аст, бинобар ин, ҳосили зарби беохири додашуда барои ихтиёрӣ қимати қайдкардашудаи x наздикшаванда мешавад.

§ 3. Пайдарпаиҳо ва қаторҳои функсионалӣ

Агар ба ҳар як ададӣ натуралии n аз рӯи ягон қонуни муайян функсияи $f_n(x)$ мувофиқ гузошта шавад, ки дар маҷмӯи $\{x\}$ дода шудааст, пас маҷмӯи батартибгузошташудаи

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x), \ldots \tag{9.3.1}$$

-ро пайдарпаии функсиионалӣ меномем.

Функсияҳои алоҳидаи $f_n(x)$ -ро элементҳои пайдарпаии функсионалӣ меномем.

Ифодаи
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{9.3.2}$$

- ро қатори функсионалӣ меномем. Функсияҳои $u_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ аъзоҳои қатори функсионалӣ номида мешаванд, ки дар маҷмӯи $\{x\}$ муайян карда шудаанд. Дар ин ҳолат маҷмӯи $\{x\}$ соҳаи муайянии қатори (9.3.2) номида мешавад.

Қайд мекунем, ки омӯзиши қаторҳои функсионалӣ бо омӯзиши пайдарпаиҳои функсионалӣ монанд мебошад.

Таърифи 9.3.1. Пайдарпаии (9.3.1) наздикшаванда номида мешавад ба функсияи $f(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$, агар барои ҳар як қимати гирифташудаи $x_0 \in \{x\}$ пайдарпаии ададии $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$ ба ададӣ $f(x_0)$ наздик шавад.

Таърифи 9.3.2. Пайдарпаии функсионалии (9.3.1) ба функсияи $f(x)$ дар маҷмӯи $\{x\}$ мунтазам наздикшаванда номида мешавад, агар барои ҳаргуна

$\varepsilon > 0$ чунин номери N(ε) (аз ε - вобаста, вале аз x -новобаста) ёфт шавад, ки дар ҳолати $n > N(\varepsilon)$ будан нобаробарии $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ барои ҳамаи x - ҳо якбора иҷро шавад.

Таърифи 9.3.3. Қатори функсионалии (9.3.2) дар маҷмӯи $\{x\}$ наздикшаванда номида мешавад ба функсияи S(x), агар пайдарпаии суммаҳои хусусии он $\{S_n(x)\}$ наздикшаванда бошад, яъне

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \left(S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right).$$

Таърифи 9.3.4. Қатори (9.3.2) ба суммаи худ S(x) дар маҷмӯи $\{x\}$ мунтазам наздикшаванда номида мешавад, агар пайдарпаии суммаҳои хусусии он $\{S_n(x)\}$ дар ин маҷмӯъ ба S(x) мунтазам наздик шавад.

2. Аломатҳои мунтазам наздикшавӣ. 1) Аломати Вейерштрасс. Агар аъзоҳои қатори (9.3.2) бо қимати мутлақашон аз аъзоҳои қатори ададӣ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ зиёд набошанд, он гоҳ аз наздикшавии қатори ададии $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ мунтазам наздикшавии қатори функсионалии (9.3.2) дар маҷмӯи $\{x\}$ ҳосил мешавад.

2) Критерияи Коши. Барои он ки қатори (9.3.2) дар маҷмӯи $\{x\}$ мунтазам наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳар гуна $x > 0$ чунин номери N(ε) ёфт шавад, ки дар ҳолати $n \geq N(\varepsilon)$ будан нобаробарии

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

барои p>0 - натуралӣ ва ҳамаи $x \in \{x\}$ якбора иҷро шавад.

3) Агар пайдарпаии функсияҳои бефосилаи $\{f_n(x)\}$ ба функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ мунтазам наздик шавад, пас $f(x)$ ҳам дар $[a;b]$ бефосила мешавад.

Агар ҳамаи аъзоҳои қатори (9.3.2) дар $[a;b]$ бефосила бошанд ва қатор дар ин порча мунтазам наздикшаванда бошад, он гоҳ суммаи қатор $S(x)$ ҳам дар $[a,b]$ бефосила мебошад.

4) Агар пайдарпаии функсияҳои бефосилаи $\{f_n(x)\}$ дар порчаи $[a;b]$ ба функсияи $f(x)$ мунтазам наздик шавад, пас

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \quad \text{ба} \quad \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

мунтазам наздик мешавад, барои ихтиёрӣ $x_0 \in [a;b]$.

Агар қатори (9.3.2) бо аъзоҳои бефосила дар порчаи $[a;b]$ мунтазам наздикшаванда бошад, он гоҳ баробарии

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$$

ҷой дорад.

5) Агар қатори (9.3.2) бо аъзоҳои бефосила ва дифференсиронидашаванда дар порчаи $[a;b]$ наздикшаванда бошад ва қатори $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ дар $[a;b]$ мунтазам наздикшаванда бошад, он гоҳ суммаи қатор $S(x)$ дар ин порча дифференсиронидашаванда аст ва дар ин сурат баробарии зерин ҷой дорад:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

6) Агар қатори функсионалии (9.3.2) дар атрофи ягон нуқта мунтазам наздикшаванда бошад ва агар $\lim_{x \to x_0} u_k(x) = C_k \; (k = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ бошад, пас қатори ададии $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ наздикшаванда аст.

Мисоли 9.3.1. Нишон диҳед, ки функсияи ҳудудӣ, пайдарпаии функсиҳои бефосилаи $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2}$ низ бефосила мебошад.

Ҳал. Пеш аз ҳама функсияи ҳудудиро меёбем:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0,$$

яъне $f(x)=0$ аст барои ҳамаи x-ҳо. Бинобар ин, функсияи ҳудудӣ ҳам барои ҳамаи x-ҳо бефосила мебошад.

Мисоли 9.3.2. Наздикшавии қатори функсионалии

$$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+.....+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n+.....$$

дар нуқтаҳои $x = 0$ ва $x = 1$ тадқиқ карда шавад.

Ҳал. Дар нуқтаи $x = 0$ ҳосил мекунем:

$$2+\frac{1}{3}2^2+\frac{1}{5}2^3+\cdots+\frac{1}{2n-1}2^n+\cdots$$

Аломати Даламберро татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2\cdot 1 = 2$$

Азбаски $D>1$ аст, бинобар ин, дар ин ҳолат қатор дуршаванда мебошад.

Акнун дар нуқтаи $x=1$, ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots.$$

Дар ин ҷо

$$u_n = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \text{ аст,}$$

аз ин ҷо пайдо мекунем:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2n-1)}{(2n+1)3^{n+1}} = \frac{1}{3} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3}.$$

Азбаски D<1 мебошад, дар асоси аломати Даламбер қатор наздикшаванда аст.

Мисоли 9.3.3. Соҳаи наздикшавии қатори

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+\cdots+\frac{1}{1+x^{2n}}+\cdots$$ ёфт шавад.

Ҳал. Агар $|x|<1$ бошад, пас $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1$ аст.

Аз сабаби он ки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ дар асоси шарти зарурии қатори додашуда дуршаванда мебошад.

Агар $|x|=1$ бошад, он гоҳ қатори дуршавандаи

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2}+\ldots\ldots$$ - ро

ҳосил мекунем. Ва дар ҳолати $|x|>1$ будан чунин баҳо медиҳем:

$$\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2},\ \frac{1}{1+x^4}<\frac{1}{x^4},\ldots,\ \frac{1}{1+x^{2n}}<\frac{1}{x^{2n}},\ldots,$$

Қатори прогрессияи геометрии беохир камшавандаи

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}+\cdots$$

наздикшаванда мебошад. Яъне дар ҳолати $|x|>1$ будан қатори додашуда наздикшаванда мебошад. Ҳамин тавр, соҳаи наздикшави қатори додашуда $|x|>1$ мебошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки қатори мазкур дар интервалҳои $1<x<+\infty$ ва $-\infty<x<-1$ наздикшаванда мебошад.

Мисоли 9.3.4. Соҳаи наздикшавии қатори функсионалии

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n\sqrt[n]{(x+2)^n}},\quad X\in R,\quad x>-2$$ ёфта шавад.

Ҳал. Дар асоси аломати Коши ҳосил мекунем:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 3^n\sqrt{(x+2)^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[n]{n}}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{x+2}},(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1).$$

Дар ин ҳолат қатори додашуда наздикшаванда мешавад, чунки $\frac{1}{3\sqrt{x+2}}$ <1 мебошад. Аз ин ҷо меёбем: $3\sqrt{x+2}>1$, $9(x+2)>1$, $9x>-17$, $x>-\frac{17}{9}$.

Дар ҳолати $x=-\frac{17}{9}$ будан қатори аломатбадалкунандаи $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$-ро ҳосил мекунем, ки дар асоси аломати Лейбнитс наздикшаванда аст. Ҳамин тавр, соҳаи наздикшавии қатор ниминтервали $\left[-\frac{17}{9};+\infty\right)$ мебошад.

Мисоли 9.3.5. Бо ёрии аломати Вейерштрасс нишон диҳед, ки қатори функсионалии

$$\sin x+\frac{1}{2^2}\sin^2 2x+\frac{1}{3^3}\sin^3 3x+.....+\frac{1}{n^2}\sin^n nx+......$$

дар интервали $(-\infty;+\infty)$ мунтазам наздикшаванда аст.

Ҳал. Азбаски $\left|\frac{1}{n^2}\sin^n nx\right|\le\frac{1}{n^2}$ ва қатори гармоникии умумикардашудаи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ наздикшаванда аст, бинобар ин, қатори додашуда дар асоси аломати Вейерштрасс барои дилхоҳ x мунтазам наздикшаванда мешавад. Қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ барои қатори додашуда қатори можаранти мебошад.

Мисоли 9.3.6. Соҳаи мунтазам наздикшавии қатори функсионалии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ ёфта шавад.

Ҳал. Пеш аз ҳама соҳаи наздикшавии ин қаторро меёбем. Дар асоси аломати Даламбер ҳосил мекунем:

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2} = \leq |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 = |x| < 1.$$

Соҳаи наздикшавии қатори мазкур интервали (-1;1) мебошад. Дар сарҳадҳои ин интервал қатор наздикшаванда мешавад, ё худ қаторҳои $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ наздикшаванда мебошанд. Ҳамин тавр, қатори додашуда барои қиматҳои $|x|\leq 1$ наздикшаванда аст. Азбаски $|x|\leq 1$ мебошад, бинобар ин, $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ мешавад. Пас дар асоси аломати Вейерштрасс қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ дар порчаи [-1;1] мунтазам наздикшаванда мешавад.

Мисоли 9.3.7. Мунтазам наздикшавии пайдарпаии функсионалии $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ дар порчаи $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ тадқиқ карда шавад.

Ҳал. Дар асоси таъриф пайдо мекунем:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

Азбаски $\sup\limits_{0\leq x\leq\frac{1}{2}}\{x^n\} = \frac{1}{2^n} = 0$ мебошад ва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ аст, бинобар ин, пайдарпаии мазкур дар порчаи $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ мунтазам наздикшаванда мебошад.

Мисоли 9.3.8. Ёфта шавад $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

Ҳал. Азбаски $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}=\dfrac{1}{n^2}$ ва қатори $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ - наздикшаванда аст, пас дар асоси аломати Вейерштрасс қатори додашуда мунтазам наздикшаванда мешавад. Аз тарафи дигар,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x^2}+n^2}=\frac{1}{n^2}\text{ аст.}$$

мебошад. Дар асоси хосияти қаторҳои функсионалӣ дар зери сумма ба ҳудуд мегузарем, яъне

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Мисоли 9.3.9. Нишон диҳед, ки аъзо ба аъзо дифференсиронидани қатори $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\dfrac{x}{n^2}$ имконпазир аст.

Ҳал. Функсияи $arctg\,\dfrac{x}{n^2}$ (n=1,2,3,...) дар ҳолати $|x|<\infty$ бефосила ва дифференсиронидашаванда мебошанд. Илова бар он, қатори аз ҳосилаҳои ин функсияҳо тартибдодашудаи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^4+x^2}$ мунтазам наздикшаванда мебошад дар $(-\infty;\infty)$. Он гоҳ дар асоси хосияти 5^0 қатори мазкурро аъзо ба аъзо дифференсиронидан мумкин аст.

§ 4. Қаторҳои дараҷагӣ

1.Қатори дараҷагӣ ва соҳаи наздикшавии он. Қатори функсионалии намуди

$$\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)^2+\cdots+\alpha_n(x-x_0)^n+\cdots, \qquad (9.4.1)$$

ки дар ин ҷо $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ ададҳои доимӣ мебошанд, қатори дараҷагӣ номида мешавад.

Дар ҳолати $x_0 = 0$ будан қатори дараҷагӣ чунин намудро мегирад: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n + ...$. Хосияти асосии қатори дараҷагӣ аз он иборат аст, ки агар вай дар нуқтаи $x = \alpha$ наздикшаванда бошад, пас он барои ихтиёрӣ қимати x , ки нобаробарии $|x - x_0| < |\alpha - x_0|$ -ро қаноат мекунонад, наздикшаванда мебошад. Барои қатори наздикшаванда интервали наздикшавии $|x - x_0| < R$ мавҷуд аст. Дар охирҳои интервали наздикшавӣ қатори дараҷагӣ рафтори гуногун дошта метавонад. Дар як ҳолат наздикшаванда, дар ҳолати дигар дуршаванда шуда метавонад. Адади R – радиуси наздикшавии қатори дараҷагӣ номида мешавад. Дар ҳолати хусусӣ радиуси наздикшавии қатори дараҷагӣ ба сифр ё беохир баробар шуда метавонад.

Агар R=0 бошад, он гоҳ қатори (9.4.1) фақат дар нуқтаи $x = x_0$ наздикшаванда мебошад, агар R=∞ бошад, он гоҳ қатори (9.4.1) дар тамоми тири ададӣ наздикшаванда мебошад.

Барои ёфтани радиуси наздикшави қаторҳои дараҷагӣ аз аломатҳои Даламбер ва Коши истифода бурдан мумкин аст.

Радиуси наздикшави R бо формулаҳои зерин ҳисоб карда мешавад:

1. $$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right|; \qquad (9.4.2)$$

2. $$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\alpha_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}. \qquad (9.4.3)$$

2. Хосиятҳои асосии қаторҳои дараҷагӣ. 1) Суммаи қатори дараҷагӣ дар дохили интервали наздикшавиаш функсияи бефосила мебошад.

2) Агар радиуси наздикшавии қатори (9.4.1) R>0 бошад ва x нобаробарии $|x| < R$ – ро қаноат кунонад, он гоҳ қатори (9.4.1)-ро дар порчаи $[0; x]$ аъзо

ба аъзо интегронидан мумкин аст. Қатори дар натиҷаи интегронӣ ҳосилшуда низ радиуси наздикшави R –ро дорад.

3) Қатори дараҷагӣ (9.4.1)-ро дар дохили интервали наздикшавиаш (-R; R) аъзо ба аъзо дифференсиронидан мумкин аст. Қатори дар натиҷаи дифференсиронӣ ҳосилшуда радиуси наздикшавии қатори авваларо дорад.

Мисоли 9.4.1. Интервали наздикшавии қатори дараҷагии

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x+8)^{3n} \quad \text{-ро ёбед.}$$

Ҳал. Дар ин ҷо

$$u_n=\frac{1}{n^2}(x+8)^{3n}, \qquad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}(x+8)^{3n+3}$$

мебошад. Дар асоси аломати Даламбер ҳосил мекунем:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+8)^{3n+3}\cdot n^2}{(n+1)^2(x+8)^{3n}}\right|=\lim_{n\to\infty}|x+8|^3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|x+8|^3,$$

$$|x+8|^3<1, \quad |x+8|<1, \quad -1<x+8<1, \quad -9<x<-7$$

Рафтори қаторро дар охирҳои порча месанҷем. Дар ҳолати x=-9 будан қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ дар асоси аломати Лейбнитс наздикшаванда мебошад.

Дар ҳолати $x=-7$ будан қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ҳосил мешавад.

Наздикшавии ин қаторро тадқиқ менамоем. Барои ин аломати интегралиро истифода мебарем:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}x^{-2}dx=\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{\beta}+1\right)=1.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ наздикшаванда мешавад.

Ҳамин тавр, соҳаи наздикшавии қатори додашуда порчаи [-9;-7] мебошад.

Мисоли 9.4.2. Наздикшавии қатори $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ тадқиқ карда шавад.

Ҳал. Барои ҳал намудани ин мисол аломати Даламберро истифода мебарем. Маълум аст, ки

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0.$$ мебошад.

Бинобар ин, қатор барои қимати ихтиёрии x наздикшаванда мебошад.

Мисоли 9.4.3. Наздикшавии қатори $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}(x-1)^{n(n+1)}$ -ро тадқиқ кунед.

Ҳал. Наздикшавии ин қаторро бо ёрии аломати Коши месанҷем. Аз ин ҷо

$$u_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n},$$

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-1|^{n(n+1)}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{n} = \begin{cases} 0, агар\ |x-1|\angle 1 \\ \infty, агар\ |x-1|\geq 1 \end{cases}$$ аст,

ҳамин тавр, дар ҳолати $|x-1|<1$ будан қатор наздикшаванда ва дар ҳолати $|x-1|>1$ будан қатор дуршаванда мешавад. Соҳаи наздикшавии қатор [0;2] мебошад.

Мисоли 9.4.4. Аъзо ба аъзо дифференсиронида, суммаи қатори $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$ ёфта шавад.

Ҳал. Дар асоси аломати Коши радиуси наздикшавии қатори додашуда ба як баробар мебошад. Дар асоси хосияти дар боло овардашуда қаторро дар дохили интервали наздикшавиаш аъзо ба аъзо интегронидан мумкин аст. Қаторро дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad (|x| < 1)$$

ҳарду тарафи баробарии охиронро интегронида, ҳосил мекунем:

$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = arctgx + C$ Бигузор, $x = 0$ бошад, он гоҳ C=0 мешавад. Дар охир ҳосил мекунем:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = arctgx \ .$$

Қайд мекунем, ки дар охирҳои интервали наздикшавӣ ин қатор наздикшаванда мебошад. Бинобар ин, дар асоси хосияти 1^0 суммаи қатор дар порчаи [-1;1] функсияи бефосила мешавад. Азбаски функсияи $arctgx$ дар порчаи [-1;1] функсияи бефосила мебошад, бинобар ин, баробарии охирон барои ҳамаи $x \in [-1;1]$ ҷой дорад.

Кори мустақилонаи 9.1.1.

1. Суммаи қаторро ёбед:

а) $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} + \cdots$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2. Аломати муқоисакуниро истифода бурда, наздикшавии қаторҳои зеринро тадқиқ кунед:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

3. Бо ёрии аломатҳои Коши ва Даламбер наздикшавии қаторҳои зерин тадқиқ карда шавад:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\cdots;$

б) $2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots\ldots.$

Кори мустақилонаи 9.1.2.

1. Аломати интеграли Коширо истифода бурда, наздикшавии қаторҳои зеринро тадқиқ намоед:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

2. Аломати Раaберо истифода бурда, наздикшавии қаторҳои зеринро тадқиқ намоед:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^k}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^2}$.

3. Аломати Гауссро истифода бурда, қатори

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$ - ро тадқиқ кунед.

4. Наздикшавии қаторҳои аломатбадалкунандаи зеринро тадқиқ кунед:

а) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots;$

б) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\cdots.$

Кори мустақилонаи 9.2.1.

1. Наздикшавии ҳосили зарби беохир $\prod_{k=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ -ро нишон диҳед ва қимати онро ҳисоб кунед.

1. Исбот кунед, ки ҳосили зарби беохир $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$ наздикшаванда аст

ва қимати он ба $\frac{\sin x}{x}$ баробар мебошад.

2. Аз қатори гармоники умумикардашуда истифода бурда, наздикшавии

ҳосили зарби беохири $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^{\alpha}})$ -ро тадқиқ намоед.

Кори мустақилонаи 9.3.1.

1.Соҳаи наздикшавии қаторҳои функсионалии зеринро ёбед:

а) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2(x^2+1)^n}+\cdots$;

б) $1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\cdots+\frac{1}{nx}+\cdots$.

2. Наздикшавии қатори функсионалии

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ldots..$$

дар нуқтаҳои $x=1$, $x=2$ ва $x=3$ тадқиқ карда шавад.

3. Соҳаи мунтазам наздикшавии қаторҳои зеринро ёбед:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n^2}$;

б) $\frac{2x+1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n+\ldots\ldots$.

4. Мунтазам наздикшавии пайдарпаи функсионалӣ $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ -ро дар порчаи $[0;1]$ тадқиқ кунед.

Кори мустақилонаи 9.3.2.

1. Аъзо ба аъзо интегронидани қатори

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2^2}\cos 3x + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos nx + \cdots$$

дар порчаи $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ мумкин аст ё не?

2. Мунтазам наздикшавии қаторҳои зеринро дар асоси аломати Вейерштрасс нишон диҳед:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \; nx}{2^n}$ $(-\infty<x<\infty)$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{3+n^5}$.

3. Нишон диҳед, ки қатори

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{4} + \cdots + \frac{x^n}{2^{n-1}} + \cdots$$

дар интервали (-2,2) ғайримунтазам наздикшаванда мебошад.

4. Қатори $\sin x + \frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{x}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n} + \cdots$ -ро аъзо ба аъзо дифференсиронидан мумкин аст ё не?

5. Қатори $1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos^2 x}{2!} + \cdots + \frac{\cos^{n-1} x}{(n-1)!} + \cdots$ -ро дар порчаи $[\alpha, b]$ аъзо ба аъзо интегронидан мумкин аст ё не?

6. Нишон диҳед, ки функсияи $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ бефосила аст ва дар интервали $-\infty < x < \infty$ дорои ҳосилаи бефосила мебошад.

Кори мустақилонаи 9.4.1.

1. Интервали наздикшавии қаторҳои зеринро ёбед:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ln}{(2n)!} x^{2n}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2. Наздикшавии қаторҳои зерин тадқиқ карда шавад:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$,   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$.

3. Аъзо ба аъзо дифференсиронида, суммаи қаторҳои зеринро ёбед:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $(|x|<1)$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $(|x|<1)$.

Ҷавобҳо

К.М.9.1.1.

1. а) 0,5.   б) 1.
2. а) наздикшаванда.   б) наздикшаванда.
3. а) наздикшаванда.   б) наздикшаванда.

К.М.9.1.2.

1. а) дуршаванда;   б) наздикшаванда.
2. а) дуршаванда;   б) $q>p$, наздикшаванда.
3. наздикшаванда, агар $\frac{p}{2}+q>1$.
4. а) шартан наздикшаванда.   б) мутлақ наздикшаванда.

К.М.9.2.1.

1. 0,5.   2. $\frac{\sin x}{x}$ 3. $\alpha>1$, наздикшаванда, $\alpha<1$ дуршаванда.

К.М.9.3.1.

1. а) $-\infty<x<\infty$.   б) $1<x<\infty$.
2. Дар нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ дуршаванда, дар нуқтаҳои $x=3$ наздикшаванда
3. а) $-\infty<x<\infty$.   б) $[-1;1]$
4. Мунтазам наздикшаванда.

К.М.9.3.2.

1. Мумкин.   2. а) мунтазам наздикшаванда.   б) мунтазам наздикшаванда.   4. Мумкин   5. Мумкин.

К.М.9.4.1.

1. а) $-\infty<x<\infty$; б) $|x| = 2$; 2. а) $-1<x<3$; б) $-\infty<x<\infty$.

3. а) $\frac{1}{(1-x)^2}$; б) $-\ln(1-x)$.

Боби X. Интегралҳои дукарата ва секарата

§ 1. Интегралҳои дукарата

1. **Мафҳуми интеграли дукарата.** Интеграли дукарата аз функсияи бефосилаи $f(x,y)$ дар соҳаи маҳдуди D ҳамвории xoy гуфта, ҳудуди охирноки суммаи интегралии $\sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k$ -ро меномем ва онро чунин ишора мекунем:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0, \max \Delta y_k \to 0} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k) \Delta x_i \Delta y_k = \iint_D f(x,y)\,dxdy, \qquad (10.1.1)$$

ки дар ин ҷо $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ мебошад.

Интеграли дукарата дорои чунин хосиятҳои асосӣ мебошад:

1) $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y)dxdy$;

2) $\iint_D Cf(x,y)dxdy = C\iint_D f(x,y)dxdy$ (С-доимӣ);

3) Агар соҳаи интегронӣ D ба ду соҳа D_1 ва D_2 –ҷудо шуда бошад, пас

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$ аст;

4) Агар $m \le f(x,y) \le M$ бошад, он гоҳ

$$m \cdot S \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S$$ аст, ки

дар ин ҷо S - масоҳати соҳаи D ва m, M –мувофиқан қимати хурдтарин ва калонтарини функсияи $f(x,y)$ дар соҳаи D мебошанд.

Интеграли дукарата аввало ба интеграли такрорӣ оварда мешавад ва пас аз он ҳисоб карда мешавад.

Бигузор, соҳаи интегронӣ D бо ду хати рост $x_1 = a, \quad x_2 = b \quad (a < b)$ ва аз поён ва боло бо хатҳои каҷи суфтаи $y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x)$ маҳдуд карда шуда бошад, шарт мегузорем, ки ин хатҳои каҷ бо хатҳои рост яктогӣ нуқтаи бурриш доранд. Дар ин ҳолат интеграли дукарата бо формулаи зерин ҳсисоб карда мешавад:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (10.1.2)$$

Аввало интеграли дохилӣ $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҳолат x -доимӣ ҳисобида мешавад.

Бигузор, соҳаи интегронӣ D аз поён ва боло бо хатҳои рости $y_1 = c, \; y_2 = d$ ва аз чап ва рост бо хатҳои каҷи бефосилаи $x_1 = \psi_1(y), x_2 = \psi_2(y)$ маҳдуд гашта бошад, ки ин хатҳо бо хатҳои рост яктогӣ нуқтаи бурриш доранд. Дар ин ҳолат интеграли дукарата бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (10.1.3)$$

Дар ин ҷо аввало интеграли дохилӣ $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ ҳисоб карда мешавад ва y -доимӣ шуморида мешавад.

Дар ҳолати хусусӣ, агар $\varphi_1(x) = c$ ва $\varphi_2(x) = d$ шаванд, он гоҳ соҳаи интегронӣ росткунҷа мебошад ва аз (10.1.2) ҳосил мекунем:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \qquad (10.1.4)$$

Дар ҳолати умумӣ бо ёрии ҷудокунӣ соҳаи интегронӣ бо якчанд соҳаи дар боло овардашуда ҷудо карда мешавад.

2. Иваз намудани тағйирёбанда дар интеграли дукарата. Агар аз тағйирёбандаҳои x, y ба тағйирёбандаҳои u, v гузарем, бо шарти $x = \varphi(u,v)$ ва $y = \psi(u,v)$ бефосила ва дифференсиронидашаванда будан, он гоҳ интеграли дукарата чунин навишта мешавад:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f[\varphi(u,v), \psi(u,v)]|J(u,v)|dudv, \qquad (10.1.5)$$

ки дар ин ҷо
$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

Δ-соҳаи тағйирёбии u ва v-мебошад.

Дар ҳолати хусусӣ дар интеграли дукарата аз системаи координатаи декартӣ ба системаи координати қутбӣ гузарем:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

он гоҳ формулаи гузариш чунин намуд дорад

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr. \qquad (10.1.6)$$

Мисоли 10.1.1. Интеграли $\iint\limits_D x\ln y dxdy$ -ро ҳисоб кунед, агар соҳаи интегронӣ росткунҷаи $0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le e$ бошад.

Ҳал. Барои ҳисоб намудани ин интеграл аз формулаи (10.1.4) истифода мебарем

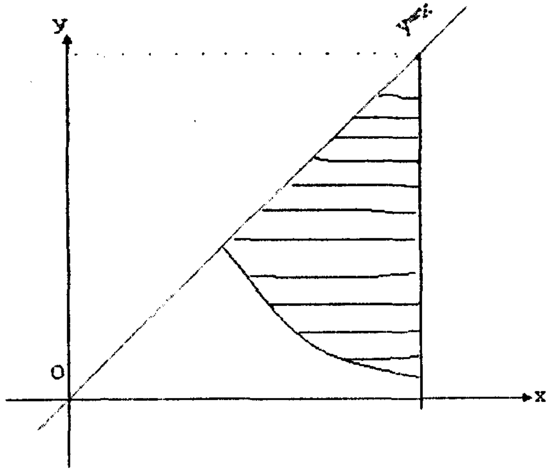
$$\iint\limits_D x\ln y dxdy = \int_0^4 xdx\int_1^e \ln y dy = \int_0^4 x(y\ln y - y)\Big|_1^e dx = [e\ln e - e + 1]\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 =$$
$$= [e - e + 1]\cdot 8 = 8$$

Мисоли 10.1.2. Ҳудудҳои интегралро бо ду тарз муайян карда, ҳисоб кунед, агар соҳаи интегронӣ D бо хатҳои $y = x, y = \dfrac{1}{x}$ ва $x = 2$ маҳдуд карда шуда ва $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$ бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (10.1.2) ҳосил мекунем (тарзи 1):

$$\iint \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx = \int_1^2 (x^2 - x)dx =$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 4 - \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25.$$

Акнун барои ҳалли ин мисол формулаи (10.1.3)-ро тадбиқ мекунем (тарзи 2):



$$\psi_1(y) = \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{2} \le y \le 1$$

$$\psi_2(y) = 2, \quad \psi_1(y) = y, \; 1 \le y \le 2$$

$$C = \frac{1}{2}, \qquad d=2.$$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\int_{\frac{1}{y}}^{2}x^2dx + \int_{1}^{2}\frac{dy}{y^2}\int_{y}^{2}x^2dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}\right) + \int_{1}^{2}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{y^2}\Big|_{y}^{1}\right) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} y\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3y^2}\right)\frac{dy}{y^2} + \int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{y^3}{3}\right)\frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}\right)dy + \int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3}\right)dy =$$

$$= \left(-\frac{8}{3y} - \frac{1}{12y^4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(-\frac{8}{3y} - \frac{y^2}{6}\right)\Bigg|_{1}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + \frac{1}{12} + \frac{16}{3} - \frac{16}{12}\right) + \left(-\frac{8}{6} - \frac{4}{6} + \frac{8}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{27}{2} = 2{,}25$$

Мисоли 10.1.3. Интеграл ҳисоб карда шавад, агар соҳаи интегронӣ квадратӣ $(0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4})$ ва $f(x,y) = \cos^2 x + \sin^2 y$ бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (10.1.4) ҳосил мекунем:

$$\iint_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 y)dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 + \frac{1-\cos 2y}{2}\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(y\cos^2 + x + \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) dx = \left[\frac{\pi}{8}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}\right] = \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2}{16}.$$

Мисоли 10.1.4. Ба системаи координати қутби гузашта, интеграли дукаратаи $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$-ро ҳисоб кунед, агар D чоряки доираи $x^2 + y^2 \le \alpha^2$ бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (10.1.6) пайдо мекунем:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\cdot\sin^2\varphi}\, rdr = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3\Big|_0^{a} d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3}{6} r^2.$$

Мисоли 10.1.5. Интеграли дукаратаи $\iint\limits_{D}(x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$ ро ҳисоб карда шавад, агар D квадратӣ бо хатҳои $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ маҳдуд гашта бошад.

