

В. В. ПРАСОЛОВ

**ЗАДАЧИ ПО
ПЛАНИМЕТРИИ**

© Прасолов В. В., 2003.

Свободно распространяется с разрешения автора.

Подготовлено на основе 4-го издания книги (М: МЦНМО, 2001) с разрешения издательства МЦНМО.

Макет книги изготовлен бригадой учеников 10д класса школы № 57 под руководством Л. Шагама. Члены бригады: Д. Загоскин, А. Никитин, К. Попков, А. Фурсов.

Оглавление

Предисловие	11
Глава 1. Подобные треугольники	12
§1. Отрезки, заключенные между параллельными прямыми	13
§2. Отношение сторон подобных треугольников	14
§3. Отношение площадей подобных треугольников	16
§4. Вспомогательные равные треугольники	17
§5. Треугольник, образованный основаниями высот	18
§6. Подобные фигуры	19
Задачи для самостоятельного решения	20
Решения	21
Глава 2. Вписанный угол	31
§1. Углы, опирающиеся на равные дуги	32
§2. Величина угла между двумя хордами	33
§3. Угол между касательной и хордой	34
§4. Связь величины угла с длиной дуги и хорды	35
§5. Четыре точки, лежащие на одной окружности	36
§6. Вписанный угол и подобные треугольники	37
§7. Биссектриса делит дугу пополам	39
§8. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагона- лями	39
§9. Три описанные окружности пересекаются в одной точке	40
§10. Точка Микеля	41
§11. Разные задачи	41
Задачи для самостоятельного решения	42
Решения	43
Глава 3. Окружности	55
§1. Касательные к окружностям	56
§2. Произведение длин отрезков хорд	57
§3. Касающиеся окружности	58
§4. Три окружности одного радиуса	59
§5. Две касательные, проведенные из одной точки	60

§6. Применение теоремы о высотах треугольника	60
§7. Площади криволинейных фигур	61
§8. Окружности, вписанные в сегмент	62
§9. Разные задачи	62
§10. Радикальная ось	63
Задачи для самостоятельного решения	65
Решения	65
Глава 4. Площадь	77
§1. Медиана делит площадь пополам	78
§2. Вычисление площадей	78
§3. Площади треугольников, на которые разбит четырехугольник	79
§4. Площади частей, на которые разбит четырехугольник	80
§5. Разные задачи	81
§6. Прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части	82
§7. Формулы для площади четырехугольника	82
§8. Вспомогательная площадь	83
§9. Перегруппировка площадей	84
Задачи для самостоятельного решения	85
Решения	86
Глава 5. Треугольники	96
§1. Вписанная и описанная окружности	97
§2. Прямоугольные треугольники	98
§3. Правильный треугольник	99
§4. Треугольники с углами 60° и 120°	100
§5. Целочисленные треугольники	101
§6. Разные задачи	101
§7. Теорема Менелая	104
§8. Теорема Чевы	105
§9. Прямая Симсона	108
§10. Подерный треугольник	109
§11. Прямая Эйлера и окружность девяти точек	110
§12. Точки Брокара	111
§13. Точка Лемуана	113
Задачи для самостоятельного решения	114
Решения	115
Глава 6. Многоугольники	140
§1. Вписанные и описанные четырехугольники	141
§2. Четырехугольники	143
§3. Теорема Птолемея	144
§4. Пятиугольники	145
§5. Шестиугольники	146
§6. Правильные многоугольники	146

§7. Вписанные и описанные многоугольники	148
§8. Произвольные выпуклые многоугольники	149
§9. Теорема Паскаля	150
Задачи для самостоятельного решения	151
Решения	152
Глава 7. Геометрические места точек	170
§1. ГМТ — прямая или отрезок	171
§2. ГМТ — окружность или дуга окружности	172
§3. Вписанный угол	172
§4. Вспомогательные равные треугольники	173
§5. Гомотетия	173
§6. Метод ГМТ	174
§7. ГМТ с ненулевой площадью	174
§8. Теорема Карно	174
§9. Окружность Ферма–Аполлония	175
Задачи для самостоятельного решения	176
Решения	176
Глава 8. Построения	184
§1. Метод геометрических мест точек	185
§2. Вписанный угол	185
§3. Подобные треугольники и гомотетия	185
§4. Построение треугольников по различным элементам	186
§5. Построение треугольников по различным точкам	186
§6. Треугольник	187
§7. Четырехугольники	188
§8. Окружности	188
§9. Окружность Аполлония	189
§10. Разные задачи	189
§11. Необычные построения	189
§12. Построения одной линейкой	190
§13. Построения с помощью двусторонней линейки	191
§14. Построения с помощью прямого угла	191
Задачи для самостоятельного решения	192
Решения	192
Глава 9. Геометрические неравенства	207
§1. Медиана треугольника	208
§2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника	208
§3. Сумма длин диагоналей четырехугольника	209
§4. Разные задачи на неравенство треугольника	209
§5. Площадь треугольника не превосходит половины произведе- ния двух сторон	210
§6. Неравенства с площадями	211
§7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой	212

§8. Ломаные внутри квадрата	213
§9. Четырехугольник	213
§10. Многоугольники	214
§11. Разные задачи	215
Задачи для самостоятельного решения	216
Приложение. Некоторые неравенства	217
Решения	218
Глава 10. Неравенства для элементов треугольника	236
§1. Медианы	236
§2. Высоты	236
§3. Биссектрисы	237
§4. Длины сторон	237
§5. Радиусы описанной, вписанной и внеписанных окружностей	237
§6. Симметричные неравенства для углов треугольника	238
§7. Неравенства для углов треугольника	239
§8. Неравенства для площади треугольника	239
§9. Против большей стороны лежит больший угол	240
§10. Отрезок внутри треугольника меньше наибольшей стороны .	240
§11. Неравенства для прямоугольных треугольников	241
§12. Неравенства для остроугольных треугольников	241
§13. Неравенства в треугольниках	242
Задачи для самостоятельного решения	243
Решения	244
Глава 11. Задачи на максимум и минимум	256
§1. Треугольник	257
§2. Экстремальные точки треугольника	258
§3. Угол	259
§4. Четырехугольники	259
§5. Многоугольники	260
§6. Разные задачи	260
§7. Экстремальные свойства правильных многоугольников	261
Задачи для самостоятельного решения	261
Решения	262
Глава 12. Вычисления и метрические соотношения	272
§1. Теорема синусов	272
§2. Теорема косинусов	273
§3. Вписанная, описанная и внеписанная окружности; их радиусы	274
§4. Длины сторон, высоты, биссектрисы	274
§5. Синусы и косинусы углов треугольника	275
§6. Тангенсы и котангенсы углов треугольника	275
§7. Вычисление углов	276
§8. Окружности	277
§9. Разные задачи	277

§10. Метод координат	278
Задачи для самостоятельного решения	279
Решения	280
Глава 13. Векторы	289
§1. Векторы сторон многоугольников	290
§2. Скалярное произведение. Соотношения	291
§3. Неравенства	291
§4. Суммы векторов	292
§5. Вспомогательные проекции	293
§6. Метод усреднения	293
§7. Псевдоскалярное произведение	294
Задачи для самостоятельного решения	295
Решения	296
Глава 14. Центр масс	305
§1. Основные свойства центра масс	305
§2. Теорема о группировке масс	306
§3. Момент инерции	307
§4. Разные задачи	308
§5. Барицентрические координаты	309
§6. Трилинейные координаты	310
Решения	311
Глава 15. Параллельный перенос	322
§1. Перенос помогает решить задачу	322
§2. Построения и геометрические места точек	323
Задачи для самостоятельного решения	324
Решения	324
Глава 16. Центральная симметрия	330
§1. Симметрия помогает решить задачу	331
§2. Свойства симметрии	332
§3. Симметрия помогает решить задачу. Построения	332
Задачи для самостоятельного решения	333
Решения	333
Глава 17. Осевая симметрия	338
§1. Симметрия помогает решить задачу	339
§2. Построения	339
§3. Неравенства и экстремумы	340
§4. Композиции симметрий	340
§5. Свойства симметрий и осей симметрии	341
§6. Теорема Шаля	341
Задачи для самостоятельного решения	342
Решения	342

Глава 18. Поворот	349
§1. Поворот на 90°	350
§2. Поворот на 60°	350
§3. Повороты на произвольные углы	352
§4. Композиции поворотов	353
Задачи для самостоятельного решения	354
Решения	355
Глава 19. Гомотетия и поворотная гомотетия	363
§1. Гомотетичные многоугольники	364
§2. Гомотетичные окружности	365
§3. Построения и геометрические места точек	365
§4. Композиции гомотетий	366
§5. Поворотная гомотетия	366
§6. Центр поворотной гомотетии	368
§7. Окружность подобия трех фигур	369
Задачи для самостоятельного решения	370
Решения	371
Глава 20. Принцип крайнего	381
§1. Наименьший или наибольший угол	381
§2. Наименьшее или наибольшее расстояние	382
§3. Наименьшая или наибольшая площадь	382
§4. Наибольший треугольник	383
§5. Выпуклая оболочка и опорные прямые	383
§6. Разные задачи	384
Решения	384
Глава 21. Принцип Дирихле	391
§1. Конечное число точек, прямых и т. д.	391
§2. Углы и длины	392
§3. Площадь	393
Решения	394
Глава 22. Выпуклые и невыпуклые многоугольники	402
§1. Выпуклые многоугольники	402
§2. Теорема Хелли	403
§3. Невыпуклые многоугольники	404
Решения	405
Глава 23. Делимость, инварианты, раскраски	415
§1. Чет и нечет	415
§2. Делимость	416
§3. Инварианты	416
§4. Вспомогательные раскраски в шахматном порядке	418
§5. Другие вспомогательные раскраски	418

§6. Задачи о раскрасках	419
Решения	420
Глава 24. Целочисленные решетки	430
§1. Многоугольники с вершинами в узлах решетки	430
§2. Разные задачи	431
Решения	431
Глава 25. Разрезания, разбиения, покрытия	436
§1. Равнооставленные фигуры	436
§2. Разрезания на части, обладающие специальными свойствами	437
§3. Свойства частей, полученных при разрезаниях	437
§4. Разрезания на параллелограммы	438
§5. Плоскость, разрезанная прямыми	438
§6. Разные задачи на разрезания	439
§7. Разбиение фигур на отрезки	440
§8. Покрытия	440
§9. Замощения костями домино и плитками	441
Решения	442
Глава 26. Системы точек и отрезков. Примеры и контрпри-	
меры	459
§1. Системы точек	459
§2. Системы отрезков, прямых и окружностей	460
§3. Примеры и контрпримеры	460
Решения	461
Глава 27. Индукция и комбинаторика	466
§1. Индукция	466
§2. Комбинаторика	467
Решения	467
Глава 28. Инверсия	470
§1. Свойства инверсии	471
§2. Построение окружностей	472
§3. Построения одним циркулем	472
§4. Сделаем инверсию	473
§5. Точки, лежащие на одной окружности, и окружности, прохо-	
дящие через одну точку	474
§6. Цепочки окружностей	476
Решения	477
Глава 29. Аффинные преобразования	487
§1. Аффинные преобразования	487
§2. Решение задач	
при помощи аффинных преобразований	489

§3. Комплексные числа	489
§4. Эллипсы Штейнера	492
Решения	493
Глава 30. Проективные преобразования	505
§1. Проективные преобразования прямой	505
§2. Проективные преобразования плоскости	507
§3. Переведем данную прямую на бесконечность	510
§4. Применение проективных преобразований, сохраняющих окружность	512
§5. Применение проективных преобразований прямой в задачах на доказательство	513
§6. Применение проективных преобразований прямой в задачах на построение	513
§7. Невозможность построений при помощи одной линейки	514
Решения	515
Дополнение	529
Предметный указатель	546

Предисловие

В этом сборнике задач представлены почти все темы планиметрии, которые изучаются в школе, в том числе и в специализированных классах. Его основу составляют задачи, предлагавшиеся в разное время на математических олимпиадах, и задачи из архивов математических олимпиад и математических кружков.

Для удобства читателя в книге принята подробная рубрикация. Задачи распределены по 30 главам, каждая из которых разбита на несколько параграфов (от 2 до 14). За основу классификации приняты методы решения задач. Главная цель этого разбиения состоит в том, чтобы помочь читателю ориентироваться в столь большом наборе задач. В новое издание включен подробный предметный указатель, который служит той же цели.

Первое издание этой книги вышло в свет 15 лет назад. Дошедшие до меня отзывы о ней свидетельствуют о том, что она нашла гораздо более широкое применение в школе, чем я надеялся, когда начинал ее писать.

В новое издание включено дополнительно 70 задач, которые стали мне известны за последние годы. Изменены также решения нескольких задач. Задачи повышенной трудности в новом издании отмечены «звездочкой». Добавлено также «Дополнение», в котором обсуждается несколько тем, более широких, чем отдельная задача.

Глава 28 написана А. Ю. Вайнтробом, а главы 29 и 30 написаны С. Ю. Оревкиным. Содержание этих глав во многом определила книга И. М. Яглома «Геометрические преобразования. Т. 2, ч. 3. Линейные и круговые преобразования» — М.: Гостехиздат, 1956.

При подготовке первого издания большую помощь оказали мне советы и замечания, высказанные академиком А. В. Погореловым, А. М. Абрамовым, А. Ю. Вайнтробом, Н. Б. Васильевым, Н. П. Долбилиным и С. Ю. Оревкиным. Всем им я выражаю искреннюю благодарность.

Глава 1

Подобные треугольники

Основные сведения

1. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ (обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1$;
- $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;
- $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2. Если параллельные прямые отсекают от угла с вершиной A треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 , то эти треугольники подобны и $AB_1 : AB_2 = AC_1 : AC_2$ (точки B_1 и B_2 лежат на одной стороне угла, C_1 и C_2 — на другой).

3. *Средней линией треугольника* называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Этот отрезок параллелен третьей стороне и равен половине ее длины.

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Этот отрезок параллелен основаниям и равен полусумме их длин.

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е. квадрату отношения длин соответствующих сторон. Это следует, например, из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A$.

5. Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называют *подобными*, если $A_1A_2 : A_2A_3 : \dots : A_nA_1 = B_1B_2 : B_2B_3 : \dots : B_nB_1$ и углы при вершинах A_1, \dots, A_n равны соответственно углам при вершинах B_1, \dots, B_n .

Отношение соответственных диагоналей подобных многоугольников равно коэффициенту подобия; для описанных подобных многоугольников отношение радиусов вписанных окружностей также равно коэффициенту подобия.

Вводные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Докажите, что $AC^2 = AB \cdot AH$ и $CH^2 = AH \cdot BH$.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1 ?

5. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC , а вершины R и S — на стороне BC . Выразите длину стороны квадрата через a и h_a .

§1. Отрезки, заключенные между параллельными прямыми

1.1. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны a и b ($a > b$).

а) Найдите длину отрезка, отсекаемого диагоналями на средней линии.

б) Найдите длину отрезка MN , концы которого делят стороны AB и CD в отношении $AM : MB = DN : NC = p : q$.

1.2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника — вершины параллелограмма. Для каких четырехугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

1.3. а) Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1 ?

б) На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D . Пусть a_1, b_1, c и d — расстояния от точек A_1, B_1, C и D до прямой AB . Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

1.4. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

1.5. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .

1.6. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP : AD = 1 : n$; Q — точка пересечения прямых AC и BP . Докажите, что $AQ : AC = 1 : (n + 1)$.

1.7. Вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (точка A_1 лежит на стороне AB , точка B_1 — на стороне BC и т. д.). Докажите, что центры обоих параллелограммов совпадают.

1.8. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K . Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M . Докажите, что $AK^2 = LK \cdot KM$.

1.9. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

1.10. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Докажите, что если $BO = PD$, то $AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC$.

1.11. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60° . На этой дуге взята точка M . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB , перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA .

1.12. а) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 — на другой. Докажите, что если $AB_1 \parallel BA_1$ и $AC_1 \parallel CA_1$, то $BC_1 \parallel CB_1$.

б) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 \parallel BA_1$, $AC_1 \parallel CA_1$ и $BC_1 \parallel CB_1$. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

1.13. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC .

1.14. Пусть M и N — середины сторон AD и BC прямоугольника $ABCD$. На продолжении отрезка DC за точку D взята точка P ; Q — точка пересечения прямых PM и AC . Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$.

1.15. На продолжениях оснований AD и BC трапеции $ABCD$ за точки A и C взяты точки K и L . Отрезок KL пересекает стороны AB и CD в точках M и N , а диагонали AC и BD в точках O и P . Докажите, что если $KM = NL$, то $KO = PL$.

1.16*. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки P, Q, R и S так, что $BP : AB = CR : CD = \alpha$ и $AS : AD = BQ : BC = \beta$. Докажите, что отрезки PR и QS делятся точкой их пересечения в отношениях $\beta : (1 - \beta)$ и $\alpha : (1 - \alpha)$.

§2. Отношение сторон подобных треугольников

1.17. а) В треугольнике ABC проведена биссектриса BD внутреннего или внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$.

б) Докажите, что центр O вписанной окружности треугольника ABC делит биссектрису AA_1 в отношении $AO : OA_1 = (b + c) : a$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

1.18. Длины двух сторон треугольника равны a , а длина третьей стороны равна b . Вычислите радиус его описанной окружности.

1.19. Прямая, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F . Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

1.20. На высотах BB_1 и CC_1 треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

1.21. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, касающаяся боковых сторон AB и CD в точках K и L соответственно, а оснований AD и BC в точках M и N .

а) Пусть Q — точка пересечения отрезков BM и AN . Докажите, что $KQ \parallel AD$.

б) Докажите, что $AK \cdot KB = CL \cdot LD$.

1.22. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN . Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

1.23. Прямая l пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F соответственно. Пусть G — точка пересечения прямой l с диагональю AC . Докажите, что $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$.

1.24. Пусть AC — большая из диагоналей параллелограмма $ABCD$. Из точки C на продолжения сторон AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF соответственно. Докажите, что $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

1.25. Углы треугольника ABC связаны соотношением $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Докажите, что $a^2 + bc = c^2$.

1.26. Концы отрезков AB и CD перемещаются по сторонам данного угла, причем прямые AB и CD перемещаются параллельно; M — точка пересечения отрезков AB и CD . Докажите, что величина $\frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$ остается постоянной.

1.27. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

1.28. На биссектрисе угла с вершиной C взята точка P . Прямая, проходящая через точку P , высекает на сторонах угла отрезки длиной a и b . Докажите, что величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора этой прямой.

1.29. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре внешним образом построена полуокружность, на которой взяты точки K и L , делящие полуокружность на три равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

1.30. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC . На сторонах AC и BC выбраны точки M и K соответственно так, что

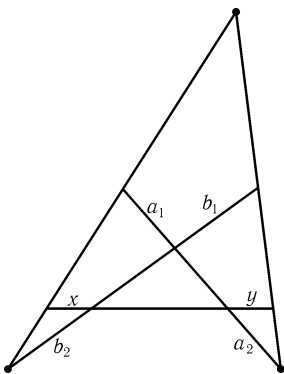


Рис. 1.1

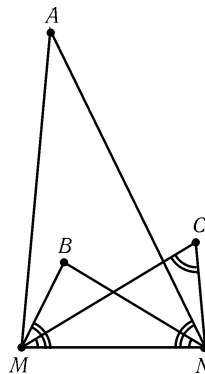


Рис. 1.2

$BK \cdot AB = BO^2$ и $AM \cdot AB = AO^2$. Докажите, что точки M , O и K лежат на одной прямой.

1.31*. Докажите, что если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ (рис. 1.1), то $x = y$.

1.32*. На отрезке MN построены подобные, одинаково ориентированные треугольники AMN , NBM и MNC (рис. 1.2). Докажите, что треугольник ABC подобен всем этим треугольникам, а центр его описанной окружности равноудален от точек M и N .

1.33*. Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC .

§3. Отношение площадей подобных треугольников

1.34. На стороне AC треугольника ABC взята точка E . Через точку E проведены прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (D и F — точки соответственно на этих сторонах). Докажите, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.35. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите длину MN , если $BC = a$ и $AD = b$.

1.36. Через некоторую точку Q , взятую внутри треугольника ABC , проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1 , S_2 и S_3 . Докажите, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

1.37. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади S , равна $3S/4$.

1.38. а) Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

б) Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1.39. Точка O , лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади S , отражается симметрично относительно середин его сторон. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в полученных точках.

§4. Вспомогательные равные треугольники

1.40. Катет BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C разделен точками D и E на три равные части. Докажите, что если $BC = 3AC$, то сумма углов AEC , ADC и ABC равна 90° .

1.41. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD прямой.

1.42. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведены прямые l_1 и l_2 , пересекающие его стороны. Из точек B и D опущены перпендикуляры BB_1 , BB_2 , DD_1 и DD_2 на эти прямые. Докажите, что отрезки B_1B_2 и D_1D_2 равны и перпендикулярны.

1.43. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE , пересекают гипотенузу AB в точках K и L . Докажите, что $KL = LB$.

1.44*. На сторонах AB , BC , CD и DA вписанного четырехугольника $ABCD$, длины которых равны a , b , c и d , внешним образом построены прямоугольники размером $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$ и $d \times b$. Докажите, что их центры являются вершинами прямоугольника.

1.45*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R с центром O , причем $AB = CD = EF = R$. Докажите, что точки попарного пересечения описанных окружностей треугольников BOC , DOE и FOA , отличные от точки O , являются вершинами правильного треугольника со стороной R .

* * *

1.46. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.47. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

1.48*. На сторонах произвольного треугольника ABC внешним образом построены равнобедренные треугольники с углами 2α , 2β и 2γ при

вершинах A' , B' и C' , причем $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Докажите, что углы треугольника $A'B'C'$ равны α , β и γ .

1.49*. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

1.50*. а) На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены прямоугольные треугольники ABC_1 и AB_1C , причем $\angle C_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, $\angle ABC_1 = \angle ACB_1 = \varphi$; M — середина BC . Докажите, что $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 2\varphi$.

б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник, причем его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC .

1.51*. На неравных сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены равнобедренные треугольники AC_1B и AB_1C с углом φ при вершине.

а) M — точка медианы AA_1 (или ее продолжения), равноудаленная от точек B_1 и C_1 . Докажите, что $\angle B_1MC_1 = \varphi$.

б) O — точка серединного перпендикуляра к отрезку BC , равноудаленная от точек B_1 и C_1 . Докажите, что $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - \varphi$.

1.52*. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ внешним образом построены подобные ромбы, причем их острые углы α прилегают к вершинам A и C . Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных ромбов, равны, а угол между ними равен α .

§5. Треугольник, образованный основаниями высот

1.53. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. Чему равен коэффициент подобия?

1.54. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.

1.55. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 .

а) Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1 .

б) Докажите, что $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности.

1.56. На сторонах остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Докажите, что $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ тогда и только тогда, когда H — точка пересечения высот треугольника ABC .

1.57. а) Докажите, что высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC делят углы треугольника $A_1B_1C_1$ пополам.

б) На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC .

1.58. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC , лежит на прямой B_1C_1 .

1.59. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что если $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$, то $A_1C_1 \parallel AC$.

1.60*. Пусть p — полупериметр остроугольного треугольника ABC , q — полупериметр треугольника, образованного основаниями его высот. Докажите, что $p : q = R : r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

§6. Подобные фигуры

1.61. В треугольник вписана окружность радиуса r . Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1 , r_2 , r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

1.62. Дан треугольник ABC . Постройте две прямые x и y так, чтобы для любой точки M на стороне AC сумма длин отрезков MX_M и MY_M , проведенных из точки M параллельно прямым x и y до пересечения со сторонами AB и BC треугольника, равнялась 1.

1.63. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC ; O — середина отрезка HE . Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

1.64. Докажите, что проекции основания высоты треугольника на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

1.65. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB , BC , CA построены полуокружности S_1 , S_2 , S_3 по одну сторону от AC . D — такая точка на S_3 , что $BD \perp AC$. Общая касательная к S_1 и S_2 , касается этих полуокружностей в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 , проведенной через точку D .

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

1.66*. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, опустили перпендикуляры MQ и MP на его две противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит диагонали прямоугольника $ABCD$.

1.67*. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Рассмотрим две прямые,

каждая из которых проходит через точки касания, принадлежащие одной из окружностей. Докажите, что точка пересечения этих прямых расположена на прямой, соединяющей центры окружностей.

Задачи для самостоятельного решения

1.68. Основание равнобедренного треугольника составляет четверть его периметра. Из произвольной точки основания проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Во сколько раз периметр треугольника больше периметра отсеченного параллелограмма?

1.69. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.

1.70. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

1.71. Точки A_1 , B_1 и C_1 симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1.72. Докажите, что если $\angle BAC = 2\angle ABC$, то $BC^2 = (AC + AB) \cdot AC$.

1.73. На прямой l даны точки A , B , C и D . Через точки A и B , а также через точки C и D проводятся параллельные прямые. Докажите, что диагонали полученных таким образом параллелограммов (или их продолжения) пересекают прямую l в двух фиксированных точках.

1.74. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и средняя линия A_1C_1 . Прямые AD и A_1C_1 пересекаются в точке K . Докажите, что $2A_1K = |b - c|$.

1.75. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Докажите, что $S_{ABM} = S_{CBN}$.

1.76. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $AP = CQ$. Точка M такова, что $PM \parallel AD$ и $QM \parallel AB$. Докажите, что точка M лежит на диагонали BD .

1.77. Продолжения боковых сторон трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Концы отрезка EF , параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, лежат соответственно на сторонах AB и CD . Докажите, что $AE : CF = AO : CO$.

1.78. Три прямые, параллельные сторонам данного треугольника, отсекают от него три треугольника, причем остается равносторонний шестиугольник. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a , b и c .

1.79. Три прямые, параллельные сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, причем стороны треугольника высекают на этих прямых

отрезки длиной x . Найдите x , если длины сторон треугольника равны a , b и c .

1.80. Точка P лежит внутри треугольника ABC , причем $\angle ABP = \angle ACP$. На прямых AB и AC взяты такие точки C_1 и B_1 , что $BC_1 : CB_1 = CP : BP$. Докажите, что одна из диагоналей параллелограмма, две стороны которого лежат на прямых BP и CP , а две другие стороны (или их продолжения) проходят через B_1 и C_1 , параллельна BC .

Решения

1.1. а) Пусть P и Q — середины сторон AB и CD , K и L — точки пересечения прямой PQ с диагоналями AC и BD . Тогда $PL = a/2$ и $PK = b/2$, поэтому $KL = PL - PK = (a - b)/2$.

б) Возьмем на стороне AD точку F так, что $BF \parallel CD$. Пусть E — точка пересечения отрезков MN и BF . Тогда $MN = ME + EN = \frac{qAF}{p+q} + b = \frac{q(a-b) + (p+q)b}{p+q} = \frac{qa+pb}{p+q}$.

1.2. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно четырехугольника $ABCD$. Тогда $KL = MN = AC/2$ и отрезок KL параллелен MN , т. е. $KLMN$ — параллелограмм. Теперь ясно, что $KLMN$ — прямоугольник, если диагонали AC и BD перпендикулярны; ромб, если $AC = BD$; квадрат, если диагонали AC и BD равны по длине и перпендикулярны.

1.3. а) Обозначим точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 через O . Проведем в треугольнике B_1BC отрезок $A_1A_2 \parallel BB_1$. Тогда $B_1C/B_1A_2 = 1 + p$, поэтому $AO : OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = B_1C : qB_1A_2 = (1 + p) : q$.

б) Пусть $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. Тогда $AD : DA_1 = (1 + p) : q$ и $BD : DB_1 = (1 + q) : p$. Поэтому $a_1 = \frac{1+p+q}{1+p}$, $b_1 = \frac{1+p+q}{1+q}$ и $c = (1 + p + q)d$.

1.4. Пусть A_2 — середина отрезка A_1B . Тогда $CA_1 : A_1A_2 = CP : PC_1$ и $A_1A_2 : A_1B = 1 : 2$, поэтому $CA_1 : A_1B = CP : 2PC_1$. Аналогично $CB_1 : B_1A = CP : 2PC_1 = CA_1 : A_1B$.

1.5. Точка P лежит на медиане QM треугольника AQD (или на ее продолжении). Легко проверить, что решение задачи 1.4 остается верным и в случае, когда точка P лежит на продолжении медианы. Следовательно, $BC \parallel AD$.

1.6. Так как $\triangle AQP \sim \triangle CQB$, то $AQ : QC = AP : BC = 1 : n$. Поэтому $AC = AQ + QC = (n + 1)AQ$.

1.7. Центр параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ как середина отрезка B_1D_1 принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD . Аналогично он принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон BC и AD . Точка пересечения этих отрезков — центр параллелограмма $ABCD$.

1.8. Ясно, что $AK : KM = BK : KD = LK : AK$, т. е. $AK^2 = LK \cdot KM$.

1.9. Пусть AC — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Опустим пер-

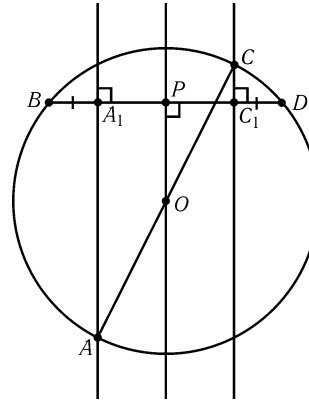


Рис. 1.3

пендикуляры AA_1 и CC_1 на BD (рис. 1.3). Нужно доказать, что $BA_1 = DC_1$. Опустим перпендикуляр OP из центра O описанной окружности на BD . Ясно, что P — середина отрезка BD . Прямые AA_1 , OP , CC_1 параллельны и $AO = OC$, поэтому $A_1P = PC_1$. Так как P — середина BD , то $BA_1 = DC_1$.

1.10. Так как $BO = PD$, то $BO : OD = DP : PB = k$. Пусть $BC = 1$. Тогда $AD = k$ и $ED = 1/k$. Поэтому $k = AD = AE + ED = 1 + (1/k)$, т. е. $k^2 = 1 + k$. Остается заметить, что $k^2 = AD^2$ и $1 + k = BC^2 + BC \cdot AD$.

1.11. Пусть C, D, E, F — середины сторон AO, OB, BM, MA соответственно четырехугольника $AOBM$. Поскольку $AB = MO = R$, где R — радиус данной окружности, то согласно задаче 1.2 $CDEF$ — ромб. Поэтому $CE \perp DF$.

1.12. а) Если прямые, на которых лежат данные точки, параллельны, то утверждение задачи очевидно. Будем считать, что эти прямые пересекаются в точке O . Тогда $OA : OB = OB_1 : OA_1$, и $OC : OA = OA_1 : OC_1$, поэтому $OC : OB = OB_1 : OC_1$, а значит, $BC_1 \parallel CB_1$ (отношения отрезков следует считать ориентированными).

б) Пусть D и E — точки пересечения прямых AB_1 и CA_1 , CB_1 и AC_1 . Тогда $CA_1 : A_1D = CB : BA = EC_1 : C_1A$. А так как $\triangle CB_1D \sim \triangle EB_1A$, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

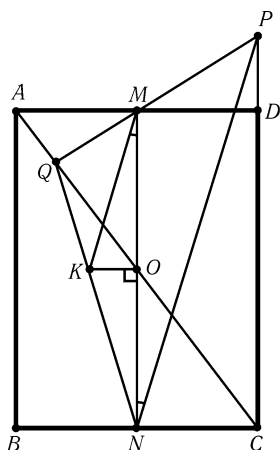


Рис. 1.4

1.13. Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон. Пусть a — расстояние от точки A_1 до прямых AC и AB , b — расстояние от точки B_1 до прямых AB и BC . Пусть, далее, $A_1M : B_1M = p : q$, причем $p + q = 1$. Тогда расстояния от точки M до прямых AC и BC равны qa и pb соответственно. С другой стороны, согласно задаче 1.1, б) расстояние от точки M до прямой AB равно $qa + pb$.

1.14. Пусть прямая, проходящая через центр O данного прямоугольника параллельно BC , пересекает отрезок QN в точке K (рис. 1.4). Так как $MO \parallel PC$, то $QM : MP = QO : OC$, а так как $KO \parallel BC$, то $QO : OC = QK : KN$. Следовательно, $QM : MP = QK : KN$, т. е. $KM \parallel NP$. Поэтому $\angle MNP = \angle KMO = \angle QNM$.

1.15. Проведем через точку M прямую EF , параллельную CD (точки E и F лежат на прямых BC и AD). Тогда $PL : PK = BL : KD$ и $OK : OL = KA : CL = KA : KF = BL : EL$. Так как $KD = EL$,

то $PL : PK = OK : OL$, а значит, $PL = OK$.

1.16. Рассмотрим параллелограмм $ABCD_1$. Можно считать, что точки D и D_1 не совпадают (иначе утверждение задачи очевидно). Возьмем на сторонах AD_1 и CD_1 точки S_1 и R_1 так, что $SS_1 \parallel DD_1$ и $RR_1 \parallel DD_1$. Пусть N — точка пересечения отрезков PR_1 и QS_1 ; N_1 и N_2 — точки пересечения прямой, проходящей через N параллельно DD_1 , с отрезками PR и QS соответственно. Тогда $\vec{N_1N} = \beta \vec{RR_1} = \alpha \beta \vec{DD_1}$ и $\vec{N_2N} = \alpha \vec{SS_1} = \alpha \beta \vec{DD_1}$. Поэтому $N_1 = N_2$ — точка пересечения отрезков PR и QS . Ясно, что $PN_1 : PR = PN : PR_1 = \beta$ и $QN_2 : QS = \alpha$.

Замечание. В случае $\alpha = \beta$ есть более простое решение. Так как $BP : BA = BQ : BC = \alpha$, то $PQ \parallel AC$ и $PQ : AC = \alpha$. Аналогично $RS \parallel AC$ и $RS : AC = 1 - \alpha$. Поэтому отрезки PR и QS делятся точкой их пересечения в

отношении $\alpha : (1 - \alpha)$.

1.17. а) Опустим из вершин A и C перпендикуляры AK и CL на прямую BD . Так как $\angle CBL = \angle ABK$ и $\angle CDL = \angle KDA$, то $\triangle BLC \sim \triangle BKA$ и $\triangle CLD \sim \triangle AKD$. Поэтому $AD : DC = AK : CL = AB : BC$.

б) Учитывая, что $BA_1 : A_1C = BA : AC$ и $BA_1 + A_1C = BC$, получаем $BA_1 = ac/(b + c)$. Так как BO — биссектриса треугольника ABA_1 , то $AO : OA_1 = AB : BA_1 = (b + c) : a$.

1.18. Пусть O — центр описанной окружности равнобедренного треугольника ABC , B_1 — середина основания AC , A_1 — середина боковой стороны BC . Так как $\triangle BOA_1 \sim \triangle BCB_1$, то $BO : BA_1 = BC : BB_1$, а значит, $R = BO = a^2/\sqrt{4a^2 - b^2}$.

1.19. Если $\angle EAD = \varphi$, то $AE = AD/\cos \varphi = AB/\cos \varphi$ и $AF = AB/\sin \varphi$. Поэтому $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{AB^2} = \frac{1}{AB^2}$.

1.20. Легко проверить, что $AB_2^2 = AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB = AC_2^2$.

1.21. а) Так как $BQ : QM = BN : AM = BK : AK$, то $KQ \parallel AM$.

б) Пусть O — центр вписанной окружности. Так как $\angle CBA + \angle BAD = 180^\circ$, то $\angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$. Поэтому $\triangle AKO \sim \triangle OKB$, т. е. $AK : KO = OK : KB$. Следовательно, $AK \cdot KB = KO^2 = R^2$, где R — радиус вписанной окружности. Аналогично $CL \cdot LD = R^2$.

1.22. Если угол ABC тупой (соответственно острый), то угол MAN тоже тупой (соответственно острый). Кроме того, стороны этих углов взаимно перпендикулярны. Поэтому $\angle ABC = \angle MAN$. Прямоугольные треугольники ABM и ADN имеют равные углы ABM и ADN , поэтому $AM : AN = AB : AD = AB : CB$, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle MAN$.

1.23. Возьмем на диагонали AC такие точки D' и B' , что $BB' \parallel l$ и $DD' \parallel l$. Тогда $AB : AE = AB' : AG$ и $AD : AF = AD' : AG$. Так как стороны треугольников ABB' и CDD' попарно параллельны и $AB = CD$, эти треугольники равны и $AB' = CD'$. Поэтому $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AB'}{AG} + \frac{AD'}{AG} = \frac{CD' + AD'}{AG} = \frac{AC}{AG}$.

1.24. Опустим из вершины B перпендикуляр BG на AC (рис. 1.5). Из подобия треугольников ABG и ACE получаем $AC \cdot AG = AE \cdot AB$. Прямые AF и CB параллельны, поэтому углы GCB и CAF равны и прямоугольные треугольники CBG и ACF подобны. Из подобия этих треугольников получаем $AC \cdot CG = AF \cdot BC$. Складывая полученные равенства, находим $AC \cdot (AG + CG) = AE \cdot AB + AF \cdot BC$. Так как $AG + CG = AC$, получаем требуемое равенство.

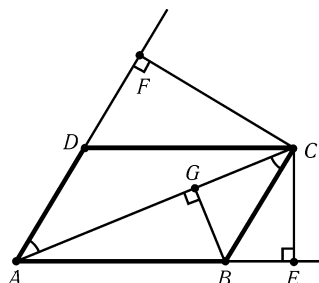


Рис. 1.5

1.25. Так как $\alpha + \beta = 90^\circ - (\alpha/2)$, то $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + (\alpha/2)$. Поэтому на стороне AB можно выбрать точку D так, что $\angle ACD = 90^\circ - (\alpha/2)$, т. е. $AC = AD$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, а значит, $BC : BD = AB : CB$, т. е. $a^2 = c(c - b)$.

1.26. При перемещении отрезков AB и CD треугольник AMC заменится на другой треугольник, подобный исходному. Поэтому величина AM/CM остается постоянной. Аналогично величина BM/DM остается постоянной.

1.27. Обозначим точку пересечения медиан через O , точки пересечения медианы AK с прямыми FP и FE — через Q и M , точки пересечения меди-

ны CL с прямыми EP и FE — через R и N соответственно (рис. 1.6). Ясно, что $FM : FE = FQ : FP = LO : LC = 1 : 3$, т. е. $FM = FE/3$. Аналогично $EN = FE/3$.

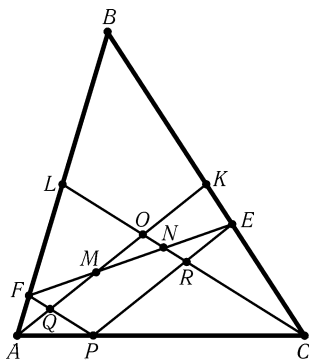


Рис. 1.6

1.28. Пусть A и B — точки пересечения данной прямой со сторонами угла. Возьмем на отрезках AC и BC точки K и L так, что $PK \parallel BC$ и $PL \parallel AC$. Так как $\triangle AKP \sim \triangle PLB$, то $AK : KP = PL : LB$, а значит, $(a - p)(b - p) = p^2$, где $p = PK = PL$. Следовательно, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$.

1.29. Обозначим середину стороны BC через O , а точки пересечения AK и AL со стороной BC — через P и Q . Можно считать, что $BP < BQ$. Треугольник LCO равнобедренный и $LC \parallel AB$. Поэтому $\triangle ABQ \sim \triangle LCQ$, т. е. $BQ : QC = AB : LC = 2 : 1$. Следовательно, $BC = BQ + QC = 3QC$. Аналогично $BC = 3BP$.

1.30. Так как $BK : BO = BO : AB$ и $\angle KBO = \angle ABO$, то $\triangle KOB \sim \triangle OAB$. Поэтому $\angle KOB = \angle OAB$. Аналогично $\angle AOM = \angle ABO$. Следовательно, $\angle KOM = \angle KOB + \angle BOA + \angle AOM = \angle OAB + \angle BOA + \angle ABO = 180^\circ$, т. е. точки K, O и M лежат на одной прямой.

1.31. Проведем дополнительно прямые, параллельные прямым, на которых лежат отрезки длиной $a_1 = a_2 = a$ и $b_1 = b_2 = b$ (рис. 1.7). Из подобия треугольников следуют равенства $\frac{x}{b} = \frac{x+z_1}{\beta}$, $\frac{a+z_3}{a} = \frac{\beta}{b+z_2}$, $\frac{y+z_1}{\alpha} = \frac{y}{a}$, $\frac{\alpha}{a+z_3} = \frac{b+z_2}{b}$. Перемножив эти равенства, получим $x(y+z_1) = y(x+z_1)$, а значит, $x = y$.

1.32. Так как $\angle AMN = \angle MNC$ и $\angle BMN = \angle MNA$, то $\angle AMB = \angle ANC$. Кроме того, $AM : AN = NB : NM = BM : CN$. Поэтому $\triangle AMB \sim \triangle ANC$, а значит, $\angle MAB = \angle NAC$. Следовательно, $\angle BAC = \angle MAN$. Для других углов доказательство аналогично.

Пусть точки B_1 и C_1 симметричны B и C относительно серединного перпендикуляра к отрезку MN . Так как $AM : NB = MN : BM = MC : NC$, то $MA \cdot MC_1 = AM \cdot NC = NB \cdot MC = MB_1 \cdot MC$. Следовательно, точка A лежит на окружности, описанной вокруг трапеции BB_1CC_1 .

1.33. Так как $\angle AEB + \angle BEC = 180^\circ$, то эти углы не могут быть разными углами подобных треугольников ABE и BEC , т. е. они равны и BE — перпендикуляр.