Ҳал. Гузориш мекунем: $x+y=u, x-y=v$ аз ин ҷо $x=\frac{1}{2}(u-v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Он гоҳ якобиан

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{dv} \\ \frac{\partial y}{du} & \frac{\partial y}{dv} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

худ $|J|=\frac{1}{2}$ мешавад. Бинобар ин,

$$\iint\limits_{D}(x+y)^3(x-y)^2\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta}u^3v^2\,dudv.$$

Соҳаи Δ-ҳам квадрат мебошад.

Формулаи (10.1.5)-ро истифода бурда, интеграли додашударо ҳисоб мекунем:

$$\iint\limits_{D}(x+y)^3(x-y)^2=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3}u^3du\int\limits_{-1}^{1}v^2dv=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3}u^3\left(\frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}du=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3}u^3\frac{2}{3}du=\frac{1}{3}\;\frac{u^4}{4}\Bigg|_{1}^{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{81}{4}-\frac{1}{12}=\frac{80}{12}=\frac{20}{3}.$$

§ 2. Татбиқи интеграли дукарата

1. **Ҳисоб намудани масоҳат.** Аз хосияти интегралҳои дукарата маълум аст, ки масоҳати фигураҳои ҳамвор бо ёрии инетграли дукарата бо осони ҳисоб карда мешавад.

Масоҳати фигураи ҳамвор бо формулаи:

$$S = \iint_D dxdy \qquad (10.2.1)$$

ҳисоб карда мешавад.

Агар соҳаи D дар ҳамворӣ бо нобаробариҳои $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ муайян карда шуда бошад, он гоҳ (10.2.1)-ро чунин навиштан мумкин аст

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \qquad (10.2.2)$$

Агар соҳаи D дар системаи координатаи қутбӣ муайян карда шуда бошад, он гоҳ масоҳат бо формулаи

$$S = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \quad \alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi), \qquad (10.2.3)$$

ҳисоб карда мешавад.

2. **Ҳисоб намудани ҳаҷми ҷисм.** Ҳаҷми ҷисми силиндри аз боло бо сатҳи бефосилаи $f(x, y)$ ва аз поён бо ҳамвории $z = 0$ маҳдуд кардашуда, ки дар ҳамвории xoy соҳаи D –ро ҷудо мекунад, бо формулаи

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy \quad , \qquad (10.2.4)$$

ҳисоб карда мешавад.

3. Ҳисоб кардани масоҳати сатҳ. Агар муодилаи сатҳи суфта ба намуди $z = f(x, y)$ дода шуда бошад, пас масоҳати ин сатҳ бо формулаи

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \qquad (10.2.5)$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо D -проексияи сатҳи додашуда дар ҳамвории xoy мебошад.

Агар муодилаи сатҳ ба намуди параметри $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ дода шуда бошад, он гоҳ масоҳати сатҳ бо формулаи

$$S = \iint_T \sqrt{EG - F^2}\, dxdy\ , \qquad (10.2.6)$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \text{ мебошад.}$$

4. Татбиқи физикавии интеграли дукарата. Маркази вазнинии лавҳачаи ҳамвории D, ки зичиаш $\rho = \rho(x, y)$ мебошад бо формулаи

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x, y)dxdy\ , \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x, y)dxdy \qquad (10.2.7)$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо x_0, y_0 -координатаҳои маркази вазнинй мебошанд ва

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy \quad \text{аст.}$$

Агар лавҳа якҷинса бошад, он гоҳ $\rho(x,y) = c = const$ мешаваад.

Лаҳзаи статикии ҷисм нисбат ба тирҳои ox ва oy бо формулаҳои зерин

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy \qquad (10.2.8)$$

ҳисоб карда мешавад.

Лаҳзаи инерсияи тасмачаи D нисбат ба тирҳои координатаи OX ва oy бо формулаҳои зерин

$$J_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy, \quad J_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy \qquad (10.2.9)$$

ҳисоб карда мешавад.

Лаҳзаи инертсияи марказшитоб бо формулаи

$$J_{xy} = \iint\limits_D xy\rho(x,y)dxdy \qquad (10.2.10)$$

ҳисоб карда мешавад.

Лаҳзаи инерсия нисбат ба ибтидои координата бо формулаи

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy \qquad (10.2.11)$$

ҳисоб карда мешавад.

Мисоли 10.2.1. Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$ маҳдуд карда шудааст, ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Аввало координатаҳои нуқтаҳои бурриши ин хатҳоро ёфтан лозим аст. Барои ин системаи зеринро ҳисоб мекунем:

$$\begin{cases} x = 4y - y^2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - y = 4y - y^2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, y_1 = 2 \\ x_2 = 3, y_2 = 3 \end{cases}$$

ҳамин тавр, нуқтаҳои бурриши ин хатҳо чунинанд: $A(4;2)$, $B(3;3)$. Аз (10.2.1) истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$S = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy = \int_2^3 \left(4y - y^2 - 6 + y\right) dy =$$

$$= \int_2^3 \left(5y - y^2 - 6\right) dy = \left(\frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - 6y\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{6}.$$

Мисоли 10.2.2. Масоҳате, ки бо лемнискатаи $(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha^2 xy$ маҳдуд гаштааст, ёфта шавад.

Ҳал. Аввал муодилаи хати каҷи додашударо дар системаи координатаи қутбӣ менависем. Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$r^2 = 2a^2 \sin\theta \cdot \cos\theta = a^2 \sin 2\theta$$

Пас, дар асоси формулаи (10.2.3) ҳосил мекунем:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} rdr = 2\int_0^{\pi/4} r^2\Big|_0^{\alpha\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = 2\int_0^{\pi/4} a^2 \sin 2\theta \, d\theta =$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2a\,d\theta = -2a^2\frac{\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/4} = -a^2\cos 2\frac{\pi}{4} + a^2\cos 0 = a^2$$

Мисоли 10.2.3. Ҳаҷми ҷисме, ки бо сатҳи

$y=x^2,\ y=1,\ x+y+z=4,\ \ z=0$

маҳдуд карда шудааст, ёфта шавад.

Ҳал. Ҷисми додашуда силиндри вертикалӣ мебошад, ки бо ҳамвории xoy, ки бо параболаи $y=x^2$, хати рости $y=1$ маҳдуд гаштааст, иҳота карда шудааст.

Формулаи (10.2.4)-ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$V = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(4-x-y)dx = \int_0^1\left(4x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy = \int_0^1(4-y)2\sqrt{y}\,dy =$$

$$= \int_0^1\left(8\sqrt{y}-2y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \left(\frac{16}{3}y^{\frac{3}{2}}-2\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = 4\left(4\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{68}{15}.$$

Мисоли 10.2.4. Ҳаҷми ҷисме, ки бо сатҳҳои $z=4-x^2-y^2$ ва $2z = 2+x^2+y^2$ маҳдуд гаштааст, ёфта шавад.

Ҳал. Ҳаҷми ҷисми додашударо ҳамчун фарқи ҳаҷми ду ҷисм ёфтан мумкин аст:

$$V = V_1 - V_2 = \iint_D(4-x^2-y^2)dxdy - \frac{1}{2}\iint_D(2+x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \frac{3}{2}\iint_D(2-x^2-y^2)dxdy$$

Барои осон шудани ҳал ба системаи координатаи қутбӣ мегузарем: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rd\varphi dr$ мешавад.

Аз баробариҳои $z = 4 - x^2 - y^2$ ва $2z = 2 + x^2 + y^2$, z -ро хориҷ намуда ҳосил мекунем: $x^2 + y^2 = 2$. Аз ин ҷо $z^2 = 2$, $z = \pm\sqrt{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ аст.

Бинобар ин,

$$V = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)dr = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \frac{3}{4}\cdot 2\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 3\pi .$$

Мисоли 10.2.5. Масоҳати қисми конуси $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ки бо силиндрӣ $x^2 + y^2 = 2x$ маҳдуд гаштааст, ёфта шавад.

Ҳал. Муодилаи конусро дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Соҳаи интегронӣ доирае мебошад, ки бо давраи $x^2 + y^2 = 2x$ маҳдуд гаштааст. Он гоҳ дар асоси формулаи (10.2.5), ҳосил мекунем

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}dxdx = \sqrt{2}\iint_D dxdy .$$

Дар баробарии охирон ба системаи координатаи қутбӣ гузашта, пайдо мекунем

$$S=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}rdr=2\sqrt{2}\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}r^2\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=2\sqrt{2}\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}4\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=2\sqrt{2}\int_{0}^{\pi/2}(1+\cos2\theta)d\theta=2\sqrt{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\pi.$$

Мисоли 10.2.6. Масоҳати қисми фигураи $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=\varphi$, $0<r<\alpha$, $0<\varphi<2\pi$ ёфта шавад.

Ҳал. Дар ин мисол ба ҷои тағйирёбандаҳои u ва v тағйирёбандаҳои r ва φ омадаанд. Барои ҳалли ин мисол аз формулаи (10.2.6) истифода мебарем:

$$x'_r=\cos\varphi,\qquad x'_\varphi=-z\sin\varphi,$$

$$y'_r=\sin\varphi,\qquad y'_\varphi=z\cos\varphi,$$

$$z'_r=0,\qquad z'_\varphi=1.$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$E=(x'_r)^2+(y'_r)^2+(z'_r)^2=1,\quad G=(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2+(z'_\varphi)^2=r^2+h^2,$$

$$F=x'_z\cdot x'_\varphi+y'_z\cdot y'_\varphi+z'_2\cdot z'_\varphi=-z\cos\varphi\cdot\sin\varphi+z\sin\varphi\cdot\cos\varphi=0.$$

Ифодаҳои ҳосилшударо дар (10.2.6) гузошта, ҳосил мекунем:

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sqrt{r^2+h^2}dr=\pi\left[r\sqrt{r^2+h^2}+h^2\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)\right]\Big|_0^{\alpha}=$$

$$=\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)$$

Мисоли 10.2.7. Координатаҳои маркази вазнинии фигураеро, ки бо эллипси $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ва хати рости $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ маҳдуд гаштааст, ёбед.

Ҳал. Аввал масоҳати ин фигураро меёбем:

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^5 dx\int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} dy=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3+\frac{3}{5}x\right)dx=\frac{15\pi-30}{4}=\frac{15}{4}(\pi-2)$$

Он гоҳ аз формулаи (10.2.7) истифода мебарем:

$$x_0=\frac{1}{S}\iint_D xdxdy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5 xdx\int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{2}\sqrt{25-x^2}} dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\frac{x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left(25-\frac{75}{2}+25\right)=\frac{10}{3(\pi-2)}.$$

Айнан y_0-ро меёбем:

$$y_0=\frac{1}{S}\iint_D ydxdy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5 dx\int_{3\left(1-\frac{x}{5}\right)}^{\frac{3}{2}\sqrt{25-x^2}} dy=\frac{4}{2\cdot 15(\pi-2)}\int_0^5\left[\frac{9}{5}(25-x^2)-9(1-x^2)-9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{9}{15(\pi-2)\cdot 25}\int_0^5(5x-x^2)dx=\frac{12}{125(\pi-2)}\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}\right]\Bigg|_0^5=$$

$$=\frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{2}{\pi-2}.$$

Мисоли 10.2.8. Лаҳзаҳои статикии лавҳачаи якҷинсаи бо хатҳои $y=x^2$, $x+y=2$ ва $y=0$ маҳдудгаштаро ҳисоб кунед.

Ҳал. Азбаски лавҳача якҷинса мебошад, бинобар ин, зичии он $\rho(x,y)=1$ мешавад.

Аз формулаҳои (10.2.8) истифода мебарем:

$$M_x=\iint_D y\rho(x,y)dxdy=\iint_D ydxdy=\int_0^1 ydy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}dx=$$

$$=\int_0^1 y\left(2-y-\sqrt{y}\right)dy=\left(y^2-\frac{y^3}{3}-\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$$M_y=\iint_D xdxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}xdx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(4-4y+y^2\right)dy=\frac{1}{2}\left(4y-\frac{5}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{12}.$$

Пас $M_x=\frac{4}{15}$, $M_y=\frac{11}{12}$ мебошанд.

Мисоли 10.2.9. Лаҳзаи инертсияи фигурае, ки бо хатҳои $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$, $x=0, y=0$ маҳдуд гаштааст, нисбат ба ибтидои координата ёфта шавад.

Ҳал. Формулаи лаҳзаи инертсияро нисбат ба ибтидои координата (10.2.11) истифода мебарем:

$$J_0=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{\frac{a}{b}(a-x)}\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{\frac{b}{a}(a-x)}dx=\int_0^a\left[\frac{b}{a}(a-x)\cdot x^2+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\right]\Bigg|_0^a=\frac{ab\left(a^2+b^2\right)}{12}.$$

§ 3. Интеграли секарата

1. Мафҳуми интеграли секарата ва ҳисоб кардани он. Интеграли секарата аз функсияи $f(x,y,z)$ гуфта ҳудуди охирноки суммаи

$\sum\limits_i\sum\limits_j\sum\limits_k f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$ -ро дар ҳолати калонтарин аз

Δx_i , Δy_j, Δz_k ба сифр майл намуданро меномем ва чунин ишора мекунем:

$$\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}}\sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k=\iiint\limits_{(V)}f(x,y.z)dxdydz$$

дар ин ҷо V-ҳаҷме мебошад, ки дар он функсияи $f(x,y,z)$ дода шудааст.

Бигузор, V-параллелопипеди рост бо теғҳои $x_1\le x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$ ва $z_1\le z\le z_2$ бошад. Он гоҳ интеграли секарата бо формулаи

$$\iiint\limits_{(V)}f(x,y,z)dxdydz=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1}^{z_2}f(x,y,z)dz$$

ҳисоб карда шавад.

Агар ҳаҷми ихтиёрии V-бо нобаробариҳои $x_1\le x\le x_2$,

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$ муайян карда шавад, ки дар ин ҷо $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ -функсияҳои бефосила мебошанд. Он гоҳ интеграли секарата аз рӯи ҳаҷми V чунин ҳисоб карда мешавад

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \quad (10.3.1.)$$

Агар $x = x(\zeta,\eta,\xi)$, $y = y(\zeta,\eta,\xi)$, $z = z(\zeta,\eta,\xi)$,

дода шуда бошанд, он гоҳ чунин формулаи иваз намудани тағйирёбанда дар интеграли секарата ҷой дорад:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(\Delta)} f[x(\zeta,\eta,\xi), y(\zeta,\eta,\xi), z(\zeta,\eta,\xi)]|J|d\zeta d\eta d\xi, \quad (10.3.2)$$

$$J(\zeta,\eta,\xi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Дар ҳолати хусусӣ агар ба координатаҳои сферикӣ

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\cos\theta$ гузарем, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,dr \qquad (10.3.3)$$

2.Татбиқи интеграли секарата. Ҳаҷми ҷисми T бо формулаи

$$V = \iiint_{(T)} dxdydz \qquad (10.3.4)$$

ҳисоб карда мешавад.

Агар зичии ҷисми T, $\rho = \rho(x, y, z)$ дода шуда бошад, он гоҳ массаи ҷисм бо формулаи

$$M = \iiint_{(T)} \rho(x, y, z) dxdydz \qquad (10.3.5)$$

ҳисоб карда мешавад.

Координатаҳои маркази вазнинии ҷисми T бо формулаҳои

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_T x\rho dxdydz \quad , \quad y_0 = \frac{1}{M} \iiint_T y\rho dxdydz \quad ,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \iiint_T z\rho dxdydz \qquad (10.3.6)$$

ҳисоб карда мешаванд.

Дар ҳолати хусусӣ, агар $\rho = 1$ бошад, он гоҳ формулаҳои (10.3.8) чунин намудро мегиранд:

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_T xdxdydz \quad , \qquad y_0 = \frac{1}{M} \iiint_T ydxdydz \quad ,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \iiint_T zdxdydz \quad . \qquad (10.3.7)$$

Лаҳзаи инертсия нисбат ба тирҳои координата бо формулаҳои зерин:

$$J_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,dxdydz \;,$$

$$J_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,dxdydz \;, \qquad (10.3.8)$$

$$J_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,dxdydz \;,$$

ҳисоб карда мешавад.

Мисоли 10.3.1. Интеграли секаратаи $\iiint_T (x + y + z)dxdydz$ -ро ҳисоб кунед, агар V- параллелопипеди $V = [0, a; 0, \mathrm{b}; 0, \mathrm{c}]$ бошад.

Ҳал. Аз формулаи (10.3.2) истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\iiint_T (x + y + z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z)dx =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^c = \int_0^a dx \int_0^b \left(cx + cy + \frac{1}{2}c^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^a dx \left(cxy + \frac{c}{2}y^2 + \frac{c^2}{2}y \right)\Bigg|_0^b = \int_0^a \left(bcx + b^2c\frac{1}{2} + \frac{1}{2}bc^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^a \left(bc\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}b^2cx + \frac{1}{2}bc^2x \right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{2}abc(a + b + c).$$

Мисоли 10.3.2. Интеграли секаратаи $J = \iiint_{(V)} x^3y^2zdxdydz$ -ро ҳисоб кунед, агар ҳаҷми V бо нобаробариҳои $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$,

$0 \le z \le xy$ муайян карда шуда бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (10.3.1) ҳисоб мекунем:

$$V = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 \mathrm{z}d\mathrm{z} = \int_0^1 dx \int_0^x x^3 y^2 \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{xy} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^4 dy =.$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{10}\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^1 = \frac{1}{110}$$

Мисоли 10.3.3. Ба системаи координатаи сферикӣ гузашта, интеграли $J = \iiint\limits_{(V)} x^2 dxdydz$ -ро ҳисоб кунед, агар V- кураи $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ бошад.

Ҳал. Ба системаи координатаи сферикӣ гузашта, дар асоси формулаи (10.3.3) ҳосил мекунем:

$$I = \oiiint\limits_{V} r^2 \cdot r^2 \sin^3\theta \cos^2\varphi \; drd\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2} \cos^2 d\varphi \int_0^{r} r^4 dr =$$

$$= \frac{R^5}{10}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}\left(\cos^2\theta - 1\right)d\left(\cos\theta\right) = .$$

$$\frac{\pi R^5}{5}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi R^5}{15}$$

Мисоли 10.3.4. Интеграли секаратаи

$$J = \iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

-ро ҳисоб кунед, агар соҳаи интегронӣ бо сатҳҳои $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$ маҳдуд бошад.

Ҳал. Ҷисми V- бо сатҳи $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ва қисми ҳамвории $z=1$ маҳдуд гаштааст, ки сояи он дар ҳамвории oxy доираи $x^2+y^2\le 1$ мебошад.

Акнун ба системаи координатаи силиндрикӣ мегузарем: $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\cos\varphi,\ \ z=r.$

Пас, интеграли секаратаи додашуда чунин ҳисоб карда мешавад:

$$J(\rho,\varphi)=\rho d\varphi d\rho\ ,\ x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi\ ,\ z=r.$$

$$\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho\int_\rho^1 dz=$$

$$=2\pi\int_0^1\rho^2(1-\rho)d\rho=\frac{\pi}{6}.$$

Мисоли 10.3.5. Ҳаҷми ҷисме, ки бо сатҳҳои $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$ маҳдуд гаштааст, ҳисоб карда шавад.

Ҳал. Аз формулаи (10.3.4) истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$V=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}dy\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)}dz=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy=$$

$$=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\left(\frac{4x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7\cdot 3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=\frac{23}{105}$$

Мисоли 10.3.6. Масссаи пирамидаи бо ҳамвориҳои координата ва ҳамвории $x+y+z=1$ маҳдудгаштаро ҳисоб кунед, агар зичиаш $\rho(x,y,z)=x+y+z$ бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (10.3.5) пайдо мекунем:

$$M=\iiint_T (x+y+z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+y)(1-x-y)+\frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[x+y-x^2-2xy-y^2+\frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy=$$

$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}-\frac{1}{6}(1-x-y)^2\right]\Bigg|_0^{1-x}dx$$

$$\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2-x^2(1-x)-x(1-x)^2-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(1-x)^3\right]dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int_0^1(1-x-1+x)^3dx+\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}(1-x)^3-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{12}(1-x)^4-\frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1\right]=$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

Мисоли 10.3.7. Координатаҳои маркази вазнинии ҷисме, ки бо ҳамвориҳои $x=0, z=0, y=1, y=3, x+2z=3$ маҳдуд карда шудааст, ёфта шаванд.

Ҳал. Аввал ҳаҷми ҷисми додашударо меёбем:

$$V=\iiint_T dxdydz=\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}}dz=\int_0^3 dx\int_0^3\frac{3-x}{2}dy=4{,}5$$

Он гоҳ дар асоси (10.3.7) ҳосил мекунем:

$$x_0 = \frac{2}{9}\iiint_{(T)} xdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 xdx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} dz = \frac{2}{9}\int_0^3 xdx\int_1^3 \frac{3-x}{2}dy =$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^3 x(3-x)dx = 1,$$

$$y_0 = \frac{2}{9}\iiint_{(T)} ydxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 ydy\int_0^{\frac{3-x}{2}} dz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y(3-x)dy =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^3 (3-x)dx = 2,$$

$$z_0 = \frac{2}{9}\iiint_{(T)} zdxdydz = \frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} zdz = 0,5.$$

Мисоли 10.3.8. Лаҳзаи инерсияи ҷисми якҷинсаеро, ки бо сатҳҳои $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x + y = \pm 1, z = 0$ маҳдуд карда шудааст, нисбат ба тири oz муайян кунед.

Ҳал. Дар асоси формулаи (10.3.8) пайдо мекеунем:

$$J_z = \iiint_{(T)} (x^2 + y^2)dxdydz = 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)dz =$$

$$= 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)^2 dy = 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= 4\int_0^1 \left[x^4(1-x) + \frac{2x^2}{3}(1-x)^3 + \frac{1}{5}(1-x)^3 + \frac{1}{5}(1-x)^5\right]dx = \frac{14}{45}$$

Кори мустақилонаи 10.1.1.

1. Интеграли такрорӣ ҳисоб карда шавад:

а) $\int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+y)dy$, б) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} \frac{xdy}{x^2+y^2}$.

2. Интеграл ҳисоб карда шавад:

а) $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dxdy$, агар D –росткунҷаи $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$ бошад.

б) $\iint_D (3x^2 - 2xy + y)dxdy$, агар D бо хатҳои $x = 0, x = y^2, y = 2$ маҳдуд гашта бошад.

3. Тартиби интегрониро иваз кунед:

а) $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$; б) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$.

Кори мустақилонаи 10.1.2.

1.Ба системаи координатаи қутбӣ гузашта, интегралҳои дукаратаи зеринро ҳисоб кунед:

а) $\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy$, агар соҳаи D доираи $x^2 + y^2 \le \pi^2$ бошад.

б) $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, агар D бо давраи $x^2 + y^2 = 2\alpha x$ маҳдуд карда шуда бошад.

2. Интеграли $\iint\limits_D \dfrac{x^2 \sin \dfrac{xy}{2}}{y} dxdy$ ҳисоб карда шавад, агар соҳаи D бо чор параболаҳои $x^2 = \dfrac{\pi y}{3}$, $x^2 = \dfrac{2\pi y}{3}$, $y^2 = 2x, y^2 = 4x$ маҳдуд карда шуда бошад.

3. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

а) $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, агар D-соҳаи бо параболаҳои $y = x^2, y^2 = x^2$ маҳдудкарда бошад.

б) $\iint\limits_D \cos(x + y) dxdy$, агар D соҳаи бо хатҳои $x = 0, y = \pi, y = x$ маҳдудгашта бошад.

Кори мустақилонаи 10.2.1.

1. Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои зерин маҳдуд гаштааст, ёфта шавад:

а) $y^2 = 4x - x^2$, $y^2 = 2x$ б) $x^3 + y^3 = \alpha xy$

2. Масоҳати он ҳиссаи лемнисткатаи $(x^2 + y^2) = 2\alpha^2 (x^2 - y^2)$-ро, ки бо давраи $x^2 + y^2 = \alpha^2$ бурида мешавад, ҳисоб кунед.

3. Ҳаҷми ҷисме, ки бо сатҳҳои $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$ маҳдуд гаштааст , ёфта шавад.

4. Ҳаҷми ҷисме, ки бо сатҳҳои $2\alpha z = x^2 + y^2$, $x^2 + 4^2 - z^2 = \alpha^2$, $z = 0$ маҳдуд гаштааст, ёфта шавад.

5. Масоҳати қисми сатҳи параболоиди $y^2 + z^2 = 2\alpha x$, ки байни силиндри $y^2 = \alpha x$ ва ҳамвории $x=\alpha$ маҳдуд аст, ёфта шавад.

6. Масоҳати сатҳи силиндрӣ $x^2 = 2z$, ки бо ҳамвориҳои $x-2y=0$, $y=2x$, $x = 2\sqrt{2}$ бурида шудааст, ҳисоб карда шавад.

Кори мустақилонаи 10.2.2.

1. Координатаҳои маркази вазнинии фигурае, ки бо хатҳои $y^2 = 4x+4$, $y^2 = -2x+4$ маҳдуд гаштааст, ёфта шавад.

2. Маркази вазнинии фигурае, ки бо хатҳои зерин маҳдуд гаштааст, ёфта шавад:

а) $y^2 = x,\ x^2 = y$, б) $y^2 = 2\rho x,\ \ y = 2x$.

3. Лаҳзаи статикии фигурае, ки бо синусоидаи $y = \sin x$ ва хати рости ОА маҳдуд гаштаст нисбат бо тирҳои координат ёфта шавад (ОА аз ибтидои координат ва нуқтаи $A\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ мегузарад).

4. Лаҳзаи инертноки масоҳате, ки бо хатҳои $y = 2\sqrt{x}$, $x+y=3$, $y=0$ маҳдуд гаштааст, нисбат ба тири ox ҳисоб кунед.

5. Лаҳзаи инертнокии масоҳате, ки бо хатҳои рости $x+y=2$, $x=0,\ y=0$ маҳдуд гаштааст, нисбат ба ибтидои координата ҳисоб карда шавад.

6. Лаҳзаи инертнокии масоҳате, ки бо эллипс ва $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ маҳдуд гаштааст нисбат ба тири калони ин эллипс ҳисоб карда шавад.

Кори мустақилонаи 10.3.1.

1. Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$, б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz$.

2. Ба системаи координатаи сферикӣ гузашта, интеграли

$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ -ро ҳисоб кунед, агар V-қисми дохилии кураи $x^2+y^2+z^2 \le z$ бошад.

3. Ҳаҷми ҷисме, ки бо сатҳҳои $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$ маҳдуд карда шудааст, ёфта шавад.

4. Координатаҳои маркази вазнинии ҷисмеро, ки бо сатҳҳои $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$ маҳдуд гаштааст, ёбед.

5. Лаҳзаи инерсияи ҷисми якҷинсае, ки бо сатҳҳои $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=z^2$, (z>0) махдуд гаштааст, нисбат ба тири Oz ҳисоб карда шавад.

Ҷавобҳо

К.М.10.1.1.

1. а) $2\frac{2}{3}$, б) $\frac{\pi}{6}$. 2. а) $(e-1)(e^x-1)$, б) $\frac{244}{21}$.

3. а) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx + \int\limits_0^8 dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{8-y} f(x,y)dx$, б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx$.

К.М.10.1.2.

1\. а) $2\pi^3$. б) $\frac{3}{2}\pi\alpha^4$. 2. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3. а) $\frac{33}{140}$. б) -2.

К.М.10.2.1.

1\. а) $2\pi-\frac{16}{3}$. б) $\frac{\alpha^2}{6}$. 2. $\alpha^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$. 3. $\frac{25}{3}$. 4. $\frac{\pi\alpha^3}{3}$.

5\. $\frac{\pi\alpha^2}{3}(3\sqrt{3}-1)$. 6. 13 .

К.М.10.2.2.

1\. $S=8$. $x_\circ=\frac{2}{5}, y_\circ=0$. 2. а) $x_\circ=y_\circ=\frac{9}{20}$, б) $x_\circ=\frac{6}{3}$, $y_\circ=0$.

3\. $\mu_x=\frac{\pi}{24}$, $\mu_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. 4. 2,4 . 5. $\frac{8}{3}$. 6. $\frac{\pi\alpha в^3}{4}$.

К.М.10.3.1.

1\. а) $\frac{8}{15}\left(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3}\right)$, б) $\frac{\sqrt{2}}{3}4\pi$. 2. $\frac{\pi}{10}$. 3. $\frac{\pi}{6}$.

4\. $x_\circ=y_\circ=3, z_\circ=\frac{45}{32}$. 5. $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.

БОБИ XI. Интегралҳои ғайрихос

§ 1. Интегралҳои ғайрихоси ҷинси як ва ду

Интегралҳое, ки ҳудуди интегрониашон беохир ё функсияҳои зериинтегралиашон канишнок мебошанд, интеғралҳои ғайрихос номида мешаванд.

Интегралҳои ғайрихос ду намуд мешаванд: интегралҳои ғайрихоси ҷинси якум ва дуюм.

1. **Интеграл бо ҳудуди беохир.** Интеграл бо ҳудуди беохир бо ёрии амали ҳудудӣ муайян карда мешавад. Агар функсияи $f(x)$ дар ниминтевали $\alpha \leq x \leq \infty$ бефосила бошад, он гоҳ чунин навишта мешавад:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx \qquad (11.1.1)$$

Агар ҳудуди тарафи рости (11.1.1) мавҷуд ва охирнок бошад, интеграли ғайрихоси ҷинси якум наздикшаванда мебошад, дар ҳолати муқобил дуршаванда аст.