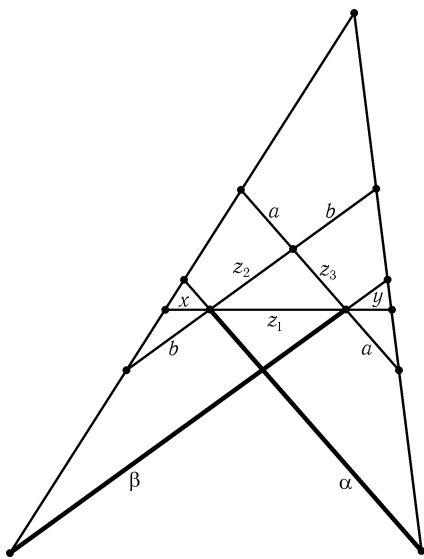


Рис. 1.7

Возможны два варианта: $\angle ABE = \angle CBE$ или $\angle ABE = \angle BCE$. Первый вариант отпадает, так как в этом случае $\triangle ABE = \triangle CBE$. Остается второй вариант. В этом случае $\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике ABC катеты относятся, как $1 : \sqrt{3}$, поэтому его углы равны $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

1.34. $S_{BDEF}/2S_{ADE} = S_{BDE}/S_{ADE} = DB/AD = EF/AD = \sqrt{S_{EFC}/S_{ADE}}$. Поэтому $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.35. Пусть $MN = x$; E — точка пересечения прямых AB и CD . Треугольники EBC, EMN и EAD подобны, поэтому $S_{EBC} : S_{EMN} : S_{EAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{EMN} - S_{EBC} = S_{MBCN} = S_{MADN} = S_{EAD} - S_{EMN}$, то $x^2 - a^2 = b^2 - x^2$, т. е. $x^2 = (a^2 + b^2)/2$.

1.36. Проведем через точку Q , взятую внутри треугольника ABC , прямые DE, FG и HI параллельно BC, CA и AB соответственно так, чтобы точки F и H лежали на стороне BC , точки E и I — на стороне AC , точки D и G — на стороне AB (рис. 1.8). Введем обозначения: $S = S_{ABC}, S_1 = S_{GDQ}, S_2 = S_{IEQ}, S_3 = S_{HFQ}$. Тогда

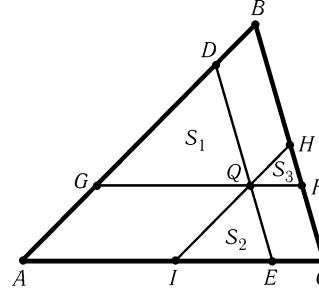


Рис. 1.8

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{GQ}{AC} + \frac{IE}{AC} + \frac{FQ}{AC} = \frac{AI + IE + EC}{AC} = 1,$$

т. е. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

1.37. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC ; точка A_1 симметрична M относительно середины отрезка BC . Длины сторон треугольника $СМА_1$ относятся к медианам треугольника ABC , как $2 : 3$. Поэтому искомая площадь равна $9S_{СМА_1}/4$. Ясно, что $S_{СМА_1} = S/3$ (см. решение задачи 4.1).

1.38. Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA .

а) Ясно, что $S_{AEN} + S_{CFG} = \frac{S_{ABD}}{4} + \frac{S_{CBD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4}$. Аналогично $S_{BEF} + S_{DGH} = \frac{S_{ABCD}}{4}$. Поэтому $S_{EFGH} = S_{ABCD} - \frac{S_{ABCD}}{4} - \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

б) Так как $AC = BD$, то $EFGH$ — ромб (задача 1.2). Согласно задаче а) $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG \cdot FH$.

1.39. Пусть E, F, G и H — середины сторон четырехугольника $ABCD$; точки E_1, F_1, G_1 и H_1 симметричны точке O относительно этих точек. Так как EF — средняя линия треугольника E_1OF_1 , то $S_{E_1OF_1} = 4S_{EOF}$. Аналогично $S_{F_1OG_1} = 4S_{FOG}$, $S_{G_1OH_1} = 4S_{GON}$ и $S_{H_1OE_1} = 4S_{HOE}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1} = 4S_{EFGH}$. Согласно задаче 1.39, а) $S_{ABCD} = 2S_{EFGH}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1} = 2S_{ABCD} = 2S$.

1.40. Первое решение. Рассмотрим квадрат $BCMN$ и разделим его сторону MN точками P и Q на три равные части (рис. 1.9). Тогда $\triangle ABC = \triangle PDQ$ и $\triangle ACD = \triangle PMA$. Поэтому треугольник PAD — равнобедренный прямоугольный и $\angle ABC + \angle ADC = \angle PDQ + \angle ADC = 45^\circ$.

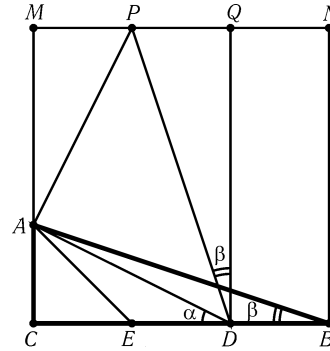


Рис. 1.9

Второе решение. Так как $DE = 1$, $EA = \sqrt{2}$, $EB = 2$, $AD = \sqrt{5}$ и $BA = \sqrt{10}$, то $DE : AE = EA : EB = AD : BA$ и $\triangle DEA \sim \triangle AEB$. Следовательно, $\angle ABC = \angle EAD$. Кроме того, $\angle AEC = \angle CAE = 45^\circ$. Поэтому $\angle ABC + \angle ADC + \angle AEC = (\angle EAD + \angle CAE) + \angle ADC = \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ$.

1.41. Опустим из точки L перпендикуляры LM на AB и LN на AD . Тогда $KM = MB = ND$ и $KL = LB = DL$, поэтому прямоугольные треугольники KML и DNL равны. Следовательно, $\angle DLK = \angle NLM = 90^\circ$.

1.42. Так как $D_1A = B_1B$, $AD_2 = BB_2$ и $\angle D_1AD_2 = \angle B_1BB_2$, то $\triangle D_1AD_2 = \triangle B_1BB_2$. Стороны AD_1 и BB_1 (а также AD_2 и BB_2) этих треугольников перпендикулярны, поэтому $B_1B_2 \perp D_1D_2$.

1.43. На продолжении отрезка AC за точку C возьмем точку M так, что $CM = CE$ (рис. 1.10). Тогда треугольник ACE при повороте с центром C на 90° переходит в треугольник BCM . Поэтому прямая MB перпендикулярна прямой AE , а значит, параллельна прямой CL . Так как $MC = CE = DC$ и прямые DK , CL и MB параллельны, то $KL = LB$.

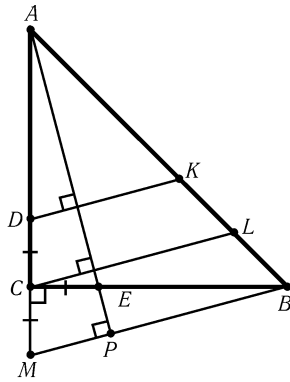


Рис. 1.10

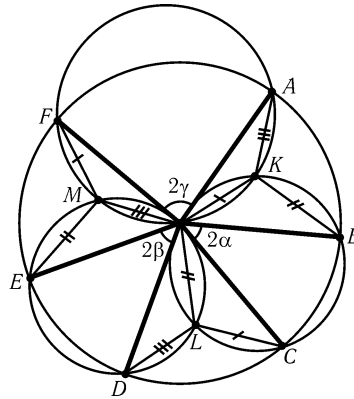


Рис. 1.11

1.44. Пусть на сторонах AB и BC построены прямоугольники ABC_1D_1 и A_2BCD_2 ; P, Q, R и S — центры прямоугольников, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA . Так как $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то $\triangle ADC = \triangle A_2BC_1$, а значит, $\triangle RDS = \triangle PBQ$ и $RS = PQ$. Аналогично $QR = PS$. Следовательно, $PQRS$ — параллелограмм, причем один из треугольников RDS и PBQ построен на его сторонах внешним образом, а другой внутренним; аналогичное утверждение справедливо и для треугольников QCR и SAP . Поэтому $\angle PQR + \angle RSP = \angle BQC + \angle DSA = 180^\circ$, так как $\angle PQB = \angle RSD$ и $\angle RQC = \angle PSA$. Следовательно, $PQRS$ — прямоугольник.

1.45. Пусть K, L, M — точки пересечения описанных окружностей треугольников FOA и BOC , BOC и DOE , DOE и FOA ; $2\alpha, 2\beta$ и 2γ — углы при вершинах равнобедренных треугольников BOC, DOE и FOA (рис. 1.11). Точка K лежит на дуге OB описанной окружности равнобедренного треугольника BOC , поэтому $\angle OKB = 90^\circ + \alpha$. Аналогично $\angle OKA = 90^\circ + \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, то $\angle AKB = 90^\circ + \beta$. Внутри правильного треугольника AOB существует единственная точка K , из которой его стороны видны под данными углами. Аналогичные рассуждения для точки L , лежащей внутри треугольника COD , показывают, что $\triangle OKB = \triangle CLO$. Докажем теперь, что $\triangle KOL = \triangle OKB$. В самом

деле, $\angle COL = \angle KBO$, поэтому $\angle KOB + \angle COL = 180^\circ - \angle OKB = 90^\circ - \alpha$, а значит, $\angle KOL = 2\alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle OKB$. Следовательно, $KL = OB = R$. Аналогично $LM = MK = R$.

1.46. Пусть $\angle A = \alpha$. Легко проверить, что оба угла KCL и ADL равны $240^\circ - \alpha$ (или $120^\circ + \alpha$). А так как $KC = BC = AD$ и $CL = DL$, то $\triangle KCL = \triangle ADL$, а значит, $KL = AL$. Аналогично $KL = AK$.

1.47. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных на сторонах DA, AB и BC параллелограмма с острым углом α при вершине A . Легко проверить, что $\angle PAQ = 90^\circ + \alpha = \angle RBQ$, а значит, $\triangle PAQ = \triangle RBQ$. Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$.

1.48. Заметим сначала, что сумма углов при вершинах A, B и C шестиугольника $AB'CA'BC'$ равна 360° , так как по условию сумма его углов при остальных вершинах равна 360° . Построим на стороне AC' внешним образом треугольник $AC'P$, равный треугольнику $BC'A'$ (рис. 1.12). Тогда $\triangle AB'P = \triangle CB'A'$, так как $AB' = CB', AP = CA'$ и $\angle PAB' = 360^\circ - \angle PAC' - \angle C'AB' = 360^\circ - \angle A'BC' - \angle C'AB' = \angle A'CB'$. Следовательно, $\triangle C'B'A' = \triangle C'B'P$, а значит, $2\angle A'B'C' = \angle PB'A' = \angle AB'C$, так как $\angle PB'A = \angle A'B'C$.

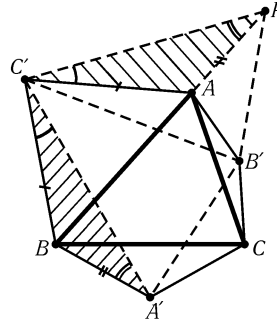


Рис. 1.12

1.49. Так как $BA : BC = BC_1 : BA_1$ и $\angle ABC = \angle C_1BA_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle C_1BA_1$. Аналогично $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C$. А так как $BA_1 = A_1C$, то $\triangle C_1BA_1 = \triangle B_1A_1C$. Следовательно, $AC_1 = C_1B = B_1A_1$ и $AB_1 = B_1C = C_1A_1$. Ясно также, что четырехугольник $AB_1A_1C_1$ выпуклый.

1.50. а) Пусть P и Q — середины сторон AB и AC . Тогда $MP = AC/2 = QB_1, MQ = AB/2 = PC_1$ и $\angle C_1PM = \angle C_1PB + \angle BPM = \angle B_1QC + \angle CQM = \angle B_1QM$. Следовательно, $\triangle MQB_1 = \triangle C_1PM$, а значит, $MC_1 = MB_1$. Кроме того, $\angle PMC_1 + \angle QMB_1 = \angle QB_1M + \angle QMB_1 = 180^\circ - \angle MQB_1$, а $\angle MQB_1 = \angle A + \angle CQB_1 = \angle A + (180^\circ - 2\varphi)$. Следовательно, $\angle B_1MC_1 = \angle PMQ + 2\varphi - \angle A = 2\varphi$. (Случай, когда $\angle C_1PB + \angle BPM > 180^\circ$, разбирается аналогично.)

б) Возьмем на сторонах AB и AC такие точки B' и C' , что $AB' : AB = AC' : AC = 2 : 3$. Середина M отрезка $B'C'$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC . Построим на сторонах AB' и AC' внешним образом прямоугольные треугольники $AB'C_1$ и AB_1C' с углом $\varphi = 60^\circ$. Тогда B_1 и C_1 — центры правильных треугольников, построенных на сторонах AB и AC ; с другой стороны, согласно задаче а) $MB_1 = MC_1$ и $\angle B_1MC_1 = 120^\circ$.

З а м е ч а н и е. Утверждения задач а) и б) остаются верными и для треугольников, построенных внутренним образом.

1.51. а) Пусть B' — точка пересечения прямой AC и перпендикуляра к прямой AB_1 , восстановленного из точки B_1 ; точка C' определяется аналогично. Так как $AB' : AC' = AC_1 : AB_1 = AB : AC$, то $B'C' \parallel BC$. Если N — середина отрезка $B'C'$, то, как следует из задачи 1.51, $NC_1 = NB_1$ (т. е. $N = M$) и $\angle B_1NC_1 = 2\angle AB'B_1 = 180^\circ - 2\angle CAB_1 = \varphi$.

б) Построим на стороне BC внешним образом равнобедренный треугольник BA_1C с углом $360^\circ - 2\varphi$ при вершине A_1 (если $\varphi < 90^\circ$, строим внутренним образом треугольник с углом 2φ). Так как сумма углов при вершинах трех построенных равнобедренных треугольников равна 360° , треугольник $A_1B_1C_1$

имеет углы $180^\circ - \varphi$, $\varphi/2$ и $\varphi/2$ (см. задачу 1.49). В частности, этот треугольник равнобедренный, а значит, $A_1 = O$.

1.52. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры ромбов, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA ; M — середина диагонали AC . Тогда $MO_1 = MO_2$ и $\angle O_1MO_2 = \alpha$ (см. задачу 1.51). Аналогично $MO_3 = MO_4$ и $\angle O_3MO_4 = \alpha$. Следовательно, при повороте на угол α относительно точки M треугольник O_1MO_3 переходит в O_2MO_4 .

1.53. Так как $A_1C = AC|\cos C|$, $B_1C = BC|\cos C|$ и угол C у треугольников ABC и A_1B_1C общий, то эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия равен $|\cos C|$.

1.54. Так как точки M и N лежат на окружности с диаметром CH , то $\angle CMN = \angle CHN$, а так как $AC \perp HN$, то $\angle CHN = \angle A$. Аналогично $\angle CNM = \angle B$.

1.55. а) Пусть l — касательная в точке A к описанной окружности. Тогда $\angle(l, AB) = \angle(AC, CB) = \angle(C_1B_1, AC_1)$, а значит, $l \parallel B_1C_1$.

б) Так как $OA \perp l$ и $l \parallel B_1C_1$, то $OA \perp B_1C_1$.

1.56. Если AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты, то прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C имеют равные углы при вершине C , поэтому они подобны. Следовательно, $\triangle A_1BH \sim \triangle B_1AH$, а значит, $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$. Аналогично $BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$.

Если $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$, то $\triangle A_1BH \sim \triangle B_1AH$, а значит, $\angle BA_1H = \angle AB_1H = \varphi$. Поэтому $\angle CA_1H = \angle CB_1H = 180^\circ - \varphi$. Аналогично $\angle AC_1H = \angle CA_1H = 180^\circ - \varphi$ и $\angle AC_1H = \angle AB_1H = \varphi$, поэтому $\varphi = 90^\circ$ т. е. AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты.

1.57. а) Согласно задаче 1.54 $\angle C_1A_1B = \angle CA_1B_1 = \angle A$. Так как $AA_1 \perp BC$, то $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$. Аналогично доказывается, что лучи B_1B и C_1C — биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$.

б) Прямые AB, BC и CA являются биссектрисами внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому A_1A — биссектриса угла $B_1A_1C_1$, а значит, $AA_1 \perp BC$. Для прямых BB_1 и CC_1 доказательство аналогично.

1.58. Из результата задачи 1.58, а) следует, что прямая B_1A_1 при симметрии относительно прямой AC переходит в прямую B_1C_1 .

1.59. Согласно задаче 1.54 $\angle B_1A_1C = \angle BAC$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то $\angle B_1A_1C = \angle ABC$. Поэтому $\angle BAC = \angle ABC$. Аналогично из того, что $B_1C_1 \parallel BC$, следует равенство $\angle ABC = \angle BCA$. Поэтому треугольник ABC равносторонний и $A_1C_1 \parallel AC$.

1.60. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Так как $OA \perp B_1C_1$ (см. задачу 1.56, б), то $S_{AOC_1} + S_{AOB_1} = R \cdot B_1C_1/2$. Аналогичные рассуждения для вершин B и C показывают, что $S_{ABC} = qR$. С другой стороны, $S_{ABC} = pr$.

1.61. Периметр треугольника, отсекаемого прямой, параллельной стороне BC , равен сумме расстояний от точки A до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC , поэтому сумма периметров маленьких треугольников равна периметру треугольника ABC : $P_1 + P_2 + P_3 = P$. Из подобия треугольников следует, что $r_i/r = P_i/P$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

1.62. Пусть $M = A$. Тогда $X_A = A$, поэтому $AY_A = 1$. Аналогично $CX_C = 1$. Докажем, что $y = AY_A$ и $x = CX_C$ — искомые прямые. Возьмем на стороне BC точку D так, что $AB \parallel MD$ (рис. 1.13). Пусть E — точка пересечения прямых CX_C и MD . Тогда $X_M M + Y_M M = X_C E + Y_M M$. Так как $\triangle ABC \sim \triangle MDC$, то $CE = Y_M M$. Поэтому $X_M M + Y_M M = X_C E + CE = X_C C = 1$.

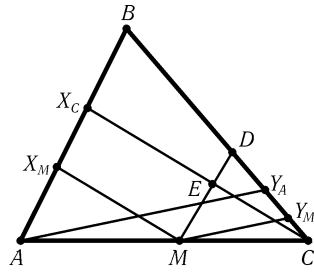


Рис. 1.13

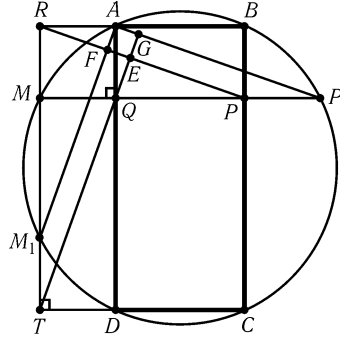


Рис. 1.14

1.63. Пусть D — середина отрезка BH . Так как $\triangle BHA \sim \triangle HEA$, то $AD : AO = AB : AH$ и $\angle DAH = \angle OAE$. Следовательно, $\angle DAO = \angle BAH$, а значит, $\triangle DAO \sim \triangle BAH$ и $\angle DOA = \angle BAH = 90^\circ$.

1.64. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC . Опустим из точки B_1 перпендикуляры B_1K и B_1N на стороны AB и BC и перпендикуляры B_1L и B_1M на высоты AA_1 и CC_1 . Так как $KB_1 : CC_1 = AB_1 : AC = LB_1 : A_1C$, то $\triangle KLB_1 \sim \triangle C_1A_1C$, а значит, $KL \parallel C_1A_1$. Аналогично $MN \parallel C_1A_1$. Кроме того, $KN \parallel C_1A_1$ (см. задачу 1.55). Следовательно, точки K, L, M и N лежат на одной прямой.

1.65. а) Пусть O — середина AC , O_1 — середина AB , O_2 — середина BC . Будем считать, что $AB \leq BC$. Проведем через точку O_1 прямую O_1K параллельно EF (K — точка на отрезке EO_2). Докажем, что прямоугольные треугольники DBO и O_1KO_2 равны. В самом деле, $O_1O_2 = DO = AC/2$ и $BO = KO_2 = (BC - AB)/2$. Из равенства треугольников DBO и O_1KO_2 следует, что $\angle BOD = \angle O_1O_2E$, т. е. прямая DO параллельна EO_2 и касательная, проведенная через точку D , параллельна прямой EF .

б) Так как углы между диаметром AC и касательными к окружностям в точках F, D, E равны, то $\angle FAB = \angle DAC = \angle EBC$ и $\angle FBA = \angle DCA = \angle ECB$, т. е. F лежит на отрезке AD , E — на отрезке DC . Кроме того, $\angle AFB = \angle BEC = \angle ADC = 90^\circ$, поэтому $FDEB$ — прямоугольник.

1.66. Пусть MQ и MP — перпендикуляры, опущенные на стороны AD и BC , MR и MT — перпендикуляры, опущенные на продолжения сторон AB и CD (рис. 1.14). Обозначим через M_1 и P_1 вторые точки пересечения прямых RT и QP с окружностью.

Так как $TM_1 = RM = AQ$ и $TM_1 \parallel AQ$, то $AM_1 \parallel TQ$. Аналогично $AP_1 \parallel RP$. Поскольку $\angle M_1AP_1 = 90^\circ$, то $RP \perp TQ$.