Айнан вобаста аз интервалҳои интегронӣ интегралҳои ғайрихоси ҷинси якум чунин навишта мешаванд:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx, \qquad (11.1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx. \qquad (11.1.3)$$

2. **Интеграли ғайрихоси ҷинси дуюм.** Агар функсияи $f(x)$ дар нуқтаи ε–и порчаи $[\alpha;b]$ каниш дошта бошад ва дар ҳолати $\alpha \leq x < c$,

$c < x \leq в$ бефосила бошад, пас интеғрали ғайрихоси ҷинси дуюм чунин муайян карда мешавад:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta_1 \to 0} \int_{\alpha}^{c-\eta_1} f(x)dx + \lim_{\eta_2 \to 0} \int_{c+\eta_2}^{b} f(x)dx \qquad (11.1.4)$$

Агар ҳудуди тарафи рости (11.1.4) мавҷуд ва охирнок бошад, он гоҳ интеграли ғайрихоси ҷинси дуюм наздикшаванда номида мешавад, дар ҳолати муқобил дуршаванда аст.

Агар барои функсияи $f(x)$ дар ниминтервали $\alpha \leq x < c$ функсияи ибтидоии $f(x)$ мавҷуд бошад, пас,

$$\int_{\alpha}^{c-\eta_1} f(x)dx = F(c-\eta_1) - F(\alpha).$$

Мавҷудияти интеграли ғайрихоси (11.1.4) баробарқувва аст ба мавҷудияти ҳудуди функсияҳои $F(c-\eta_1)$ ва $F(c+\eta_2)$, дар ҳолати $\eta_1 \to 0$ ва $\eta_2 \to 0$ будан.

§ 2. Интеграли ғайрихос ба маънои сарқимат

Бигузор функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a;b]$ дода шуда бошад ва дар як нуқтаи дилхоҳи c каниш дошта бошад. Он гоҳ интеграли ғайрихос дар қисмҳои порчаи $[a;b]$, ки нуқтаи c -ро дар бар намегирад, бо формулаи (11.1.4) муайян карда мешавад. Дар баъзе ҳолатҳо ин ҳудуд метавонад вуҷуд надошат бошад, дар ин ҳолат қулай аст, ки ҳудуди ифодаи (11.1.4)-ро ҳангоми $\eta_1 = \eta_2 \to 0$ будан ҳисоб кунем. Агар дар ин ҳолат ҳудуд мавҷуд бошад, он гоҳ мегӯянд, ки интеграли ғайрихос бо маънои сарқимат вуҷуд дорад ва он чунин ишора карда мешавад:

$$V.P.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^{b}(x)dx\right) \qquad (11.2.1)$$

Интеграли ғайрихоси ҷинси якум ба маънои сарқимат чунин ифода карда мешавад:

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx. \qquad (11.2.3)$$

Агар $f(x)$ функсияи тоқ бошад, он гоҳ $V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$, дар ҳолати ҷуфт будани функсияи $f(x)$ ҳосил меекунем:

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int_{0}^{A} f(x)dx. \qquad (11.2.4)$$

Мисоли 11.1.1. Интеграли ғайрихосро ҳисоб кунед:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx.$$

Ҳал. Дар асоси формулаи (11.1.1) ҳосил мекунем:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{-1}\right) = \frac{1}{e} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = \frac{1}{e}.$$

Мисоли 11.1.2. Хосияти интегралро истифода бурда, интеграли ғайрихоси зеринро ҳисоб кунед:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Ҳал. Дар асоси таърифи интеграли ғайрихоси ҷинси якум (11.1.3) ҳосил мекунем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Интеграли дар зери ҳудуд бударо барои ҳисоб кардан аз формулаи реккуриеентӣ истифода мебарем:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Аз ин ҷо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_a^b=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\frac{2b+1}{3\left(b^2+b+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2b+1}{\sqrt{3}}-\frac{2a+1}{3\left(a^2+a+1\right)}-\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[\frac{\frac{2}{b}+\frac{1}{b^2}}{3\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2a+1}{\sqrt{3}}-\frac{\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}{3\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Мисоли 11.1.3. Интеғрали ғайрихосро ҳисоб кунед:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

Ҳал. Функсияи зериинтегралӣ дар нуқтаи $x=1$ каниш дорад, ки дар дохили порчаи интегронӣ мехобад. Бинобар ин, дар асоси формулаи (11.1.4) ҳосил мекунем:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\lim_{\eta_1\to 0}\int_{-1}^{1-\eta_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\eta_2\to 0}\int_{1+\eta_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$$

$$=3\lim_{\eta_1\to 0}\sqrt[3]{(x-1)}\Big|_{-1}^{1-\eta}+\lim_{\eta_2\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1-\eta_2}^{2}=3\lim_{\eta_1\to 0}\left(\sqrt[3]{-\eta_1}-\sqrt[3]{-2}\right)+$$
$$+3\lim_{\eta_2\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\eta_2}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$$

Мисоли 11.1.4. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

Ҳал. Бо ёрии гузориш интегралро ҳисоб мекунем:

$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{b\to 0}\int_0^{1-b}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\begin{vmatrix}1-x=t^2\\ dx=-2tdt\end{vmatrix}=$$

$$\lim_{b=0}2\int_b^1\frac{dt}{1+t^2}=2\cdot\lim_{b=0}arctgt\Big|_b^1=\lim_{b=0}2\cdot\left(arctg1-arctg\,b\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Мисоли 11.1.5. Наздикшавии интегралро тадқиқ кунед:

$$\int_0^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

Ҳал. Дар асоси аломати муқоисакунӣ интеграли мазкурро тадқиқ мекунем:

$$f(x)=\frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}\le\frac{1}{x\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}=g(x)$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} \le \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-\frac{5}{3}}}{1-\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(e^{-\frac{2}{3}}-1\right) = \frac{3}{2}.$$

Интеграли додашуда наздикшаванад мебошад.

Мисоли 11.2.1. Интеграли додашударо бо маънои сарқимат ҳисоб кунед:

$$V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Ҳал. Дар асоси формулаи (11.2.1) ҳосил мекунем:

$$V\cdot P\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\eta\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\eta}\frac{dx}{x\ln x} + \lim_{\eta\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\eta\to 0}\ln|\ln x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\eta} + \lim_{\eta\to 0}\ln|\ln x|\Big|_{1-\eta}^{2} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\ln\left|\frac{\frac{1}{\eta}\ln(1-\eta)}{\frac{1}{\eta}\ln(1+\eta)}\right| = \lim_{\eta\to 0}\ln\left|\frac{-1}{1}\right| = 0.$$

Мисоли 11.2.2. Интеграли ғайрихосро ҳисоб кунед:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}.$$

Ҳал. Азбаски функсияи зеринтегралӣ ҷуфт мебошад, бинобар ин, (11.2.4)-ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}2\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}=2\lim_{b\to\infty}arctg\,x\Big|_0^b=2\lim_{b\to\infty}(arctg\,b-arctg\,0)=$$

$$=2arctg(\infty)-2arctg\,0=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Кори мустақилонаи 11.1.1.

1. Интеграли ғайрихосро ҳисоб кунед:

а) $\int_0^{\infty}e^{-\kappa x}dx$ (к>0), б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$,

в) $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ (α>1), г) $\int_0^{\infty}xe^x dx$.

2. Интеграли ғайрихос аз функсияи номаҳдудро ҳисоб кунед:

а) $\int_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$, б) $\int_2^3\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2-4)}}$, в) $\int_0^1\frac{dx}{x^3-5x^2}$.

Кори мустақилонаи 11.2.1

1. Наздикшавии интегралро тадқиқ кунед:

а) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$, б) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$, в) $\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

2. Интегралҳои зеринро ба маънои сарқимат ҳисоб кунед:

а) $\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ (α<c<β), б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$, в) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Ҷавобҳо

К.М.11.1.1.

1. а) $\frac{1}{k}$. б) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. в) $\frac{1}{\ln\alpha}$. г) -1.

2. а) $6\sqrt[3]{2}$. б) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. в) дуршаванда.

К.М.11.2.1.

1. а) наздикшаванда. б) наздикшаванда. в) дуршаванда.

2. а) $\ln\frac{b-c}{c-\alpha}$. б) π. в) $-\ln 2$.

Боби XII. Интегралҳои качхатта ва сатҳӣ

§ 1. Интегралҳои качхатта

Интегралҳои качхатта ду намуд мешаванд. Интеграли качхаттаи ҷинси якум ва интеграли качхаттаи ҷинси дуюм.

1.**Интеграли качхаттаи ҷинси якум.** Бигузор, функсияи $f(x,y)$ дар қади хати качи суфтаи К дода шуда бошад.

Камони $\breve{AB}$-ро бо ёрии нуқтаҳои $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ ба $n-$қисм ҷудо мекунем ва ΔS_k дарозии камончаи $\breve{A_{k-1}A_k}$ бошад. Акнун суммаи интегралӣ тартиб медиҳем:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k \,. \qquad (12.1.1)$$

Интеграли качхаттаи ҷинси якум гуфта ҳудуди суммаи (12.1.1)-ро дар ҳолати $\max \Delta S_k \to 0$ меномем ва онро чунин ишора мекунем:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k \,.$$

Бигузор, муодилаи хати качи (К) ба намуди ошкор дода шуда бошад-$y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, он гоҳ интеграли качхаттаи ҷинси якум бо формулаи

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)]\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\, dx \qquad (12.1.2)$$

ҳисоб карда мешавад.

Агар муодилаи хати кач ба намуди параметрӣ дода шуда бошад, яъне $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$, он гоҳ интеграли качхатта бо формулаи

$$\int_K f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta [\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (12.1.3)$$

ҳисоб карда мешавад.

Дар ҳолати муодилаи хати качро, дар системаи координатаи қутбӣ дода шудан, интеграли качхатта бо формулаи

$$\int_k f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi \qquad (12.1.4)$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ мебошанд.

2. **Интеграли качхаттаи ҷинси дуюм.** Бигузор, дар қади хати качи К функсияҳои бефосилаи $P(x,y)$ ва $Q(x,y)$ дода шуда бошанд.

Суммаи интегралӣ тартиб медиҳем:

$$S=\sum_{k=1}^{n}[p(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k], \qquad (12.1.5)$$

ки дар ин ҷо Δx_k ва Δy_k -проектсияи камончаи $\breve{A_{k-1}A_k}$ дар тирҳои ох ва оу мебошанд. Ҳудуди охирноки ифодаи (12.1.5)-ро интеграли качхаттаи ҷинси дуюм меномем ва онро чунин ишора мекунем:

$$J=\int_k P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (12.1.6)$$

Дар ҳолати ба намуди ошкор ва ба намуди параметрӣ дода шудани муодилаи хати каҷ, интеграли каҷхаттаи ҷинси дуюм мувофиқан бо формулаҳои зерин:

$$\int_{k} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} \{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx \qquad (12.1.7)$$

$$\int_{k} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\psi'(t)\}dt \qquad (12.1.8)$$

ҳисоб карда мешаванд.

3. **Аз роҳи интегронӣ новобастагии интеграли каҷхатта.** Бигузор, функсияҳои $P(x,y)$ ва $Q(x,y)$ дар соҳаи якалоқаи D ҳосилаҳои бефосилаи тартиби якро дошта бошанд ва хати каҷ пурра дар соҳаи D хобад.

Шарти зарурӣ ва кифоягии аз роҳи интегронӣ новобаста будани интеграли каҷхатта дар соҳаи D чунин аст:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (12.1.9)$$

Агар шарти (12.1.9) иҷро шавад, он гоҳ интеграли аз рӯи хати каҷи сарбасти пурра дар соҳаи D хобанда баробари сифр мебошад:

$$\oint_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Бо шартҳои дар боло овардашуда ифодаи зеринтегралии $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ дифференсиали пурраи ягон функсияи якқиматаи $u = \varphi(x,y)$ мешавад, яъне

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Дар ин ҳолат функсия $u(x,y)$ бо формулаи

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C \qquad (12.1.10)$$

муайян карда мешавад.

Мисоли 12.1.1. Интеграли каҷхаттаи $\int_K (x-y)ds$ ҳисоб карда шавад, агар K - порчаи хати рост аз нуқтаи $A(0,0)$ то нуқтаи $B(4;3)$ бошад.

Ҳал. Муодилаи хати рости AB чунин намуд дорад:

$y=\frac{3}{4}x$ аз ин ҷо $y'=\frac{3}{4}$ ҳосил мешавад. Аз формулаи (12.1.2) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\int_K (x-y)ds=\int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx=\frac{5}{16}\int_0^4 xdx=\frac{5}{32}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{32}(16-0)=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Мисоли 12.1.2. Интеграли каҷхаттаи $\int_K \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)ds$ ҳисоб карда шавад, агар муодилаи хати каҷи K ба намуди параметрии $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $\left(\frac{\pi}{2}\le t\le\pi\right)$ дода шуда бошад.

Ҳал. Аз (12.1.3) истифода бурда, интеграли мазкурро ба интеграли оддии муайян оварда мешавад:

$$dx=-3\cos^2 t\sin t dt\,,\quad dy=3\sin^2 t\cos t dt$$

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=3|\sin t\cos t\,|dt=3\sin t\cos t\,dt,$$

$$\int_K (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})ds = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t})3\sin t\cos t dt =$$

$$= -12\int_{\pi}^{\pi/2} \cos^2 t d(\cos t) - 9\int_{\pi}^{\pi/2} \sin^{\frac{5}{2}} t d(\sin t) = -4\cos^3 t\Big|_{\pi}^{\pi/2} - \frac{18}{7}\sin^{\frac{5}{2}} t\Big|_{\pi}^{\pi/2} =$$

$$= -4 - \frac{18}{7} = -\frac{46}{7} = -6\frac{4}{7}$$

Мисоли 12.1.3. Интеграли каҷхаттаро ҳисоб кунед, агар хати каҷи К, периметри секунҷаи $A(-1;0)$, $B(0;2)$ ва $C(2;0)$ бошад:

$$\oint 2xdx - (x+2y)dy$$

Ҳал. Роҳи интегронӣ аз се порчаи хати шикаста иборат мебошад. Интеграл аз рӯи ин хати шикаста ба суммаи се интеграл аз рӯи порчаҳои AB, BC ва CA баробар мешавад. Аввало муодилаи хати рости AB-ро тартиб медиҳем $y = 2 + 2x$, $dy = 2dx$, он гоҳ

$$\int_{AB} 2xdx - (x+2y)dy = -8\int_{-1}^{0}(x+1)dx = -4(x+1)^2\Big|_{-1}^{0} = -4$$ мешавад.

Айнан интеграли каҷхаттаро дар порчаҳои BC ва CA ҳисоб мекунем:

$$y = 2 - x,\quad dy = -dx,\quad \int_{BC} 2xdx - (x+2)dy =$$

$$= \int_{BC} 2xdx - (x+2)dy = \int_{2}^{0}(y-6) = \frac{(y-6)^2}{2}\Big|_{2}^{0} = 10,\quad y = 0,\quad dy = 0,$$

$$CA:\ 2\int_{2}^{-1} xdx = x^2\Big|_{2}^{-1} = 1 - 4 = -3,$$

ҳамаи интегралҳоро ҷамъ намуда ҳосил мекунем:

$$\oint_{ABCA} 2xdx-(x+2)dy = \int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA} = -4+10-3=3$$

Мисоли 12.1.4. Интеграли каҷхаттаи ҷинси дуюми

$$\int_k x^2ydy-y^2xdx \text{ -ро}$$

ҳисоб кунед, агар $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$ $\quad (0\le t\le \frac{\pi}{2})$ бошад.

Ҳал. Аз формулаи (12.1.7) истифода бурда, интеграли додашударо ҳисоб мекунем:

$$dx=-\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}dt; \qquad dy=-\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}dt,$$

$$=\int_K x^2ydy-y^2xdx=\int_0^{\pi/2}\left(\cos t\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}+\sin t\sqrt{\cos t}\,\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{1}{2}\,t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Мисоли 12.1.5. Интеграли каҷхаттаи ҷинси якумро, ки аз болои хати каҷи фазоӣ гирифта шудааст, ҳисоб кунед:

$$\int_C\left(x^2+y^2+z^2\right)ds,$$

дар ин ҷо C хати каҷи $x=\alpha\cos t$, $y=\alpha\sin t$, $z=\beta t\left(0\le t\le 2\pi\right)$ мебошад.

Ҳал. Маълум аст, ки $dx=-\alpha\sin t dt$, $dy=\alpha\cos t dt$, $dz=\beta dt$ мебошад, пас

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}dt=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}dt \text{ аст.}$$

Он гоҳ интеграли додашуда чунин ҳисоб карда мешавад:

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)ds = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}(\alpha^2+\beta^2+t^2)dt =$$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha^2 t+\beta^2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(2\pi\alpha^2+\beta^2\frac{8\pi^3}{3}\right) =$$

$$= 2\pi\left(a^2+\frac{4}{3}\beta^2\pi\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\beta.$$

Мисоли 12.1.6. Функсияи ибтидоии $u(x,y)$ ёфта шавад, агар $du=[y+\ln(x+1)dx+(x+1-\ell^y)]dy$ бошад.

Ҳал. Ҳосил мекунем: $P(x,y)=y+\ln(x+y)$, $Q(x,y)=x+1-\ell^y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}=1$. Бигузор, $x_0=0, y_0=0$ ва контури K, хати шикастаи OMN бошад, ки $O(0;0)$, $M(x;0)$ ва $N(x;y)$ аст. Он гоҳ дар асоси формулаи (9.10) ҳосил мекунем:

$$u(x,y)=\int_0^x[\ln(x+1)+y]dx+\int_0^y(x+1-e^y)dy=$$

$$=[x\ln(1+x)-x+\ln(x+1)]\Big|_0^x+(xy+y-e^y)\Big|_0^x$$

$$=(x+1)\ln(x+1)-x+2xy+y-e^y+C.$$

Мисоли 12.1.7. Интеграли каҷхаттаро ҳисоб кунед:

$$\int_{(1;-1)}^{(1;1)}(x-y)(dx-dy).$$

Ҳал. Ифодаи зеринтегралӣ дар дифференсиали пурра мебошад:

$$(x-y)(dx-dy)=(x-y)d(x-y)=\frac{1}{2}d(x-y)^2.$$

Акнун интегралро ҳисоб мекунем:

$$\int_{(1;-1)}^{(1;1)}(x-y)(dx-dy)=\frac{1}{2}\int_{(1;-1)}^{(1;1)}d(x-y)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1-1)^2-\frac{1}{2}(1+1)^2\right]=0-\frac{1}{2}4=-2.$$

Мисоли 12.1.8. Интеграли каҷхаттаи фазоӣ аз дифференсиали пурраро ҳисоб кунед:

$$\int_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)}xdx+y^2dy+z^3dz.$$

Ҳал. Маълум аст, ки

$xdx+y^2dy-z^2dz=d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}\right)$ мебошад. Он гоҳ ҳосил мекунем:

$$\int_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)}xdx+y^2dy-z^3dz=\int_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)}d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}\right)=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)}=$$

$$=(2+9-64)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=-53-\frac{6+4-3}{12}=-53-\frac{7}{12}=-53\frac{7}{12}.$$

§ 2. Интегралҳои сатҳӣ

Мафҳуми интегралҳои сатҳӣ бо мафҳуми интегралҳои каҷхатта монанд мебошад.

1. **Интеграли сатҳии ҷинси якум.** Бигузор, дар сатҳи суфтаи S- функсияи маҳдуди $f(x,y,z)$ муайян карда шуда бошад. Сатҳи S-ро бо сатҳчаҳои $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ҷудо намуда, суммаи интеграли зеринро месозем:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i\,, \tag{12.2.1}$$

ΔS_i- бузургии масоҳати сатҳчаи S_i мебошад. Ҳудуди охирноки ифодаи (12.2.1) –ро интеграли сатҳи ҷинси якум меномем ва онро чунин ишора мекунем:

$$J = \iint_S f(x,y,z)ds\,. \tag{12.2.2}$$

Агар муодилаи сатҳи S –ба намуди ошкори $z = z(x;y)$ дода шуда бошад, $(x;y) \in D$ D-проексияи сатҳи S-дар ҳамвории xoy мебошад, дода шуда бошад, он гоҳ интеграли сатҳи ҷинси якум (12.2.2) бо формулаи

$$\int_S f(x,y,z)ds = \int_D f[(x,y,z)(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy \tag{12.2.3}$$

ҳисоб карда мешавад.

Дар ҳолати муодилаи сатҳӣ S ба намуди параметри $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ ва $z = z(u,v)$ дода шудан, интеграли сатҳи (12.2.2) бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{12.2.4}$$

ки дар ин ҷо D- соҳаи тағйирёбии параметрҳо мебошад ва

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

$$A=\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$ мешавад.

2. Интеграли сатҳи ҷинси дуюм. Сатҳи ду тарафаи S-ро мегирем ва дар ин сатҳ тарафи муайянро интихоб мекунем S^+. Бигузор, функсияи $f(x,y,z)$ дар сатҳи S муайян карда шуда бошад.

Ҳудуди суммаи интеграли $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$ ро, ки дар ин ҷо ΔS_k - проексияи элементи ΔS_k дар ҳамвории xoy мебошад, ҳангоми $\max\Delta S_k \to 0$ будан, интеграли сатҳии ҷинси дуюм аз рӯи сатҳи S меномем ва онро чунин ишора мекунем:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy\ .$$

Агар $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функсияҳои бефосила бошанд ва $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - косинусҳои равонкунанда бошанд, он гоҳ байни интеграли сатҳи ҷинси якум ва дуюм чунин вобастагӣ мавҷуд аст:

$$\iint_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds\ . \quad (12.2.5)$$

Бигузор, сатҳи суфтаи S бо муодилаи $z=z(x,y)$ дода шуда бошад, он гоҳ, ҳосил мекунем:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_D f[x,y,z(x,y)]dxdy\ , \quad (12.2.6)$$

Агар муодилаи сатҳи S ба намуди параметрии $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ дода шуда бошад, он гоҳ интеграли сатҳи ҷинси дуюм бо формулаи зерин ба интеграли дукарата оварда мешавад:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_Д (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2} \qquad (12.2.7)$$

Аломати + ё – вобаста аз интихоби тарафи сатҳи S муайян карда мешавад.

Мисоли 12.2.1. Интеграли сатҳи ҷинси якум

$$\iint_S (6x + 4y + 3z)ds$$

ҳисоб карда шавад, агар S- қисми ҳамвории $x + 2y + 3z = 6$, ки дар октантаи якум хобанда бошад.

Ҳал. Барои ҳисоб намудани интеграли додашуда формулаи (12.2.3) истифода бурда мешавад. Аз муодилаи ҳамворӣ, Z-ро меёбем:

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y), \quad ds = \sqrt{1 + (z_x\ ) + (z_y\ )}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}dxdy,$$

$$\iint_S (6x + 4y + 3z)ds = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint_{\tau_{xy}} (5x + 2y + 6)dxdy,$$

τ_{xy} - секунҷа мебошад, ки проексияи сатҳи S дар ҳамвории xoy аст. Акнун интеграли дукаратаи ҳосилшударо ҳисоб мекунем:

$$J=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}(5x+2y+6)dx=\frac{\sqrt{14}}{3}=2\sqrt{14}\int_0^3(y^2-10y+21)dy=$$

$$=\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3}+5y^2+21y\right)\Bigg|_0^3=54\sqrt{14}.$$

Мисоли 12.2.2. Интеграли сатҳи ҷинси якуми $\iint_S zds$ ҳисоб карда шавад, агар муодилаи сатҳи S ба намуди параметрии $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, $(0<u<\alpha,\ 0<v<2\pi)$ дода шуда бошад.

Ҳал. Аз формулаи (12.2.4) истифода бурдаб мисоли мазкурро ҳал мекунем. Пеш аз ҳама E,G ва F-ро меёбем:

$$E=\cos^2 v+\sin^2 v=1,\quad G=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=1+u^2,$$

$$F=-u\sin v\cos v+u\sin v\cos v=0 \text{ мешавад.}$$

$$\iint_S zds=\int_0^{\alpha}\sqrt{1+u^2}du\int_0^{2\pi}vdv=2\pi^2\int_0^{\alpha}\sqrt{1+u^2}du=\pi^2\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right)\Bigg|_0^{\alpha}=$$

$$=\pi^2\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right).$$

Мисоли 12.2.3. Интеграли сатҳи ҷинси дуюм

$$\iint_S x^2y^2zdxdy\text{-ро}$$

нисбат ба тарафи болои сатҳи $x^2+y^2+z^2=R^2$ ҳисоб кунед.

Ҳал. Аз (12.2.6) истифода бурда, ин интегралро ҳисоб мекунем. Проексияи сфера дар ҳамвории xoy давраи $x^2+y^2=R^2$ мебошад. Муодилаи қисми болои сфера чунин мешавад:

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, пас

$J=\iint\limits_S x^2y^2zdxdy=\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$ мебошад. Ба системаи координатаи қутбӣ гузашта, интеграли дукаратаи ҳосилшударо ҳисоб мекунем:

$$J=\iint\limits_\Delta \rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho d\theta=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int\limits_0^R\rho^5\sqrt{R-\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 4\theta}{2}d\theta\int\limits_0^R\rho^5\left(R^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}d\rho=\begin{vmatrix}t=\sqrt{R-\rho^2}\\ \rho d\rho=-tdt\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-cos4\theta)d\theta\int\limits_0^R\left(R^2-t^2\right)d^2dt=\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}\int\limits_0^R\left(R^4t^2-2R^2t^4+t^6\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\left(R^4\frac{t^3}{3}-2K^2\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)\Big|_0^R=\frac{\pi R^7}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{2\pi R^7}{105}.$$

Мисоли 12.2.3. Интеграли сатҳи ҷинси дуюми

$$J=\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

ҳисоб карда шавад, агар S: $x^2+y^2=z^2\quad(0\le z\le h)$ бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи (12.2.5) ҳосил мекунем:

$$J=\iint\limits_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]ds$$

$$\cos\alpha=\frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$$

Азбаски $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ аст, бинобар ин, ҳосил мекунем $z'_x = \frac{x}{z}$, $z'_y = \frac{y}{z}$ ва $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{2}$, аз ин ҷо $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{2}z}$, $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2}z}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$J = \iint\limits_{x^2+y^2\le h^2} \frac{(y-z)x+(z-x)y+(y-x)^2}{z}dxdy = 2\iint\limits_{x^2+y^2+h^2}(y-x)dxdy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)du\int_0^h \rho^5 d\rho = \frac{2}{3}h^3\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi = 0.$$

§ 3. Формулаҳои Грин, Стокс ва Остроградский

1.Формулаи Грин. Агар K - сарҳади соҳаи D бошад ва функсияҳои $P(x,y)$, $Q(x,y)$ дар $D \cup K$ ҳосилаи бефосилаи тартиби якумро дошта бошанд, он гоҳ чунин формулаи Грин ҷой дорад:

$$\int_K Pdx + \theta dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (12.3.1)$$

Аз (12.3.1) истифода бурда, бо осони ҳосил мекунем $\left(Q = \frac{1}{2}x,\ P = -\frac{1}{2}y\right)$;

$$D = \frac{1}{2}\oint_K xdy - ydx. \qquad (12.3.2)$$

Бо ёрии формулаи (12.3.2) масоҳати фигураҳои геометриро ҳисоб кардан мумкин аст.

2. Формулаи Стокс. Агар функсияҳои $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ бо ҳосилаҳои тартиби якумашон дар сатҳи S - бо сарҳади K бефосила бошанд, он гоҳ чунин формулаи Стокс ҷой дорад:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds \qquad (12.3.3)$$

дар ин ҷо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ -косинусҳои равонкунанадаи вектори нормалӣ ба сатҳи S - мебошанд, равиши мусбати сатҳ муқобили ақрабаки соат гирифта мешавад.

3. Формулаи Остроградский. Бигузор, функсияҳои $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ дар ҳаҷми маҳками $\overline{V}$ бо ҳосилаҳои тартиби якумашон бефосила бошанд, агар ҳаҷми V бо сатҳи суфтаи S маҳдуд гашта бошад, он гоҳ чунин формулаи Остроградский ҷой дорад:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \qquad (12.3.4)$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$? $\cos\gamma$ - конусҳои равонкунандаи вектори нормалии берунии сатҳ мебошанд.

Мисоли 12.3.1. Формулаи Гринро истифода бурда, интеграли качхатаи $\oint_C xy^2dy - x^2ydx$ -ро ҳисоб кунед, агар С- давраи $x^2+y^2=\alpha^2$ бошад.

Ҳал. Бо $\overline{D}$ соҳаи сарбастаи $x^2+y^2\le\alpha^2$ -ро ишора мекунем ва аз формулаи Грин (12.3.1) истифода бурда, пайдо мекунем:

$$J=\oint xy^2dy - x^2ydx = \iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right]dxdy = \iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

Дар интеграли мазкур ба системаи координатаи қутбӣ гузашта, ҳосил мекунем:

$$J = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a d\vartheta = \frac{2\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Мисоли 12.3.2. Интеграли каҷхаттаро ҳисоб кунед:

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{(x^2-y^2)}\left[-\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy\right].$$

Ҳал. Маълум аст, ки

$$P(x,y) = -e^{(x^2-y^2)}\cos(2xy),$$

$$Q(x,y) = e^{(x^2-y^2)}\sin(2xy), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2e^{(x^2-y^2)}\left[y\cos(2xy) + x\sin(2xy)\right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{(x^2-y^2)}\left[y\cos(2xy) + x\sin(2xy)\right], \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ мебошад.}$$

Он гоҳ дар асоси формулаи Грин пайдо мекунем:

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{(x^2-y^2)}\left[-\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy\right] = 0.$$

Мисоли 12.3.3. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои каҷи $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ маҳдуд гаштааст, ёбед.

Ҳал. Муодилаҳои додашудаоро якҷоя ҳал намуда, ҳосил мекунем: $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, $C(0;0)$. Акнун масоҳати фигураи додашударо дар асоси формулаи (12.3.2) ҳисоб мекунем:

$$S=\frac{1}{2}\int_{OA} xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{AB} xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{BO} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx-$$

$$\frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{0}\sqrt{x}dx==\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}-\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{0}=\frac{1+3\ln 2}{24}.$$

Мисоли 12.3.4. Формулаи Стоксро истифода бурда, интеграли $\oint_C x^2y^3dx+dy+zdz$ -ро ҳисоб кунед, агар C- давраи $x^2+y^2=r^2$, $z=0$ бошад.

Ҳал. Хати сарбастаи C қисми ҳамвории $z=0$-ро маҳдуд мекунад бо вектори нормалии $n=k$; бинобар ин, $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$. Маълум аст, ки $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$ аст, пас, дар асоси формулаи Стокс ҳосил мекунем

$$I=\oint x^2y^3dx-dy+zdz=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds=$$

$$=-3\iint_S x^2y^2\cos\alpha ds.$$

Азбаски $\cos\alpha ds = dxdy$ аст, он гоҳ интеграли охирон чунин навишта мешавад:

$$J=-3\iint_D x^2y^2dxdy,$$

дар ин ҷо соҳаи D бо давраи $x^2+y^2=r^2$ маҳдуд мебошад. Ба системаи координатаи қутбии $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\cos\theta$ гузашта, ҳосил мекунем:

$$J=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\int_0^r\rho^5d\rho=-2r^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{r^6}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=-\frac{r^6}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta=$$

$$=-\frac{r^6}{2}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi r^6}{8}.$$

Мисоли 12.3.4. Интеграли каҷхаттаи фазоӣ ҳисоб карда шавад: $\oint_C(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$, дар ин ҷо C- хати каҷи $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2Rx$ $(0<r<R,\ z>0)$ мебошад.

Ҳал. Формулаи Стоксро истифода бурда, ба интегралӣ сатҳӣ мегузорем.

$$\oint_C(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz=2\iint_S(y-z)dydz+(z-x)dzdx+$$
$$+(x-y)dxdy=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]ds,$$

S- қисми сфераи $x^2+y^2+z^2=2Rx$ мебошад, ки бо силиндри $x^2+y^2=2Rx$ бурида шудааст, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ -- косинусҳои равонкунандаи вектори нормалӣ ба сатҳи S- мебошанд. Косинусҳои равонкунандаро бо шарти он, ки нормал бо равиши мусбати тири OZ кунҷи тезро ташкил медиҳад, ҳисоб мекунем:

$$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2},\qquad \cos\alpha=\frac{x-R}{z\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{z\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{x-R}{\sqrt{1+z_x'^2 z_y'^2}}.$$

Азбаски сатҳи S - дар ҳамвории xoy бо доираи $x^2+y^2 \le 2rx$ инъикос мешавад, он гоҳ интеграли сатҳӣ ба интеграли дукарата оварда мешавад ва пас аз он ҳал карда мешавад.

Мисоли 12.3.5. Бо татбиқи формулаи Остроградский интгерали сатҳӣ ҳисоб карда шавад:

$$J = \iint_{S^+} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy \ ,$$

агар S - сатҳи пурраи силиндри $x^2+y^2=\alpha^2$, ки бо ҳамвориҳои $z=0$ ва $z=h$ маҳдуд карда шудааст.

Ҳал. Мувофиқи формулаи Остроградский (12.3.4) пайдо мекунем:

$P=4x^3$, $Q=4y^3$, $R=-6z^4$. Мувофиқан ҳосилаҳои хусусии ин функсияҳоро ҳисоб намуда, меёбем:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=12x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=12y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=-24z^3,$$

ин ифодаҳоро ба формулаи Остроградский гузошта, ҳосил мекунем:

$J = 12\iiint\limits_V (x^2+y^2-2z^3)dxdydz$, ки дар ин ҷо V ҳаҷме мебошад, ки сатҳи S - иҳота кардааст. Акнун интеграли секаратаи ҳосилшударо ҳисоб мекунем. Аввало интеграли секаратаро ба интеграли такрорӣ овардан лозим аст, ё худ:

$$J=12\iint_G dxdy\int_0^h\left(x^2-y^2-2z^3\right)dz=12\iint_{x^2+y^2\le 2zx}\left[\left(x^2-y^2\right)z-\frac{2z^4}{4}\right]\Big|_0^h dxdy=$$

$$=12\iint_{x^2+y^2\le 2zx}\left[\left(x^2-y^2\right)h-\frac{h^4}{2}\right]dxdy=\begin{vmatrix}x=p\cos\vartheta & dxdy=pd\vartheta dp\\ y=p\sin\vartheta & 0\le\vartheta\le 2\pi, 0\le p\le\alpha\end{vmatrix}=$$

$$=12h\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\alpha}\left(p^3-\frac{h^3}{2}p\right)dp=$$

$$=12\pi\cdot 2h\left(\frac{p^4}{4}-\frac{h^3}{2}\cdot\frac{p^2}{2}\right)\Big|_0^a=24\pi h\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^2h^3}{4}\right)=6\pi ha^2\left(a^2-h^3\right).$$

Мисоли 12.3.6. Интеграли сатҳии

$$\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$$

ҳисоб карда шавад, агар S - сатҳи ҷисми T - ро иҳотакунанда бошад.

Ҳал. Дар асоси формулаи Остроградский ҳосил мекунем:

$$\iint_S\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)ds=\iiint_T\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dxdydz=$$
$$=\iiint_T\left(1+1+1\right)dxdydz=3\iiint_T dxdydz=3V$$

дар ин ҷо V - ҳаҷми ҷисми T мебошад.

§ 4. Татбиқи интегралҳои каҷхатта ва сатҳӣ

1. Агар $\mu=\mu(x,y)$ зичии хати каҷи AB дар ҳамворӣ бошад, он гоҳ координатаҳои маркази вазнинии (x_0,y_0) бо ёрии интеграли каҷхаттаи ҷинси якум, бо формулаҳои

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_{AB} x\mu(x,y)dl, \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int_{AB} y\mu(x,y)dl, \qquad (12.4.1)$$

ҳисоб карда мешавад, ки

$$M = \int_{AB} M(x,y)dl, \quad \text{мебошад.} \qquad (12.4.2)$$

Шарти аз роҳи интегронӣ новобаста будани интеграли каҷхаттаи ҷинси дуюм чунин аст:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (12.4.3)$$

Лаҳзаи статикии хати каҷи якҷинсаи AB бо формулаҳои

$$M_x = \int_{AB} ydl, \qquad M_y = \int_{AB} xdl,$$

ҳисоб карда мешавад.

2. Бигузор, дар сатҳи суфтаи S - ягон масса бо зичии $M_x(x; y; z)$ паҳн карда шуда бошад ва ин зичӣ дар сатҳи S - функсияи бефосила мебошад. Он гоҳ формулаҳои зерин ҷой доранд:

$$M = \iint_S M(x,y,z)ds, \qquad (12.4.4)$$

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_S xM(x,y,z)ds, \qquad y_0 = \frac{1}{M}\iint_S yM(x,y,z)ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iint_S zM(x,y,z)ds.$$

(12.4.5)

Лаҳзаи инертнокии қиеми сатҳии S - нисбат ба тирҳои координатӣ бо формулаҳои

$$J_{0x} = \iint_S (y^2 + z^2)ds, \quad J_{0y} = \iint_S (x^2 + z^2)ds,$$

$$J_{0z} = \iint_S (x^2 + y^2)ds, \qquad (12.4.6)$$

ҳисоб карда шавад.

Лаҳзаи статикии сатҳ нисбат ба ҳамвориҳои координатӣ бо формулаҳои зерин муайян карда мешавад:

$$M_{xy} = \iint_S zMds, \quad M_{yz} = \iint_S xMds, \quad M_{zx} = \iint_S yMds. \qquad (12.4.7)$$

Мисоли 12.4.1. Массаи камони AB -и хати каҷи $y = \ln x$ -ро ёбед, агар дар ҳар як нуқта зичии хати ба квадрати абсисаҳои нуқтаҳо мутаносиб бошад: $x_A = 1$, $x_B = 3$.

Ҳал. Формулаи (12.4.2)-ро татбиқ менамоем, пас интеграли каҷхаттаро ҳисоб мекунем:

$$y = \ln x, \ y' = \frac{1}{x}, \qquad dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx, \qquad \mu = kx^2$$

$$M = \int_{AB} M(x,y)d\ell = k\int_{AB} x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx = \frac{k}{2}\int_1^3 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1) =$$

$$= \frac{k}{3}\left(x^2+1\right)\Big|_1^3 = \frac{k}{3}\left(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right).$$

Мисоли 12.4.2. Маркази вазнинии камони хати каҷи якчинсаи $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 + \cos t)$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$ ёфта шавад.

Ҳал. Аввало дифференсиали камонро вобаста аз муодилаи параметри хати кач меёбем: $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$. Аз формулаҳои (12.4.1) истифода бурда, координатаҳои маркази вазнинии камонро меёбем, барои ин пешаки массаи камонро ёфтан лозим аст. Азбаски камон якҷинса мебошад, бинобар ин зичӣ $M(x,y) = 1$ мешавад. Аз ин ҷо

$$M = 2\alpha \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4\alpha \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 4\alpha ,$$

$$x_0 = \frac{1}{4\alpha} \int_0^{\pi} \alpha (t - \sin t) 2\alpha \sin \frac{t}{2} dt = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(-2t \cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} dt \right) = \frac{a}{2}\left[4 - 4\int_0^{\pi} \sin^2\frac{t}{2} d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right] =$$

$$= 2a\left(1 - \frac{\sin 3\frac{t}{2}}{3} \right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4a}{3}.$$

$$y_0 = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a\,(1 - \cos t)\cdot 2a \cdot \sin\frac{t}{2} dt \frac{a}{2}\left[2 + \left(\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2} - 2\cos t\frac{t}{2} \right)\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{4a}{3}.$$

Мисоли 12.4.3. Лаҳзаи статикии камони астроиди якҷинсаи $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ нисбат ба тирҳои координата ёфта шавад.

Ҳал. Барои ҳалли мисоли мазкур аз формулаҳои дар боло овардашуда истифода мебарем. Маълум аст, ки муодилаи параметрии астроид чунин намуд дорад: $x = \alpha cos^3 t$, $y = \alpha \sin^3 t$ $\quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$. Аз ин ҷо

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt = 3a \sin\ t \cdot \cos\ t dt ,$$

$$M_x = 3\alpha^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 3\alpha^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) =$$

$$= 3a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = 3\frac{a^2}{5},$$

$$M_y = 3\alpha^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t dt = -3\alpha^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t d(\cos t) =$$

$$= 3a^2 \frac{\cos^5 t}{5}\Big|_0^{\pi/2} = 3\frac{a^2}{5}.$$

Мисоли 12.4.4. Массаи сатҳи куравӣ ва лаҳзаи статикӣ нисбат ба ҳамвории xoy ёфта швад, агар зичии дар ҳар як нуқтаи сатҳ ба масофаи ин нуқта то диаметри вертикалӣ баробар бошад.

Ҳал. Ибтидои координатаро дар маркази сатҳӣ куравӣ ҷойгир мекунем ва ба системаи координатаи сферикӣ мегузорем:

$x = R\sin\theta\cos\vartheta$, $y = R\sin\theta\cos\vartheta$, $z = R\cos\theta$, (R - радиуси сфера мебошад), он гоҳ

$$ds = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\vartheta; \qquad M = \sqrt{x^2 + y^2} = R\sin\theta \text{ мешавад.}$$

Аз ин ҷо дар асоси формулаи (12.4.7) ҳосил мекунем:

$$M = \iint_S \mu ds = \iint_S R^3 \sin^2\theta d\theta d\vartheta = R^3 \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = R^3\pi\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi^2 R^3.$$

Аз формулаи (12.4.7) истифода бурда, меёбем

$$M_{xy} = \iint_S z\mu ds = R^4 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta d\theta = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d(\sin\theta) = 2\pi R^4 \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi R^4$$

Мисоли 12.4.5. Координатаҳои маркази вазнинии қисми ҳамвории $z = x$

ро, ки бо ҳамвориҳои $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ маҳдуд карда шудааст, ҳисоб кунед.

Ҳал. Пеш аз ҳама масоҳати қисми ҳамвории $z = x$ -ро меёбем. Баъд аз он ҳосил мекунем: $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+z_x'^2}\,dxdy=\sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy=\sqrt{2}\int\limits_0^1 (1-x)dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

он гоҳ

$$x_0=\frac{1}{S}\iint\limits_S x ds=\sqrt{2}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{2}dy=2\int\limits_0^1 x(1-x)dx=\frac{1}{3},$$

$$y_0=\frac{1}{S}\iint\limits_S y ds=\sqrt{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{2}ydy=\int\limits_0^1 (1-x)^2 dx=\frac{1}{3},$$

$$z_0=\frac{1}{S}\iint\limits_S z ds=\frac{1}{S}\iint\limits_S x ds=\frac{1}{3}$$ мешавад.

Мисоли 12.4.6. Лаҳзаи инертнокии нимсфераи $z=\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}$ нисбат ба тири OZ ёфта шавад.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусии z -ро нисбат ба x ва y меёбем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}};$$

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Дар асоси формулаи (12.4.6) меёбем:

$$J_{oz} = \iint_S (x^2+y^2)ds = \iint_D (x^2+y^2)\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}}dxdy$$

Соҳаи интегронӣ доираи $x^2+y^2 \le \alpha^2$ мебошад. Ба системаи координатаи қутбӣ гузашта, ҳосил мекунем:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad dxdy=\rho d\rho d\theta;$$

$$J_{oz} = \iint_D \rho^2 \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\, d\rho d\theta = 4a\int_0^{\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= \left|\rho = \alpha\sin t, d\rho = \alpha\cos t\right| = 2\pi\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^3\sin^3 t\alpha\cos t dt}{d\cos t} =$$

$$= -2\pi\alpha^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 td(\cos t) = -2\alpha^4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)d(\cos t) =$$

$$= -2\pi a^4\left(\cos t - \frac{\cos^2 t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi a^4\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

§ 5. Элементҳои асосии назарияи майдон

1. Бигузор, функсияи $u(x,y,z)$ дода шуда бошад. Вектори

$$grad\ U = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

градиенти майдони D дар нуқтаи P номида мешавад. Агар градиен бо нормалӣ ба сатҳи мувозинати дар нуқтаи P равона карда шуда бошад, бо самти афзуншавии функсияи $u(x,y,z)$, он гоҳ дарозии он бо формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$|grad\ U| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\ .$$

Агар равиш бо векторҳои воҳидӣ дода шуда бошад, пас,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = grad\ U = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ , \qquad (12.5.1)$$

$$\ell\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

Бинобар ин, (12.5.1) ҳосила бо равиши додашуда мебошад.

2. Дивергенсияи майдони вектории $U(p) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ гуфта, скалярӣ

$div u(\rho) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \nabla U$ -ро меномем.

Ротори майдони вектории $U(p) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ гуфта вектори $rot U = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ -ро меномем.

Сели вектори майдонии $U(P)$ ба сатҳи S гуфта интеграли $\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$ -ро меномем.

Агар S сатҳи маҳкамии ҳаҷми V -ро иҳотакунанда бошад ва $\vec{h}$-вектори воҳиди нормали берунии ба сатҳи S, бошад он гоҳ формулаи зерин ҷой дорад:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \iiint\limits_V div u dxdydz$$ -формулаи

Остроградский мебошад.

Мисоли 12.5.1. Хатҳои мувозинати майдони скалярии ҳамвориро ёбед: $u = x^2 + y^2$, агар $u = 1,2,3,4,5$ бошад.

Ҳал. Муодилаи хатҳои мувозинатӣ: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 5$ ва ин хатҳоро сохта, дар ҳамвории xoy давраҳои консентрикиро ҳосил мекунем. Хатҳои мувозинатии, давраҳои консентрикӣ мебошанд.

Мисоли 12.5.2. Ҳосилаи функсияи $u = xy + yz + 1$ бо равиши вектори $\vec{\ell}\{1,2,-3,-4\}$ дар нуқтаи ихтиёрӣ ва нуқтаҳои $A(0;-2;-1)$, $B(3;3;5)$ ёфта шавад.

Ҳал. Ҳосилаҳои хусусии функисяи $u(x;y;z)$ ва косинусҳои равонкунанадаи вектори $\vec{\ell}$ - ро меёбем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos\beta = \frac{-3}{13}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{13}$$

Дар формулаи (12.5.1) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{12}{13}y - \frac{3}{13}(x+z) - \frac{4}{13}y = \frac{8y - 3(x+z)}{13}.$$

Координатаҳои нуқтаҳои A ва B -ро гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u(A)}{\partial \ell} = -1, \quad \frac{\partial u(B)}{\partial \ell} = 0$$

Мисоли 12.5.3. Дода шудааст $u = xy - z^2$. Бузургӣ ва равиши $gradU$ дар нуқтаи $\mu(-9;12;10)$ ёфта шавад. Ҳосилаи $\dfrac{\partial u}{\partial P}$ бо равиши биссектрисаи кунҷи координатаи ҳамвории xoy муайян карда шавад.

Ҳал. Аз таърифи градиент истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$grad u(м) = \left\{ \frac{\partial u(м)}{\partial x}, \frac{\partial u(м)}{\partial y}, \frac{\partial u(м)}{\partial z} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12, \quad \frac{\partial u(м)}{\partial y} = -9, \quad \frac{\partial u(м)}{\partial z} = -20,$$

$$grad u\,(м) = \{12, -9, -20\}$$

$$|grad u\,(м)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{144+81+400} = \sqrt{625} = 25,$$

Равиши gradu(м) бо вектори

$$l\,(м) = \frac{grad u\,(м)}{|grad u\,(м)|} = \left\{ \frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, \frac{20}{5} \right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

Вектори воҳидӣ, ки аз ибтидои координата мебарояд ва бо равиши биссектрисаи кунҷи координатаи якум равона карда шудааст, чунин намуд дорад: $\vec{r} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$. Дар асоси (12.5.1) ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(gradu(м)_1\,\vec{r}\right)=\frac{\partial u(м)}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial u(м)}{\partial y}\cos\beta_1+\frac{\partial u(м)}{\partial z}\cos\gamma_1=12\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{9}{\sqrt{2}}-20\cdot 0$$

$$=\frac{12}{\sqrt{2}}-\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Мисоли 12.5.4. Дивергенсияи майдони вектории

$$\vec{q}=e^{xy}\left(y\vec{j}-x\vec{i}+xy\vec{k}\right)$$ ёфта шавад.

Ҳал. Барои ёфтани дивергенсияи майдони вектории додашуда аз формулаи $divu(P)$ истифода мебарем:

$$div\,\vec{q}=\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z};$$

$$q_x=-xe^{xy},\qquad q_y=ye^{xy},\qquad q_z=yxe^{xy};$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}=-e^{xy}-xye^{xy}=-e^{xy}(1+xy)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y}=-e^{xy}+xye^{xy}=e^{xy}(1+xy),\qquad \frac{\partial q_z}{\partial z}=0.$$

Аз ин ҷо

$$div\,\vec{q}(м)=-e^{xy}(1+xy)+e^{xy}(1+xy)+0=0$$

Мисоли 12.5.5. Сели радиус вектори $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ба сатҳи маҳками $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $(0\le z\le 1)$ муайян карда шавад.

Ҳал. Аввало дивергенсияи майдони вектории додашударо меёбем:

$$div\ \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 .$$

Сели вектори дода шударо бо ёрии формулаи Остроградский меёбем

$$C = \iiint_T div\vec{r}dv = 3\iiint_T dv = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = 3\int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^1 \rho d\rho \int_o^{1-\rho} dz =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 pdp \int_0^{1-p} dz = 3\iiint_T d\varphi \int_0^1 p(1-p)dp = 3\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi .$$

Кори мустақилонаи 12.1.1.

1. Интеграли качхаттаи ҷинси якум ҳисоб карда шавад:

а) $\int_C (x+y)ds$, C; -секунҷа бо қуллаҳои $O(0;0)$, $A(1;0)$ ва $B(0;1)$ мебошад.

б) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$ C; $x = \alpha(\cos t + t\sin t)$, $y = \alpha(\sin t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$

в) $\int_C zds$; C: $x = t\cos t$; $y = t\sin t$; $z = 1$ $(0 \le t \le t_0)$ мебошад.

2. Интеграли качхаттаи ҷинси дуюмро ҳисоб кунед:

а) $\int_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy$, агар $A(1;1)$, $B(3;4)$-қисми хати рост бошад;

б) $\int_C (2\alpha - y)dx + xdy$; C; $x = \alpha(t - \sin t)$; $y = \alpha(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$;

в) $\int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, C; $x = t$; $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

Кори мустақилонаи 12.1.2.

1. Интегралҳои каҷхаттаро ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_K ydx-(y+x^2)dy$, К-камони параболаи $y=2x-x^2$ мебошад, ки боло аз тири OX мехобад.

б) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy+ydx$,

в) $\int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} \frac{ydx+xdy}{2}$, дар қади роҳи интегронӣ тири OY -ро намебурад.

г) $\int\limits_{(1;0;-3)}^{(6;4;8)} xdx+ydy-zdz$

2. Функсияи ибтидоӣ ёфта шавад:

а) $du=(2x-3y)dx+(3x-4y)dy$;

б) $du=\dfrac{dx}{x+y}+\dfrac{dy}{x+y}$

Кори мустақилонаи 12.2.1.

1. Интеграли сатҳии ҷинси якум ҳисоб карда шавад: $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, агар S- бо сатҳи $z^2=x^2+y^2$ ва ҳамвориҳои $z=0$, $z=1$ маҳдуд карда шуда бошад.

2. Интеграли сатҳии ҷинси дуюм ҳисоб карда шавад:

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy\,,$$ S- қимати беруни сатҳи $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ мебошад.

3. Интеграли сатҳӣ ҳисоб карда шавад, агар S сатҳи паҳлуи конуси $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{в^2} = 0 \quad (0 \le z \le в)$ бошад.

4. Интеграли сатҳӣ ҳисоб карда шавад:

$$\iint_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$$

агар S- қисми беруни тетраэдраи $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ бошад.

Кори мустақилонаи 12.2.2.

1. Формулаи Гринро истифода бурда, интегралҳои каҷхаттаи зеринро ҳисоб кунед:

а) $\int_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, L- давраи $x^2 + y^2 = \alpha^2$ мебошад.

б) $\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L -эллипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ мебошад.

2. Исбот кунед, ки интеграли $\int_L \left(yx^3 + e^y\right)dx + \left(\frac{x^4}{4} + xe^y - 2y\right)dy = 0$ аст, ки дар ин ҷо L- хати сарбаста нисбат ба ибтидои координата симетрӣ мебошад.

3. Масоҳате, ки бо параболаҳои $y^2 = x$, $x^2 = y$ маҳдуд карда шудааст, ёфта шавад.

4. Масоҳатеро, ки бо эллипси $x = \alpha \cos t$, $y = в \sin t$ маҳдуд карда шудааст, ёбед.

Кори мустақилонаи 12.3.1.

1. Бо татбиқи формулаи Стокс интеграли каҷхаттаи

$$\oint_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

-ро ҳисоб кунед, агар L - давра ва $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$, $x + y + z = 0$ мебошад.

2. Интеграли каҷхаттаи $\oint_C xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$ ҳисоб карда шавад, агар муодилаи хати каҷи C - ба намуди параметрии $x = \alpha \sin t$, $y = \alpha \cos t$, $z = \alpha(\sin t + \cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$ дода шуда бошад.

3. Бо татбиқи формулаи Остроградский интегралҳои сатҳии зеринро ҳисоб кунед:

а) $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S - сатҳи берунии тарафҳои қутби $0 \le x \le \alpha$, $0 \le y \le \alpha$, $0 \le z \le \alpha$ мебошад.

б) $\iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)ds$, S - қисми сатҳи конуси $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$ ва $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - конусҳои равонкунандаи нормалии берунӣ ба сатҳ мебошанд.

Кори мустақилонаи 12.4.1.

1. Массаи хати каҷи $x = \alpha \cos t,\quad y = в \sin\quad (0 \le t \le 2\pi)$ ёфта шавад, агар зичии хат дар нуқтаи $(x\,,\,y)$ ба $\mu = |y|$ баробар бошад.

2. Массаи камони параболаи $y^2 = 2px\left(0 \le x \le \dfrac{p}{2}\right)$ - ро ёбед, агар зичии хати $\mu = |y|$ бошад.

3. Координатаҳои маркази вазнинии камони хати каҷи $x = \alpha(t - \sin t)$, $y = \alpha(1 - \cos t)$, $(0 \le t \le \pi)$ -ро ёбед.

4. Лаҳзаи статикии хати каҷи $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ нисбат ба ҳамвории xoy ёфта шавад.

Кори мустақилонаи 12.4.2.

1. Массаи сатҳи қутбӣ $0 \le x \le 1$, , $0 \le y \le 1$ $0 \le z \le 1$ ёфта шавад, агар зичии сатҳ дар нуқтаи $M(x; y; z)$ ба $\mu = xyz$ баробар бошад.

2. Координатаҳои маркази вазнинии камони хати каҷи якҷинсаи $\alpha z - x^2 + y^2$ $(0 \le z \le \alpha)$ ёфта шавад.

3. Лаҳзаи инертноки қисми сатҳи конуси $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,(0 \le z \le h)$ нисбат ба oz ёфта шавад.

Кори мустақилонаи 12.5.1.

1. Хатҳои мувозинати майдони скалярӣ сохта шаванд:

а) $u = x + y$, б) $u = \dfrac{2y}{x^2}(u = 1,2,3,4)$

2. Ҳосилаи функсияи $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ дар нуқтаи $A(3;4)$ бо равиши а) радиус вектори нуқтаи А, б) бо равиши вектори $\vec{q} = \{4;3\}$ ёфта шавад.

3. Майдони скалярии $u = \ell n\frac{1}{r}$ дода шудааст, ки $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-в)^2 + (z-c)^2}$ аст. Дар кадом нуқтаҳои фазоии $P(x;y;z)$ нобаробарии $|grad u| = 1$ иҷро мешавад.

4. Кунҷи байни градиенҳои майдони $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ ва нуқтаҳои $A(1,2,3)$, $B(-3,1,0)$ ёфта шаванд.

Кори мустақилонаи 12.5.2.

1. Дивергенсияи майдони векторӣи вектори $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ёфта шавад.

2. Дивергенсияи майдони $R = \dfrac{-\vec{ix} + \vec{j}y + \vec{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ дар нуқтаи $M\ (3;4;5)$ ёфта шавад.

3. Сели векторӣи $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ба сатҳи $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ муайян карда шавад, агар $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ бошад.

4. Сели векторӣи $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ ба сатҳи паҳлуи конуси $x^2 + y^2 \le \dfrac{R^2}{n^2}z^2$, $0 \le z \le h$ муайян карда шавад.

5. Ротори майдони векторӣ ҳисоб карда шавад:

а) $\vec{P} = (x-2)\vec{i} + (x+y)\vec{j} - 2z\vec{k}$ дар қади периметри секунҷаи $A(1;0,0)$, $B(0,1;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $\vec{q} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ дар қади давраи $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $z = 0$.

Ҷавобҳо

К.М.12.1.1.

1. а) $1+\sqrt{2}$. б) $\frac{\alpha^2}{3}x\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1$. в) $\frac{1}{35}$.

2. а) $\frac{67}{6}$. б) $-2\pi\alpha^2$. в) $\frac{1}{35}$.

К.М 12.1.2.

1. а) 4. б) 8. в) -1,5. г) -2.

2. а) $x^2 + 3xy - 2y^2 + c$. б) $\ln|x+y| + c$.

К.М.12.2.1.

1. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2. $4\pi\alpha^3$. 3. $\frac{2\pi\alpha^2}{3}\sqrt{\alpha^2 + в^2}$. 4. 0.

К.М.12.3.1.

1. а) $\frac{\pi R^4}{2}$. б) 0. 3. $3\frac{1}{3}$. 4. $\pi\alpha \cdot в$.

К.М.12.3.2.

1. 0. 2. $-\pi\alpha^2$. 3. а) $\frac{15}{5}\pi\alpha$. б) $-\frac{\pi}{2}h^4$.

К.М.12.4.1.

1. $2в(в+\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+в^2}}\alpha rc\sin\frac{\sqrt{\alpha^2-в^2}}{\alpha})$.   2. $\frac{2\rho^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

3. $\left(\frac{4}{3}\alpha,\frac{4}{3}\alpha\right)$.   4. $\frac{8k\sqrt{2}}{16}[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1]$.

К.М.12.4.2.

1. $\frac{3}{4}$.   2. $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}\alpha$.   3. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}h^4$.

К.М.12.5.1.

2. а) 1.   б) $\frac{\partial u}{\partial q}\Big|_A=0$.   3. Дар сфераи $z=1$, $\mu(\alpha,в,c)$.

4. $\cos\vartheta=-\frac{8}{9}$.

К.М.12.5.2.

1. $2(x+y+z)$.   2. $\frac{18}{125}$.   3. 6π.   4. $0{,}1\pi R^2h(3R^2+2h^2)$.

5. а) $\frac{1}{2}$.   б) $\pm\pi\alpha\frac{6}{8}$.

Боби XIII. Интегралҳои аз параметр вобаста

§ 1. Интегралҳои хоси аз параметр вобаста

1. Интеграли

$$J(y) = \int_{\alpha}^{b} f(x, y)dx \qquad (13.1.1)$$

-ро интеграли аз параметр вобаста меноманд, y - параметр мебошад. Яъне интеграли аз параметр вобаста функсия аз параметри y - мебошад. Бигузор, $\frac{\partial f}{\partial y}$ дар росткунҷаи $R[\alpha \le x \le b, c \le y \le d]$ бефосила бошад. Дар ин ҳолат формулаи зерин ҷой дорад:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \int_{\alpha}^{b} \frac{\partial f}{\partial y} dx \qquad (13.1.2)$$

Агар a ва b низ аз параметр вобаста бошанд, пас интеграли (13.1.2) чунин навишта мешавад:

$$J(y) = \int_{\alpha(y)}^{b(y)} f(x, y)dx \qquad (13.1.3)$$

Ҳосилаи (13.1.3) нисбат ба параметри y бо формулаи

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \int_{\alpha(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx + b'(y) f[b(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y] \qquad (13.1.4)$$

ҳисоб карда мешавад.

2. Агар функсияи $f(x,y)$ дар росткунҷаи $R[\alpha \le x \le b, c \le y \le d]$ бефосила бошад, он гоҳ чунин формулаи интегронӣ ҷой дорад:

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (13.1.4)$$

Мисоли 13.1.1. Ҳудудро ҳисоб кунед:

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

Ҳал. Азбаски функсияи зеринтегралӣ дар порчаи интегронӣ бефосила мебошад. Бинобар ин, дар зери интеграл ба ҳудуд гузашта, ҳосил мекунем:

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}.$$

Мисоли 13.1.2. Интеграли $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$ ҳисоб карда шавад, дар ҷое, ки m ва n - ададҳои мусбатанд.