Обозначим точки пересечения прямых TQ и RP , M_1A и RP , P_1A и TQ через E, F, G соответственно. Чтобы доказать, что точка E лежит на прямой AC , достаточно доказать, что прямоугольники $AFEG$ и AM_1CP_1 подобны. Так как $\angle ARF = \angle AM_1R = \angle M_1TG = \angle M_1CT$, можно обозначить величины этих углов одной буквой α . $AF = RA \sin \alpha = M_1A \sin^2 \alpha$, $AG = M_1T \sin \alpha = M_1C \sin^2 \alpha$, поэтому прямоугольники $AFEG$ и AM_1CP_1 подобны.

1.67. Обозначим центры окружностей через O_1 и O_2 . Внешняя касательная касается первой окружности в точке K , а второй окружности в точке L ; внутренняя касательная касается первой окружности в точке M , а второй окружности

ности в точке N (рис. 1.15). Пусть прямые KM и LN пересекают прямую O_1O_2 в точках P_1 и P_2 соответственно. Надо доказать, что $P_1 = P_2$. Рассмотрим точки A, D_1, D_2 пересечения прямых KL и MN , KM и O_1A , LN и O_2A соответственно. $\angle O_1AM + \angle NAO_2 = 90^\circ$, поэтому прямоугольные треугольники O_1MA

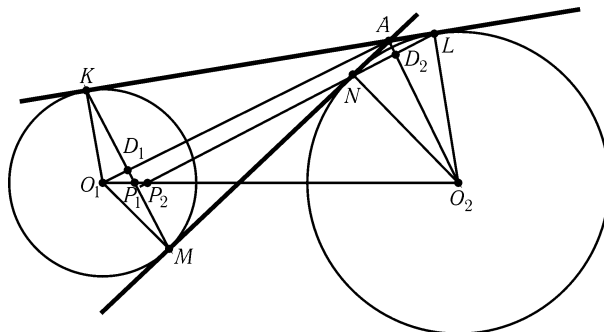


Рис. 1.15

и ANO_2 подобны, а также $AO_2 \parallel KM$ и $AO_1 \parallel LN$. Из параллельности этих прямых получаем $AD_1 : D_1O_1 = O_2P_1 : P_1O_1$ и $D_2O_2 : AD_2 = O_2P_2 : P_2O_1$. Из подобия четырехугольников AKO_1M и O_2NAL получаем $AD_1 : D_1O_1 = D_2O_2 : AD_2$. Следовательно, $O_2P_1 : P_1O_1 = O_2P_2 : P_2O_1$, т. е. $P_1 = P_2$.

Глава 2

Вписанный угол

Основные сведения

1. Угол ABC , вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют *вписанным* в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

если точки B и O лежат по одну сторону от AC , и

$$\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC,$$

если точки B и O лежат по разные стороны от AC . Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180° .

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , равна половине угловой величины дуги AB .

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180° . Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». *Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD* (обозначение: $\angle(AB, CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD . При этом углы, отличающиеся на $n \cdot 180^\circ$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).

Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

а) $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$;

б) $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$;

в) точки A, B, C, D , не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$ (для доказательства

этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC ; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

Вводные задачи

1. а) Из точки A , лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC , пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A .

2. Из точки P , расположенной внутри острого угла BAC , опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC . Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

3. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n -угольника, кратны $180^\circ/n$.

4. Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB . Найдите углы треугольника ABC .

5. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что $AD = BD$.

§1. Углы, опирающиеся на равные дуги

2.1. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH . Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

2.2. Две окружности пересекаются в точках M и K . Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C , вторую в точках B и D . Докажите, что $AC \parallel BD$.

2.3. Из произвольной точки M , лежащей внутри данного угла с вершиной A , опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ . Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

2.4. а) Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M ; O — центр вписанной окружности, O_b — центр невписанной окружности, касающейся стороны AC . Докажите, что точки A, C, O и O_b лежат на окружности с центром M .

б) Точка O , лежащая внутри треугольника ABC , обладает тем свойством, что прямые AO, BO и CO проходят через центры описанных окруж-

ностей треугольников BCO , ACO и ABO . Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

2.5. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P . Докажите, что точка C перемещается при этом по отрезку.

2.6. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK , причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC . Докажите, что $BK = |AK - CK|/\sqrt{2}$ и $DK = (AK + CK)/\sqrt{2}$.

2.7. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1 . Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

2.8. Все углы треугольника ABC меньше 120° . Докажите, что внутри его существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° .

Точку из задачи 2.8 называют *точкой Торричелли*.

2.9. Окружность разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M , лежащей внутри окружности, на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

2.10. На окружности даны точки A, B, M и N . Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1 , перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

2.11. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причем $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

2.12*. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ вписанный. Про все пары его противоположных сторон, кроме одной, известно, что они параллельны. Докажите, что при n нечетном оставшаяся пара сторон тоже параллельна, а при n четном оставшаяся пара сторон равна по длине.

2.13*. Дан треугольник ABC . Докажите, что существует два семейства правильных треугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через точки A, B и C . Докажите также, что центры треугольников этих семейств лежат на двух concentрических окружностях.

§2. Величина угла между двумя хордами

Решить задачи этого параграфа помогает следующий факт. Пусть A, B, C, D — точки на окружности в указанном порядке. Тогда угол между хордами AC и BD равен $(\sphericalangle AB + \sphericalangle CD)/2$, угол между хордами AB и CD равен $|\sphericalangle AD - \sphericalangle CB|/2$. (Для доказательства нужно через конец одной из хорд провести хорду, параллельную другой хорде.)

2.14. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB . Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K . Докажите, что $KECD$ — вписанный четырехугольник.

2.15. По стороне правильного треугольника катится окружность радиуса, равного его высоте. Докажите, что угловая величина дуги, отсекаемой на окружности сторонами треугольника, всегда равна 60° .

2.16. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P . Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB .

2.17. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

2.18. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle BPC = \angle A + 60^\circ$, $\angle APC = \angle B + 60^\circ$ и $\angle APB = \angle C + 60^\circ$. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B' и C' . Докажите, что треугольник $A'B'C'$ правильный.

2.19. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC , то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC , то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

2.20. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2 , причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1 . Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2 , диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

§3. Угол между касательной и хордой

2.21. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ , пересекающие вторую окружность в точках B и C . Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC .

2.22. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P . Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1 , а через точку P — прямая CD , параллельная AB (точки B и C лежат на S_2 , точка D — на S_1). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2.23. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена касательная AQ к окружности S_1 (точка Q лежит на S_2), а через точку B — касательная BS к окружности S_2 (точка S лежит на S_1). Прямые BQ и AS пересекают окружности S_1 и S_2 в точках R и P . Докажите, что $PQRS$ — параллелограмм.

2.24. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.

2.25. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A . Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B , S_2 в точке C . В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D . Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A .

2.26. Две окружности пересекаются в точках A и B . Из точки A к этим окружностям проведены касательные AM и AN (M и N — точки окружностей). Докажите, что:

- а) $\angle ABN + \angle MAN = 180^\circ$;
- б) $BM/BN = (AM/AN)^2$.

2.27. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T . Докажите, что MT — биссектриса угла AMB .

2.28. Через точку M , лежащую внутри окружности S , проведена хорда AB ; из точки M опущены перпендикуляры MP и MQ на касательные, проходящие через точки A и B . Докажите, что величина $1/PM + 1/QM$ не зависит от выбора хорды, проходящей через точку M .

2.29. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C . Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B , окружность S_1 она пересекает в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

2.30. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2 ; B — точка окружности S , а K_1 и K_2 — вторые точки пересечения прямых A_1B и A_2B с окружностями S_1 и S_2 . Докажите, что если прямая K_1K_2 касается окружности S_1 , то она касается и окружности S_2 .

§4. Связь величины угла с длиной дуги и хорды

2.31. В окружность вписаны равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

2.32. Из точки M , двигающейся по окружности, опускаются перпендикуляры MP и MQ на диаметры AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

2.33. В треугольнике ABC угол B равен 60° , биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.

2.34. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40° ; BD — биссектриса угла B . Докажите, что $BD + DA = BC$.

2.35. На хорде AB окружности S с центром O взята точка C . Описанная окружность треугольника AOC пересекает окружность S в точке D . Докажите, что $BC = CD$.

2.36. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите величину угла ABM .

2.37. Вершины A и B правильного треугольника ABC лежат на окружности S , а вершина C — внутри этой окружности. Точка D лежит на окружности S , причем $BD = AB$. Прямая CD пересекает S в точке E . Докажите, что длина отрезка EC равна радиусу окружности S .

2.38*. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

§5. Четыре точки, лежащие на одной окружности

2.39. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN . Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

2.40. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O ; точки B' и C' симметричны вершинам B и C относительно биссектрисы угла BOC . Докажите, что $\angle C'AC = \angle B'DB$.

2.41. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырехугольника являются вершинами ромба.

2.42*. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N . Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что:

а) $\angle BPC = 90^\circ$;

б) $S_{ABP} : S_{ABC} = 1 : 2$.

2.43*. Внутри четырехугольника $ABCD$ взята точка M так, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

2.44. Прямые AP , BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 , B_1 и C_1 . Точки A_2 , B_2 и C_2 взяты на прямых BC , CA и AB так, что $\angle(PA_2, BC) = \angle(PB_2, CA) = \angle(PC_2, AB)$. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$.

2.45*. Вокруг правильного треугольника APQ описан прямоугольник $ABCD$, причем точки P и Q лежат на сторонах BC и CD соответственно; P' и Q' — середины сторон AP и AQ . Докажите, что треугольники $BQ'C$ и $CP'D$ правильные.

2.46*. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то точка пересечения биссектрис углов A и B лежит на стороне CD .

2.47*. Диагонали AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ разделены точками M и N так, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Найдите λ , если известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

2.48*. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют соответственно параллельные стороны, причем стороны AB и A_1B_1 лежат на одной прямой. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C , содержит точку C_1 .

2.49*. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Прямая KL параллельна CC_1 , причем точки K и L лежат на прямых BC и B_1C_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1KL лежит на прямой AC .

2.50*. Через точку O пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая MN перпендикулярно CO , причем M и N лежат на сторонах AC и BC соответственно. Прямые AO и BO пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A' и B' . Докажите, что точка пересечения прямых $A'N$ и $B'M$ лежит на описанной окружности.

§6. Вписанный угол и подобные треугольники

2.51. На окружности взяты точки A, B, C и D . Прямые AB и CD пересекаются в точке M . Докажите, что $AC \cdot AD/AM = BC \cdot BD/BM$.

2.52. На окружности даны точки A, B и C , причем точка B более удалена от прямой l , касающейся окружности в точке A , чем C . Прямая AC пересекает прямую, проведенную через точку B параллельно l , в точке D . Докажите, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

2.53. Прямая l касается окружности с диаметром AB в точке C ; M и N — проекции точек A и B на прямую l , D — проекция точки C на AB . Докажите, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

2.54. В треугольнике ABC проведена высота AH , а из вершин B и C опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую, проходящую через точку A . Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle HB_1C_1$.

2.55. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , взята произвольная точка P . Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q . Докажите, что $1/PQ = 1/PB + 1/PC$.

2.56. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F так, что $\angle EAF = 45^\circ$. Отрезки AE и AF пересекают диагональ BD в точках P и Q . Докажите, что $S_{AEF}/S_{APQ} = 2$.

2.57. Прямая, проходящая через вершину C равнобедренного треугольника ABC , пересекает основание AB в точке M , а описанную окружность в точке N . Докажите, что $CM \cdot CN = AC^2$ и $CM/CN = AM \cdot BM/(AN \cdot BN)$.

2.58. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A . На лучах AB и CB отмечены точки H и K соответственно так, что $CH = BC$ и $AK = AB$. Докажите, что:

- а) $DH = DK$;
- б) $\triangle DKH \sim \triangle ABK$.

2.59. а) Стороны угла с вершиной C касаются окружности в точках A и B . Из точки P , лежащей на окружности, опущены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на прямые BC, CA и AB . Докажите, что $PC_1^2 = PA_1 \cdot PB_1$ и $PA_1 : PB_1 = PA^2 : PB^2$.

б) Из произвольной точки O вписанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры OA', OB', OC' на стороны треугольника ABC и перпендикуляры OA'', OB'', OC'' на стороны треугольника с вершинами в точках касания. Докажите, что $OA' \cdot OB' \cdot OC' = OA'' \cdot OB'' \cdot OC''$.

2.60. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от точки E до прямой AD .

2.61. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 ; B_2 и C_2 — середины высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что $\triangle A_1B_2C_2 \sim \triangle ABC$.

2.62. На высотах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , делящие их в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

2.63*. Окружность S_1 с диаметром AB пересекает окружность S_2 с центром A в точках C и D . Через точку B проведена прямая, пересекающая S_2 в точке M , лежащей внутри S_1 , а S_1 в точке N . Докажите, что $MN^2 = CN \cdot ND$.

2.64*. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезки KN и ML пересекают AB в точках Q и P . Докажите, что $PC = QC$.

2.65*. а) Окружность, проходящая через точку C , пересекает стороны BC и AC треугольника ABC в точках A_1 и B_1 , а его описанную окружность в точке M . Докажите, что $\triangle AB_1M \sim \triangle BA_1M$.

б) На лучах AC и BC отложены отрезки AA_1 и BB_1 , равные полупериметру треугольника ABC . M — такая точка его описанной окружности, что $CM \parallel A_1B_1$. Докажите, что $\angle CMO = 90^\circ$, где O — центр вписанной окружности.

§7. Биссектриса делит дугу пополам

2.66. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этой вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

2.67. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C , делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

2.68. Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AM и высотой AH .

2.69. Дан треугольник ABC . На его стороне AB выбирается точка P и через нее проводятся прямые PM и PN , параллельные AC и BC соответственно (точки M и N лежат на сторонах BC и AC); Q — точка пересечения описанных окружностей треугольников APN и BPM . Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку.

2.70. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E . Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ . Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

§8. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

В этом параграфе $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Мы будем использовать также следующие обозначения: O — центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$, P — точка пересечения диагоналей.

2.71. Докажите, что ломаная AOC делит $ABCD$ на две фигуры равной площади.

2.72. Известен радиус описанной окружности R .

а) Найдите $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.

б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника $ABCD$.

2.73. Найдите сумму квадратов диагоналей, если известны длина отрезка OP и радиус окружности R .

2.74. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на CD , пересекающие прямые BD и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что $AKLB$ — ромб.

2.75. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $(AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$.

2.76. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины стороны CD .

2.77. Докажите, что прямая, проведенная из точки P перпендикулярно BC , делит сторону AD пополам.

2.78. Докажите, что середины сторон четырехугольника $ABCD$ и проекции точки P на стороны лежат на одной окружности.

2.79. а) Через вершины A, B, C и D проведены касательные к описанной окружности. Докажите, что образованный ими четырехугольник вписанный.

б) Четырехугольник $KLMN$ вписанный и описанный одновременно; A и B — точки касания вписанной окружности со сторонами KL и LM . Докажите, что $AK \cdot BM = r^2$, где r — радиус вписанной окружности.

§9. Три описанные окружности пересекаются в одной точке

2.80. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники $ABC', AB'C$ и $A'BC$, причем сумма углов при вершинах A', B' и C' кратна 180° . Докажите, что описанные окружности построенных треугольников пересекаются в одной точке.

2.81. а) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1 и C_1 , отличные от вершин треугольника. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в одной точке.

б) Точки A_1, B_1 и C_1 перемещаются по прямым BC, CA и AB так, что все треугольники $A_1B_1C_1$ подобны одному и тому же треугольнику. Докажите, что точка пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C остается при этом неподвижной. (Треугольники предполагаются не только подобными, но и одинаково ориентированными.)

2.82. Внутри треугольника ABC взята точка X . Прямые AX, BX и CX пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что если описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в точке X , то X — точка пересечения высот треугольника ABC .

2.83*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что если треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны и противоположно ориентированы, то описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C проходят через центр описанной окружности треугольника ABC .

2.84*. Точки A', B' и C' симметричны некоторой точке P относительно сторон BC, CA и AB треугольника ABC .

а) Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C', A'BC', A'B'C$ и ABC имеют общую точку.

б) Докажите, что описанные окружности треугольников $A'BC, AB'C, ABC'$ и $A'B'C'$ имеют общую точку Q .

в) Пусть I, J, K и O — центры описанных окружностей треугольников $A'BC, AB'C, ABC'$ и $A'B'C'$. Докажите, что $QI : OI = QJ : OJ = QK : OK$.

См. также задачи 28.33, 28.37.

§10. Точка Микеля

2.85. Четыре прямые образуют четыре треугольника.

а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (*точка Микеля*).

б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

2.86*. Прямая пересекает стороны AB, BC и CA треугольника (или их продолжения) в точках C_1, B_1 и A_1 ; O, O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C ; H, H_a, H_b и H_c — ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а) $\triangle O_a O_b O_c \sim \triangle ABC$.

б) серединные перпендикуляры к отрезкам $OH, O_a H_a, O_b H_b$ и $O_c H_c$ пересекаются в одной точке.

2.87*. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон.

2.88*. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O . Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а описанные окружности треугольников AEC и BED пересекаются в точках E и P . Докажите, что:

а) точки A, D, P и O лежат на одной окружности;

б) $\angle EPO = 90^\circ$.

2.89*. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

См. также задачи 19.46, 28.35, 28.36.

§11. Разные задачи

2.90. В треугольнике ABC проведена высота AH ; O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$.

2.91. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , а AA' — диаметр его описанной окружности. Докажите, что отрезок $A'H$ делит сторону BC пополам.

2.92. Через вершины A и B треугольника ABC проведены две параллельные прямые, а прямые m и n симметричны им относительно биссектрис соответствующих углов. Докажите, что точка пересечения прямых m и n лежит на описанной окружности треугольника ABC .

2.93. а) Из точки A проведены прямые, касающиеся окружности S в точках B и C . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC и центр его внеписанной окружности, касающейся стороны BC , лежат на окружности S .

б) Докажите, что окружность, проходящая через вершины B и C любого треугольника ABC и центр O его вписанной окружности, отсекает на прямых AB и AC равные хорды.

2.94*. На сторонах AC и BC треугольника ABC внешним образом построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2 . Докажите, что прямые A_1B , A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

2.95*. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B , причем касательные к S_1 в этих точках являются радиусами S_2 . На внутренней дуге S_1 взята точка C и соединена с точками A и B прямыми. Докажите, что вторые точки пересечения этих прямых с S_2 являются концами одного диаметра.

2.96*. Из центра O окружности опущен перпендикуляр OA на прямую l . На прямой l взяты точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках P и Q , а вторая — в точках M и N . Прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S . Докажите, что $AR = AS$.

Задачи для самостоятельного решения

2.97. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 ; M — середина стороны AB . Докажите, что $MA_1 = MB_1$.

2.98. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. Докажите, что $AC = BD \cdot \sin ABC$.

2.99. Диагонали AD , BE и CF вписанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$.

2.100. В выпуклом четырехугольнике $AB = BC = CD$, M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения биссектрис углов A и D . Докажите, что точки A , M , K и D лежат на одной окружности.

2.101. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Прямая O_1A пересекает окружность с центром O_2 в точке N . Докажите, что точки O_1 , O_2 , B и N лежат на одной окружности.

2.102. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Прямая MN касается окружности S_1 в точке M и окружности S_2 в точке N . Пусть A — та из точек пересечения окружностей, которая более удалена от прямой MN . Докажите, что $\angle O_1AO_2 = 2\angle MAN$.

2.103. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, причем $AB = BC$. Докажите, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(DA + CD) \cdot h_b$, где h_b — высота треугольника ABD , опущенная из вершины B .

2.104. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, причем AC — биссектриса угла DAB . Докажите, что $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$.

2.105. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CM и высота CH . HD и HE — биссектрисы треугольников AHC и CHB . Докажите, что точки C, D, H, E и M лежат на одной окружности.

2.106. Две окружности проходят через вершину угла и точку его биссектрисы. Докажите, что отрезки, отсекаемые ими на сторонах угла, равны.

2.107. Треугольник BHC , где H — ортоцентр треугольника ABC , построен до параллелограмма $BHCD$. Докажите, что $\angle BAD = \angle CAH$.

2.108. Вне правильного треугольника ABC , но внутри угла BAC взята точка M так, что $\angle CMA = 30^\circ$ и $\angle BMA = \alpha$. Чему равен угол ABM ?

2.109. Докажите, что если вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является также и описанным, то он симметричен относительно одной из диагоналей.

Решения

2.1. Проведем диаметр AD . Тогда $\angle CDA = \angle CBA$, а значит, $\angle BAN = \angle DAC$, так как $\angle BHA = \angle ACD = 90^\circ$.

2.2. Из свойств ориентированных углов имеем $\angle(AC, CK) = \angle(AM, MK) = \angle(BM, MK) = \angle(BD, DK) = \angle(BD, CK)$, т. е. $AC \parallel BD$.

2.3. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM . Поэтому $\angle QMA = \angle QPA$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Треугольники PAK и MAQ прямоугольные, следовательно, $\angle PAK = \angle MAQ$.