Ҳал. Интеграли $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ - ро мегирем, ки дар ин ҷо $f(x,m) = x^m$ мебошад, дар интеграли $0 < x < 1$ ҳангоми $m > 0$ будан бефосила аст. Акнун ҳосилаи ин интегралро нисбат ба параметри m ҳисоб мекунем (13.1.2):

$$\frac{d}{dm}\int_0^1 x^m dx = \int_0^1 x^m \ln x dx = -\frac{1}{(m+1)^2}.$$

Бори дигар нисбат ба m дифференсиронида , ҳосил мекунем:

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(m+1)^2}.$$

Ҳамин тавр, такроран n-маротиба нисбат ба параметри m ҳосила гирифта, хосил мекунем:

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Мисоли 13.1.3. $F'(\alpha)$ - ёфта шавад, агар

$$F'(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha)dx \quad \text{бошад.}$$

Ҳал. Фарз мекунем, ки $F'(u,v)$, $u=x+\alpha$, $v=x-\alpha$ ҳосилаҳои хусусии бефосилаи тартиби якумро дорад. Он гоҳ

$$F'(\alpha) = f(2\alpha,0) + \int_0^\alpha [f_u'(u,v) - f_v'(u,v)]dx \quad \text{мешавад,}$$

қайд мекунем, ки

$$\int_0^\alpha (f_u' - f_v')dx = 2\int_0^\alpha f_u' dx - f(2\alpha,0) + f(\alpha,-\alpha) \quad \text{аст,}$$

аз ин ҷо

$$F'(\alpha) = f(\alpha,-\alpha) + \int_0^\alpha f_u' dx \quad \text{мебошад.}$$

Мисоли 13.1.4. Интиграли аз параметир вобастаро ҳисоб кунед.

$$J(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}dx$$

Ҳал. Ҳосилаи $J(\lambda)$ - ро нисбат ба λ бо формулаи (13.1.4) ҳисоб мекунем:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = \int_0^\lambda \frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}dx + \frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}.$$

Интеграли тарафи ростро ҳисоб мекунем:

$$\int_0^\lambda \frac{xdx}{(1+\lambda x)(1+x^2)} = \int_0^\lambda \frac{(x+\lambda)dx}{(1+\lambda^2)(1+x^2)} - \int_0^\lambda \frac{\lambda dx}{(1+\lambda)^2(1+\lambda x)} =$$

$$= \left[-\frac{1}{1+\lambda^2}\ln(1+\lambda x) + \frac{1}{2(1+\lambda^2)}\ln(1+x^2) + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} arctgx \right] =$$

$$= -\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2} + \frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} arctg \quad \lambda$$

ҳамин тавр, пайдо мекунем:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = \frac{3\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} arctg\ \lambda,$$

аз ин ҷо

$$J(\lambda) = \int_0^\lambda \left[\frac{3\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} arctg \quad \lambda \right] d\lambda =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^\lambda \frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2} d\lambda + \int_0^\lambda \frac{\lambda\, arctg \quad \lambda}{1+\lambda^2} d\lambda.$$

Интеграли авваларо бо ҳиссаҳо интегронида, ҳосил мекунем:

$$J(\lambda) = \frac{3}{2} arctg \quad \lambda \cdot \ln(1+\lambda^2) - \int_0^\lambda \frac{\lambda\, arctg \quad \lambda}{1+\lambda^2} d\lambda +$$

$$+ \int_0^\lambda \frac{\lambda\, arctg \quad \lambda}{1+\lambda^2} d\lambda \;;$$

$$J(\lambda)=\frac{3}{2}arctg\,\lambda\cdot\ln(1+\lambda^2).$$

Мисоли 13.1.5. Дар зери интеграл ба интеграл гузашта, ҳисоб кунед:

$$J=\int_0^1\frac{x^b-x^\alpha}{\ln x}dx\qquad(\alpha,\beta>0).$$

Ҳал. Азбаски $\dfrac{x^b-x^\alpha}{\ln x}=\int_\alpha^b x^y dy$ аст,

бинобар ин,

$$J=\int_0^1 dx\int_\alpha^b x^y dy \text{ мешавад.}$$

Функсияи $f(x,y)=x^y$ дар росткунҷаи $R[0\le x\le 1,\alpha\le y\le b]$ бефосила мебошад.

$$J=\int_\alpha^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_\alpha^b\frac{dy}{1+y}=\ln(1+y)\Big|_a^b=$$

$$=\ln(1+b)-\ln(1+\alpha)=\ln\frac{1+b}{1+\alpha};$$

Мисоли 13.1.6. Интегралро ҳисоб кунед:

$$J=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^\alpha}{\ln x}dx.$$

Ҳал. Мисоли гузаштаро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$J=\int_0^1 dx\int_\alpha^b x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy.$$

Функсияи $f(x,y) = x^{y}\sin(\ln\frac{1}{x})$ дар росткунҷаи $R[0 \le x \le 1, \alpha \le y \le b]$ бефосила мебошад, бинобар ин, тартиби интегрониро низ иваз намудан мумкин аст:

$$J_1 = \int_{\alpha}^{b} dx \int_{0}^{1} x^{y} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx = \begin{vmatrix} x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t}dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{\alpha}^{b} dy \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+y)} \sin t dt = \int_{\alpha}^{в} \frac{dy}{(y+1)^2+1} = \alpha rctg(1+y)\Big|_{\alpha}^{b} =$$

$$= \alpha rctg\,(1+b) - \alpha rctg\,(1+\alpha).$$

§ 2. Интегралҳои ғайрихоси аз параметр вобаста

1.Интеграли зеринро мегирем:

$$I(y) = \int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx, \qquad (13.2.1)$$

дар ин ҷо $f(x,y)$ дар соҳаи $R[a \le x \le \infty, c \le y \le d]$ муайян карда шудааст. Ифодаи (13.2.1) интеграли ғайрихоси аз параметр вобаста мебошад. Мо мегӯем, ки интеграли (13.2.1) дар интервали $\acute{n} < y < d$ мунтазам наздикшаванда аст, агар барои ҳаргуна $\varepsilon > 0$ чунин номери $N(\varepsilon)$ ёфта шавад, ки барои ихтиёрӣ $\beta \ge N(\varepsilon)$ нобаробарии

$$\left| \int_{\beta}^{+\infty} f(x,y)dx \right| \angle \varepsilon$$

барои ихтиёрӣ $y \in (c,d)$ якбора иҷро шавад.

Критерияи Коши. Барои он ки интеграли (13.2.1) дар интервали $(c;d)$

мунтазам наздикшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ҳаргуна $\varepsilon > 0$,чунин номер $N(\varepsilon)$ ёфта шавад, ки барои ихтиёрӣ $y \in (c;d)$ нобаробарии

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx\right| \angle \varepsilon$$

якбора иҷро шавад.

Аломати Вейерштрасс. Агар $|f(x,y)| \le F(x)$ бошад, ҳангоми $\alpha \le x \le \infty$ будан интеграли ғайрихос $\int_{a}^{\infty} F(x)dx$ наздикшаванда бошад, он гоҳ интеграли (13.2.1) дар интервали $(c;d)$ мунтазам наздикшаванда мешавад.

II. Агар функсияи $f(x,y)$ дар соҳаи R муайян бошад, нисбат ба x бефосила ва дар ҳолати $y \to y_0 \in (c,d)$ мунтазам ба функсияти ҳудудӣ $g(x)$ майл кунад, дар порчаи охирноки $[a;\ A]$ ва интеграли (13.2.1) дар интервали $(c;d)$ мунтазам наздикшаванда бошад, он гоҳ

$$\lim_{y \to y_0} \int_{a}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{a}^{\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \int_{a}^{\infty} g(x)dx \qquad \text{мешавад.}$$

Агар функсияи $f(x,y)$ дар соҳаи $0 \le x < \infty,\quad c < y < d$ бефосила ва интеграли (13.2.1) дар интервали $(c;d)$ мунтазам наздикшаванда бошад, он гоҳ $J(y)$ функсияи мунтазам бефосила дар порчаи $[c;d]$мебошад.

Мисоли 13.2.1. Соҳаи наздикшавии интеграли

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\rho + \sin x} dx \qquad (\rho>0) \qquad \text{ёфта шавад.}$$

Ҳал. Интеграли додашударо ба ду интеграл ҷудо мекунем:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x^\rho + \sin x} = \int_0^1 \frac{\sin x dx}{x^\rho + \sin x} + \int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^\rho + \sin x}$$

азбаски

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\rho + \sin x} \approx \frac{1}{x^{\rho-1} + 1}, \quad x \to 0 \text{ аст.}$$

пас, интеграли якум барои ихтиёрӣ ρ наздикшаванда мебошад, нуқтаи $(x=0)$ нуқтаи каниши бартарафшавандаи функсияи $f(x)$ мебошад:

$$\frac{\sin x}{x^\rho + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\rho} - \frac{\sin^2 x}{x^{2\rho}} + \left(\frac{1}{x^{2\rho}}\right) = \frac{\sin x}{x^\rho} -$$

$$- \frac{1}{2x^{2\rho}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2\rho}} + \left(\frac{1}{x^{2\rho}}\right), \qquad x \to 0$$

ва интегралҳои

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\rho} dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^{2\rho}} dx$$

ҳангоми $\rho>0$ наздикшаванда мебошанд, интеграли $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2\rho}}$ танҳо дар ҳолати $\rho > \frac{1}{2}$ будан наздикшаванда мебошад, ҳамин тавр, интеграли додашуда ҳангоми $\rho > \frac{1}{2}$ будан наздикшаванда мебошад.

Мисоли 13.2.2. Интеграли

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}},\quad n \text{ - адади бутуни мусбат, } \lambda > 0 \text{ ҳисоб карда шавад.}$$

Ҳал. Интеграли зеринро мегирем: $J(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\lambda)^2}$.

$$J(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\lambda)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2\lambda^{3/2}}.$$

Такроран n - маротиба дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2m}\cdot\frac{\pi}{2\lambda^n\sqrt{\lambda}}.$$

Мисоли 13.2.3. Ҳисоб карда шавад:

$$J=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}dx.$$

Ҳал. Нисбат ба параметри λ дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial J}{\partial\lambda}=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},\quad \frac{\partial J}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda},\quad J=\ln\lambda.$$

Мисоли 13.2.4. Исбот кунед, ки

$$F(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$$

функсияи бефосила нисбат ба параметри α мебошад.

Ҳал. Гузориши $x=\alpha+t$ - ро иҷро намуда, меёбем:

$$F(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\infty}e^{-t^2}dt=\int_{0}^{\alpha}e^{-t^2}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

Азбаски функсияи e^{-t^2} бефосила мебошад, бинобар ин, $\int_0^\alpha e^{-t^2}dt$ функсияи бефосила мешавад. Он гоҳ функсияи $F(\alpha)$-ҳам функсияи бефосила мебошад.

Мисоли 13.2.5. Нишон диҳед, ки функсияи

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx \qquad (-\infty<\alpha<+\infty)$$

бефосила ва дифференсиронидашаванда аст.

Ҳал. Гузориши $x+\alpha=t$ -ро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\cos(t-\alpha)}{1+t^2}dt-\int_0^\alpha \frac{\cos(t-\alpha)}{1+t^2}dt,$$

аз баробарии охирон нисбат ба α - ҳосила гирифта, меёбем:

$$F'(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin(t-\alpha)}{1+t^2}-\frac{1}{1+\alpha^2}-\int_0^\alpha \frac{\sin(t-\alpha)}{1+t^2}dt,$$

азбаски функсияи

$$f(t,\alpha)=\frac{\sin(t-\alpha)}{1+t^2}, \qquad 0\le t<\infty, \qquad -\infty<\alpha<+\infty$$

бефосила ва интеграли (*) бо аломати Вейерштрасс мунтазам наздикшаванда ҳангоми $|\alpha|<\infty$ аст, бинобар ин, дифференсиронӣ дар зери интеграл дуруст мебошад. Дар ин асос $F'(\alpha)$ дар интервали $-\infty<\alpha<+\infty$ функсияи бефосила мебошад.

§ 3. Интегралҳои Эйлер

1. Гамма-функсия. Интеграли

$$\Gamma(\rho) = \int_0^\infty x^{\rho-1} e^{-x} dx \qquad (13.3.1)$$

гамма-функсия номида мешавад. Дар ҳолати $0<\rho<\infty$ будан интеграли (13.3.1) наздикшаванда аст. Гамма-функсия ҳосилаи бефосилаи тартиби дилхоҳро дорад ва формулаи зерин ҷой дорад:

$$\Gamma^{(k)}(\rho) = \int_0^\infty x^{\rho-1} (\ln x)^k \cdot e^{-x} dx \qquad (k = 1,2,...)$$

Гамма-функсия дорои як қатор хосиятҳо мебошад. Агар $\rho>0$ бошад, пас,

$$\Gamma(\rho+1) = \rho\Gamma(\rho) \qquad (13.3.2)$$

мешавад.

Агар n - ададн мусбати бутун бошад, он гоҳ $\Gamma(n+1) = n!$ мешавад.

Агар $0<\rho<1$ бошад, пас

$$\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \qquad (13.3.3)$$

2. Бета-функсия. ***Интеграли***

$$B(\rho, q) = \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{q-1} dx \qquad (13.3.4)$$

бета-функсия номида мешавад. Интеграли (13.3.4) барои қиматҳои $\rho>0$, $q>0$ наздикшаванда мебошад.

Ҳангоми $\rho>0$, $q>0$ будан интеграли

$$B(\rho,q)=\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{(1+t)^{\rho+q}}dt \qquad (13.3.5)$$

наздикшаванда мебошад. Байни B ва Γ - функсия алоқамандии зерин мавҷуд аст:

$$B(\rho,q)=\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(q)}{\Gamma(\rho+q)}. \qquad (13.3.6)$$

Бета-функсия нисбат ба аргументҳои худ ρ ва q симметрӣ мебошад, пас,

$$B(\rho,q)=B(q,\rho).$$

Мисоли 13.3.1. Интеграли Эйлер-Пуассон

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \text{ -ро}$$

ҳисоб кунед.

Ҳал. Гузориши $x^2=t$ -ро ичро менамоем ва ҳосил мекунем:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\left|\begin{matrix} x^2=t & dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \\ x=\sqrt{t} & \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Мисоли 13.3.2. $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)$-ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Аз (13.3.2) истифода бурда, меёбем:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{3,14}\approx 1,33$$

Мисоли 13.3.3. Ҳисоб кунед:

$$\int_0^\infty x^m e^{-x^n} dx \qquad (n>0).$$

Ҳал. Тағйирёбандаро иваз намуда, меёбем:

$$\int_0^\infty x^m e^{-x^n} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^n, \; dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \\ x = \sqrt[n]{t} \end{array} \right| = \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

Мисоли 13.3.4. Ҳисоб кунед:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

Ҳал. Барои ҳалли ин мисол аз формулаҳои (13.3.5) ва (13.3.6) истифода мебарем:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2} dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{5/4+\frac{3}{4}}} dx = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Мисоли 13.3.5. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_0^\alpha x^2\sqrt{\alpha^2 - x^2} dx, \qquad (\alpha>0).$$

Ҳал. гузориши $x = \alpha\sqrt{t}$ -ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\int_0^\alpha x^2\sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \alpha\sqrt{t} \\ dx = \frac{\alpha dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{\alpha^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$=\frac{\alpha^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt=\frac{\alpha^4}{2}\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Мисоли 13.3.6. Ҳисоб кунед:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x dx.$$

Ҳал: Бо методи гузориш ҳисоб мекунем:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{t}, 0\le t\le 1\\ \cos x dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m+1}{2}}(1-t)^{\frac{n+1}{2}-1}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

Кори мустақилонаи 13.1.1

1. Аз баробарии $\int_0^{\beta}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\alpha rctg\,\frac{\beta}{\alpha}$ истифода бурда, интеграли $\int_0^{\beta}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^3}$ -ро ҳисоб кунед.

2. Аз формулаи $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{1+\alpha x}=\ln(1+\alpha\beta)\frac{1}{\alpha}$ истифода бурда, бо ёрии дифференсиронӣ бо параметр формулаи зерин ҳосил карда шавад:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{xdx}{(1+\alpha x)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\ln(1+\alpha\beta)-\frac{\beta}{\alpha(1+\alpha\beta)}.$$

3. Бо ёрии дифференсиронӣ бо параметр, интегралҳои зерин ҳисоб карда шаванд:

а) $\int_0^1 \frac{arctg\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}$, б) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, $(\alpha^2 \angle 1)$.

4. Ёфта шавад: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$.

Кори мустақилонаи 13.1.2.

1. Интеграли $J(\alpha)=\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(\alpha tgx)}{tgx}dx$ ҳисоб карда шавад.

2. Формулаи $\frac{arctgx}{x}=\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$ -ро истифода бурда, интеграли $\int_0^1 \frac{arctgx}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ - ро ҳисоб кунед.

3. Интегралро ҳисоб кунед:

$$J=\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}dx.$$

4. Интегралро ҳисоб кунед:

$$\int_0^\pi \ln(1+\sin\alpha\cdot\cos x)\frac{dx}{\cos x}.$$

Кори мустақилонаи 13.2.1.

1. Соҳаи наздикшавии интеграли

$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1+x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$ -ро ёбед.

2. Доир ба мунтазам наздикшавӣ тадқиқ кунед (аломати Вейерштрасс):

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$, $(-\infty<\alpha<\infty)$,

б) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln^{\rho} x}{x\sqrt{x}}$, $(0\le\rho\le 10)$,

в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $(0\le n<\infty)$,

3. Ёфта шавад: $J(\lambda)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{\lambda^2+x^2}{x^2}}dx$.

Кори мустақилонаи 13.2.2

1. Бо параметр дифференсиронида, интегралҳои зеринро ҳисоб кунеда:

а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^{x}}dx$, (α>-1), б) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx$ (α^2<1),

2. Ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctg\lambda x}{x(1+x^2)}dx$, б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2-x^{\mu}}{\ln x}dx$. (2,μ>0).

Кори мустақилонаи 13.3.1.

1. Ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_{0}^{\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$; ($n$ - бутуни мусбат),

б) $\Gamma(-2,1)$; в) $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right).\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)$;

г) $\left(-\frac{1}{4}\right)!$

д) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$;

е) $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx,$ (ρ>-1)

Кори мустақилонаи 13.3.2.

1. Ҳисоб кунед:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{\,n}\, xdx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^8 xdx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$;

г) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$.

2. Ёфта шавад:

а) $\int\limits_0^{\alpha} x^{2n}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$; (α>0),

б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Ҷавобҳо

К.М.13.1.1.

3. а) $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$, б) $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$, 4. $\ln\frac{2e}{1+e}$.

К.М.13.1.2.

1. $J(\alpha)=\frac{\pi}{2}Sgh\ln(1+101)$. **2.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

3. $\frac{1}{2}\ln\frac{в^2+2в+2}{\alpha^2+2\alpha+2}$. 4. $\pi\alpha$.

К.М.13.2.1.

1. $n>\frac{1}{2}$ ё $n<0$. 2. а) мунтазам наздикшаванда, б) мунтазам наздикшаванда, в) мунтазам наздикшаванда, 3. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-22}$.

К.М. 13.2.2.

1. а) $\ln(1+\alpha)$, б) $\pi\arcsin\alpha$, 2. а) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\lambda)$, б) $\ln\frac{\ln(1+\lambda)}{1+\mu}$.

К.М.13.3.1.

1. а) $\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, б) $-4{,}5781$, в) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{5}$, г) 0.1225,

д) $\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, е) $\Gamma(\rho+1)$.

К.М.13.3.2.

1. а) $\frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2},1-\frac{n+1}{2}\right)$, б) $\frac{5\pi}{2^{12}}$, в) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$,

г) $\frac{5}{2}\quad\beta\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2. а) $\frac{(4n-1)!\pi}{(2n+1)!2^{2n+3}}\alpha^{2n+1}$, б) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

§ 1. Қатори Фурйе

1. Бигузор, системаи функсияҳои тригонометрии

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ldots$$

дар порчаи $[-l;l]$ муайян карда шуда бошанд. Қатори тригонометрии

$$f(x)=\frac{\alpha_{\circ}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (14.1.1)$$

қатори Фурйе номида мешавад. Коэффитсентҳои қатори Фурйе α_k ва β_k бо формулаҳои

$$\alpha_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \qquad \beta_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (14.1.2)$$

муайян карда мешаванд.

Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[-\pi,\pi]$ бо даври 2π муайян карда шуда бошад, он гоҳ қатори Фурйеи функсияи $f(x)$ чунин намуд дорад:

$$f(x)=\frac{\alpha_{\circ}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx), \qquad (14.1.3)$$

ки дар ин ҷо

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx, \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx, \qquad (k=0,1,2,\ldots). \qquad (14.1.4)$$

Агар қатори (14.1.1) ё (14.1.3) наздикшаванда бошад, он гоҳ суммаи қатор $S(x)$ функсияи даврӣ бо даври 2π мебошад, яъне

$$S(x+2\pi)=S(x).$$

Дар ҳолати $f(x)$- ҷуфт будан, қатори Фурйеи он чунин навишта мешавад:

$$f(x)=\frac{\alpha_\circ}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{\ell};\quad \alpha_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{e}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,$$

ҳангоми тоқ будани функсияи $f(x)$ қатори Фурйеи он дар порчаи $[-\ell;\ell]$ чунин намуд дорад:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx;\quad \beta_k=\frac{2}{e}\int_0^{e}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx.$$

Мисоли 14.1.1. Функсияи даврии $f(x)=x+\pi$ -ро дар интервали $(-\pi,\pi)$ ба қатори Фурйе паҳн кунед.

Ҳал. Коэффитсентҳои қатори Фурйеро аз (14.1.4) муайян мекунем:

$$\alpha_\circ=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=$$

$$x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}x^2\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi-(-\pi)=2\pi$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kxdx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin kxdx=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx\\ dv=\sin kxdx; & v=-\frac{1}{k}\cos kx\end{matrix}\right|=$$

$$= -\frac{2x}{k\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi} + +\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kx dx = -\frac{2}{k}\cos k\pi + \frac{2}{\pi k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{k}(-1)^2 = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$f(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = \pi + 2(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots)$$

Мисоли 14.1.2. Функсияи $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ -ро дар порчаи $[0;2]$ ба қатори Фурйе паҳн кунед.

Ҳал. Функсияи додашударо бо тарзҳои гуногун ба қатори Фурйе паҳн намудан мумкин аст.

1. Функсияи $f(x)$-ро дар порчаи $[-2,0]$ ба тарзи ҷуфт давом медиҳем. Дар ҳолати $\ell = 2$ будан аз (14.1.2) меёбем:

$$\alpha_0 = \int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2)dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3)\Big|_0^2 = \frac{2}{3},$$

$$\alpha_m = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}dx = \left|\begin{array}{l} u = x - \frac{1}{2}x^2, du = (1-x)dx \\ dv = \cos\frac{m\pi x}{2}dx \\ v = \frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}dx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{m\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{m\pi x}{2} - \frac{2}{m\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}dx =$$

$$=-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=1-x, du=-dx\\ v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}, dv=\sin\frac{m\pi x}{2}dx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{m\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{4}{m^2\pi^2}\cos m\pi-\frac{4}{m^2\pi^2}=\frac{4}{m^2\pi^2}[1+(-1)^m]$$

$$b_m=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx=\int_0^2(x-\frac{1}{2}x^2)\sin\frac{m\pi x}{2}dx=0,$$

ҳамин тавр, ҳосил мекунем:

$$f(x)=-\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1+(-1))^m}{m^2}\cos\frac{m\pi x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+$$
$$+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6}\cos 3\pi x+\cdots)\cdot$$

2. Акнун функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[-2;0]$ ба тарзи тоқ давом медиҳем:

$$в_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{m\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x-\frac{1}{2}x^2, du=(1-x)dx\\ dv=\sin\frac{m\pi x}{2}dx,\\ v=\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}dx\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=1-x, du=-dx,\\ dv=\cos\frac{m\pi x}{2}dx, v=\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{m\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^x=-\frac{8}{m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{2}+\frac{8}{m^3\pi^3}=$$

$$=\frac{8}{m^3\pi^3}[1-(-1)^m],\ \ \alpha_m=0,\ \ (m=0,1,2,...).$$

Дар ин ҳолат қатори Фурйе чунин намуд мегирад:

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\sin\frac{m\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}(\sin\frac{\pi x}{2}+$$

$$+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots).$$

Мисоли 14.1.3. Функсияи $f(x)=|\sin x|$ -ро дар порчаи $[-\pi;\pi]$ ба қатори Фурей паҳн намоед.

Ҳал. Азбаски функсияи додашуда ҷуфт мебошад, бинобар ин, $\beta_m=0$ аст. Дар порчаи $[0;\pi]$, $f(x)=\sin x$ мебошад.

$$\alpha_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x+\sin(1-n)xdx]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n}\right]$$

Агар n- ҷуфт бошад, $n=2k$, он гоҳ $\cos(1\pm n)\pi=1$ ва $\alpha_n=\dfrac{4}{\pi(1-4k^2)}$ аст. Агар n -тоқ бошад, $n\neq 1$, он гоҳ $\alpha_n=0$ аст. Ҳангоми $n=1$ формулаи α_n- ёфтаамон татбиқ намешавад, бинобар ин, алоҳида ёфта мешавад:

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = 0$$

Ин натиҷаҳоро дар (14.1.3) гузошта ҳосил мекунем:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1-3} + \frac{\cos 4x}{3-5} + \frac{\cos 6x}{5-7} + \cdots\right].$$

§ 2. Интеграли Фурйе

1.Агар функсияи $f(x)$ дар интервали дилхоҳи тири Ox мутлақ интегрондашаванда бошад ё худ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ наздикшаванда бошад, он гоҳ барои вай интеграли Фурйе ҷой дорад:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dz\int_0^{\infty}f(u)\cos(u-x)du. \qquad (14.2.1)$$

Интеграли Фурйеро дар шакли комплексӣ чунин навиштан мумкин аст:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{it(u-x)}du. \qquad (14.2.1)$$

Барои функсияи ҷуфт интеграли Фурйе чунин навишта мешавад:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos zxdz\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos zudu,$$

ва барои функсияи тоқ ин тавр аст:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin zxdz\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin zudu.$$

II. Бо мафҳуми интеграли Фурйе табдилдиҳии Фурйе зич алоқаманд мебошад. Табдилдиҳии Фурйе дар намуди умумӣ чунин навишта мешавад:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}f(x)dx, \qquad \text{(роста)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izx}F(z)dz. \qquad \text{(баръакс)}$$

а) Косинуси-табдилдиҳии Фурйе:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos zx dx, \qquad \text{(роста)}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f_c(x)\cos zx dz. \qquad \text{(баръакс)}$$

б) Синус-табдилдиҳии Фурйе:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin zx dx, \qquad \text{(роста)}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f_s(z)\sin zx dz. \qquad \text{(баръакс)}$$

Мисоли 14.2.1. Функсияи додашударо ба намуди интеграли Фурйе тасвир кунед:

а) $f(x)=\begin{cases}-e^{x}, x\le 0\\ e^{-x}, x>0\end{cases}$, б) $f(x)=\begin{cases}2, & 0<x<3\\ 1, & x=3\\ 0, & x>3.\end{cases}$

Ҳал. а) Функсияи додашуда тоқ мебошад. Бинобар ин, ҳосил мекунем:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\,\alpha x d\alpha\int_0^{\infty}e^{-t}\sin\,\alpha t dt\ .$$

Интеграли дохилиро бо формулаи қисм-қисм интегронй ҳисоб мекунем:

$$J=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=\lim_{\beta\to\infty}\frac{e^{-t}(\sin\alpha t+\alpha\cos\alpha t)}{1+\alpha^2}\Big|_{\beta}^{0}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2},$$

аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha,\quad x\neq 0\,.$$

б) Функсияи $f(x)$ танҳо дар интервали $(0;+\infty)$ муайян карда шудааст. Бинобар ин, вайро бо намуди гуногун, бо ёрии интеграли Фурйе навиштан мумкин аст. Дар ҳолати ҷуфт будан $f(x)$-ро ба интервали $(-\infty;0]$ давом дода, меёбем:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\alpha x dx\int_0^{3}\cos\alpha t dt=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x\sin 3\alpha}{\alpha}d\alpha\ .$$

Дар мавриди тоқ будан $f(x)$ онро дар интервали $(-\infty,0)$ давом дода ҳосил мекунем

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha\,x d\alpha\int_0^{3}2\sin\alpha\,t\,dt=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos 3\alpha)\sin\alpha\,x}{\alpha}d\alpha\ .$$

Мисоли 14.2.2 Косинус ва синуси табдилдиҳии функсияи

$f(x)=e^{-x}$ -ро ёбед: $(x\geq 0)$

Ҳал. Косинус табдилдиҳии функсияи додашударо меёбем:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u}\cos zu du ,$$

азбаски $\int_0^{\infty}e^{-u}\cos zu du = \frac{1}{1+z^2}$ аст, пас,

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{z^2+1},$$ ҳамин тавр, меёбем:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z}{z^2+1},$$

дар навбати худ ба функсияҳои $f_c(z), f_s(z)$ косинус ва синус табдилдиҳии Фурйеро татбиқ намуда, ҳоснл мекунем:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos zx}{z^2+1}dz=e^{-x}, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin zx}{z^2+1}dz=e^{-x}.$$

Кори мустақилонаи 14.1.1.

1. Функсияи додашударо ба қатори Фурйе паҳн намоед:

а) $f(x)=\ell^{-x}$, $(-\pi;\pi)$; б) $f(x)=x^2$, $[-1;1]$.

2. Ба қатори Фурйе функсияи даврии $f(x)=\pi-2x$-ро $(T=2\pi)$ дар $[0;\pi]$ паҳн кунед $f(x)$-ро дар порчаи $[0;\pi]$:

1) Бо тарзи ҷуфт,

2) Бо тарзи тоқ давом диҳед.

3. Функсияи даврии додашударо ба қатори Фурйе паҳн намоед:

$$f(x)=|x|, \ -1<x\le 1, \ f(x+2)=f(x).$$

Кори мустақилонаи 14.2.1.

1. Функсияи додашударо ба намуди интеграли Фурйе тасвир кунед:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\angle 0\\ \pi x, & 0\le x\le 1\\ 0, & x\ge 0,\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\angle x\angle\pi\\ 0, & |x|\ge\pi.\end{cases}$

2. Косинус ва синус табдилдиҳии Фурйе ёфта шавад:

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\alpha\\ \frac{1}{2}, & x=\alpha\\ 0, & x\ge\alpha.\end{cases}$$

3.Табдилдиҳии Фурйе ёфта шавад:

$$f(x)=\begin{cases}-\ell^{x}, & -1\le x\le 0\\ \ell^{-x}, & 0\le x\le 1\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

Ҷавобҳо

К.М.14.1.1.

1. а) $\dfrac{\ell^{\pi}-\ell^{-\pi}}{2}[\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)]$,

б) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x$.

2. $\dfrac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$, 3. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

К.М.14.2.1.

1. а) $\int_0^{\infty}\frac{(a\sin\alpha+\cos\alpha-1)\cos\alpha x+(\sin\alpha-a\cos\alpha)\sin\alpha x}{\alpha^2}dx$,

б) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\pi x}{1-\alpha^2}d\alpha$.

2. $f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha z}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\alpha z}{z}$.

3. $F(z)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\ell z-\sin z-z\cos z}{\ell(1+z^2)}$.

Боби XV. Муодилаҳои дифференсиалӣ

§1. Муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум

1.**Мафҳумҳои асосӣ.** Муодилаи дифференсиалӣ гуфта дар намуди умумӣ муодилаи

$$F\left(x;y;y',\ldots\ldots,y^{(n)}\right)=0$$ - ро

меномем. Кадоме, ки алоқамандии y ва тағйирёбандаи новобастаи x ва ҳосилаҳои онро ифода мекунад. Тартиби муодилаи дифференсиалӣ гуфта тартиби калонтарин ҳосилаи онро меноманд. Агар функсияи ҷусташаванда аз як аргумент вобаста бошад, муодилаи дифференсалии оддӣ номида мешавад. Агар функсияи ҷусташаванда аз якчанд тағйирёбандаҳо вобаста бошад, муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ номида мешавад. Дар ин мавзӯъ ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии оддӣ машғул мешавем.

Ҳалли муодилаи дифференсиалӣ гуфта функсияеро меномем, ки ҳангоми дар муодила гузоштан, муодиларо ба айният табдил диҳад. Масалан,

$y' = x+y,\quad y' = x\sin x + y$ - муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва $y''+y=x$ - муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм номида мешаванд.

Муодилаи дифференсиалии тартиби якум

$$F\left(x;\, y;y'\right)=0 \qquad \text{ё} \qquad y' = f(x;y)$$ - ро

мегирем. Бигзор, $y=y(x)$ ҳалли муодилаи дифференсиалӣ бошад. Графики ин функсия дар ҳамвории системаи координатаи xoy, хати каҷ мешавд.

Теоремаи Коши. Агар дар муодилаи $y' = f(x,y)$ функсияи $f(x,y)$ ва ҳосилаи хусусӣ нисбат ба y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ дар ягон соҳаи ҳамвории xoy бефосила бошад, он гоҳ аз дилхоҳ нуқтаи $\left(x_0;y_0\right)$ - и ин соҳа якто ва фақат якто хати каҷи интегралии ин муодилаи дифференсиалӣ мегузарад.

Шарти дода шудани қимати функсияи y дар нуқтаи x_0-ро шарти аввала (ё шарти Коши) меноманд ва он чунин навишта мешавад:

$$y\big/_{x=x_0} = y(x_0) = y_0 \ .$$

Масъалаи ёфтани ҳалли муодилаи дифференсиалии $y' = f(x,y)$ бо шарти авваларо масъалаи Коши меноманд.

Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии $y' = f(x,y)$ гуфта функсияи $y = \varphi(x,C)$ - ро меномем, ки шартҳои зеринро қаноат мекунонад:

1) барои дилхоҳ қимати доимии C муодилаи дифференсиалии $y' = f(x,y)$ - ро қаноат мекунонад;

2) барои ҳаргуна шарти аввала ҳамин гуна қимати C_0 ёфта мешавад, ки $y = \varphi(x,C_0)$ шарти аввалаи додашударо қаноат мекунонад.

Ҳалли умумие, ки ба намуди

$$\varphi(x,y,C) = 0$$

навишта шудааст, интеграли умумӣ номида мешавад. Агар дар ҳалли умумии $y = \varphi(x,C)$ қимати $C = C_0$ қайд карда шавад, он гоҳ $y = \varphi(x,C_0)$ ҳалли хусусии муодилаи дифференсиалӣ номида мешавад.

2. Муодилаи дифференсиалии бо тағйирёбандаҳо ҷудошуда. Муодилаи дифференсиалии

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

муодилаи дифференсиалии бо тағйирёбандаҳо ҷудошуда номида мешавад. Ин муодиларо интигронида, интеграли умумии онро меёбем:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

Мисоли 15.1.1. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии

$$y^2 dy = (1-2x)dx \text{ - ро ёбед:}$$

Ҳал. Муодилаи додашударо интегронида, ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{3}y^3 = x - x^2 + C \quad \text{ё} \quad y = \sqrt[3]{3C_0 + 3x - 3x^2}.$$

3. Муодилаҳои дифференсиалии бо тағйирёбандаҳо ҷудошаванда. Муодилаи дифференсиалии намуди

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (15.1.1)$$

муодилаи дифференсиалии бо тағйирёбандаҳо ҷудошаванда номида мешавад.

Ҳар ду тарафи муодилаи (15.1.1)- ро ба $\varphi_1(x)\cdot f_2(y)$ тақсим иамуда, ҳосил мекунем: $(\varphi_1(x)\neq 0, \quad f_2(y)\neq 0)$

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Баробарии охиринро интегронида, ҳосил мекунем:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Мисоли 15.1.2. Ҳалли умумии муодиларо ёбед:

$$\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0.$$

Ҳал. Ҳар ду тарафи муодиларо ба $\sqrt{1-y^2}$ тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Ин баробариро меинтигронем:

$$x + C = -\frac{1}{2}\int\frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -\sqrt{t}.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$x + C = -\sqrt{1-y^2}$ ё $(x+C)^2 + y^2 = 1.$ $y = \pm 1$ низ ҳал мебошад

Мисоли 15.1.3. Ҳалли умумии муодилаи

$$y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$ - ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи додашударо нисбат ба тағйирёбандаҳо ҷудо мекунем:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Аз ин ҷо интегронида, ҳосил мекунем $\arcsin x + \arcsin y = C$. Азбаски $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$ мебошад, бинобар ин, ҳосил мекунем:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C,$$ дар ин ҷо $C = \sin C_1$ мебошад.

Ҳолати $y = \pm 1$ будан.

Мисоли 1.1.4. Муодилаи дифференсиалии

$y' = \dfrac{2xy^2}{x^2-1}$ - ро ҳал кунед ва ҳалли хусусии шарти $y_{(0)} = 1$ -ро қаноат кунонад ёбед.

Ҳал. Ба тағйирёбандаҳо ҷудо мекунем:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{2xdx}{x^2-1}.$$

Муодилаи дифференсиалии ҳосилшударо меинтегронем:

$$\frac{1}{y} = \ln\left|x^2-1\right| + C.$$

Аз ин ҷо ҳалли умумиро ҳосил мекунем:

$$y\left(\ln\left|x^2-1\right| + C\right) = 1.$$

Шарти аввалаи $y_{(0)} = 1$ - ро мегузорем: $1 \cdot (0 + C) = 1, \quad C = 1.$

Акнун ҳалли масъаларо менависем:

$$y=\frac{1}{\ln|x^2-1|+1}$$

4. Муодилаи дифференсиалии якҷинсаи тартиби якум. Функсияи $f(x,y)$ якҷинсаи ченаки n -ум номида мешавад, агар барои дилхоҳ λ

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$ бошад.

Масалан, функсияи $f(x,y)=xy-y^2$ функсияи якҷинсаи ченаки 2-юм мебошад, чунки $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x\cdot\lambda y-\lambda^2y^2=\lambda^2 f(xy-y^2)=\lambda^2 f(x,y)$ аст.

Функсияи $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ функсияи якҷинсаи ченаки сифр мебошад, яъне

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y}{\lambda x}=\frac{y}{x}=\lambda^0\cdot f(x,y)=f(x,y).$$

Муодилаи дифференсиалии

$$y'=f(x,y)$$

якҷинса номида мешавад, агар $f(x,y)$ - функсияи якҷинсаи ченаки сифр бошад. Муодилаи дифференсиалӣ бо гузориши $u=\dfrac{y}{x}$ ё $y=xu$ ҳал карда мешавад.

Мисоли 15.1.5. Ҳалли умумии муодилаи $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ - ро ёбед.

Ҳал. Азбаски ин муодила якҷинса мебошад, бинобар ин, гузориши $y=x\cdot u$ -ро истифода мебарем: $y'=u+xu'$. Муодилаи додашуда намуди $u+xu'=\dfrac{1+u}{1-u}$ - ро мегирад.

Аз ин ҷо меёбем:

$$xu'=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u-u+u^2}{1-u}=\frac{1+u^2}{1-u},$$

$$xu' = \frac{1+u^2}{1-u}, \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}du.$$

Баробарии ҳосилшударо интигронида, меёбем:

$$\ln|x| + C = arctgu - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right).$$

Ба тағйирёбандаи аввала баргашта, ҳосил мекунем:

$$\ln|x| + C = arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$arctg\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + \ln|x| + C,$$

$$arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + C.$$

Мисоли 15.1.6. Ҳалли хусусии муодилаи дифференсиалии $\left(y^2-3x^2\right)dy + 2xydx = 0$ - ро бо шарти аввалаи $y_{(0)} = 1$ ёфта шавад.

Ҳал. Гузориши $y = xu$ - ро ичро намуда, ҳосил мекунем:

$$dy = udx + xdu \quad \text{ё} \quad \left(x^2u^2 - 3x^2\right)\left(udx + xdu\right) + 2x^2udx = 0.$$

Ба x^2 тақсим мекунем:

$$u\left(u^2-3\right)dx + x\left(u^2-3\right)du + 2udx = 0,$$

$$u\left(u^2-1\right)dx = x\left(u^2-3\right)du = 0.$$

Бо тағйирёбандаҳо чудо намуда, ҳосил мекунем:

$\frac{u^2-3}{u\left(u^2-1\right)}du = -\frac{dx}{x}$, ифодаи ҳосилшударо табдилдиҳӣ намуда меинтигронем:

$$u^3 - 3 = 3u^2 - 2u^2 = 3\left(u^2-1\right) - 2u^2$$

$$\int\frac{u^2-3}{u(u^2-1)}du=\int\frac{3(u^2-1)-2u^2}{u(u^2-1)}du=\int\frac{3du}{u}-2\int\frac{u}{u^2-1}du=3\ln|u|-\ln|u^2-1|=-\ln x+C,$$

$$\frac{u^2}{u^2-1}=\frac{C_1}{x}. \qquad C_1=e^C.$$

Ба тағйирёбандаҳои аввала баргашта, ҳосил мекунем:

$$\frac{y^3}{x^3}x=C_1\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right) \quad \text{ё} \quad y^3=C_1(y^2,-x^2),$$

Шарти аввваларо истифода бурда, меёбем:

$y_{(0)}=1=C_1(1-0),\ C_1=1.$ аз ин ҷо $y^3=y^2-x^2$ мебошад.

5. Муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби якум. Муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби якум гуфта муодилаи намуди

$$y'+p(x)y=q(x) \text{ - ро меноманд.}$$

Ин муодила барои он хаттӣ номида мешавад, ки y ва y' хаттӣ ҷойгир шудаанд.

Яке аз усулҳои ҳалли муодилаи хаттӣ ин усули Бернулӣ мебошад. Ҳалли муодиларо ба намуди $y=u(x)\cdot v(x)$ мекобем. Яке аз функсияҳоро ихтиёрӣ интихоб менамоем, дигараш дар асоси муодилаи дифференсиалӣ муайян карда мешавад. Гузориши $y=u\cdot v$ - ро иҷро мекунем:

$$u'v+uv'+puv=q \quad \text{ё} \quad u'v+u(u'+pv)=q.$$

Функсияи $v=v(x)$ - ро чунин интихоб мекунем:

$$v'+pv=0, \qquad \frac{dv}{dx}+pv=0, \qquad \frac{dv}{dx}=-pv, \qquad \frac{dv}{v}=-pdx.$$

Баробарии охиронро интегронида ҳосил мекунем:

$$\ln|v|=-\int pdx+\ln|C_0|. \qquad |v|=C_1e^{-\int pdx},.$$

Функсияи $v = C_1 e^{-\int p dx}$ - ро ба муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$u' \cdot v = q(x) \quad \text{ё} \quad v(x)\frac{du}{dx} = q(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v(x)}.$$

Муодиларо ҳал намуда $u(x)$ - ро меёбем:

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Қиматҳои u ва v - ро дар баробарии $y = u \cdot v$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$y = v(x)\left[\int \frac{q(x)}{v(x)} dx + C\right] = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx\right].$$

Мисоли 15.1.7. Муодиларо ҳал намоед: $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$.

Ҳал. Гузориши $y = u \cdot v$ - ро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3.$$

Ифодаи дохили қавсро ба сифр баробар мекунем:

$$v' - \frac{2v}{x} = 0, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2}{x} dx.$$

Функсияи v - ро меёбем:

$$\ln v = \ln x^2, \qquad v = x^2.$$

Қимати функсия v - ро дар муодила гузошта, u - ро меёбем:

$$u' x^2 = 2x^3, \qquad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad u = x^2 + C.$$

Аз ин ҷо $y = (x^2 + C)x^2$ мешавад.

6. Муодилаи Бернули. Муодилаи Бернулӣ чунин намуд дорад

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

ки дар ин ҷо $n \neq 0$, $n \neq 1$ аст.

Муодилаи Бернулӣ бо ёрии гузориши $z = y^{1-n}$ ба муодилаи хаттӣ оварда мешавад. Пас, аз ҳалро ба монанди ҳалли муодилаи хаттӣ мекобем.

Мисоли 15.1.8. Муодиларо ҳал кунед: $y' + 2y = e^x y^2$

Ҳал. Гузориши $y = u \cdot v$ - ро иҷро мекунем:

$$u'v + uv' + 2uv' = e^x (uv)^2, u' v + u(v' + 2v) = e^x (uv)^2.$$

Ифодаи дохили қавсро ба сифр баробар карда, меёбем:

$$v' + 2v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -2dx, \quad \ln v = -2x, \quad v = e^{-2x}.$$

Ба муодила мегузорем:

$$u' e^{2x} = u^2 e^{-4x} \cdot e^x, \quad u' = u^2 e^{-x}, \quad \frac{du}{dx} = u^2 e^{-x}.$$

Ба тағйирёбандаҳо ҷудо мекунем:

$$\frac{du}{u^2} = e^{-x} dx, \quad -\frac{1}{u} = -e^{-x} + C_1, \quad u = \frac{1}{e^{-x} + C} \quad (C_1 = -C)$$

Натиҷаи ҳосилшударо дар $y = u \cdot v$ мегузорем: $y = \dfrac{1}{e^{-x} + C} \cdot e^{-2x}$.

Мисоли 15.1.9. Ҳалли умумии муодилаи $y' - tgxy = -\cos x y^2$ - ро ёбед.

Ҳал. Гузориши $y = u \cdot v$ - ро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$u'v + uv' - uvtgx = -\cos x u^2 v^2,$$

$$u'v + uv' - uvtgx = -\cos x u^2 v^2,$$

$$v' - tgxv = 0, \quad \frac{v'}{v} = tgx, \quad \frac{du}{v} = tgxdx.$$

Ифодаи охиринро интегронида, ҳосил мекунем:

$$\ln|v| = -\ln|\cos x|, \qquad v = \frac{1}{\cos x}.$$

Он гоҳ қимати функсияи v-ро дар муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$u' = -u^2 \qquad du = -u^2\,dx, \qquad \frac{1}{u} = x + C,$$

$$u = \frac{1}{x+c}, \qquad y = u \cdot v = \frac{1}{\cos x}(x+c)^{-1} \qquad \text{ё} \qquad (x+C)y = \frac{1}{\cos x}.$$

§2. Татбиқи муодилаҳои дифференсиалӣ дар иқтисодиёт

Татбиқи муодилаҳои дифференсиалиро дар ҳалли баъзе масъалаҳои иқтисодӣ дида мебароем. Ба сифати тағйирёбандаи новобаста t - ро мегирем. Дар ин ҷо вақтро бефосила меҳисобем, он гоҳ муодилаҳои дифференсиалиро татбиқ намудан имконпазир мебошад.

Аз муодилаҳои оддитарин омӯзишро сар мекунем: $y' = g(y)$. Маълум аст, ки ин ҳолати хусусии муодилаи дифференсиалии тағйирёбандаҳояш ҷудошуда мебошад. Ин гуна муодилаҳо дар ҳалли масъалаҳои динамикии иқтисодиёт во меҳӯранд.

Бигзор, y_0 решаи муодилаи $g(y) = 0$ бошад, пас $y = y_0$ ҳалли муодилаи $y' = g(y)$ мебошад. Ин намуд хал, ҳалли статсионарӣ номида мешавад.

Модели Кейнс. Бигзор, $y(t)$ - даромади миллӣ, $E(t)$ -хароҷотҳои давлатӣ, $S(t)$ - истеъмолот, $I(t)$- сармоягузорӣ бошанд. Ҳамаи ин функсияҳо аз бузургии вақт - t вобаста мебошанд.

Муодилаи ҳисоббаробаркуниро тартиб медиҳем. Пеш аз ҳама, суммаи ҳамаи хароҷотҳо бояд ба даромади миллӣ баробар бошад:

$$y(t) = S(t) + I(t) + E(t).$$

Истеъмолоти умумӣ $S(t)$ аз истеъмолоти дохилии қисми даромади миллӣ ва бар зами ин истемоли ниҳоӣ иборат мебошад. Ҷамъшавандаи якум намуди

$a(t), y(t)$ - ро дорад, $a(t)$ - коэффисиенти моилӣ ба истемолот $(0<a(t)<1)$, ҷамшавандаи дуюмро бо $b(t)$ ишора мекунем:

$$S(t)=a(t)y(t)+b(t)$$

Ҳамин тавр, ченаки сармоягузорӣ - $m=m(t)$ бо ҳудуди даромади миллӣ муайян карда мешавад:

$$I(t)=m(t)\,y'(t).$$

Системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} y(t)=S(t)+I(t)+E(t), \\ S(t)=a(t)y(t)+b(t), \\ I(t)=m(t)\,y'(t) \end{cases}$$

Ҳамаи функсияҳои дар система мавҷуд буда мусбат мебошанд.

Фарз мекунем, ки функсияҳои $a(t), b(t), m(t)$ ва $E(t)$ дода шудаанд ва характеристикаи фаъолият кардани ҳамин давлат мебошанд.Талаб карда мешавад, ки динамикаи даромади милли ёфта шавад, яъне y ҳамчун функсия аз вақт муайян карда шавад.

Аз муодилаҳои дуюм ва сеюм функсияҳои $S(t)$ ва $y(t)$ - ро ба муодилаи якум мегузорем:

$$y(t)=a(t)\,y(t)+b(t)+m(t)y'(t)+E(t).$$

Аз ин ҷо $y'(t)$ - ро меёбем:

$$y'(t)=\frac{1-a(t)}{m(t)}y(t)-\frac{b(t)+E(t)}{m(t)}.$$

Ин муодилаи хаттии тартиби якум нисбат ба $y(t)$ мебошад.

$$y'(t)+p(t)\,y(t)=q(t),$$

дар ин ҷо

$$-p(t)=\frac{1-a(t)}{m(t)}, \qquad -q(t)=\frac{b(t)+E(t)}{m(t)}$$ мебошад.

Муодилаи ҳосилшударо ҳамчун муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби якум ҳал намудан мумкин аст.

Муодилаи Самуэлсон. Муодилаи Самуэлсон чунин намуд дорад,

$$p' = k\,[Д(p)-S(p)]$$

дар ин ҷо $Д(p)$ ва $S(p)$ мувофиқан бузургиҳои арза ва тақозо бо нархҳои $p, k>0$ мебошанд.

Ҳолати оддирро мегирем, фарз мекунем, ки вобастагии тақозо ва арза бо функсияи хаттӣ дода мешаванд:

$$Д(p)=a-bp, \qquad S(p)=m+np,$$

ки дар ин ҷо a, b, m, n ягон ададҳои доимии мусбат мебошанд.Дар ин ҳолат маълум аст, ки $a>m$ аст. Чунки ҳангоме, ки нарх сифр бошад, талабот нисбат ба пешниҳод зиёд мешавад. Дар ин ҳолат муодилаи Самуэлсон чунин намудро мегирад:

$$p' = k(a-m)-k(n+b)p,$$

$$p' + k(n+b)p = k(a-m).$$

Муодилаи ҳосилшуда,муодилаи дифференсиалии хаттӣ мебошад ва онро ҳамчун муодилаи хаттӣ ҳал намудан мумкин аст

§ 3. Муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм.

1. **Мафҳумҳои асосӣ**. Муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм чунин намуд дорад (намуди каноникӣ):

$$y''=f(x,y,y') \qquad (15.3.1)$$

Шартҳои аввала барои муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюми (15.3.1) чунин гузошта мешаванд:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0}=y'_0 \qquad \mathbf{(15.3.2)}$$

Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм гуфта функсияи

$y=\psi(x,C_1,C_2)$ -ро меномем, ки агар дар муодила гузорем, барои дилхоҳ қиматҳои доимиҳои C_1 ва C_2 муодиларо қаноат мекунонад.Қиматҳои доимиҳои $C_1=\widetilde{C}_1$, $C_2=\widetilde{C}_2$ мавҷуданд, ки функсияи $y=\psi(x,\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2)$ шартҳои (15.3.2)-ро қаноат мекунонад. Функсияи $y=\psi(x,\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2)$ ҳалли хусусии муодилаи (15.3.2) номида мешавад.

Дар баъзе ҳолатҳо ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуюмро ба ҳалли пайдарпаи ду муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум овардан мумкин аст. Муодилаҳои дифференсиалии якумро ҳал намуда баъдан ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби дуюмро меёбем.

2. Муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои доимӣ. Муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои доимӣ чунин намуд дорад:

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (15.3.3)$$

ки дар ин ҷо p ва q -ададҳои доимӣ мебошанд. Функсияи $f(x)$ қисми рости муодилаи (15.3.3) номида мешавад, агар $f(x)=0$ бошад, муодила якҷинса ва ҳангоми $f(x)\neq 0$ будан муодилаи (14.3.3) ғайриякҷинса номида мешавад.

3. Муодилаҳои дифференсиалии хаттии якҷинса бо коэффисиентҳои доимӣ. Чи тавре ки дар боло қайд намудем, муодилаи дифференсиалии хаттии якҷинсаи тартиби дуюм бо коэффисиентҳои доимӣ чунин намуд дорад:

$$y''+py'+qy=0\,. \qquad (15.3.4)$$

Баъзе хосиятҳои муодилаи (15.3.4)-ро меомузем:

1) Агар y_0 ҳалли муодилаи (15.3.4) бошад, он гоҳ ҳосили зарби Cy_0 низ ҳалли ин муодила мешавад.

2) Агар функсияҳои $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ҳалҳои муодилаи (15.3.4) бошанд, он гоҳ

суммаи $y_1(x)+y_2(x)$ ҳалли муодилаи (15.3.4) мешавад.

Ду ҳаллҳои муодилаи (15.3.4) хаттии новобаста номида мешаванд, агар қимати $\alpha y_1+\beta y_2$ барои қиматҳои аз сифр фарққунандаи α ва β ба сифр баробар нашавад.

Бо ибраи дигар гӯем, функсияҳои y_1 ва y_2 он гоҳ ва фақат он гоҳ хаттии новобаста мешаванд, ки нисбати онҳо доимӣ набошад, яъне $\frac{y_1}{y_2}\neq const.$ Дар ҳолати муқобил функсияҳои y_1 ва y_2 хаттии вобаста номида мешаванд.

Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ду ҳалли хаттии новобастаи муодилаи (15.3.4) бошанд, он гоҳ $y=C_1y_1+C_2y_2$, ки дар ин ҷо C_1, C_2 - доимиҳои ихтиёрианд, ҳалли умумии муодилаи (15.3.4) номида мешавад.

Ҳалли хусусии муодилаи (15.3.4)-ро ба намуди $y=e^{kx}$ мекобем. Азбаски $y'=ke^{kx}, y''=k^2e^{kx}$ мебошанд, дар (15.3.4) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\left(k^2+pk+q\right)e^{kx}=0 \quad \text{ё} \quad k^2+pk+q=0 \qquad (15.3.5)$$

(15.3.5) -муодилаи характеристикии муодилаи (15.3.4) номида мешавад.

Акнун решаҳои муодилаи характеристикии (15.3.5)-ро меомӯзем, маълум аст, ки

$$k_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$ мебошад. Аз ин ҷо

$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ мешавад. Дар ин ҳолат

$y_1=e^{k_1x}$

ва $y_2 = e^{k_2 x}$ ҳалҳои хусусии муодилаи (15.3.4) мебошанд. Азбаски

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq C \quad \text{мебошад,}$$

бинобар ин, ин ҳалҳо хаттӣ новобаста мебошанд. Дар ҳамин асос ҳалли умумии муодилаи (15.3.4) намуди

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \text{ -ро дорад.} \qquad (15.3.6)$$

Се ҳолатҳо ҷой доранд:

а) Решаҳои муодилаи (15.3.5) ҳақиқӣ гуногун буда, дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи (15.3.4) ба намуди (15.3.6) навишта мешавад.

б) Решаҳои муодилаи характеристикии (15.3.5) ҳақиқӣ баробаранд:

$$\left(k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}\right)$$

Дар ин ҳолат ба сифати яке аз ҳалҳои хусусӣ

$$y_1 = e^{kx}, \quad k = k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

ҳалли дуюмро ба намуди $y_2 = u(x)e^{kx}$ мекобем:.

$$y'_2 = u'(x)e^{kx} + ku(x)e^{kx},$$
$$y''_2 = u''(x)e^{kx} + 2k\,u'(x)e^{kx} + k^2 u(x)e^{kx}.$$

Ифодаҳои y_2, y'_2, y''_2 -ро ба муодилаи (15.3.4) гузошта, ҳосил мекунем:

$$u''e^{kx} + 2ku'e^{kx} + k^2 u e^{kx} + p\left(u'e^{kx} + ku\,e^{kx}\right) + qu\,e^{kx} =$$
$$= e^{kx}\left[u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)u\right] = 0.$$

Азбаски k -решаи муодилаи характеристикӣ мебошад,, бинобар ин, $k^2 + pk + q = 0$, $2k + p = 0$, $e^{kx} \neq 0$ аст. Пас, $u''(x) = 0$ мебошад. Ин муодиларо интегронида, ҳосил мекунем:

$$u(x) = Ax + B$$

Ба мо ҳалли хусусии ихтиёрии дуюм лозим аст, бинобар ин, $u(x) = x$ -ро мегирем. Дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи (15.3.4) намуди зеринро мегирад:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}, \qquad k = -\frac{p}{2}.$$

в) Решаҳои муодилаи (15.3.5) комплексӣ:

$$k_1 = \alpha + i p, \quad k_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \text{ аст.}$$

Функсияҳои

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$
$$\tilde{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

муодилаи (15.3.4)-ро қаноат мекунонанд, вале функсияҳои

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

низ муодилаи (15.3.4)-ро қаноат мекунонанд.

Аз ин лиҳоз дар, ин ҳолат ба сифати ҳалли умумии муодилаи (15.3.4) функсияи $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ - ро гирифтан мумкин аст.

Мисоли 15.3.1. Муодиларо ҳал кунед:

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Ҳал. Муодилаи характеристикиро тартиб медиҳем:

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

Решаҳои муодиларо меёбем:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}, \qquad k_1 = 4, \qquad k_2 = 1.$$

Ҳалли умумии муодилаи додашударо функсияи $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x}$ мебошад.

Мисоли 15.3.2. Ҳалли хусусии муодилаи $8y'' + 2y' - 3y = 0$ – ро ёбед, бо шартҳои аввалаи $y_1(0) = -6$, $y2(0) = 7$.

Ҳал. Муодилаи характеристикии ин муодила чунин аст: $8k^2+2k-3=0$.

Муодиларо ҳал намуда, меёбем:

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot8\cdot3}}{2\cdot8}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{16}=\frac{-2\pm10}{16},$$

$$k_1=\frac{-2+10}{16}=\frac{1}{2}, \qquad k_2=\frac{-2-10}{16}=-\frac{3}{4}.$$

Ҳалли умумиро менависем $y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{3}{4}x}$. Барои ёфтани ҳалли хусусӣ ҳосилаи ин функсияро ҳисоб мекунем: $y=\frac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}x}-\frac{3}{4}C_2e^{-\frac{3}{4}x}$, аз шартҳои аввала истифода бурда нисбати C_1, C_2 системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} C_1+C_2=-6 \\ \frac{1}{2}C_1-\frac{3}{4}C_2=7 \end{cases}$$ – ро ҳосил мекунем.

Системаро ҳал намуда, меёбем: $C_1=2$, $C_2=-8$.

Ҳалли хусусӣ бо шартҳои аввалаи додашударо менависем: $y=2e^{\frac{x}{2}}-8e^{-\frac{3}{4}x}$.

Мисоли 15.3.3. Ҳалли умумии муодилаи $y''+4y'+4y=0$ – ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи характеристикӣ $k^2+4k+4=0$ мебошад, ин муодиларо ҳал намуда, меёбем: $k_1=k_2=-2$, аз ин ҷо ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$$

Мисоли 15.3.4. Ҳалли хусусии муодилаи $y''+2y'+y=0$ - ро бо шартҳои аввалаи $y(-1)=e$, $y'(-1)=4e$ ёбед.

Ҳал. Муодилаи характеристикӣ $k^2+2k+1=0$ мебошад. Аз ин ҷо $k_1=k_2=-1$ аст.

Ҳалли умумии муодила $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ мебошад.

Барои ёфтани ҳалли хусусӣ шартҳои аввaларо истифода мебарем:

$$y' = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x)e^{-x} = e^{-x}\left[-C_1 + (1-x)C_2\right],$$

$$y(-1) = (C_1 - C_2)e, \quad y'(-1) = (-C_2 + 2C_2)e, \quad C_1 = 6, \quad C_2 = 5.$$

Ҳалли хусусии муодилаи додашуда чунин намуд дорад: $y = (5x+6)e^{-x}$.