2.4. а) Так как $\angle AOM = \angle BAO + \angle ABO = (\angle A + \angle B)/2$ и $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \angle A/2 + \angle CBM = (\angle A + \angle B)/2$, то $MA = MO$. Аналогично $MC = MO$.

Так как треугольник $OAOb$ прямоугольный и $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$, то $\angle MAOb = \angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$, а значит, $MA = MO_b$. Аналогично $MC = MO_b$.

б) Пусть P — центр описанной окружности треугольника ACO . Тогда $\angle COP = (180^\circ - \angle CPO)/2 = 90^\circ - \angle OAC$. Поэтому $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAC$. Аналогично $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAB$, а значит, $\angle OAB = \angle OAC$. Аналогично доказывается, что точка O лежит на биссектрисах углов B и C .

2.5. Точки P и C лежат на окружности с диаметром AB , поэтому $\angle APC = \angle ABC$, т. е. величина угла APC постоянна.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение верно для любого треугольника ABC , вершины которого скользят по сторонам угла MPN , равного $180^\circ - \angle C$.

2.6. Точки B, D и K лежат на окружности с диаметром AC . Пусть для определенности $\angle KCA = \varphi \leq 45^\circ$. Тогда $BK = AC \sin(45^\circ - \varphi) = AC(\cos \varphi - \sin \varphi)/\sqrt{2}$ и $DK = AC \sin(45^\circ + \varphi) = AC(\cos \varphi + \sin \varphi)/\sqrt{2}$. Ясно, что $AC \cos \varphi = CK$ и $AC \sin \varphi = AK$.

2.7. Так как $\angle B_1AA_1 = \angle A_1BB_1$, точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности. Параллельные прямые AB и A_1B_1 отсекают на ней равные хорды AB_1 и BA_1 . Поэтому $AC = BC$.

2.8. Построим на стороне BC треугольника ABC внешним образом правильный треугольник A_1BC . Пусть P — точка пересечения прямой AA_1 с описанной окружностью треугольника A_1BC . Тогда точка P лежит внутри треугольника ABC и $\angle APC = 180^\circ - \angle A_1PC = 180^\circ - \angle A_1BC = 120^\circ$. Аналогично $\angle APB = 120^\circ$.

2.9. Основания перпендикуляров, опущенных из точки M на диаметры, лежат на окружности S с диаметром OM (O — центр исходной окружности). Точки пересечения данных диаметров с окружностью S , отличные от точки O , делят ее на n дуг. Так как на все дуги, не содержащие точку O , опираются углы $180^\circ/n$, то угловые величины этих дуг равны $360^\circ/n$. Поэтому угловая величина дуги, на которой лежит точка O , равна $360^\circ - (n-1) \cdot 360^\circ/n = 360^\circ/n$. Следовательно, основания перпендикуляров делят окружность S на n равных дуг.

2.10. Ясно, что $\angle(AA_1, BB_1) = \angle(AA_1, AB_1) + \angle(AB_1, BB_1) = \angle(MA_1, MB_1) + \angle(AN, BN)$. Так $MA_1 \perp BN$ и $MB_1 \perp AN$, то $\angle(MA_1, MB_1) = \angle(BN, AN) = -\angle(AN, BN)$. Поэтому $\angle(AA_1, BB_1) = 0^\circ$. т. е. $AA_1 \parallel BB_1$.

2.11. Так как $AB \parallel DE$, то $\angle ACE = \angle BFD$, а так как $BC \parallel EF$, то $\angle CAE = \angle FDB$. Треугольники ACE и BDF имеют по два равных угла, поэтому третьи углы у них тоже равны. Из равенства этих углов следует равенство дуг AC и DF , т. е. параллельность хорд CD и AF .

2.12. Доказательство проведем индукцией по n . Для четырехугольника утверждение очевидно, для шестиугольника оно было доказано в предыдущей задаче. Допустим, что утверждение доказано для $2(n-1)$ -угольника, и докажем его для $2n$ -угольника. Пусть $A_1 \dots A_{2n}$ есть $2n$ -угольник, в котором $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}, \dots, A_{n-1}A_n \parallel A_{2n-1}A_{2n}$. Рассмотрим $2(n-1)$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_{n+1} \dots A_{2n-1}$. По предположению индукции при нечетном n получаем $A_{n-1}A_{n+1} = A_{2n-1}A_1$, при четном n получаем $A_{n-1}A_{n+1} \parallel A_{2n-1}A_1$.

Рассмотрим треугольник $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ и треугольник $A_{2n-1}A_{2n}A_1$. Пусть n четно. Тогда векторы $A_{n-1}A_n$ и $A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{n-1}A_{n+1}$ и $A_{2n-1}A_1$ параллельны и противоположно направлены, поэтому $\angle A_nA_{n-1}A_{n+1} = \angle A_1A_{2n-1}A_{2n}$ и $A_nA_{n+1} = A_{2n}A_1$ как хорды, отсекающие равные дуги, что и требовалось. Пусть n нечетно. Тогда $A_{n-1}A_{n+1} = A_{2n-1}A_1$, т. е. $A_1A_{n-1} \parallel A_{n+1}A_{2n-1}$. В шестиугольнике $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}A_{2n}A_1$ имеем $A_1A_{n-1} \parallel A_{n+1}A_{2n-1}$, $A_{n-1}A_n \parallel A_{2n-1}A_{2n}$, поэтому согласно предыдущей задаче $A_nA_{n+1} \parallel A_{2n}A_1$, что и требовалось.

2.13. Пусть прямые FG , GE и EF проходят через точки A , B и C , причем треугольник EFG равносторонний, т. е. $\angle(GE, EF) = \angle(EF, FG) = \angle(FG, GE) = \pm 60^\circ$. Тогда $\angle(BE, EC) = \angle(CF, FA) = \angle(AG, GB) = \pm 60^\circ$. Выбрав один из знаков, получим три окружности S_E , S_F и S_G , на которых должны лежать точки E , F и G . Любая точка E окружности S_E однозначно определяет треугольник EFG .

Пусть O — центр треугольника EFG ; P , R и Q — точки пересечения прямых OE , OF и OG с соответствующими окружностями S_E , S_F и S_G . Докажем, что P , Q и R — центры правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (для одного семейства внешним образом, для другого внутренним), а точка O лежит на описанной окружности треугольника PQR . Ясно, что $\angle(CB, BP) = \angle(CE, EP) = \angle(EF, EO) = \mp 30^\circ$, а $\angle(BP, CP) = \angle(BE, EC) = \angle(GE, EF) = \pm 60^\circ$. Поэтому $\angle(CB, CP) = \angle(CB, BP) + \angle(BP, CP) = \pm 30^\circ$. Следовательно, P — центр правильного треугольника со стороной AB . Для

точек Q и R доказательство аналогично. Треугольник PQR равносторонний, причем его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC (см. задачу 1.50, б)). Можно проверить, что $\angle(PR, RQ) = \mp 60^\circ = \angle(OE, OG) = \angle(OP, OQ)$, т. е. точка O лежит на описанной окружности треугольника PQR .

2.14. Ясно, что $2(\angle KEC + \angle KDC) = (\sphericalangle MB + \sphericalangle AC) + (\sphericalangle MB + \sphericalangle BC) = 360^\circ$, так как $\sphericalangle MB = \sphericalangle AM$.

2.15. Обозначим угловую величину дуги, отсекаемой сторонами треугольника ABC на окружности, через α . Рассмотрим дугу, отсекаемую продолжениями сторон треугольника на окружности, и обозначим ее угловую величину через α' . Тогда $(\alpha + \alpha')/2 = \angle BAC = 60^\circ$. Но $\alpha = \alpha'$, так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно стороне BC . Поэтому $\alpha = \alpha' = 60^\circ$.

2.16. Так как $\angle APB = (\sphericalangle AB + \sphericalangle CD)/2 = \angle AOB$, точка O лежит на описанной окружности треугольника APB .

2.17. Пусть O — точка пересечения прямых A_1C_1 и B_1D_1 ; α, β, γ и δ — угловые величины дуг AB, BC, CD и DA . Тогда $\angle A_1OB_1 = (\sphericalangle A_1B + \sphericalangle BB_1 + \sphericalangle C_1D + \sphericalangle DD_1)/2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)/4 = 90^\circ$.

2.18. Складывая равенства $\sphericalangle C'A + \sphericalangle CA' = 2(180^\circ - \angle APC) = 240^\circ - 2\angle B$ и $\sphericalangle AB' + \sphericalangle BA' = 240^\circ - 2\angle C$, а затем вычитая из их суммы равенство $\sphericalangle BA' + \sphericalangle CA' = 2\angle A$, получаем $\sphericalangle C'B' = \sphericalangle C'A + \sphericalangle AB' = 480^\circ - 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 120^\circ$. Аналогично $\sphericalangle B'A' = \sphericalangle C'A' = 120^\circ$.

2.19. а) Докажем, например, что $AA_1 \perp C_1B_1$. Пусть M — точка пересечения этих отрезков. Тогда $\angle AMB_1 = (\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle A_1B + \sphericalangle BC_1)/2 = \angle ABB_1 + \angle A_1AB + \angle BCC_1 = (\angle B + \angle A + \angle C)/2 = 90^\circ$.

б) Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения отрезков AA_1 и BC, BB_1 и AC . Прямоугольные треугольники AM_1C и BM_2C имеют общий угол C , поэтому $\angle B_1BC = \angle A_1AC$, а значит, $\sphericalangle B_1C = \sphericalangle A_1C$ и $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$, т. е. CC_1 — биссектриса угла $A_1C_1B_1$.

2.20. Обозначим вершины треугольника T_1 через A, B и C ; середины дуг BC, CA, AB через A_1, B_1, C_1 . Тогда $T_2 = A_1B_1C_1$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами треугольника T_1 , поэтому они пересекаются в одной точке O . Пусть прямые AB и C_1B_1 пересекаются в точке K . Достаточно проверить, что $KO \parallel AC$. В треугольнике AB_1O прямая B_1C_1 является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный. Следовательно, треугольник AKO тоже равнобедренный. Прямые KO и AC параллельны, так как $\angle KOA = \angle KAO = \angle OAC$.

2.21. Пусть l — касательная в точке A к первой окружности. Тогда $\angle(l, AP) = \angle(AQ, PQ) = \angle(BC, PB)$, а значит, $l \parallel BC$.

2.22. Так как $\angle(AB, AD) = \angle(AP, PD) = \angle(AB, BC)$, то $BC \parallel AD$.

2.23. Из равенства угла между касательной и хордой соответствующему вписанному углу следует, что $\angle(AB, BC) = \angle(AQ, QB)$ и $\angle(BA, AQ) = \angle(BS, SA)$. Поэтому $\angle(BA, AC) = \angle(AB, BQ)$, а значит, $PS \parallel QR$. Далее, $\angle(AP, PQ) = \angle(AB, BQ) = \angle(BA, AS) = \angle(BR, RS)$, поэтому $PQ \parallel SR$.

2.24. Пусть для определенности точка E лежит на луче BC . Тогда $\angle ABC = \angle EAC$ и $\angle ADE = \angle ABC + \angle BAD = \angle EAC + \angle CAD = \angle DAE$.

2.25. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей. Тогда $\angle(AB, DB) = \angle(PA, PB)$ и $\angle(DC, AC) = \angle(PC, PA)$. Складывая эти равенства, получаем $\angle(DC, DB) = \angle(PC, PB) = \angle(PC, CA) + \angle(BA, PB)$; последние два угла опираются на постоянные дуги.

2.26. а) Так как $\angle MAB = \angle BNA$, то сумма углов ABN и MAN равна сумме углов треугольника ABN .

б) Так как $\angle BAM = \angle BNA$ и $\angle BAN = \angle BMA$, то $\triangle AMB \sim \triangle NAB$, а значит, $AM : NA = MB : AB$ и $AM : NA = AB : NB$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

2.27. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения прямых MA и MB с меньшей окружностью. Так как M — центр гомотетии окружностей, то $A_1B_1 \parallel AB$. Поэтому $\angle A_1MT = \angle A_1TA = \angle B_1A_1T = \angle B_1MT$.

2.28. Пусть φ — угол между хордой AB и касательной, проходящей через один из ее концов. Тогда $AB = 2R \sin \varphi$, где R — радиус окружности S . Кроме того, $PM = AM \sin \varphi$ и $QM = BM \sin \varphi$. Поэтому $\frac{1}{PM} + \frac{1}{QM} = ((AM + BM) / \sin \varphi) AM \cdot BM = 2R / (AM \cdot BM)$. Величина $AM \cdot BM$ не зависит от выбора хорды AB .

2.29. Пусть прямая AM пересекает окружность S_2 в точке D . Тогда $\angle MDC = \angle MCA = \angle MAB$, поэтому $CD \parallel AB$. Далее, $\angle CAM = \angle CMB = \angle MDB$, поэтому $AC \parallel BD$. Таким образом, $ABCD$ — параллелограмм, и его диагональ AD делит диагональ BC пополам.

2.30. Проведем прямую l_1 , касающуюся S_1 в точке A_1 . Прямая K_1K_2 касается S_1 тогда и только тогда, когда $\angle(K_1K_2, K_1A_1) = \angle(K_1A_1, l_1)$. Ясно также, что $\angle(K_1A_1, l_1) = \angle(A_1B, l_1) = \angle(A_2B, A_1A_2)$. Аналогично прямая K_1K_2 касается S_2 тогда и только тогда, когда $\angle(K_1K_2, K_2A_2) = \angle(A_1B, A_1A_2)$. Остается заметить, что если $\angle(K_1K_2, K_1A_1) = \angle(A_2B, A_1A_2)$, то $\angle(K_1K_2, K_2A_2) = \angle(K_1K_2, A_2B) = \angle(K_1K_2, A_1B) + \angle(A_1B, A_1A_2) + \angle(A_1A_2, A_2B) = \angle(A_1B, A_1A_2)$.

2.31. На хорды AC и A_1C_1 опираются равные углы ABC и $A_1B_1C_1$, поэтому $AC = A_1C_1$.

2.32. Обозначим центр окружности через O . Точки P и Q лежат на окружности с диаметром OM , т. е. точки O, P, Q и M лежат на окружности постоянного радиуса $R/2$. При этом либо $\angle POQ = \angle AOD$, либо $\angle POQ = \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD$, т. е. длина хорды PQ постоянна.

2.33. Так как $\angle AOC = 90^\circ + \angle B/2$ (см. задачу 5.3), то $\angle EBD + \angle EOD = 90^\circ + 3\angle B/2 = 180^\circ$, а значит, четырехугольник $BEOD$ вписанный. На хорды EO и OD опираются равные углы EBO и OBD , поэтому $EO = OD$.

2.34. Возьмем на продолжении отрезка BD за точку D такую точку Q , что $\angle ACQ = 40^\circ$. Пусть P — точка пересечения прямых AB и QC . Тогда $\angle BPC = 60^\circ$ и D — точка пересечения биссектрис углов треугольника BPC . Согласно задаче 2.33 $AD = DQ$. Кроме того, $\angle BQC = \angle BCQ = 80^\circ$. Следовательно, $BC = BD + DQ = BD + DA$.

2.35. Достаточно проверить, что внешний угол ACD треугольника BCD в два раза больше угла при вершине B . Ясно, что $\angle ACD = \angle AOD = 2\angle ABD$.

2.36. Если точка M лежит внутри треугольника ABC , то $\angle MAC < 45^\circ < \angle MCD$. Легко также проверить, что на сторонах треугольников ABC и ACD точка M лежать не может, поэтому она лежит внутри треугольника ACD . При этом $\angle AMC = 180^\circ - \angle MAC - (45^\circ - \angle MCD) = 135^\circ$. Это означает, что точка M лежит на дуге окружности радиуса AB с центром B . Поэтому по теореме о вписанном угле $\angle ABM = 2\angle ACM = 90^\circ - 2\alpha$.

2.37. Пусть O — центр окружности S . Точка B является центром описанной окружности треугольника ACD , поэтому $\angle CDA = \angle ABC/2 = 30^\circ$, а значит, $\angle EOA = 2\angle EDA = 60^\circ$, т. е. треугольник EOA равносторонний. Кроме

того, $\angle AEC = \angle AED = \angle AOB = 2\angle AOC$, поэтому точка E является центром описанной окружности треугольника AOC . Следовательно, $EC = EO$.

2.38. Рассмотрим два положения подвижной окружности: в первый момент, когда точка K попадает на неподвижную окружность (точку касания окружностей в этот момент мы обозначим через K_1), и какой-нибудь другой (второй) момент. Пусть O — центр неподвижной окружности, O_1 и O_2 — положения центра подвижной окружности в первый и во второй моменты соответственно, K_2 — положение точки K во второй момент. A — точка касания окружностей во второй момент. Поскольку окружность катится без проскальзывания, длина дуги K_1A равна длине дуги K_2A . Так как радиус подвижной окружности в два раза меньше, $\angle K_2O_2A = 2\angle K_1OA$. Точка O лежит на подвижной окружности, поэтому $\angle K_2OA = \angle K_2O_2A/2 = \angle K_1OA$, т. е. точки K_2, K_1 и O лежат на одной прямой.

Траектория движения — диаметр неподвижной окружности.

2.39. Точки N и C лежат на окружности с диаметром AM . Углы MAN и MCN опираются на одну дугу, поэтому они равны.

2.40. При симметрии относительно биссектрисы угла BOC прямые AC и DB переходят друг в друга, поэтому нужно доказать, что $\angle C'AB' = \angle B'DC'$. Так как $BO = B'O, CO = C'O$ и $AO : DO = CO : BO$, то $AO \cdot B'O = DO \cdot C'O$, т. е. четырехугольник $AC'B'D$ вписанный и $\angle C'AB' = \angle B'DC'$.

2.41. Обозначим точки пересечения и углы так, как показано на рис. 2.1. Достаточно проверить, что $x = 90^\circ$. Углы четырехугольника $BMRN$ равны $180^\circ - \varphi, \alpha + \varphi, \beta + \varphi$ и x , поэтому равенство $x = 90^\circ$ эквивалентно равенству $(2\alpha + \varphi) + (2\beta + \varphi) = 180^\circ$. Остается заметить, что $2\alpha + \varphi = \angle BAD$ и $2\beta + \varphi = \angle BCD$.

2.42. а) Достаточно доказать, что если P_1 — точка биссектрисы угла B (или ее продолжения), из которой отрезок BC виден под углом 90° , то P_1 лежит на прямой MN . Точки P_1 и N лежат на окружности с диаметром CO , где O — точка пересечения биссектрис, поэтому $\angle(P_1N, NC) = \angle(P_1O, OC) = (180^\circ - \angle A)/2 = \angle(MN, NC)$.

б) Так как $\angle BPC = 90^\circ$, то $BP = BC \cos(B/2)$, поэтому $S_{ABP} : S_{ABC} = (BP \sin(B/2)) : (BC \sin B) = 1 : 2$.

2.43. Возьмем точку N так, что $BN \parallel MC$ и $NC \parallel BM$. Тогда $NA \parallel CD$, $\angle NCB = \angle CBM = \angle CDM = \angle NAB$, т. е. точки A, B, N и C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle ACD = \angle NAC = \angle NBC = \angle BCM$.

2.44. Точки A_2, B_2, C и P лежат на одной окружности, поэтому $\angle(A_2B_2, B_2P) = \angle(A_2C, CP) = \angle(BC, CP)$. Аналогично $\angle(B_2P, B_2C_2) = \angle(AP, BP)$. Следовательно, $\angle(A_2B_2, B_2C_2) = \angle(BC, CP) + \angle(AP, AB) = \angle(B_1B, B_1C_1) + \angle(A_1B_1, B_1B) = \angle(A_1B_1, B_1C_1)$. Аналогично проверяется, что и все другие углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны или составляют в сумме 180° ; следовательно, эти треугольники подобны (см. задачу 5.44).

2.45. Точки Q' и C лежат на окружности с диаметром PQ , поэтому $\angle Q'CQ = \angle Q'PQ = 30^\circ$. Следовательно, $\angle BCQ' = 60^\circ$. Аналогично $\angle CBQ' = 60^\circ$, а значит, треугольник $BQ'C$ правильный. Аналогично треугольник $CP'D$ правиль-

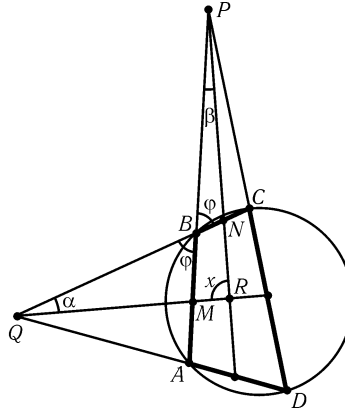


Рис. 2.1

ный.

2.46. Пусть $\angle BAD = 2\alpha$ и $\angle CBA = 2\beta$; для определенности будем считать, что $\alpha \geq \beta$. Возьмем на стороне CD точку E так, что $DE = DA$. Тогда $CE = CD - AD = CB$. Угол при вершине C равнобедренного треугольника BCE равен $180^\circ - 2\alpha$, поэтому $\angle CBE = \alpha$. Аналогично $\angle DAE = \beta$. Биссектриса угла B пересекает CD в некоторой точке F . Так как $\angle FBA = \beta = \angle AED$, четырехугольник $ABFE$ вписанный, а значит, $\angle FAE = \angle FBE = \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle FAD = \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$, т. е. AF — биссектриса угла A .