Мисоли 15.3.5. Ҳалли умумии муодилаи $y''+2y'+10y=0$ – ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи характеристикӣ $k^2 + 2k + 10 = 0$ мебошад. Ин муодиларо ҳал намуда, решаҳои онро меёбем: $k_1 = -1+3i, \ k_2 = -1-3i$

Ҳалли умумии муодиларо менависем: $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^{-x}$.

Мисоли 15.3.6. Ҳалли хусусии муодилаи $y''+4y'+5y=0$ -ро бо шартҳои аввалаш $y(0)=1, \ y'(0)=0$ ёбед.

Ҳал. Муодилаи характеристикиро тартиб медиҳем: $k^2 + 4k + 5 = 0$

Ин муодиларо ҳал мекунем.

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i, \quad k_1 = -2+i, \quad k_2 = -2-i.$$

Ҳалли умумии муодилаи додашударо менависем:

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-2x}.$$

Ҳосилаҳои функсияи y – ро меёбем:

$$y' = -2(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-2x} + e^{-2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) =$$

$$= e^{-2x}\left[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\right]$$

Аз шартҳои аввала истифода бурда, системаи

$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 2C_1 = 0 \end{cases}$ - ро тартиб медиҳем. Аз ин ҷо $C_1 = 1, \quad C_2 = 2$ аст.

Ҳалли хусусӣ чунин намуд дорад:

$$y = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x).$$

§ 4. Муодилаҳои дифференсиалии хаттии ғайриякҷинсаи тартиби дуюм ва системаи муодилаҳо

1. Ҳалли муодилаҳои ғайриякҷинса. Муодилаҳои дифференсиалии ғайриякҷинсаи тартиби дуюм чунин намуд дорад:

$$y''+py'+qy = f(x), \qquad (15.4.1)$$

ки дар ин ҷо p,q –ададҳои доимӣ Буда, $f(x)$-функсия мебошад.

Бо ёрии муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм, муодилаи динамикаи ҳаракат навишта мешавад.

Ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинса аз суммаи ягон ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинса ва ҳалли умумии муодилаи якҷинса иборат мебошад.

Бигзор, $\tilde{y}$-ягон ҳалли хусусии муодилаи (15.4.1) бошад,

$y = C_1y_1 + C_2y_2$ -ҳалли умумии муодилаи (15.4.1) ҳангоми $f(x) = 0$ будан бошад, он гоҳ ҳалли умумии муодилаи (15.4.1) функсияи

$y = y + \tilde{y}$ мешавад.

Ёфтани ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинса масъалаи душвор мебошад. Баъзе ҳолатҳои имконпазири ёфтани ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро нишон медиҳем.

Дар ин ҷо баъзе ҳолатҳои ёфтани ҳалли хусусиро мебиёрем:

а) қисми рости муодилаи (15.4.1) намуди $f_1(x) = P_n(x)\ell^{\alpha_1 x}$ - ро дорад;

б) қмсми рости муодилаи (15.4.1) намуди

$f_2(x) = e^{\alpha_2 x}\left[R_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\beta x\right]$ - ро дорад;

в) қисми рости муодилаи (15.4.1) намуди

$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = P_n(x)\ell^{\alpha_1 x} + e^{\alpha_2 x}\left[R_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\beta x\right]$ - ро дорад.

Барои ёфтани ҳалли хусусии муодилаи (15.4.1) қойдаҳои зерин истифода карда мешаванд.

а) Агар қисми рости муодилаи (15.4.1) намуди $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ дошта бошад, ки дар ин ҷо $P_n(x)$ - бисёраъзогии дараҷаи n мебошад, он гоҳ ҳалли хусусӣ ба намуди $\tilde{y} = S_n(x)e^{\alpha x}x^r$ ҷуста мешавад, ки дар ин ҷо $S_n(x)$ - бисёраъзогии дараҷаи n; адади r се қиматро қабул карда метавонад:

1) $r = 0$, агар α - решаи муодилаи характеристикӣ набошад:

2) $r = 1$, агар адади α - решаи яккаратаи муодилаи характеристикӣ бошад: $\alpha = \kappa_1$, ё $\alpha = \kappa_2$;

3) $r = 2$ агар адади α - решаи дукаратаи муодилаи характеристикӣ бошад: $\alpha = \kappa_1 = \kappa_2$.

б) Бигзор қимати рости муодилаи (15.4.1) намуди

$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\beta x]$ - ро

дошта бошад, ки дар ин ҷо $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ мувофиқан бисёраъзогиҳои дараҷаи n ва m мебошанд. Дар ин ҳолат ҳалли хусусӣ ба намуди

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\gamma x]$$

ҷуста мешавад, ки дар ин ҷо $S_N(x)$ ва $T_N(x)$ дараҷаашон ба дараҷаи калонтарини бисёраъзогиҳои $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ баробар бошанд. Адади r ду қимат қабул карда метавонад:

$r = 0$, агар $\alpha \pm i\beta$ решаи муодилаи характеристикӣ набошад; 2) $r = 1$, агар $\alpha \pm i\beta$ решаи муодилаи характеристикӣ бошад.

Усули вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ, ин усул барои ҳалли муодилаҳои ғайриякҷинса ҳам бо коэффисентҳои тағйирёбанда қуллай мебошад, агар ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи y_1 ва y_2 маълум бошанд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинса чунин ҷуста мешавад:

$$u(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x).$$

Дар ҷое, ки функсияҳои $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ аз системаи

$$\begin{cases} C_1(x)y_1+C_2(x)y_2=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases}$$

ёфта мешаванд.

Системаро ҳал намуда, меёбем:

$$C_1(x)=-\int\frac{y_2 f(x)dx}{W(y_1,y_2)}, \qquad C_2(x)=\int\frac{y_1 f(x)dx}{W(y_1,y_2)},$$

Дар ҷое, ки

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0$$ мебошад..

Он гоҳ функсияи $u(x)$- ро меёбем:

$$u(x)=-y_1\int\frac{y_2 f(x)dx}{W(y_1,y_2)}+y_2\int\frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx.$$

Қайд менамоем, ки ҳалли муодилаи дифференсиалии хаттии ғайриякҷинсаро ёфтан мумкин аст, агар якто ҳалли хусусии муодилаи якҷинсаи он маълум бошад, ҳалли дуюмро бо формулаи

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

муайян кардан мумкин аст, $a_1(x)$ коэффисиенти ҳосилаи тартиби якум мебошад.

Мисоли 15.4.1. Муодилаи

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{ctgx}{x}$$ - ро

интегронед, агар $y_1(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ дода шуда бошад.

Ҳал:

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{2\,dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\ln x}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\int\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{\sin x}{x}ctg\,x=$$

$$=-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Муодилаи якҷинсаро ҳал намуда, меёбем: $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ ва $y_2=\dfrac{\cos x}{x}$. Акнун муайянкунандаи $W(y_1,y_2)$ - ро ҳисоб мекунем:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\sin x}{x} & \dfrac{\cos x}{x}\\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\sin x+\cos x}{x}-\frac{\cos x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x}=-\frac{1}{x^2}$$

Ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро аз формулаи

$$u(x)=-y_1\int\frac{y_2\cdot f(x)}{w(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_2\cdot f(x)dx}{w(y_1,y_2)}$$ муайян карда мешавад.

Аз ин ҷо функсияи $u(x)$ - ро меёбем:

$$u(x)=-\frac{\sin x}{x}\int\frac{\frac{\cos x}{x}\cdot\frac{ctg\,x}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}dx+\frac{\cos x}{x}\int\cos x\,dx=\frac{\sin x}{x}\left[\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\cos x\right]-$$

$$-\frac{\cos x}{x}\sin x = \frac{\sin x}{x}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|.$$

Ҳамин тавр, ҳалли умумии муодилаи ғариякҷинса намуди

$$y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$$ -ро мегирад.

Мисоли 15.4.2. Ҳалли умумии муодилаи $y'' - y' - 2y = xe^x$ - ро ёбед.

Ҳал. Аввало ҳалли умумии муодилаи $y'' - y' - 2y = 0$ - ро меёбем. Муодилаи характеристикӣ $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$ мешавад. Ин муодиларо ҳал намуда κ_1 ва κ_2 - ро меёбем:

$$\kappa_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \qquad \kappa_1 = 2, \qquad \kappa_2 = -1.$$

Аз ин ҷо $\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ - ҳалли умумии муодилаи якҷинса мебошад. Акнун ягон ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро мекобем. Азбаски тарафи рости муодилаи додашуда бисёраъзогии дараҷаи як мебошад ва $\alpha = 1$ аст, ҳалли хусусиро ба намуди $\bar{y} = (Ax + B)e^x$ меҷӯем:

$$\bar{y} = Ae^x + (Ax+B)e^x, \quad \bar{y}'' = Ae^x + Ae^x + (Ax+B)e^x;$$

$$2Ae^x + (Ax+B)e^x - \left[Ae^x + (Ax+B)e^x\right] - 2(Ax+B)e^x = xe^x;$$

$$A + Ax + B - A - Ax - B - 2Ax - 2B = x$$

$$A - 2B - 2Ax = x.$$

Коэффисентҳои назди дараҷаҳои якхелаи x - ҳоро баробар намуда, ҳосил мекунем:

$$A - 2B = 0, \quad -2A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}, \qquad B = \frac{1}{2}A = -\frac{1}{4}.$$

Пас ҳалли хусусии муодилаи додашуда чунин намудро мегирад

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}.$$

Акнун ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаро менависем:

$$y=\widetilde{y}+\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{x}.$$

Мисоли 15.4.3. Ҳалли умумии муодилаи $y''+2y'+5y=1$ - ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи характеристикии $k^2+2k+5=0$ - ро ҳал мекунем

$$k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4-5}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}, \quad k_1=-1-2i, \; k_2=-1+2i.$$

Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи якҷинса $\widetilde{y}=y_1+y_2=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ мебошад.

Акнун ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро ба намуди $\bar{y}=A$ меҷӯем: $\bar{y}'=0, \; \bar{y}''=0$, ҳосил мекунем: $5A=1, A=\frac{1}{5}$

Ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинса $\widetilde{y}=\widetilde{y}+\bar{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{5}$ мебошад.

Мисоли 15.4.4. Ҳалли муодилаи $y''+y=tgx$ бо шартҳои канорӣ $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ёфта шавад.

Ҳал. Муодилаи характеристикӣ $k^2+1=0$ решаҳои $k_{1,2}=\pm i$ - ро дорад. Аз ин ҷо ҳалли умумии муодилаи якҷинсаро менаваисем:

$$\widetilde{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаро бо методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ мекобем:

$$\bar{y}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

дар ҷое, ки функсияҳои $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ - ро аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x); \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x); \end{cases}$$

меёбем.

Системаро ҳал намуда, ҳосил мекунем:

$$C_1'(x) = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}, \qquad C_2'(x) = \sin x.$$

Баробариҳои охиринро меинтегронем:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx + A = \sin x + \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A,$$

$$C_2(x) = -\cos x + B.$$

Ҳамин тавр, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинса чунин намуд дорад:

$$y = A\cos x + B\sin x - \cos x . \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Дар ҷое, ки A ва B - доимиҳои ихтиёрӣ мебошанд, ки аз шартҳои канорӣ муайян карда мешаванд:

$$\begin{cases} A\cos 0 + B\sin 0 - \cos 0 \ln \frac{\pi}{4} = 0 \\ A\cos\frac{\pi}{6} + B\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\ln tg\frac{\pi}{3} = 0. \end{cases}$$

Аз ин ҷо $A = 0, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3.$

Ҳамин тавр, ҳалли муодилаи додашударо, ки шартҳои канории гузошташударо қаноат мекунонад менависем:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 \cdot \sin x - \cos x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

2. Системаи муодилаҳои дифференсиалӣ. Системаи муодилаҳои дифференсиалӣ гуфта, системаи муодилаҳоеро меномем, ки якчанд функсияи номаълум ва ҳосилаҳои онҳоро дарбар мегирад. Системаи муодилаҳое, ки қисми чапаш ҳосилаҳои функсияҳои номаълумро дарбар мегирад, вале қисми росташ ҳосилаи функсияи номаълумро дар бар намегирад, системаи муодилаҳои мӯътадил номида мешавад. Системаи мӯътадили муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби якум чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y). \end{cases}$$

Дар баъзе ҳолатҳо системаи мӯътадили муодилаҳоро бо як муодила овардан мумкин аст. Ин ҳолат ҳамон вақт имкон медиҳад, ки яке аз муодилаҳоро дифференсионида, ҳалли системаро ба ҳалли як муодилаи тартиби дуюм оварда шавад. Дар баъзе ҳолатҳо муодилаҳои системаро якҷоя намуда, баъди табдилдиҳӣ намудан муодилаи интегронидашаванда ҳосил мекунем, ки ин имконият медиҳад системаро ҳал намоем.

Мисоли 15.4.5. Системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases} \quad \text{- ро,}$$

бо шартҳои аввалаи $x(0)=2$, $y(0)=C$ ҳал намоед.

Ҳал. Якум муодиларо бо t дифференсиронда, ҳосил мекунем:

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Аз ин ҷо $\dfrac{dy}{dt}$ ва y-ро хориҷ намуда, пайдо мекунем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0.$$

Муодилаи характиристикиро тартиб медиҳем: $\kappa^2-2=0$ ва ҳалли умумии муодиларо нисбат ба x меёбем: $\kappa_1=\sqrt{2}$, $\kappa_2=-\sqrt{2}$ ё худ

$$x=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}.$$

Акнун ҳалли системаро нисбат ба у меёбем аз муодилаи якумро ҳосил мекунем:

$$y=\frac{dx}{dt}-x=C_1\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}t}-C_2\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}t}-C_1e^{\sqrt{2}t}-C_2e^{-\sqrt{2}t}=$$

$$=C_1\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}t}+C_2\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-\sqrt{2}t}.$$

Барои муайян намудани доимиҳои ихтиёрии C_1 ва C_2 шартҳои аввалаиро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ C_1\left(\sqrt{2}-1\right)-C_2\left(\sqrt{2}+1\right)=0. \end{cases}$$

Аз ин система меёбем: $C_1=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, $C_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Ҳамин тавр, ҳалли система бо шартҳои аввалаи додашуда чунин намудро мегирад:

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{\sqrt{2}t}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}t},$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}.$$

Мисоли 15.4.6. Системаи муодилаҳои дифференсиалии

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2y \\ \dfrac{dy}{dt}=2z \\ \dfrac{dz}{dt}=2x \end{cases}$$

- ро ҳал кунед.

Ҳал: Муодилаи якумро нисбат ба t медифференсонем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dy}{dt}.$$

Аз муодилаи дуюм ба чои $\frac{dy}{dt}$ қиматашро мегузорем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\cdot 2z=4z.$$

Барои дигар нисбат ба t баробарии охиринро медифференсонем:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=4\frac{dz}{dt}.$$

Аз муодилаи сеюм қимати $\frac{dz}{dt}$ - ро мегузорем:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=4\cdot 2x=8x.$$

Муодилаи характеристикиро тартиб медиҳем ва ҳал мекунем:

$$k^3-2^3=0, \qquad (k-2)\left(k^2+2k+4\right)=0,$$

$$k-2=0, \qquad k^2+2k+4=0$$

$$k_1=2, \qquad k_{2,3}=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm i\sqrt{3}.$$

$$x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{\left(-1+i\sqrt{3}\right)t}+C_3e^{-\left(1+i\sqrt{3}\right)t}=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}\cdot e^{i\sqrt{3}t}+C_3e^{-t}\cdot e^{-i\sqrt{3}t}=$$

$$=C_1e^{2t}+e^{-t}\left[C_2\left(\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}t\right)+C_3\left(\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}t\right)\right]=$$

$$=C_1e^{2t}+e^{-t}\left[\left(C_2+C_3\right)\cos\sqrt{3}t+i\left(C_2+C_3\right)\sin\sqrt{3}t\right]=$$

$$=C_1e^{2t}+e^{-t}\left(\widetilde{C}_2\cos\sqrt{3}t+\widetilde{C}_2\sin\sqrt{3}t\right)$$

Ҳамин тавр, ҳалли умумӣ нисбат ба $x(t)$ - ро ёфтем:

$$x(t)=C_1e^{2t}+\left(\widetilde{C}_2\cos\sqrt{3}t+\widetilde{C}_2\sin\sqrt{3}t\right)e^{-t}$$

Аз муодилаи якум меёбем:

$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left[C_1e^{2t}-e^{-t}\left(\widetilde{C}_2\sin\sqrt{3}\,t+\widetilde{C}_2\cos\sqrt{3}\,t\right)\right]=$$

$$C_1e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(\widetilde{C}_2+\sqrt{3}\,t\widetilde{C}_3\right)\cos\sqrt{3}\,t-\left(\widetilde{C}_3+\sqrt{3}\,t\widetilde{C}_2\right)\sin\sqrt{3}\,t\right]$$

Акнун аз муодилаи дуюми системаи додашуда z – ро муайян мекунем"

$$z(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left[2C_1e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\left(\widetilde{C}_2\sqrt{3}\,t+\widetilde{C}_3\sqrt{3}\,t\right)\cos\sqrt{3}t-\left(\widetilde{C}_3+\sqrt{3}\,\widetilde{C}_2\right)\sin\sqrt{3}\,t\right]+$$

$$+\frac{1}{2}e^{-t}\left[-\left(\widetilde{C}_2+\sqrt{3}\,\widetilde{C}_3\right)\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t-\left(\widetilde{C}_3+\sqrt{3}\,\widetilde{C}_2\right)\sin\sqrt{3}\,t\right]+$$

$$+\frac{1}{2}e^{-t}\left[-\left(\widetilde{C}_2+\sqrt{3}\,\widetilde{C}_3\right)\cdot\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t-\sqrt{3}\left(\widetilde{C}_3+\sqrt{3}\,\widetilde{C}_2\right)\cos\sqrt{3}\,t\right]=$$

$$=C_1e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-t}\left[\left(\widetilde{C}_2+\sqrt{3}\widetilde{C}_3+\sqrt{3}\widetilde{C}_3+3\widetilde{C}_2\right)\cos\sqrt{3}t+\left(\widetilde{C}_2\sqrt{3}+3\widetilde{C}_3-\widetilde{C}_3-\sqrt{3}\,\widetilde{C}_2\right)\sin\sqrt{3}t\right]=$$

$$=C_1e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-t}\left[\left(4\widetilde{C}_2+2\sqrt{3}\,\widetilde{C}_3\right)\cos\sqrt{3}t+2\widetilde{C}_3\sin\sqrt{3}\,t\right]=$$

$$=C_1e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-t}\left[\left(2\widetilde{C}_2+\sqrt{3}\,\widetilde{C}_3\right)\cos\sqrt{3}t+\widetilde{C}_3\sin\sqrt{3}\,t\right]$$

ё худ $z(t)=C_1e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\left(A\cos\sqrt{3}t+B\sin\sqrt{3}t\right)$,

ки дар ин ҷо $A=2\widetilde{C}_2+\sqrt{3}t\,\widetilde{C}_3$, $B=\widetilde{C}_3$ мебошанд.

Системаи муодилаҳои зеринро дида мебароем:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y,\end{cases}$$

ки дар ин ҷо $x=x(t)$ ва $y=y(t)$ ва $a\,i\,j$ доимиҳо мебошанд. Барои ҳалли ин система муодилаи характеристики матритсаи системаро тартиб диҳед:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0.$$

Ин муодила муодилаи характеристики системаи додашуда номида мешавад. Решаҳои муодилаҳои характеристики λ_1 ва λ_2 шуда метавонанд ҳақиқӣ гуногун, комплексӣ ва ҳақиқи баробар.

Мисоли 15.4.7. Ҳалли умумии системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y \end{cases}$$ - ро ёбед.

Ҳал. Муодилаи характеристикии матритсаи системаро тартиб медиҳем:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ё} \quad \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

Муодилаи охиринро нисбат ба λ ҳал намуда, меёбад: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, ададҳои характеристикӣ матритса мебошанд. Ҳангоми $\lambda = 1$ будан муодила барои муайян намудани вектори хусусӣ чунин намуд мегирад:

$(7-1)P_1 + 3P_2 = 0$ ва $6P_1 + (4-1)P_2 = 0$ ва ба як муодила оварда мешаванд,

$2P_1 + P_2 = 0$ ин вектори (1; -2) – ро муайян мекунад.

Ҳангоми $\lambda = 10$ будан муодилаҳои $(7-10)P_1 + 3P_2 = 0$ $6P_1 + (4-10)P_2 = 0$ - ро ҳосил мекунем, ё худ $P_1 + P_2 = 0$. Ин муодила вектори (1;1) – ро муайян менамояд.

Ҳамин тавр, системаи фундаменталии ҳалҳоро меёбем: ҳангоми $\lambda = 1$ $x = e^t$, $y = -2e^t$, ҳангоми $\lambda = 10$, $x = e^{10t}$, $y = e^{10t}$.

Ҳалли умумии системаро менависем:

$$x = C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}, \qquad y = -2C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}.$$

Кори мустакилонаи 15.1.1.

1. Муодилаи дифференсиалӣ бо шартҳои аввалаи додашуда ҳал карда шавад:

а) $(x+3)dx + (y-5)dy = 0$, $y = -1$, $x = 5$, б) $(x+1)dx+2(y-1)dy=0,$ $\qquad y=1, \qquad x=1,$

в) $(x-2)dx-4(y+1)dy=0,$ $\qquad y=-1, \qquad x=6,$

г) $(x+3)dy+(y-6)dx=0,$ $\qquad y=8, \qquad x=3,$

2. Муодилаи дифференсиалиро ҳал кунед:

а) $\dfrac{xdy}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{ydx}{\sqrt{1-x^2}}=0,$

б) $y^1=2^{x-y},$

в) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$

Кори мустақилонаи 15.2.1.

Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалиро ёбед:

а) $y^1=\dfrac{y^2}{x^2}+2,$ $\qquad$ б) $y^1=\dfrac{x-y}{x+y},$ $\qquad$ в) $y^1=\dfrac{2xy}{x^2-y^2},$

Муодилаҳои дифференсиалии якҷинсаи тартиби якумро ҳал кунед:

а) $(x^2-y^2)dx+2xydy=0,$ $\qquad$ б) $\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+ydy=0,$

в) $2xydx+(4y^2-x)dy=0,$ $\qquad$ г) $2xydx-(x^2+y^2-5)dy=0,$

Муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби якумро интегронед:

а) $y^1-2y=4x^2-6x+5,$ $\qquad$ б) $y^1+y-x^2=0,$

в) $xy^1-y=2x,$ $\qquad$ г) $y^1+ctgxy=tgx.$

Кори мустақилонаи 15.3.1.

1) Муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюмро интегронед:

а) $y''=e^x,$ $\qquad$ б) $y''=2x,$ $\qquad$ в) $y''=\dfrac{x^2x}{x},$ $\qquad$ г) $y''=\dfrac{x^3-x}{x^3}$

2) Муодилаҳои дифференсиалиро бо шартҳои аввалаи додашуда ҳал кунед:

а) $y''=6x-2, \quad y=3, \quad y'=4$ ҳангоми $x=2$,

б) $y''y^3=1, \quad y'=1, \quad y'=0$ ҳангоми $x=0$,

в) $x^2y''=\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y=-2, \quad y'=0$ ҳангоми $x=1$,

г) $yy''=1+y'^2, \quad y=1, \quad y'=0$ ҳангоми $x=0$.

3) Муодилаҳои дифференсиалии якҷинсаи хаттии тартиби дуюмро интегронед:

а) $y''-7y'+12y=0$, б) $y''+y'-12y=0$,

в) $y''+6y'+5y=0$, г) $y''-3y'=0$.

4) Ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии зеринро ёбед:

а) $y''-y'-2y=0$, б) $y''+25y=0$,

в) $y''-y'=0$, г) $y''-3y'-10y=0$.

5) Ҳалли муодилаҳои дифференсиали бо шартҳои аввалаи додашударо ёбед:

а) $y''+5y'+6y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-6$,

б) $y''-10y'+25y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$,

в) $y''-2y'+10y=0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$,

г) $y''+3y'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2$.

Кори мустақилонаи 15.4.1.

1. Ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии зеринро ёбед:

а) $y''+y'-2y=8\sin 2x$, б) $y''-2y'=x^2-x$,

в) $y''-6y'+5y=e^{2x}$, г) $y''+y'=10$.

2. Муодилаҳои зеринро интигронед:

а) $y''+2y'+y=10e^{2x}$, б) $y''+9y'+14y=11e^{4x}$,

в) $25y''+10y'+y=2x^2+8x-120$, г) $y''-3y'2y=x^2$.

3. Ҳалли хусусии муодилаҳои зеринро бо шартҳои аввалаи додашуда ёбед:

а) $y''+16y'+15y=4e^{-15x}$, $\quad y(0)=3, \quad y'(0)=-5{,}5,$

б) $y''-2y'+10y=10x^2+18x-6$, $\quad y(0)=1, \quad y'(0)=3{,}2,$

в) $y''-2y'=e^{x}(x^2+x-3)$, $\quad y(0)=2, \quad y'(0)=2,$

г) $y''-y'=2(1-x)$, $\quad y(0)=1, \quad y'(0)=1,$

4. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $y''+y=\cos 3x$, бо шартҳои аввалаи $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4, \; y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$

б) $2y''-y'=1$, бо шартҳои аввалаи $y(0)=0, \; y'(0)=1,$

в) $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$, г) а) $y=y''-2y'+2y=e^{x}\sin x$.

Кори мустақилонаи 15.4.2.

1. Ҳалли умумии системаи муодилаҳоро ёбед:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=7x+3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+7y; \end{cases}$

2. Системаи муодилаҳоро бо шартҳои аввалаи додашуда ёбед:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{2x+3y}, \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{2x+3y}; \end{cases}$ $\quad x(0)=1, \quad y(0)=2$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y; \end{cases}$ $\quad x(0)=1, \quad y(0)=3.$

Чавобҳо

КМ 15.1.1.

1. а) $(x+3)^2+(y-5)^2=C^2$, $\quad (x+3)^2+(y-5)^2=100$,

б) $(x+1)^2+2(y-1)^2=C^2$, $\quad (x+1)^2+2(y-1)^2=4$,

в) $(x+2)^2-4(y+1)^2=C^2$, $\quad (x-2)^2-4(y+1)^2=16$,

г) $(x+3)^2+(y-6)^2=C$, $\quad (x+3)(y-6)=12$

2. а) $\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)=cxy$,

б) $2^x-2^y=C$,

в) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.

КМ 15.2.1.

1. а) $\ln Cx=\frac{2}{\sqrt{7}}\,arctg\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}$, $\quad$ б) $y^2+2xy-x^2=C$ $\quad$ в) $\ln Cx=\frac{y^2}{x^2}$.

2. а) $x^2+y^2=2Cx$, $\quad$ б) $y^2-2Cx=C^2$

в) $x^2+4y^2=2Cy$, $\quad$ г) $x^2-y^2=2Cy$,

д) $y=Cl^{2x}-2x^2+x+3$, $\quad$ е) $y=Cl^x-x^2-2x+2$,

3. а) $y=(\ln x^2+C)$, $\quad$ б) $y\sin\alpha=\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

КМ 15.3.1.

1. а) $y=C_1e^x x+C_2$, $\quad$ б) $y=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$

в) $y=\frac{x^2}{2}+x\ln x+C_1x-x$, $\quad$ г) $y=\frac{x^2}{2}+\ln x+C_1x-C_2$.

2) а) $y=x^3x^2-4x+7$, $\quad$ б) $y^2-x^2=1$

в) $(6y+3)^2=(2x-1)^3$, $\quad$ г) $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$

3) а) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$, б) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$

в) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$ г) $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$

4) а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$, б) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$

в) $y = C_1 + C_2 e^{x}$, г) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$

5) à) $y = 4e^{-3x} + 3e^{-2x}$, á) $y = xe^{5x}$

â) $y = -\frac{1}{3} e^{x} \cos 3x$, ã) $y = \frac{1}{3}\left(5 - 2e^{-3x}\right)e^{x}$

КМ 15.4.1.

1. а) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{2}{5}(\cos 2x + 3\sin 2x)$,

б) $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6} x$, в) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{21} l^{2x}$,

г) $y = 10x + C_1 + C_2 e^{x}$,

2. а) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + 2e^{2x}$, б) $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{4x}$,

в) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + 2e^{2x} - 32x + 100$,

г) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$,

3. а) $y = -\frac{1+4x}{14} e^{-15x} + \frac{43}{14} e^{-x}$,

б) $y = e^{x}(0{,}16 \cos 3x + 0{,}24 \sin 3x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$,

в) $y = e^{x}\left(e^{x} - x^2 - x + 1\right)$,

г) $y = e^{x} + x^2$.

4. а) $y = -\frac{11}{8} \cos x + 4\sin x - \frac{1}{8} \cos 3x$,

б) $y = 4e^{\frac{x}{2}} - x - 4$,

в) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{4x}-\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right)e^{4x}$,

г) $y=e^{x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)-\frac{1}{2}xe^{x}\cos x$,

КМ 15.4.2.

а) $x=C_1e^{5t}+3C_2e^{t}$, $\qquad y=C_1e^{5t}-C_2e^{t}$,

б) $e^{5t}\left(-C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\ \left(C_1-C_2\right)\cos 2t-\left(C_1+C_2\right)\sin 2t\ \right)$.

Замима

Формулаҳо барои маълумот

1. Алгебра

1. Дарача ва реша:

$$(+a)^n = +a^n; \quad (-a)^m = \begin{cases} +a^m, & \textit{барои} \quad m \quad \textit{ҷуфт} \\ -a^m, & \textit{барои} \quad m \quad \textit{ток} \end{cases}$$

$a^0 = 1$ ҳангоми $a \neq 0$ будан

Навишти шартӣ:

$$a^{\infty} = \begin{cases} 0, & \textit{агар} \quad 0 < a < 1, \\ \infty, & \textit{агар} \quad a > 1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \textit{агар} \quad 0 < a < 1, \\ 0, & \textit{агар} \quad a > 1 \end{cases}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \qquad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[k]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{nk}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}, \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right).$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib), \qquad i = \sqrt{-1},$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

дар куҷо n- адади натуралии ихтиёрӣ аст.

$$a^n - b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots\ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right),$$

дар куҷо n- адади ҷуфти мусбат:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ...- ab^{n-2} + b^{n-1})$$

дар кучо n адади тоқи мусбати бутун:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^3 ..... + x^n.$$

Миёнаи арфметикӣ $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n).$

Миёнаи геометрӣ $B_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 ......a_n}.$

Миёнаи гармоникӣ $\frac{1}{C_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}\right).$

2. Муодилаҳои дарачаҳои як, ду, се ва чор

1) Муодилаи дарачаи якум: $ax + b = 0, \quad x = -\frac{b}{a}.$

2) Муодилаи дарачаи дуюм (квадратӣ):

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q,$$

3) Муодилаи дарачаи сеюм (кубӣ)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Муодиларо ба коэффисиенти a тақсим намуда, гузориши $y = x + \frac{b}{3a}$ -ро ичро мекунем, пас аз он ишора мекунем:

$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}, \qquad q=\frac{2b^2}{27a^2}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a},$$

$$\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ҳалли муодилаи ҳосилшударо менависем ва ҳосил мекунем:

$$y_1=A+B, \qquad y_{2,3}=-\frac{A+B}{2}\pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3},$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}, \qquad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}, \qquad AB=-\frac{p}{3}.$$

1. Агар $\Delta>0$ бошад, он гоҳ муодилаи як решаи ҳақиқӣ ду решаи комплексӣ дорад.

2. Агар $\Delta=0$ бошад, он гоҳ муодилаи кубӣ се решаи ҳақиқӣ дорад, Ки дутои онҳо ҳамҷоя мешаванд.

3. Агар $\Delta<0$ бошад, он гоҳ муодилаи кубӣ се решаи ҳақиқӣ гуногун дорад.

4. Муодилаи дараҷаи чор (биквадратӣ):

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

Ҳалли ин муодиларо меёбем:

$$x_{1,2}=+\sqrt{R_{1,2}}, \qquad x_{3,4}=-\sqrt{R_{1,2}},$$

$$R_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Таносуби байни коэффисиентҳо ва решаҳои муодилаҳои дараҷаи боло[1]

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

1 Таносуби байни коэффисиентҳо ва решаҳои муодилаҳои дараҷаи боло аз ҷонибӣ муаллиф ҳосил карда шудаанд.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = b, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c, \\ x_1x_2x_3x_4 = d. \end{cases}$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = b, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = -c, \\ x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 = d, \\ x_1x_2x_3x_4x_5 = -e. \end{cases}$$

3. Прогрессияҳо

Аъзои умумии прогрессияи арфметикии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Суммаи n аъзоҳои аввалаи прогресияи арфметикии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n;$$

дар кучо d- фарқ , a_1 - аъзои якум, a_n - аъзои умумии прогрессияи арфметикӣ мебошанд.

Суммаи n аъзои прогресияи геометрии

$$S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q} = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = u_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, \qquad u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

дар кучо q - махраҷи прогрессияи геометрӣ $(q \neq 1)$ аст.

Суммаи прогресияи геометрии беохир камшавандаи

$$S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q} \qquad (|q| < 1)$$

$$1+2+3+4+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$2+4+6+...+2n=n(n+1),$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.....+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$2^2+4^2+...+(2n)^2=4(1+2^2+...+n^2)=\frac{2n}{3}(n+1)(2n+1),$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+.....+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

$$1^3+3^3+5^3+7^3+.....+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1),$$

$$1^4+2^4+3^4+4^4+.....+n^4=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$1+3^2+5^2+7^2+...+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1),$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\left|\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

4. Логарифмаҳо

Агар $y=a^x$ бошад, пас $\log_a y=x(a>0,\ \ a\neq1)$ аст.

Айниятҳои асосии логарифмӣ

$$a^{\log_a b}=b,\qquad \left(a^b=e^{\ln a^b}=e^{b\ln a}\right).$$

Хосиятҳои логарифмаҳо:

$$\log_c(a\cdot b)=\log_c a+\log_c b;\qquad \log_c a^n=n\log_c a;\qquad \log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b;$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a};\qquad \log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b;$$

$$\log_c\sqrt[n]{a}=\log_c a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log_c a;\qquad \log_a b=\frac{1}{\log_b a};$$

$$\log_a 1=0,\qquad a^0=1$$

$$\log_a a = 1, \qquad a^1 = a;$$

$$\log_{\sqrt[n]{a}} b = n\log_a b = \log_a b^n;$$

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg a = (2{,}30259\ \ldots\ldots)\cdot \lg a,$$

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln e} = \lg e \cdot \ln a = (0{,}43429\ \ldots\ldots)\cdot \ln a.$$

Навиштҳои шартӣ:

агар $a > 0$ бошад, пас, $\log_a(+\infty) = +\infty$, чунки $a^{\infty} = \infty$,

агар $0 < a < 1$ бошад, пас, $\log_a(+\infty) = -\infty$, чунки $a^{-\infty} = \infty$,

агар $a > 1$ бошад, пас, $\log_a 0 = -\infty$, чунки $a^{-\infty} = 0$,

агар $0 < a < 1$ бошад, пас, $\log_a 0 = +\infty$, чунки $a^{+\infty} = 0$, аст.

5. Биноми Нютон:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots\ldots + b^n;$$

1) $P_n n!, \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots\ldots n.$

2) $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-m+1).$

3) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}.$

а) $C_n^m = C_n^{n-m}$; б) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

в) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2$; г) $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n}$.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\ldots\cdot(n-1)\cdot n,$$

$$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)\cdot n\cdot(n+1) = n!\,(n+1),$$

$$0! = 1, \qquad 1! = 1,$$

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\ldots\cdot(2n-2)(2n) = 2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot(n-1)n) = 2n\cdot n!,$$

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\ldots\cdot(2n-1)(2n+1) = (2n-1)!!(2n+1),$$

$$(2n)!!\cdot(2n-1)!! = (2n)!, \qquad 0!! = 1.$$

Барои n – ҳои калон $(n \to \infty)$, $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ - формулаи Стирлинг ва

$\ln(n!) \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}$.

2. Тригонометрия

1. Таносубҳои байни функсияҳои тригонометрии кунҷҳои якхела:

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1;$$

$$\sin a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a}; \qquad \cos a=\pm\sqrt{1-\sin^2 a};$$

$$tg a=\frac{\sin a}{\cos a}; \quad ctg a=\frac{\cos a}{\sin a}; \quad tg a\cdot ctg a=1;$$

$$1+tg^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}; \qquad 1+ctg^2 a=\frac{1}{\sin^2 a};$$

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}; \qquad \cos ec\, a=\frac{1}{\sin a}$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3{,}14} = 57^0 17' 45''.$$

Формулаи гузариш аз ченаки градусӣ кунҷ ба радиан: $\alpha=\frac{\pi}{180^0}\beta$, $\beta-$ кунҷи додашуда ба градусҳои ченшаванда мебошад.

Формулаи гузариш аз ченаки радианӣ ба градусӣ: $\beta=\frac{180^0}{\pi}\alpha$, $\alpha-$ кунҷи додашуда бо радиан ченшаванда.

2. Формулаҳои кунҷҳои дучанда ва сечанда:

$$\sin 2a=2\sin a\cos a; \qquad \sin(\alpha a)=2\sin\frac{\alpha a}{2}\cdot\cos\frac{\alpha a}{2};$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a; \quad \cos 2a=2\cos^2 a-1; \quad \cos 2a=1-2\sin^2 a;$$

$$2\cos^2 a=1+\cos 2a; \qquad 2\sin^2 a=1-\cos 2a,$$

$$tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2 a}, \qquad ctg2a=\frac{ctg^2 a-1}{2ctg\,a}=\frac{1-tg^2 a}{2tg\,a};$$

$$\sin 2a = \frac{2tg\, a}{1+tg^2\, a}, \qquad \cos 2a = \frac{1-tg^2 a}{1+tg^2 a},$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a.$$

3. Формулаҳои ҷамъ ва тарҳи кунҷҳо:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos a \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta}; \qquad ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg a\, ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$$

4. Формулаҳои табдилдиҳиҳои ҷамъ ва зарби функсияҳои тригонометрӣ:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \pm \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos a \cdot \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$a\cos x + b\sin x = r\sin(x+\varphi_1) = r\cos(x-\varphi_2),$$

дар куҷо $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi_1 = \frac{a}{r}$, $\cos\varphi_2 = \frac{b}{r}$ *бошад*,

$$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4}) = \pm\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right) \text{ мешавад}$$

$$tg a \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad tg\alpha + ctg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \qquad tg\alpha - ctg\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin(x+y)\sin(x-y)$$

$$\sin^2 x - \cos^2 y = -\cos(x+y)\cos(x-y);$$
$$\sec^2 x - \cos^2 y = -\cos(x+y)\cos(x-y),$$
$$\sec^2 x + \cos ec^2 x = \sec^2 x \cdot \cos ec^2 x.$$

5. Формулаҳои гузариш

	$\beta = 90^0 \pm \alpha$	$\beta = 180^0 \pm \alpha$	$\beta = 270^0 \pm \alpha$	$\beta = 180^0 \pm \alpha$
$\sin\ \beta$	$\cos\ \beta$	$\pm\sin\ \alpha$	$-\cos\ \alpha$	$\pm\sin\ \alpha$
$\cos\ \beta$	$\pm\sin\ \alpha$	$-\cos\ \alpha$	$\pm\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$
$tg\ \beta$	$\pm ctg\ \alpha$	$\pm tg\ \alpha$	$\pm ctg\ \alpha$	$\pm tg\ \alpha$
$ctg\ \beta$	$\pm tg\ \alpha$	$\pm ctg\ \alpha$	$\pm tg\ \alpha$	$\pm ctg\ \alpha$

$$\sin n\pi = 0, \quad \sin\ (x \pm n\pi) = (-1)^n \sin x;$$
$$\sin\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = \pm(-1)^n \cos x,$$
$$\cos \pi n = (-1)^n, \qquad \cos(x \pm n\pi) = (-1)^n \cos x,$$
$$\cos\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = \pm(-1)^n \sin x,$$
$$tgn\pi = 0, \quad tg(x \pm n\pi) = tgx, \qquad tg\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = -ctgx,$$
$$tg\frac{n\pi}{2} = \frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n}, \qquad ctg\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = -tgx,$$
$$tg\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tgx \pm 1}{1 \pm tgx}, \quad ctg\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{ctgx \pm 1}{1 \pm ctgx}.$$

6. Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ кунҷҳои

ба 30^0 ва 45^0 каратӣ буда.

Кунҷҳо	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Кунҷҳо	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

$\sin\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\ \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$ctg\ \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

Кунҷҳо	210	225	240	270	300	315	330	360
Кунҷҳо	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\ \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\ \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

7. Аломати функсияҳои тригонометрӣ дар чорякҳо

Функсия	Чорякҳо

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$tg\ x$	+	-	+	-
$ctg\ x$	+	-	+	-

а) $\sin x = a;\quad |a| \le 1.$

a	x
a	$(-1)^{\kappa} \cdot \arcsin\ \alpha + \pi k, \quad k \in Z$
0	πk
$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}$	$(-1)^{\kappa} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi\kappa \qquad (-1)^{\kappa+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi\kappa$
$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1)^{\kappa} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi\kappa \qquad (-1)^{\kappa+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi\kappa$
$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(-1)^{\kappa} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\kappa \qquad (-1)^{\kappa+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\kappa$
$1, \quad -1$	$\frac{\kappa}{2} + 2\pi\kappa, \qquad -\frac{\kappa}{2} + 2\pi\kappa$

б) $\cos x = a;\quad |a| \le 1.$

a	x
a	$2\pi\kappa \pm \arcsin\alpha, \quad k \in Z$
0	$\frac{\pi}{2} + \pi\kappa$
$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\kappa \qquad \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi\kappa$
$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi\kappa \qquad \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi\kappa$
$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa \qquad \pm\frac{5}{6}\pi + 2\pi\kappa$
$1, \quad -1$	$2\pi\kappa, \qquad \kappa + 2\pi\kappa$

в) $tgx=a; \ a\in D.$

a	x	
a	$arctg\ \alpha+\pi k, \quad k\in Z$	
0	$\pi\kappa$	
$\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}+\pi\kappa$	$-\frac{\pi}{6}+\pi\kappa$
$1, \quad -1$	$\frac{\pi}{4}+\pi\kappa$	$-\frac{\pi}{4}+\pi\kappa$
$\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}+\pi\kappa$	$-\frac{\pi}{3}+\pi\kappa$

г) $ctgx=a; \ a\in D.$

a	x
a	$arccrc\ \alpha+\pi k, \quad k\in Z$

a	x	
0	$\frac{\pi}{2}+\pi\kappa$	
$\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{3}+\pi\kappa$	$-\frac{2}{3}\pi+\pi\kappa$
$1, \quad -1$	$\frac{\pi}{4}+\pi\kappa$	$\frac{3}{4}\kappa+\pi\kappa$
$\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}+\pi\kappa$	$\frac{5}{6}\pi+\pi\kappa$

Муодилаи	Реша
$\sin^2 x=a, \quad 0\le a\le 1$	$x=k\pi\pm\arcsin\sqrt{a}$
$\cos^2 x=a, \quad 0\le a\le 1$	$x=2k\pi\pm\arccos\sqrt{a}$
$\sin^2 x=a, \quad 0\le a$	$x=k\pi\pm arctg\sqrt{a}$
$ctg^2 x=a, \quad 0\le a$	$x=k\pi\pm arcctg\sqrt{a}$

Дар кучо k адади ихтиёрии бутун мебошад, функсияҳои баръакси тригонометрӣ чунинанд:

$$x = \sin y, \qquad y = Arc\sin x = m\pi + (-1)^m \arcsin x;$$
$$x = \cos y, \qquad y = Arc\cos x = 2m\pi \pm \arccos x;$$
$$x = tg\, y, \qquad y = Arctg\, x = m\pi + arctg\, x;$$
$$x = ctg\, y, \qquad y = Arcctg\, x = m\pi + arcctg\, x;$$

Қиматҳои асосии функсияҳои баръакси тригонометрӣ:

$$-\frac{\pi}{2} \le arc\sin x \le +\frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le arccos x \le \pi (-1 \le x \le 1);$$
$$-\frac{\pi}{2} \le arctgx \le +\frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le arcctgx + \pi \ (-\infty < x < \infty).$$

Баъзе таносубҳо:

$$\arcsin(-x) = \arcsin x, \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$
$$arctg(-x) = -arctg\, x, \qquad arcctg(-x) = \pi - arctg\, x,$$
$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \cos(\arccos x) = x,$$
$$tg(arctg\, x) = x, \qquad ctg(arcctg\, x) = x.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} arctgx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \to +\infty \\ -\frac{\pi}{2}, & x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} arcctgx = \begin{cases} 0, & x \to +\infty, \\ \pi, & x \to -\infty, \end{cases}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}.$$

$$arc\sin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x;$$
$$= \arccos x\sqrt{1 - x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$

$$= -\arccos x\sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \le x \le 0),$$

$$= arctgx\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x^2 < 1)$$

$$= arcctg\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi \qquad (0 < x \le 1),$$

$$= arcctg\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi \qquad (-1 \le x < 0),$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\ \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left(x^2 < \frac{1}{2}\right),$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\ \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1\right),$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\ \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left(-1 \le x < -\frac{1}{2}\right)$$

$$\arccos\ x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\ x;$$

$$= \arcsin\ x\sqrt{1-x^2} \qquad (0 \le x \le 1),$$

$$= \pi - \arcsin x\sqrt{1-x^2} \qquad (1 \le x \le 0),$$

$$= -arctgx\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (0 < x \le 1),$$

$$= \pi + arctgx\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (-1 \le x < 0),$$

$$= \frac{1}{2}\arccos x\left(2x^2 - 1\right) \qquad (0 \le x \le 1),$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\arccos x\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1\right),$$

$$\underline{a}rcctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx;$$

$$= arcctgx\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 \le x \le 1),$$

$$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \geq 0),$$

$$= -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \pi \qquad (x \leq 0),$$

$$= \frac{\pi}{2} - arctg \frac{1}{x} \qquad (x > 0),$$

$$= -\frac{\pi}{2} - arctg \frac{1}{x} \qquad (x < 0)$$

$$= arcctg \frac{1}{x} \qquad (x > 0),$$

$$= arcctg \frac{1}{x} - \pi \qquad (x < 0),$$

$$= \frac{\pi}{4} - arctg \frac{1-x}{1+x} \qquad (x > -1),$$

$$\underline{a}rcctgx = \frac{\pi}{2} - arcctg\ x,$$

$$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \geq 0),$$

$$= -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \pi \qquad (x \leq 0),$$

$$= \frac{\pi}{2} - arctg \frac{1}{x} \qquad (x > 0),$$

$$= -\frac{\pi}{2} - arctg \frac{1}{x} \qquad (x < 0)$$

$$= arcctg \frac{1}{x} \qquad (x > 0),$$

$$= arcctg \frac{1}{x} - \pi \qquad (x < 0),$$

$$= \frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{1-x}{1+x} \qquad (x > -1),$$

$$= \frac{-3\pi}{4} - arctg\,\frac{1-x}{1+x} \qquad (x < -1),$$

$$= \frac{1}{2} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} \qquad (|x| < 1),$$

$$= \frac{1}{2} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} + \frac{\pi}{2} \qquad (x > 1),$$

$$= \frac{1}{2} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} - \frac{\pi}{2} \qquad (x < -1),$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} \qquad (x \le -1),$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} \qquad (|x| \le 1),$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\,\frac{2x}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} \qquad (x \ge 1),$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\,\frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{\pi}{2} \qquad (x \ge 0),$$

$$= -\frac{1}{2}\arccos\,\frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad (x \le 0),$$

$$\underline{a}rcctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx\,,$$

$$= \arcsin\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x > 0),$$

$$= \pi - \arcsin\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \ge 0),$$

$$= \pi - ar\sin\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \ge 0),$$

$$= -\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{x} \qquad (x<0),$$

$$= \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$= arctg\ \frac{1}{x} \qquad (x>0),$$

$$= \pi + arctg\ \frac{1}{x} \qquad (x<0).$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(xy \le 0 \text{ ё } x^2+y^2 \le 1\right),$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ \ y<0 \quad \text{ва} \quad x^2+y^2>1\right),$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ \ y<0 \ \text{ва} \ \ x^2+y^2>1\right),$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(xy \le 0 \text{ ё } x^2+y^2 \le 1\right),$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ \ y<0 \quad \text{ва} \quad x^2+y^2>1\right),$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ \ y<0 \ \text{ва} \ \ x^2+y^2>1\right),$$

$$= \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$$

$$\left(x \ge 0,\ \ y \ge 0\right),$$

$$= -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2-xy}\right)$$

$$\left(x<0,\ \ y<0\right),$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ \ y<0 \quad \text{ва} \quad x^2+y^2>1\right),$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ y<0 \text{ ва } x^2+y^2>1\right),$$

$$= \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$$

$$\left(x \geq 0,\ y \geq 0\right),$$

$$= -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2-xy}\right)$$

$$\left(x<0,\ y<0\right),$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(xy \leq 0 \text{ ё } x^2+y^2 \leq 1\right),$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ y<0 \quad \text{ва} \quad x^2+y^2>1\right)$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x<0,\ y<0 \text{ ва } x^2+y^2>1\right)$$

$$= -\arcsin\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\left(x \geq y\right),$$

$$= \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\left(x < y\right),$$

$$arctg\, x + arctg\, y = arctg\frac{x+y}{1-xy} \quad (xy<1)$$

$$= \pi + arctg\frac{x+y}{1-xy} \quad (x>0,\ xy>1),$$

$$= -\pi + arctg\frac{x+y}{1-xy} \quad (x<0,\ xy>1).$$

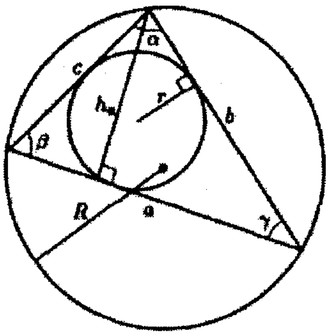
$$arctg\, x - arctg\, y = arctg\frac{x-y}{1+xy} \quad (xy>-1)$$

$$= \pi + arctg\,\frac{x-y}{1+xy} \qquad (x>0,\ xy>-1),$$

$$= -\pi + arctg\,\frac{x+y}{1+xy} \qquad (x<0,\ xy<-1).$$

3. Геометрия

Дар секунҷа r - радиуси давраи дарункашида, R - радиуси давраи



берункашидашуда, p-ним переметр:

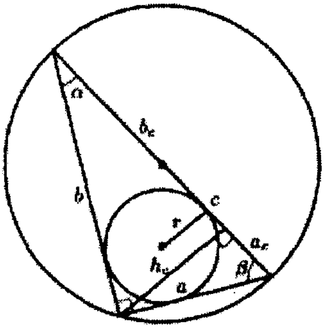
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin a = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$r = \frac{S}{p}, \qquad R = \frac{abc}{4S},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\,,$$

Секунҷаи росткунҷа:



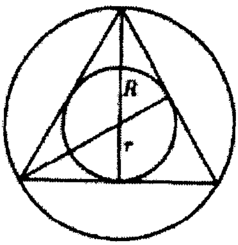
$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_c,\quad r=\frac{a+b-c}{2},\quad R=\frac{c}{2},$$

$$a^2+b^2=c^2,\quad a+b=2R+2r$$

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c},\quad \frac{a_c}{a}=\frac{a}{c},\quad \frac{b_c}{b}=\frac{b}{c},$$

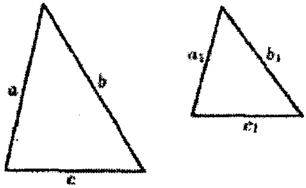
$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=btg\,\alpha=bctg\,\beta.$$

Секунҷаи баробартараф:



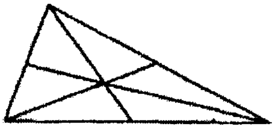
$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\quad r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\quad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Секунҷаи монанд (k- коэффисиенти монандӣ):



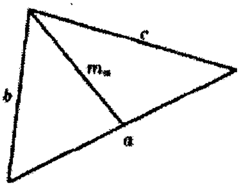
$$\Delta \overset{k}{\sim} \Delta_1, \qquad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k, \qquad \frac{p}{p_1}=k, \qquad \frac{S}{S_1}=k^2,$$

Ҳар се медианаҳои секунҷа дар як нуқта бо таносуби 2:1 бурида мешаванд:



3. Дарозии медианаи секунҷа бо формулаи зерин ифода карда мешавад:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}\,.$$

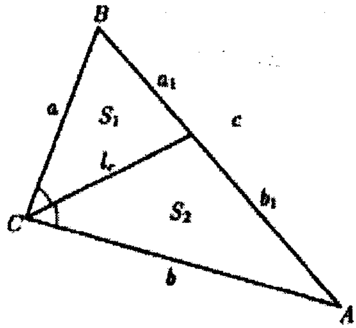


4. Дарозии тарафҳои секунҷа бо формулаи

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b{}^2+m_c{}^2\right)-m_a{}^2}\,.$$

ифода карда мешаванд, ки m_a, m_b, m_c – дарозиҳои медианаҳои секунҷа мебошанд. Биссиктрисаҳои тарафҳои секунҷаро бо таносубҳои зерин ҷудо мекунанд:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{a_1}{a}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin B}, \qquad \frac{b_1}{b}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin B}, \qquad a_1=\frac{ac}{a+b}.$$



5.Дарозии бисиктерисаи секунҷа бо формулаҳои

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b++c)(a+b-c)}}{a+b},$$

$$l_c = \frac{2ab\cos(c/2)}{a+b},$$

ифода карда мешавад.

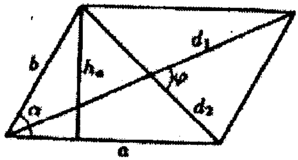
6. Байни баландиҳои секунҷа h_a, h_b, h_c – ва радиуси давраи

дарункашидашуда чунин таносуб $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ ҷой дорад.

7. Чоркунҷаҳо. Чоркунҷаҳои ихтиёрӣ (d_1, d_2 - диогналҳо, φ -кунчи байни

онҳо) : $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$

Параллелограмм:

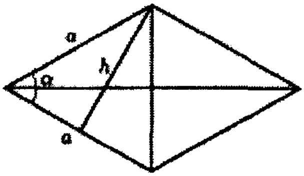


$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi,$$

$$S = \frac{d_1^{\,2} - d_2^{\,2}}{4} tg\alpha, \qquad S = \frac{a^2 - b^2}{2} tg\varphi,$$

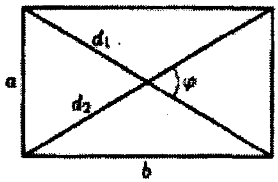
$$d_1^{\,2} + d_1^{\,2} = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

Ромб:



$$S = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2, \quad r = \frac{1}{2}h.$$

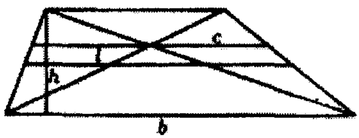
Росткунҷа:



$$S = ab = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\phi = \frac{1}{2}d^2 \sin\phi.$$

Квадрат (d- диогнал): $S = a^2 = \dfrac{d^2}{2}.$

Трапетсия, l - хати миёна:

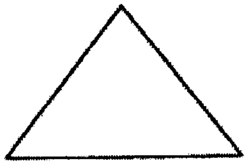


$$l=\frac{a+b}{2},\quad S=\frac{a+b}{2}h=lh,\qquad c=\frac{2ab}{a+b}.$$

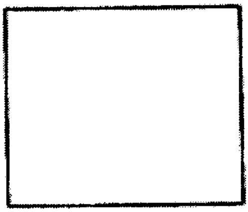
Бисёркунҷаҳои мунтазам:

$$S_n=\frac{na_n r}{2},\qquad S_n=\frac{1}{2}R^2\ \sin\frac{360^0}{n},a_n=2R\sin\frac{180^0}{n}.$$

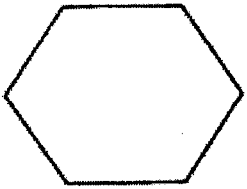
$a_3=R\sqrt{3}$



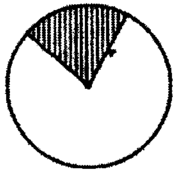
$a_4=R\sqrt{2}$



$a_5=R$

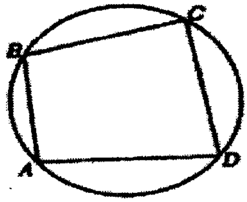


Сектор (L- дарозии камон, n^0 – ченаки градуси кунҷи марказӣ, α - ченаки радианӣ):



$$l = \frac{\pi r n^0}{180^0} = rd, \quad S = \frac{\pi r^2 n^0}{360^0} = \frac{1}{2} r^2 d.$$

Чоркунҷаи ихтиёрии дарункашидашуда:



1) $\hat{C} + \hat{A} = 180^0$; $\hat{B} + \hat{D} = 180^0$,

2) $|BC| + |AD| = |AB| + |CD|$.

Формулаҳои асосии стреометрия

Призмаи ихтиёрӣ (L- теғаи паҳлӯӣ, ρ - периметри асосӣ, S- масоҳати асосӣ, H- баландӣ, P -параметри бурриши перпендикулярӣ)

$$S_{пах.} = Pl; \qquad V = SH.$$

Призмаи рост: $S_{пах} = Pl;$

Параллелопипеди росткунҷа ($a, b, c -$ ченакҳо, d- диагонал):

$$V = abc, \qquad S_{пах} = PH, \qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Куб (a - тега): $V = a^2$, $d = a\sqrt{3}$, $S = 6a^2$.

Пирамидаи ихтиёрӣ: $V = \frac{1}{3}SH$.

Пирамидаи мунтазам (Р-периметри асос, l - апофема):

$$S_{пах} = \frac{1}{2}Pl; \quad V = \frac{1}{3}SH$$

Пирамидаи ихтиёрии сарбурида (S_1 ва S_2 – масоҳати асосҳо, h – баландӣ, V – ҳаҷм):

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

Пирамидаи сарбуридаи мунтазам (P_1 ва P_2 периметрҳои асосҳо, L- апофема)

$$S_{пах} = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right) \cdot L$$

$$S_{пах} = 2\pi RH, \quad V = \pi R^2 H.$$

Конус (R – радиуси асос, H – баландӣ, l - ташкилкунанда):

$$S_{пах} = \pi Rl, \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Курра, сфера: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Сектори курра (R – радиуси кура, h – баландии сегмент, V – ҳаҷм):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Адабиётҳо

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциональнного и интегрального исчисления. Часть I, II, III. М.: «Физико-математической литературы».
2. Курявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: «Наука», 1986
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть I, II, М.: «Наука» 1971.
4. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: «Наука», 1978. т. 1,2.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математики. М.: «Наука», 1978.
6. Гусак А.А. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Часть I, II. Минск. «Высшая школа» 1980.
7. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1,II.- М.: «Высшая школа», 1974.
8. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализ
9. Высшая математика для экономистов: Учебник / Н.Ш. Кремер и др. /изд. М.: Банки и биржи; ЮНИТИ, 2004.
10. Красс М. С. Математика для экономических специ альностей: Учебник. – М.: ИНФРА – М, 1999.
11. Комошин В.Л. Высшая математика для экономистов. Учебное пособие. М.: ИНФРА – М, 2006.
12. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов в примерах и задачах. Учебник М.: «Экзамен» 2006.
13. Акбаров Р. Математикаи олӣ ч. 1, 2, - 2003, ч. 3, - 2004 «Маориф»
14. Ляшко. Математический анализ в примерах и здачах.

А.С. Сатторов

АСОСҲОИ МАТЕМАТИКАИ ОЛӢ БАРОИ ИХТИСОСҲОИ ИҚТИСОДӢ

(дар мисолҳо ва масъалаҳо)

Муссаҳеҳ: *Назаров Ҷ. Ю.*

Ҳуруфчин: *Арипова З.М.*

Ба чопаш 01.09.2011 имзо шуд. Андозаи 60x84¹/₁₆. Қоғази офсетӣ. Чопи офсетӣ. Гарнитураи Times New Roman Tj. Ҷузъи чопии шартӣ 29,0. Теъдоди нашр 1000 нусха. Супориши №162.

ҶДММ "ЭР-граф".
734036, Душанбе, кӯчаи Р. Набиев, 218.
Тел: +992 (37) 881-15-16. E-mail: r-graph@mail.ru.

ISBN 978-99947-41-67-0

R-Graph