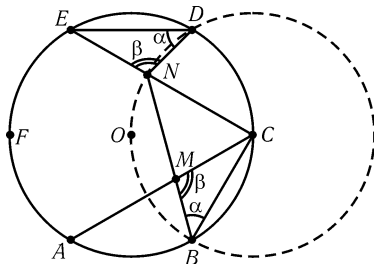


Рис. 2.2

2.47. Так как $ED = CB$, $EN = CM$ и $\angle DEC = \angle BCA = 30^\circ$ (рис. 2.2), то $\triangle EDN = \triangle CBM$. Пусть $\angle MBC = \angle NDE = \alpha$, $\angle BMC = \angle END = \beta$. Ясно, что $\angle DNC = 180^\circ - \beta$. Рассматривая треугольник BNC , получаем $\angle BNC = 90^\circ - \alpha$. Поскольку $\alpha + \beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, то $\angle DNB = \angle DNC + \angle CNB = (180^\circ - \beta) + (90^\circ - \alpha) = 270^\circ - (\alpha + \beta) = 120^\circ$. Поэтому точки B, O, N и D (O — центр шестиугольника) лежат на одной окружности. При этом $CO = CB = CD$, т. е. C — центр этой окружности, следовательно, $\lambda = CN : CE = CB : CA = 1 : \sqrt{3}$.

2.48. Пусть D — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C . Тогда $\angle(AC, CD) = \angle(AB_1, B_1D)$ и $\angle(DC, CB) = \angle(DA_1, A_1B)$. Поэтому $\angle(A_1C_1, C_1B_1) = \angle(AC, CB) = \angle(AC, CD) + \angle(DC, CB) = \angle(AB_1, B_1D) + \angle(DA_1, A_1B) = \angle(A_1D, DB_1)$, т. е. точки A_1, B_1, C_1 и D лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle(A_1C_1, C_1D) = \angle(A_1B_1, B_1D) = \angle(AC, CD)$. Учитывая, что $A_1C_1 \parallel AC$, получаем требуемое.

2.49. Пусть точка M симметрична точке A_1 относительно прямой AC . Согласно задаче 1.58 точка M лежит на прямой B_1C_1 . Поэтому $\angle(LM, MA_1) = \angle(C_1B_1, B_1A) = \angle(C_1C, CB) = \angle(LK, KA_1)$, т. е. точка M лежит на описанной окружности треугольника A_1KL . Следовательно, центр этой окружности лежит на прямой AC — серединном перпендикуляре к отрезку A_1M .

2.50. Пусть PQ — диаметр, перпендикулярный AB , причем Q и C лежат по одну сторону от AB ; L — точка пересечения прямой QO с описанной окружностью; M' и N' — точки пересечения прямых LB' и LA' со сторонами AC и BC . Достаточно проверить, что $M' = M$ и $N' = N$.

Так как $\sphericalangle PA + \sphericalangle AB' + \sphericalangle B'Q = 180^\circ$, то $\sphericalangle B'Q = \angle A$, а значит, $\angle B'LQ = \angle M'AO$. Следовательно, четырехугольник $AM'OL$ вписанный и $\angle M'OA = \angle M'LA = \angle B/2$. Поэтому $\angle CMO = (\angle A + \angle B)/2$, т. е. $M' = M$. Аналогично $N' = N$.

2.51. Так как $\triangle ADM \sim \triangle CBM$ и $\triangle ACM \sim \triangle DBM$, то $AD : CB = DM : BM$ и $AC : DB = AM : DM$. Остается перемножить эти равенства.

2.52. Пусть D_1 — точка пересечения прямой BD с окружностью, отличная от точки B . Тогда $\sphericalangle AB = \sphericalangle AD_1$, поэтому $\angle ACB = \angle AD_1B = \angle ABD_1$. Треугольники ACB и ABD имеют общий угол A и, кроме того, $\angle ACB = \angle ABD$, поэтому $\triangle ACB \sim \triangle ABD$. Следовательно, $AB : AC = AD : AB$.

2.53. Пусть O — центр окружности. Так как $\angle MAC = \angle ACO = \angle CAO$, то $\triangle AMC = \triangle ADC$. Аналогично $\triangle CDB = \triangle CNB$. Так как $\triangle ACD \sim \triangle CDB$, то $CD^2 = AD \cdot DB = AM \cdot NB$.

2.54. Точки B_1 и H лежат на окружности с диаметром AB , поэтому $\angle(AB, BC) = \angle(AB, BH) = \angle(AB_1, B_1H) = \angle(B_1C_1, B_1H)$. Аналогично имеем $\angle(AC, BC) = \angle(B_1C_1, C_1H)$.

2.55. На продолжении отрезка BP за точку P возьмем точку D так, что $PD = CP$. Тогда треугольник CDP правильный и $CD \parallel QP$. Поэтому $BP : PQ = BD : DC = (BP + CP) : CP$, т. е. $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{CP} + \frac{1}{BP}$.

2.56. Отрезок QE виден из точек A и B под углом 45° , поэтому четырехугольник $ABEQ$ вписанный. А так как $\angle ABE = 90^\circ$, то $\angle AQE = 90^\circ$. Следовательно, треугольник AQE прямоугольный равнобедренный и $AE/AQ = \sqrt{2}$. Аналогично $AF/AP = \sqrt{2}$.

2.57. Так как $\angle ANC = \angle ABC = \angle CAB$, то $\triangle CAM \sim \triangle CNA$, а значит, $CA : CM = CN : CA$, т. е. $CM \cdot CN = AC^2$, и $AM : NA = CM : CA$. Аналогично $BM : NB = CM : CB$. Поэтому $AM \cdot BM / (AN \cdot BN) = CM^2 / CA^2 = CM^2 / (CM \cdot CN) = CM / CN$.

2.58. Так как $AK = AB = CD$, $AD = BC = CH$ и $\angle KAD = \angle DCH$, то $\triangle ADK = \triangle CHD$ и $DK = DH$. Покажем, что точки A, K, H, C и D лежат на одной окружности. Опишем вокруг треугольника ADC окружность. Проведем в этой окружности хорду CK_1 параллельно AD и хорду AH_1 параллельно DC . Тогда $K_1A = DC$ и $H_1C = AD$. Значит, $K_1 = K$ и $H_1 = H$, т. е. построенная окружность проходит через точки K и H и углы KAH и KDN равны, так как они опираются на одну дугу. Кроме того, уже было показано, что KDH — равнобедренный треугольник.

2.59. а) $\angle PBA_1 = \angle PAC_1$ и $\angle PBC_1 = \angle PAB_1$, поэтому прямоугольные треугольники PBA_1 и PAC_1 , PAB_1 и PBC_1 подобны, т. е. $PA_1 : PB = PC_1 : PA$, $PB_1 : PA = PC_1 : PB$. Перемножив эти равенства, получим $PA_1 \cdot PB_1 = PC_1^2$, а поделив их, получим $PA_1 : PB_1 = PA^2 : PB^2$.

б) Согласно а) $OA'' = \sqrt{OB' \cdot OC'}$, $OB'' = \sqrt{OA' \cdot OC'}$, $OC'' = \sqrt{OA' \cdot OB'}$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

2.60. Пусть K, L, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки E на прямые AB, BC, CD и DA . Точки K и N лежат на окружности с диаметром AE , поэтому $\angle(EK, KN) = \angle(EA, AN)$. Аналогично $\angle(EL, LM) = \angle(EC, CM) = \angle(EA, AN)$, а значит, $\angle(EK, KN) = \angle(EL, LM)$. Аналогично $\angle(EN, NK) = \angle(EM, ML)$ и $\angle(KE, EN) = \angle(LE, EM)$. Следовательно, $\triangle EKN \sim \triangle ELM$, а значит, $EK : EN = EL : EM$, т. е. $EN = EK \cdot EM / EL = ac/b$.

2.61. Пусть H — точка пересечения высот, M — середина стороны BC . Точки A_1, B_2 и C_2 лежат на окружности с диаметром MH , поэтому $\angle(B_2A_1, A_1C_2) = \angle(B_2M, MC_2) = \angle(AC, AB)$. Кроме того, $\angle(A_1B_2, B_2C_2) = \angle(A_1H, HC_2) = \angle(BC, AB)$ и $\angle(A_1C_2, C_2B_2) = \angle(BC, AC)$.

2.62. Пусть M — точка пересечения медиан, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Точки A_1, B_1 и C_1 — проекции точки M на высоты, поэтому они лежат на окружности с диаметром MH . Следовательно, $\angle(A_1B_1, B_1C_1) = \angle(AH, HC) = \angle(BC, AB)$. Записывая аналогичные равенства для других углов, получаем требуемое.

2.63. Пусть прямые BM и DN пересекают S_2 в точках L и C_1 соответственно. Докажем, что прямые DC_1 и CN симметричны относительно прямой AN . Так как $BN \perp NA$, достаточно проверить, что $\angle CNB = \angle BND$. Но дуги CB и BD равны. Дуги C_1M и CL симметричны относительно прямой AN , поэтому они равны, а значит, $\angle MDC_1 = \angle CML$. Кроме того, $\angle CNM = \angle MND$. Следо-

вательно, $\triangle MCN \sim \triangle DMN$, т. е. $CN : MN = MN : DN$.

2.64. Опустим из точки Q перпендикуляры QK_1 и QN_1 на KL и NM , из точки P перпендикуляры PM_1 и PL_1 на NM и KL . Ясно, что $\frac{QC}{PC} = \frac{QK_1}{PL_1} = \frac{QN_1}{PM_1}$, т. е. $\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK_1 \cdot QN_1}{PL_1 \cdot PM_1}$. Так как $\angle KNC = \angle MLC$ и $\angle NKC = \angle LMC$, то $QN_1 : PL_1 = QN : PL$ и $QK_1 : PM_1 = QK : PM$. Поэтому

$$\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK \cdot QN}{PL \cdot PM} = \frac{AQ \cdot QB}{PB \cdot AP} = \frac{(AC - QC) \cdot (AC + QC)}{(AC - PC) \cdot (AC + PC)} = \frac{AC^2 - QC^2}{AC^2 - PC^2}.$$

Отсюда получаем $QC = PC$.

2.65. а) Так как $\angle CAM = \angle CBM$ и $\angle CB_1M = \angle CA_1M$, то $\angle B_1AM = \angle A_1BM$ и $\angle AB_1M = \angle BA_1M$.

б) Пусть M_1 — такая точка окружности S с диаметром CO , что $CM_1 \parallel A_1B_1$; M_2 — точка пересечения окружности S с описанной окружностью треугольника ABC ; A_2 и B_2 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC . Достаточно проверить, что $M_1 = M_2$. Согласно задаче а) $\triangle AB_2M_2 \sim \triangle BA_2M_2$, поэтому $B_2M_2 : A_2M_2 = AB_2 : BA_2$. А так как $CA_1 = p - b = BA_2$ и $CB_1 = AB_2$, то

$$\frac{B_2M_1}{A_2M_1} = \frac{\sin B_2CM_1}{\sin A_2CM_1} = \frac{\sin CA_1B_1}{\sin CB_1A_1} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{AB_2}{BA_2}.$$

На дуге A_2CB_2 окружности S существует единственная точка X , для которой $B_2X : A_2X = k$ (см. задачу 7.14), поэтому $M_1 = M_2$.

2.66. Пусть O — центр описанной окружности треугольника, M — середина стороны AB , H — основание высоты CH , D — середина той из дуг, задаваемых точками A и B , на которой не лежит точка C . $OD \parallel CH$, поэтому $\angle DCH = \angle MDC$. Биссектриса делит пополам угол между медианой и высотой тогда и только тогда, когда $\angle MCD = \angle DCH = \angle MDC = \angle ODC = \angle OCD$, т. е. $M = O$ и AB — диаметр окружности.

2.67. Пусть $\alpha = \angle A < \angle B$. Согласно предыдущей задаче $\angle C = 90^\circ$. Медиана CM делит треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. $\angle ACM = \angle A = \alpha$, $\angle MCB = 3\alpha$, значит, $\alpha + 3\alpha = 90^\circ$, т. е. $\alpha = 22,5^\circ$. Поэтому $\angle A = 22,5^\circ$, $\angle B = 67,5^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

2.68. Пусть D — точка, в которой прямая AE пересекает описанную окружность. Точка D является серединой дуги BC . Поэтому $MD \parallel AH$, причем точки A и D лежат по разные стороны от прямой MH . Следовательно, точка E лежит на отрезке MH .

2.69. Ясно, что $\angle(AQ, QP) = \angle(AN, NP) = \angle(PM, MB) = \angle(QP, QB)$. Поэтому точка Q лежит на окружности, из которой отрезок AB виден под углом $2\angle(AC, CB)$, причем прямая QP делит дугу AB этой окружности пополам.

2.70. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AD ; эта окружность пересекает сторону BC в точке F (F не совпадает с D , если $AB \neq AC$). Ясно, что $\angle(FC, CE) = \angle(BA, AE) = \angle(DA, AQ) = \angle(DF, FQ)$, т. е. $EC \parallel FQ$. Аналогично $BE \parallel FP$. Для завершения доказательства остается заметить, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам трапеции, равны.

2.71. Пусть $\angle AOB = \alpha$ и $\angle COD = \beta$. Тогда $\alpha/2 + \beta/2 = \angle ADP + \angle PAD = 90^\circ$. А так как $2S_{AOB} = R^2 \sin \alpha$ и $2S_{COD} = R^2 \sin \beta$, где R — радиус описанной окружности, то $S_{AOB} = S_{COD}$. Аналогично $S_{BOC} = S_{AOD}$.

2.72. Пусть $\angle AOB = 2\alpha$ и $\angle COD = 2\beta$. Тогда $\alpha + \beta = \angle ADP + \angle PAD = 90^\circ$. Поэтому $(AP^2 + BP^2) + (CP^2 + DP^2) = AB^2 + CD^2 = 4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2$. Аналогично $BC^2 + AD^2 = 4R^2$.

2.73. Пусть M — середина AC , N — середина BD . $AM^2 = AO^2 - OM^2$, $BN^2 = BO^2 - ON^2$, поэтому $AC^2 + BD^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2) = 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - 4OP^2$, так как $OM^2 + ON^2 = OP^2$.

2.74. Острые углы BLP и BDC имеют соответственно перпендикулярные стороны, поэтому они равны. Следовательно, $\angle BLP = \angle BDC = \angle BAP$. Кроме того, $AK \parallel BL$ и $AL \perp BK$. Поэтому $AKLB$ — ромб.

2.75. Возьмем на описанной окружности точку D' так, что $DD' \parallel AC$. Так как $DD' \perp BD$, то BD' — диаметр, а значит, $\angle D'AB = \angle D'CB = 90^\circ$. Поэтому $S_{ABCD} = S_{ABCD'} = (AD' \cdot AB + BC \cdot CD')/2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$.

2.76. Проведем диаметр AE . $\angle BEA = \angle BCP$ и $\angle ABE = \angle BPC = 90^\circ$, поэтому $\angle EAB = \angle CBP$. Углы, опирающиеся на хорды EB и CD , равны, поэтому $EB = CD$. Так как $\angle EBA = 90^\circ$, расстояние от точки O до AB равно $EB/2$.

2.77. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки P на BC , пересекает BC в точке H и AD в точке M (рис. 2.3). $\angle BDA = \angle BCA = \angle BPH = \angle MPD$. Из равенства углов MDP и MPD следует, что MP — медиана прямоугольного треугольника APD . В самом деле, $\angle APM = 90^\circ - \angle MPD = 90^\circ - \angle MDP = \angle PAM$, т. е. $AM = PM = MD$.

2.78. Середины сторон четырехугольника $ABCD$ являются вершинами прямоугольника (см. задачу 1.2), поэтому они лежат на одной окружности. Пусть K и L — середины сторон AB и CD , M — точка пересечения прямых KP и CD . Согласно задаче 2.77 $PM \perp CD$, а значит, M — проекция точки P на сторону CD и точка M лежит на окружности с диаметром KL . Для остальных проекций доказательство аналогично.

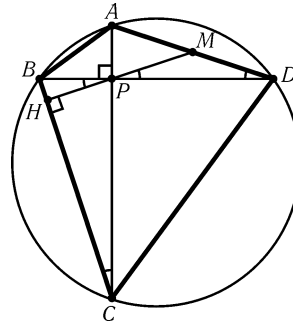


Рис. 2.3

2.79. а) Следует отметить, что так как точки A, B, C и D разбивают окружность на дуги, меньшие 180° , то построенный четырехугольник содержит эту окружность. Угол φ между касательными, проведенными через точки A и B , равен $180^\circ - \angle AOB$, а угол ψ между касательными, проведенными через точки C и D , равен $180^\circ - \angle COD$. Так как $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, то $\varphi + \psi = 180^\circ$.

З а м е ч а н и е. Обратно, из равенства $\varphi + \psi = 180^\circ$ следует, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, т. е. $AC \perp BD$.

б) Пусть O — центр вписанной окружности. Так как $\angle AKO + \angle BMO = 90^\circ$, то $\angle AKO = \angle BOM$ и $\triangle AKO \sim \triangle BOM$. Следовательно, $AK \cdot BM = BO \cdot AO = r^2$.

2.80. Предположим сначала, что описанные окружности треугольников $A'BC$ и $AB'C$ не касаются и P — их общая точка, отличная от C . Тогда $\angle(PA, PB) = \angle(PA, PC) + \angle(PC, PB) = \angle(B'A, B'C) + \angle(A'C, A'B) = \angle(C'A, C'B)$, т. е. точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC' .

В случае, когда описанные окружности треугольников $A'BC$ и $AB'C$ касаются, т. е. $P = C$, требуются незначительные изменения: вместо прямой PC нужно взять общую касательную.

2.81. а) Применяя утверждение задачи 2.80 к треугольникам AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C , построенным на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$, получаем требуемое.

б) Пусть P — точка пересечения указанных окружностей. Докажем, что величина угла $\angle(AP, PC)$ постоянна. Так как $\angle(AP, PC) = \angle(AP, AB) + \angle(AB, BC) + \angle(BC, PC)$, а угол $\angle(AB, BC)$ постоянен, то остается проверить, что сумма $\angle(AP, AB) + \angle(BC, PC)$ постоянна. Ясно, что $\angle(AP, AB) + \angle(BC, CP) = \angle(AP, AC_1) + \angle(CA_1, CP) = \angle(B_1P, B_1C_1) + \angle(B_1A_1, B_1P) = \angle(B_1A_1, B_1C_1)$, а величина последнего угла постоянна по условию. Аналогично доказывается, что величины углов $\angle(AP, PB)$ и $\angle(BP, PC)$ постоянны. Следовательно, точка P остается неподвижной.

2.82. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 проходит через точку X , поэтому $\angle BXC = 180^\circ - \angle A$. Это означает, что точка X лежит на окружности, симметричной описанной окружности треугольника ABC относительно стороны BC . Ясно, что три окружности, симметричные описанной окружности треугольника относительно его сторон, не могут иметь более одной общей точки.

2.83. Как следует из задачи 2.81, б), доказательство достаточно провести лишь для одного такого треугольника $A_1B_1C_1$, например для треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC . Пусть H — точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. центр описанной окружности треугольника ABC . Так как $A_1H \perp B_1C_1$ и $B_1H \perp A_1C_1$, то $\angle(A_1H, HB_1) = \angle(B_1C_1, A_1C_1) = \angle(A_1C, CB_1)$, т. е. точка H лежит на описанной окружности треугольника A_1B_1C . Аналогично доказывается, что она лежит на описанных окружностях треугольников A_1BC_1 и AB_1C_1 .

2.84. а) Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и $AB'C'$. Тогда $\angle(XB', XC) = \angle(XB', XA) + \angle(XA, XC) = \angle(C'B', C'A) + \angle(BA, BC)$. Так как $AC' = AP = AB'$, то треугольник $C'AB'$ равнобедренный, причем $\angle C'AB' = 2\angle A$, поэтому $\angle(C'B', C'A) = \angle A - 90^\circ$. Следовательно, $\angle(XB', XC) = \angle A - 90^\circ + \angle B = 90^\circ - \angle C = \angle(A'B', A'C)$, т. е. точка X лежит на описанной окружности треугольника $A'B'C$. Для описанной окружности треугольника $A'BC'$ доказательство аналогично.

б) Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников $A'B'C'$ и $A'BC$. Докажем, что она лежит на описанной окружности треугольника ABC' . Ясно, что $\angle(XB, XC') = \angle(XB, XA') + \angle(XA', XC') = \angle(CB, CA') + \angle(B'A', B'C')$. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков PA', PB' и PC' . Тогда $\angle(CB, CA') = \angle(CP, CA_1) = \angle(B_1P, B_1A_1)$, $\angle(B'A', B'C') = \angle(B_1A_1, B_1C_1)$ и $\angle(AB, AC') = \angle(AP, AC_1) = \angle(B_1P, B_1C_1)$. Следовательно, $\angle(XB, XC') = \angle(AB, AC')$.

Аналогично доказывается, что точка X лежит на описанной окружности треугольника $AB'C$.

в) Так как QA' — общая хорда окружностей с центрами O и I , то $QA' \perp OI$. Аналогично $QB' \perp OJ$ и $QC \perp IJ$. Поэтому стороны углов OJI и $B'QC$, а также углов OIJ и $A'QC$ взаимно перпендикулярны, а значит, $\sin OJI = \sin B'QC$ и $\sin OIJ = \sin A'QC$. Следовательно, $OI : OJ = \sin OJI : \sin OIJ = \sin B'QC : A'QC$. Ясно также, что

$$\frac{QI}{QJ} = \frac{\sin QJI}{\sin QIJ} = \frac{\sin(QJC/2)}{\sin(QIC/2)} = \frac{\sin QB'C}{\sin QA'C}$$

Учитывая, что $\sin B'QC : \sin QB'C = B'C : QC$ и $\sin A'QC : \sin QA'C = A'C : QC$, получаем

$$\frac{OI}{OJ} : \frac{QI}{QJ} = \frac{B'C}{QC} : \frac{A'C}{QC} = 1.$$

2.85. а) Из условия задачи следует, что никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Пусть прямые AB, AC, BC пересекают четвертую прямую в точках D, E, F соответственно (рис. 2.4). Обозначим через P точку пересечения описанных окружностей треугольников ABC и CEF , отличную от точки C . Докажем, что точка P принадлежит описанной окружности треугольника BDF . Для этого достаточно проверить, что $\angle(BP, PF) = \angle(BD, DF)$. Ясно, что $\angle(BP, PF) = \angle(BP, PC) + \angle(PC, PF) = \angle(BA, AC) + \angle(EC, EF) = \angle(BD, AC) + \angle(AC, DF) = \angle(BD, DF)$. Аналогично доказывается, что точка P принадлежит описанной окружности треугольника ADE .

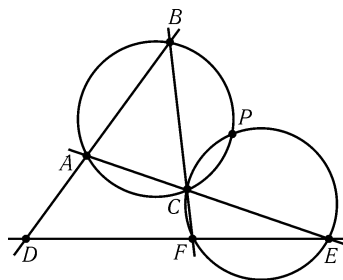


Рис. 2.4

б) Воспользуемся обозначениями рис. 2.4. Согласно задаче а) описанные окружности треугольников ABC, ADE и BDF проходят через точку P , поэтому их можно рассмотреть как описанные окружности треугольников ABP, ADP и BDP . Следовательно, их центры лежат на окружности, проходящей через точку P (см. задачу 5.96). Аналогично доказывается, что центры любых трех из данных окружностей лежат на окружности, проходящей через точку P . Следовательно, все четыре центра лежат на окружности, проходящей через точку P .

2.86. а) Пусть P — точка Микеля для прямых AB, BC, CA и A_1B_1 . Углы между лучами PA, PB, PC и касательными к окружностям S_a, S_b, S_c соответственно равны $\angle(PB_1, B_1A) = \angle(PC_1, C_1A), \angle(PC_1, C_1B) = \angle(PA_1, A_1B), \angle(PA_1, A_1C) = \angle(PB_1, B_1C)$. А так как $\angle(PC_1, C_1A) = \angle(PC_1, C_1B) = \angle(PA_1, A_1C) = \varphi$, то при повороте на угол φ с центром P прямые PA, PB и PC переходят в касательные к окружностям S_a, S_b и S_c , а значит, при повороте на угол $90^\circ - \varphi$ эти прямые переходят в прямые PO_a, PO_b и PO_c . Кроме того, $PO_a/PA = PO_b/PB = PO_c/PC = 1/2 \sin \varphi$. Следовательно, при повороте на $90^\circ - \varphi$ и гомотетии с центром P и коэффициентом $1/2 \sin \varphi$ треугольник ABC переходит в $O_aO_bO_c$.

б) Рассмотренное в решении задачи а) преобразование переводит центр O описанной окружности треугольника ABC в центр O' описанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$, а ортоцентр H треугольника ABC в ортоцентр H' треугольника $O_aO_bO_c$. Построим треугольник $OO'H'$ до параллелограмма $OO'H'M$. Так как $OH/OM = OH'/O'H' = 2 \sin \varphi$ и $\angle HOM = \angle(HO, O'H') = 90^\circ - \varphi$, то $MH = MO$, т. е. точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OH . Остается заметить, что для вписанного четырехугольника $OO_aO_bO_c$ с точки M определена однозначно: взяв вместо точки O любую из точек O_a, O_b, O_c , получим ту же самую точку M (см. задачу 13.33).

2.87. Можно считать, что лучи AB и DC пересекаются в точке E , а лучи BC и AD — в точке F . Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников BCE и CDF . Тогда $\angle CPE = \angle ABC$ и $\angle CPF = \angle ADC$. Поэтому $\angle CPE + \angle CPF = 180^\circ$, т. е. точка P лежит на отрезке EF .

2.88. а) Так как $\angle(AP, PD) = \angle(AP, PE) + \angle(PE, PD) = \angle(AC, CD) + \angle(AB, BD) = \angle(AO, OD)$, точки A, P, D и O лежат на одной окружности.

б) Ясно, что $\angle(EP, PO) = \angle(EP, PA) + \angle(PA, PO) = \angle(DC, CA) + \angle(DA, DO) = 90^\circ$, так как дуги, на которые опираются эти углы, составляют половину окружности.

2.89. Воспользуемся обозначениями рис. 2.4. Проекция точки P на пря-

мые CA и CB совпадают с ее проекциями на CE и CF . Следовательно, прямые Симсона точки P относительно треугольников ABC и CEF совпадают (см. задачу 5.95, а)).

2.90. Пусть точка A' симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC . Тогда $\angle OAH = \angle OAA'/2 = \angle ABA' = |\angle B - \angle C|$.

2.91. Так как AA' — диаметр, то $A'C \perp AC$, поэтому $BH \parallel A'C$. Аналогично $CH \parallel A'B$. Следовательно, $BA'CH$ — параллелограмм.

2.92. Пусть l — прямая, параллельная двум исходным прямым; D — точка пересечения прямых m и n . Тогда $\angle(AD, DB) = \angle(m, AB) + \angle(AB, n) = \angle(AC, l) + \angle(l, CB) = \angle(AC, CB)$, а значит, точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC .

2.93. а) Пусть O — середина дуги окружности S , лежащей внутри треугольника ABC . Тогда $\angle CBO = \angle BCO$, а по свойству угла между касательной и хордой $\angle BCO = \angle ABO$. Поэтому BO — биссектриса угла ABC , т. е. O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

Аналогично доказывается, что середина дуги окружности S , лежащей вне треугольника ABC , является центром его внеписанной окружности.

б) Требуется доказать, что центр рассматриваемой окружности S лежит на биссектрисе угла BAC . Пусть D — точка пересечения биссектрисы этого угла с описанной окружностью треугольника ABC . Тогда $DB = DO = DC$ (см. задачу 2.4, а)), т. е. D — центр окружности S .

2.94. Если угол C прямой, то решение задачи очевидно: C является точкой пересечения прямых A_1B, A_2B_2, AB_1 . Если же $\angle C \neq 90^\circ$, то описанные окружности квадратов ACA_1A_2 и BCB_1B_2 имеют кроме C еще одну общую точку — точку C_1 . Тогда $\angle(AC_1, A_2C_1) = \angle(A_2C_1, A_1C_1) = \angle(A_1C_1, C_1C) = \angle(C_1C, C_1B_1) = \angle(C_1B_1, C_1B_2) = \angle(C_1B_2, C_1B) = 45^\circ$ (или же -45° ; важно лишь то, что все углы имеют один и тот же знак). Поэтому $\angle(AC_1, C_1B_1) = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$, т. е. прямая AB_1 проходит через точку C_1 . Аналогично A_2B_2 и A_1B проходят через точку C_1 .

2.95. Пусть P и O — центры окружностей S_1 и S_2 ; $\alpha = \angle APC, \beta = \angle BPC$; прямые AC и BC пересекают S_2 в точках K и L . Так как $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, то $\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Далее, $\angle LOB = 180^\circ - 2\angle LBO = 2\angle CBP = 180^\circ - \beta$. Аналогично $\angle KOA = 180^\circ - \alpha$. Поэтому $\angle LOK = \angle LOB + \angle KOA - \angle AOB = 180^\circ$, т. е. KL — диаметр.

2.96. Рассмотрим точки M', P', Q' и R' , симметричные точкам M, P, Q и R относительно прямой OA . Так как точка C симметрична точке B относительно OA , прямая $P'Q'$ проходит через точку C . Легко проверяются следующие равенства: $\angle(CS, NS) = \angle(Q'Q, NQ) = \angle(Q'P', NP') = \angle(CP', NP')$ и $\angle(CR', P'R') = \angle(MM', P'M') = \angle(MN, P'N) = \angle(CN, P'N)$. Из этих равенств получаем, что точки C, N, P', S и R' лежат на одной окружности. Но точки S, R' и C лежат на одной прямой, поэтому $S = R'$.

Глава 3

Окружности

Основные сведения

1. Прямую, имеющую ровно одну общую точку с окружностью, называют *касательной к окружности*.

Через любую точку A , лежащую вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности; пусть B и C — точки касания, O — центр окружности. Тогда:

- а) $AB = AC$;
- б) $\angle BAO = \angle CAO$;
- в) $OB \perp AB$.

(Иногда касательной мы будем называть не прямую AB , а отрезок AB . Например, свойство а) можно сформулировать так: «касательные, проведенные из одной точки, равны».)

2. Пусть прямые l_1 и l_2 , проходящие через точку A , пересекают окружность в точках B_1, C_1 и B_2, C_2 соответственно. Тогда $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$. В самом деле, $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle AB_2C_1$ по трем углам (советуем читателям самостоятельно доказать это, используя свойства вписанных углов и рассматривая два случая: A лежит вне окружности и A лежит внутри окружности).

Если прямая l_2 касается окружности, т. е. $B_2 = C_2$, то $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2^2$. Доказательство производится так же, как и в предыдущем случае, только теперь нужно воспользоваться свойствами угла между касательной и хордой.

3. Прямая, соединяющая центры касающихся окружностей, проходит через их точку касания.

4. *Величиной угла между двумя пересекающимися окружностями* называют величину угла между касательными к ним, проведенными через точку пересечения. При этом безразлично, какую из двух точек пересечения окружностей мы выберем.

Угол между касающимися окружностями равен 0° .

5. При решении задач § 6 используется одно свойство, не имеющее прямого отношения к окружностям: высоты треугольника пересекаются в одной точке. Доказательство этого факта можно найти в решениях задач 5.47 и 7.41, а можно пока принять на веру.

6. Уже в середине V в. до н. э. Гиппократ с острова Хиос (не путайте его со знаменитым врачом Гиппократом с острова Кос, жившим несколько позже) и пифагорейцы начали решать задачу квадратуры круга. Она формулируется следующим образом: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, имеющий ту же площадь, что и данный круг. В 1882 г. немецкий математик Линдемман доказал, что число π трансцендентно, т. е. не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Из этого, в частности, следует, что задача квадратуры круга неразрешима.

По-видимому, многим давала надежду на возможность квадратуры круга задача 3.38 (задача о «луночках Гиппократа»): площадь фигуры, образованной дугами окружностей, равна площади треугольника. Решив эту задачу, постарайтесь понять, почему в данном случае подобные надежды не имели оснований.

Вводные задачи

1. Докажите, что из точки A , лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности, причем длины этих касательных (т. е. расстояния от A до точек касания) равны.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B . Точка X лежит на прямой AB , но не на отрезке AB . Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

3. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (т. е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найдите длину общей касательной к этим окружностям.

4. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы. Докажите, что:

- радиус вписанной окружности треугольника равен $(a + b - c)/2$;
- радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $(a + b + c)/2$.

§1. Касательные к окружностям

3.1. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B — точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки PA и PB в точках X и Y . Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

3.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K , а невписанная — в точке L . Докажите, что $CK = BL = (a + b - c)/2$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

3.3. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E , и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности, касающиеся отрезка CE в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если известны длины отрезков AE и BE .

3.4. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что существует окружность, вписанная в угол BAD и касающаяся продолжений сторон BC и CD . Докажите, что $AB + BC = AD + DC$.

3.5. Общая внутренняя касательная к окружностям с радиусами R и r пересекает их общие внешние касательные в точках A и B и касается одной из окружностей в точке C . Докажите, что $AC \cdot CB = Rr$.

3.6*. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AB и CD . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

3.7*. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N . Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BDC .

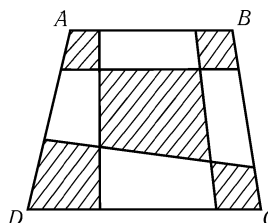


Рис. 3.1

3.8*. На каждой стороне четырехугольника $ABCD$ взято по две точки, и они соединены так, как показано на рис. 3.1. Докажите, что если все пять заштрихованных четырехугольников описанные, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный.

§2. Произведение длин отрезков хорд

3.9. Через точку P , лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

3.10. Две окружности пересекаются в точках A и B ; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

3.11. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

3.12. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD ; M — такая точка диагонали AC , что четырехугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM .

3.13. Даны окружность S и точки A и B вне ее. Для каждой прямой l , проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N , рассмотрим описанную окружность треугольника BMN . Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B .

3.14. Даны окружность S , точки A и B на ней и точка C хорды AB . Для каждой окружности S' , касающейся хорды AB в точке C и пересекающей окружность S в точках P и Q , рассмотрим точку M пересечения

прямых AB и PQ . Докажите, что положение точки M не зависит от выбора окружности S' .

§3. Касающиеся окружности

3.15. Две окружности касаются в точке A . К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и D . Докажите, что $\angle CAD = 90^\circ$.

3.16. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A . Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке A_1 и S_2 в точке A_2 . Докажите, что $O_1A_1 \parallel O_2A_2$.

3.17. Три окружности S_1, S_2 и S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках. Докажите, что прямые, соединяющие точку касания окружностей S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

3.18. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O . Найдите периметр треугольника OO_1O_2 .

3.19. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A и B , причем одна из точек пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на отрезке AB . Докажите, что сумма радиусов окружностей S_1 и S_2 равна радиусу окружности S .

3.20. Радиусы окружностей S_1 и S_2 , касающихся в точке A , равны R и r ($R > r$). Найдите длину касательной, проведенной к окружности S_2 из точки B окружности S_1 , если известно, что $AB = a$. (Разберите случаи внутреннего и внешнего касания.)

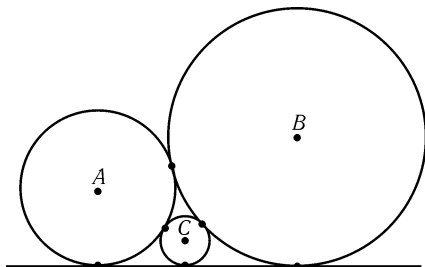


Рис. 3.2

3.21. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а окружность с диаметром AB — в точках M и N . Докажите, что $KM = LN$.

3.22. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 , причем окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1, 2, 3, 4$ ($S_5 = S_1$). Докажите, что точки касания образуют вписанный четырехугольник.

3.23. а) Три окружности с центрами A, B, C , касающиеся друг друга и прямой l , расположены так, как показано на рис. 3.2. Пусть a, b и c — радиусы окружностей с центрами A, B, C . Докажите, что $1/\sqrt{c} = 1/\sqrt{a} + 1/\sqrt{b}$.

б) Четыре окружности попарно касаются внешним образом (в шести различных точках). Пусть a, b, c, d — их радиусы, $\alpha = 1/a, \beta = 1/b, \gamma = 1/c$ и $\delta = 1/d$. Докажите, что $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$.

§4. Три окружности одного радиуса

3.24. Три окружности радиуса R проходят через точку H ; A, B и C — точки их попарного пересечения, отличные от H . Докажите, что:

- H — точка пересечения высот треугольника ABC ;
- радиус описанной окружности треугольника ABC тоже равен R .

3.25*. Три равные окружности пересекаются так, как показано на рис. 3.3, *а* или *б*. Докажите, что $\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle BC_1 \pm \sphericalangle CA_1 = 180^\circ$, где знак минус берется в случае *б*.

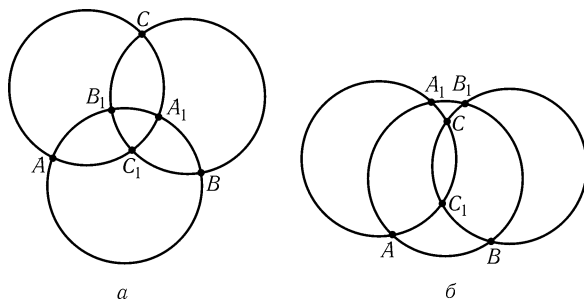


Рис. 3.3

3.26*. Три окружности одного радиуса проходят через точку P ; A, B и Q — точки их попарного пересечения. Четвертая окружность того же радиуса проходит через точку Q и пересекается с двумя другими в точках C и D . При этом треугольники ABQ и CDP остроугольные, а четырехугольник $ABCD$ выпуклый (рис. 3.4). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

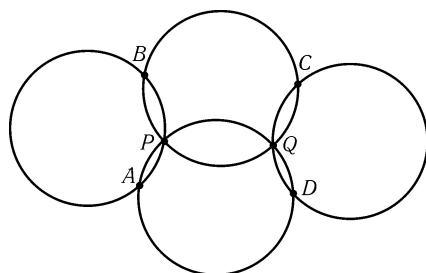


Рис. 3.4

§5. Две касательные, проведенные из одной точки

3.27. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O . Докажите, что если из точки M отрезок AO виден под углом 90° , то отрезки OB и OC видны из нее под равными углами.

3.28. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O . Через точку X отрезка BC проведена прямая KL , перпендикулярная XO (точки K и L лежат на прямых AB и AC). Докажите, что $KX = XL$.

3.29. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A , и из нее проведены касательные AP и AQ ; M — середина отрезка PQ . Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

3.30*. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности и секущая, пересекающая окружность в точках D и E ; M — середина отрезка BC . Докажите, что $BM^2 = DM \cdot ME$ и угол DME в два раза больше угла DBE или угла DCE ; кроме того, $\angle BEM = \angle DEC$.

3.31*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем касательные в точках B и D пересекаются в точке K , лежащей на прямой AC .

а) Докажите, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

б) Прямая, параллельная KB , пересекает прямые BA , BD и BC в точках P , Q и R . Докажите, что $PQ = QR$.

* * *

3.32. Даны окружность S и прямая l , не имеющие общих точек. Из точки P , движущейся по прямой l , проводятся касательные PA и PB к окружности S . Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.

Если точка P лежит вне окружности S , а PA и PB — касательные к окружности, то прямую AB называют *полярной* точки P относительно окружности S .

3.33*. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B , причем центр O окружности S_1 лежит на S_2 . Прямая, проходящая через точку O , пересекает отрезок AB в точке P , а окружность S_2 в точке C . Докажите, что точка P лежит на полярной точки C относительно окружности S_1 .

§6. Применение теоремы о высотах треугольника

3.34. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB . Прямые AC и BD , AD и BC пересекаются в точках P и Q . Докажите, что $AB \perp PQ$.

3.35*. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D — точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая P с точкой пересечения прямых AC и BD , перпендикулярна AB .

3.36*. Даны диаметр AB окружности и точка C , не лежащая на прямой AB . С помощью одной линейки (без циркуля) опустите перпендикуляр из точки C на AB , если: а) точка C не лежит на окружности; б) точка C лежит на окружности.

3.37*. Пусть O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB . Докажите, что если точки O_a и O_b лежат на прямых PA и PB , то точка O_c лежит на прямой PC .

§7. Площади криволинейных фигур

3.38. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены полуокружности, расположенные так, как показано на рис. 3.5. Докажите, что сумма площадей образовавшихся «луночек» равна площади данного треугольника.

3.39*. В круге проведены два перпендикулярных диаметра, т. е. четыре радиуса, а затем построены четыре круга, диаметрами которых служат эти радиусы. Докажите, что суммарная площадь попарно общих частей этих кругов равна площади части исходного круга, лежащей вне рассматриваемых четырех кругов (рис. 3.6).

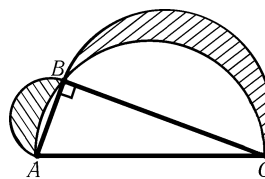


Рис. 3.5

3.40*. На трех отрезках OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC) как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O , равна половине площади (обычного) треугольника ABC .

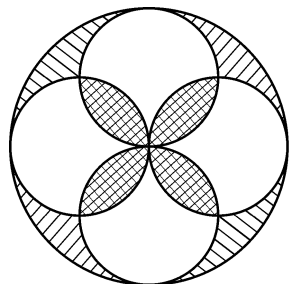


Рис. 3.6

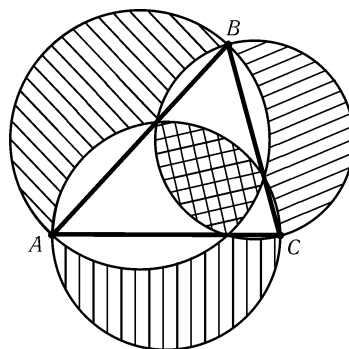


Рис. 3.7

3.41*. На сторонах произвольного остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. При этом образуется три «внешних» криволинейных треугольника и один «внутренний» (рис. 3.7). Докажите, что если из суммы площадей «внешних» треугольников вычесть площадь

«внутреннего» треугольника, то получится удвоенная площадь треугольника ABC .

§8. Окружности, вписанные в сегмент

3.42. Хорда AB разбивает окружность S на две дуги. Окружность S_1 касается хорды AB в точке M и одной из дуг в точке N . Докажите, что:

- прямая MN проходит через середину P второй дуги;
- длина касательной PQ к окружности S_1 равна PA .

3.43. Из точки D окружности S опущен перпендикуляр DC на диаметр AB . Окружность S_1 касается отрезка CA в точке E , а также отрезка CD и окружности S . Докажите, что DE — биссектриса треугольника ADC .

3.44*. Две окружности, вписанные в сегмент AB данной окружности, пересекаются в точках M и N . Докажите, что прямая MN проходит через середину C дополнительной для данного сегмента дуги AB .

3.45*. На диаметре AB окружности S взята точка K и из нее восстановлен перпендикуляр, пересекающий S в точке L . Окружности S_A и S_B касаются окружности S , отрезка LK и диаметра AB , а именно, S_A касается отрезка AK в точке A_1 , S_B касается отрезка BK в точке B_1 . Докажите, что $\angle A_1LB_1 = 45^\circ$.

3.46*. Окружность, касающаяся сторон AC и BC треугольника ABC в точках M и N , касается также его описанной окружности (внутренним образом). Докажите, что середина отрезка MN совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC .

3.47*. Треугольники ABC_1 и ABC_2 вписаны в окружность S , причем хорды AC_2 и BC_1 пересекаются. Окружность S_1 касается хорды AC_2 в точке M_2 , хорды BC_1 в точке N_1 и окружности S . Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC_1 и ABC_2 лежат на отрезке M_2N_1 .

§9. Разные задачи

3.48. Две окружности имеют радиусы R_1 и R_2 , а расстояние между их центрами равно d . Докажите, что эти окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $d^2 = R_1^2 + R_2^2$.

3.49. Три окружности попарно касаются внешним образом в точках A, B и C . Докажите, что описанная окружность треугольника ABC перпендикулярна всем трем окружностям.

3.50. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке M_1 , а вторую в точке M_2 . Докажите, что $\angle BO_1M_1 = \angle BO_2M_2$.

§10. Радикальная ось

3.51. На плоскости даны окружность S и точка P . Прямая, проведенная через точку P , пересекает окружность в точках A и B . Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности, называется *степенью точки P относительно окружности S* .

3.52. Докажите, что для точки P , лежащей вне окружности S , ее степень относительно S равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

3.53. Докажите, что степень точки P относительно окружности S равна $d^2 - R^2$, где R — радиус S , d — расстояние от точки P до центра S .

3.54*. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2 . Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2 , является прямая.

Эту прямую называют *радикальной осью* окружностей S_1 и S_2 .

3.55*. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

3.56*. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Эту точку называют *радикальным центром* трех окружностей.

3.57*. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

3.58*. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2 . Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом, является их радикальная ось, из которой (если данные окружности пересекаются) выброшена их общая хорда.

3.59*. а) Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

3.60*. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 ; l — прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1 . Докажите, что:

а) прямая l проходит через точку H пересечения высот треугольника ABC ;

б) прямая l тогда и только тогда проходит через точку C , когда $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

3.61*. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F , а продолжения сторон BC и AD — в точке E . Докажите, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причем на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF .

3.62*. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 . Докажите, что $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

3.63*. На стороне BC треугольника ABC взята точка A' . Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M , а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N . Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN , лежит на описанной окружности треугольника ABC .

3.64*. Решите задачу 1.67, используя свойства радикальной оси.

3.65*. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

3.66*. а) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B' . Докажите, что точки A', B' и C' лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.

б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках A', B' и C' . Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

3.67*. Докажите, что диагонали AD, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке (Брианшон).

3.68*. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 , причем окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1, 2, 3, 4$ ($S_5 = S_1$). Докажите, что радикальная ось окружностей S_1 и S_3 проходит через точку пересечения общих внешних касательных к S_2 и S_4 .

3.69*. а) Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Степень точки P окружности S_1 относительно окружности S_2 равна p , расстояние от точки P до прямой AB равно h , а расстояние между центрами окружностей равно d . Докажите, что $|p| = 2dh$.

б) Степени точек A и B относительно описанных окружностей треугольников BCD и ACD равны p_a и p_b . Докажите, что $|p_a|S_{BCD} = |p_b|S_{ACD}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.70. Качалка, имеющая форму сектора круга радиуса R , качается на горизонтальном столе. По какой траектории движется ее вершина?

3.71. Из точки A , лежащей вне окружности радиуса R , проведены к ней две касательные AB и AC , где B и C — точки касания. Пусть $BC = a$. Докажите, что $4R^2 = r^2 + r_a^2 + a^2/2$, где r и r_a — радиусы вписанной и невписанной окружностей треугольника ABC .

3.72. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую в точках A и D , а меньшую в точках B и C . Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

3.73. Центры трех окружностей радиуса R , где $1 < R < 2$, образуют правильный треугольник со стороной 2. Чему равно расстояние между точками пересечения этих окружностей, лежащими вне треугольника?

3.74. На отрезке AB взята точка C и построены полуокружности с диаметрами AB , AC и BC (по одну сторону от прямой AB). Найдите отношение площади криволинейного треугольника, ограниченного этими полуокружностями, к площади треугольника, образованного серединами дуг этих полуокружностей.

3.75. Окружность пересекает сторону BC треугольника ABC в точках A_1 и A_2 , сторону AC в точках B_1 и B_2 , сторону AB в точках C_1 и C_2 . Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \left(\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \right)^{-1}.$$

3.76. Из точки A к окружности проведены касательные AB и AC ; PQ — диаметр окружности; прямая l касается окружности в точке Q . Прямые PA , PB и PC пересекают прямую l в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

Решения

3.1. Пусть прямая XU касается данной окружности в точке Z . Соответственные стороны треугольников XOA и XOZ равны, поэтому $\angle XOA = \angle XOZ$. Аналогично $\angle ZOY = \angle BOY$. Следовательно, $\angle XOY = \angle XOZ + \angle ZOY = (\angle AOZ + \angle ZOB)/2 = \angle AOB/2$.

3.2. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC . Тогда $BK + AN = BM + AM = AB$, поэтому $CK + CN = a + b - c$.

Пусть P и Q — точки касания невписанной окружности с продолжениями сторон AB и BC . Тогда $AP = AB + BP = AB + BL$ и $AQ = AC + CQ = AC + CL$. Поэтому $AP + AQ = a + b + c$. Следовательно, $BL = BP = AP - AB = (a + b - c)/2$.

3.3. Согласно задаче 3.2 $CM = (AC + CE - AE)/2$ и $CN = (BC + CE - BE)/2$. Учитывая, что $AC = BC$, получаем $MN = |CM - CN| = |AE - BE|/2$.

3.4. Пусть прямые AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках P, Q, R и S . Тогда $CQ = CR = x$, поэтому $BP = BC + CQ = BC + x$ и $DS = DC + CR = DC + x$. Следовательно, $AP = AB + BP = AB + BC + x$ и $AS = AD + DS = AD + DC + x$. Учитывая, что $AP = AS$, получаем требуемое.

3.5. Пусть прямая AB касается окружностей с центрами O_1 и O_2 в точках C и D . Так как $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$, прямоугольные треугольники AO_1C и O_2AD подобны. Поэтому $O_1C : AC = AD : DO_2$. Кроме того, $AD = CB$ (см. задачу 3.2). Следовательно, $AC \cdot CB = Rr$.

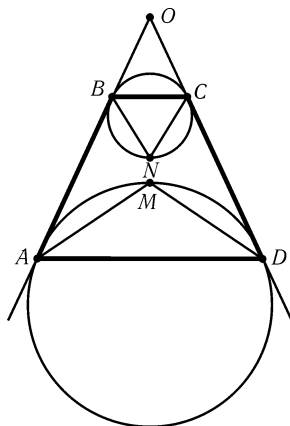


Рис. 3.8

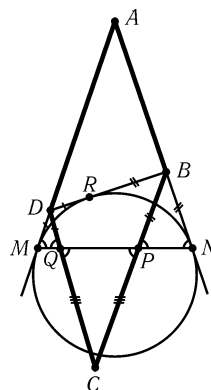


Рис. 3.9

3.6. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O . Для определенности будем считать, что точки A и D принадлежат первой окружности, а B и C — второй, причем $OB < OA$ (рис. 3.8). Точка M пересечения биссектрис углов A и D четырехугольника $ABCD$ является серединой той дуги первой окружности, которая лежит внутри треугольника AOD , а точка N пересечения биссектрис углов B и C — серединой той дуги второй окружности, которая лежит вне треугольника BOC (см. задачу 2.93, а)). Четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда точки M и N совпадают.

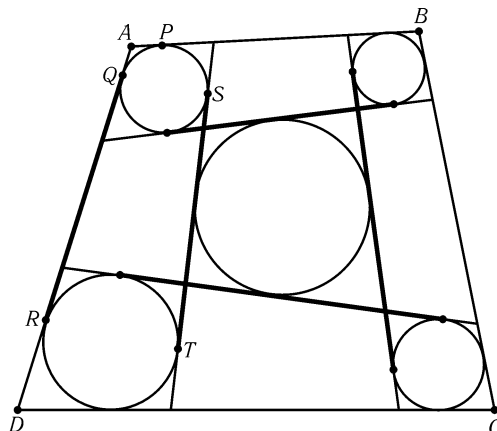


Рис. 3.10

3.7. Пусть R — точка касания вневписанной окружности со стороной BD , P и Q — точки пересечения отрезка MN с BC и CD соответственно (рис. 3.9). Так как $\angle DMQ = \angle BPN$, $\angle DQM = \angle BNP$ и $\angle DMQ = \angle BNP$, то треугольники MDQ, PBN и PCQ равнобедренные. Поэтому $CP = CQ, DQ = DM = DR$ и $BP = BN = BR$. Следовательно, P, Q и R — точки касания вписанной

окружности треугольника BCD с его сторонами (см. задачу 5.1).

3.8. Обозначим некоторые точки касания так, как показано на рис. 3.10. Сумма длин одной пары противоположных сторон среднего четырехугольника равна сумме длин пары других его сторон. Продолжим стороны этого четырехугольника до точек касания с вписанными окружностями остальных четырехугольников (ST — один из полученных отрезков). При этом обе суммы длин пар противоположных отрезков увеличатся на одно и то же число. Каждый из полученных отрезков является общей касательной к паре «угловых» окружностей; его можно заменить на равную ему по длине другую общую внешнюю касательную (т. е. ST заменить на QR). Для доказательства равенства $AB + CD = BC + AD$ остается воспользоваться равенствами вида $AP = AQ$.

3.9. Пусть P — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $\triangle APB \sim \triangle DPC$, т. е. $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. Так как четырехугольники $ALBN$ и $AMBK$ вписанные, то $PL \cdot PN = PA \cdot PB = PM \cdot PK$. Поэтому четырехугольник $KLMN$ вписанный.

3.10. Пусть O — точка пересечения прямой AB и отрезка MN . Тогда $OM^2 = OA \cdot OB = ON^2$, т. е. $OM = ON$.

3.11. Пусть для определенности лучи OA и BC сонаправлены; M — точка пересечения прямых KL и OA . Тогда $\angle LOM = \angle LCB = \angle OKM$, а значит, $\triangle KOM \sim \triangle OLM$. Следовательно, $OM : KM = LM : OM$, т. е. $OM^2 = KM \cdot LM$. Кроме того, $MA^2 = MK \cdot ML$. Поэтому $MA = OM$.

3.12. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Тогда $MO \cdot OC = BO \cdot OD$. Тогда как $OC = OA$ и $BO = OD$, то $MO \cdot OA = BO^2$ и $MO \cdot OA = DO^2$. Эти равенства означают, что OB касается описанной окружности треугольника ABM и OD касается описанной окружности треугольника ADM .

3.13. Пусть C — точка пересечения прямой AB с описанной окружностью треугольника BMN , отличная от точки B ; AP — касательная к окружности S . Тогда $AB \cdot AC = AM \cdot AN = AP^2$, а значит, $AC = AP^2/AB$, т. е. точка C одна и та же для всех прямых l .

З а м е ч а н и е. Следует исключить случай, когда длина касательной, проведенной из A к S , равна AB .

3.14. Ясно, что $MC^2 = MP \cdot MQ = MA \cdot MB$, причем точка M лежит на луче AB , если $AC > BC$, и на луче BA , если $AC < BC$. Пусть для определенности точка M лежит на луче AB . Тогда $(MB + BC)^2 = (MB + BA) \cdot MB$. Следовательно, $MB = BC^2 / (AB - 2BC)$, а значит, положение точки M не зависит от выбора окружности S' .

3.15. Пусть M — точка пересечения прямой CD и касательной к окружностям в точке A . Тогда $MC = MA = MD$. Поэтому точка A лежит на окружности с диаметром CD .

3.16. Точки O_1, A и O_2 лежат на одной прямой, поэтому $\angle A_2AO_2 = \angle A_1AO_1$. Треугольники AO_2A_2 и AO_1A_1 равнобедренные, поэтому $\angle A_2AO_2 = \angle AA_2O_2$ и $\angle A_1AO_1 = \angle AA_1O_1$. Следовательно, $\angle AA_2O_2 = \angle AA_1O_1$, т. е. $O_1A_1 \parallel O_2A_2$.

3.17. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3 ; A, B, C — точки касания окружностей S_2 и S_3, S_3 и S_1, S_1 и S_2 ; A_1 и B_1 — точки пересечения прямых CA и CB с окружностью S_3 . Согласно предыдущей задаче $B_1O_3 \parallel CO_1$ и $A_1O_3 \parallel CO_2$. Точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, поэтому точки A_1, O_3 и B_1 тоже лежат на одной прямой, т. е. A_1B_1 — диаметр окружности S_3 .

3.18. Пусть A_1, A_2 и B — точки касания окружностей с центрами O и O_1, O и O_2, O_1 и O_2 . Тогда $O_1O_2 = O_1B + BO_2 = O_1A_1 + O_2A_2$. Поэтому $OO_1 + OO_2 +$

$+ O_1O_2 = (OO_1 + O_1A_1) + (OO_2 + O_2A_2) = OA_1 + OA_2 = 2R$.

3.19. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей S, S_1 и S_2 ; C — общая точка окружностей S_1 и S_2 , лежащая на отрезке AB . Треугольники AOB, AO_1C и CO_2B равнобедренные, поэтому OO_1CO_2 — параллелограмм и $OO_1 = O_2C = O_2B$, а значит, $AO = AO_1 + O_1O = AO_1 + O_2B$.

3.20. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 ; X — вторая точка пересечения прямой AB с окружностью S_2 . Квадрат искомой длины касательной равен $BA \cdot BX$. Так как $AB : BX = O_1A : O_1O_2$, то $AB \cdot BX = AB^2 \cdot O_1O_2/R = = a^2(R \pm r)/R$, где знак минус берется в случае внутреннего касания.

3.21. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей с диаметрами AB, AC и BC . Достаточно проверить, что $KO = OL$. Докажем, что $\triangle O_1KO = \triangle O_2LO$. В самом деле, $O_1K = AC/2 = O_2O, O_1O = BC/2 = O_2L$ и $\angle KO_1O = \angle LO_2O = 180^\circ - 2\alpha$, где α — угол между прямыми KL и AB .

3.22. Пусть O_i — центр окружности S_i, A_i — точка касания окружностей S_i и S_{i+1} . Четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ выпуклый; пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 — величины его углов. Легко проверить, что $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$, поэтому $\angle A_1 + \angle A_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)/2 = \angle A_2 + \angle A_4$.

3.23. а) Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A, B и C на прямую l ; C_2 — проекция точки C на прямую AA_1 . По теореме Пифагора $CC_2^2 = AC^2 - AC_1^2$, т. е. $A_1C_1^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$. Аналогично $B_1C_1^2 = 4bc$ и $A_1B_1^2 = 4ab$. Так как $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$, то $\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{ab}$, т. е. $1/\sqrt{b} + 1/\sqrt{a} = 1/\sqrt{c}$.

б) Пусть A, B, C — центры «внешних» окружностей, D — центр «внутренней» окружности (рис. 3.11). Полупериметр треугольника BDC равен $b+c+d$, поэтому

$$\cos^2 \frac{BDC}{2} = \frac{d(b+c+d)}{(b+d)(c+d)}, \quad \sin^2 \frac{BDC}{2} = \frac{bc}{(b+d)(c+d)}$$

(см. задачу 12.13). Если $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$, то $\sin^2 \alpha' + \sin^2 \beta' - \sin^2 \gamma' + 2 \sin \beta' \sin \gamma' \cos \alpha' = 0$ (это утверждение эквивалентно теореме косинусов). Подставив в эту формулу значения $\alpha' = \angle BDC/2, \beta' = \angle ADC/2$ и $\gamma' = \angle ADB/2$, получим

$$\frac{bc}{(b+d)(c+d)} - \frac{ac}{(a+d)(c+d)} - \frac{ab}{(a+d)(b+d)} + 2 \frac{a\sqrt{bcd(b+c+d)}}{(a+d)(b+d)(c+d)} = 0,$$

т. е.

$$\frac{a+d}{a} - \frac{b+d}{b} - \frac{c+d}{c} + 2\sqrt{\frac{d(b+c+d)}{bc}} = 0.$$

Разделив на d , имеем $\alpha - \beta - \gamma - \delta + 2\sqrt{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta} = 0$. Поэтому $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 = = (\alpha - \beta - \gamma - \delta)^2 + 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta) = 4(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) + 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta) = = 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$, т. е. $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$.

3.24. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей (рис. 3.12). Тогда A_1BC_1H — ромб, а значит, $BA_1 \parallel HC_1$. Аналогично $B_1A \parallel HC_1$, поэтому $B_1A \parallel BA_1$ и B_1ABA_1 — параллелограмм.

а) Так как $A_1B_1 \perp CH$ и $A_1B_1 \parallel AB$, то $AB \perp CH$. Аналогично доказывается, что $BC \perp AH$ и $CA \perp BH$.

б) Так же, как было доказано, что $B_1A \parallel BA_1$, можно доказать, что $B_1C \parallel BC_1$ и $A_1C \parallel AC_1$; кроме того, длины всех этих шести отрезков равны R . Построим треугольник BA_1C до ромба BA_1CO . Тогда AB_1CO тоже ромб. Поэтому $AO = = BO = CO = R$, т. е. O — центр описанной окружности треугольника ABC , и ее радиус равен R .

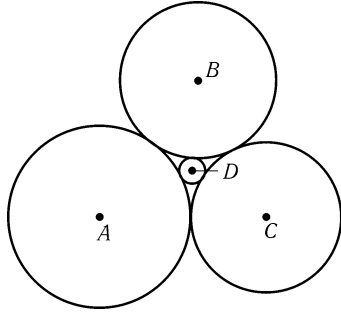


Рис. 3.11

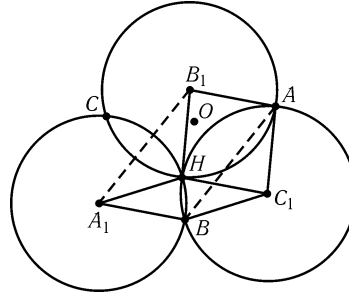


Рис. 3.12

3.25. Легко проверить, что $\sphericalangle AB_1 \pm \sphericalangle B_1A_1 = \sphericalangle AC_1 + \sphericalangle C_1A_1$, $\sphericalangle BC_1 + \sphericalangle C_1B_1 = \sphericalangle BA_1 \pm \sphericalangle B_1A_1$ и $\sphericalangle C_1A_1 \pm \sphericalangle CA_1 = \sphericalangle C_1B_1 \pm \sphericalangle B_1C$, где знак минус берется только в случае б. Складывая эти равенства, получаем $\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle BC_1 \pm \sphericalangle CA_1 = \sphericalangle AC_1 + \sphericalangle BA_1 \pm \sphericalangle CB_1$. С другой стороны, удвоенные величины углов треугольника ABC равны $\sphericalangle BA_1 \pm \sphericalangle CA_1$, $\sphericalangle AB_1 \pm \sphericalangle CB_1$ и $\sphericalangle BC_1 + \sphericalangle AC_1$, а их сумма равна 360° .

3.26. Так как $\sphericalangle AP + \sphericalangle BP + \sphericalangle PQ = 180^\circ$ (см. задачу 3.25), то $\sphericalangle AB = 180^\circ - \sphericalangle PQ$. Аналогично $\sphericalangle CD = 180^\circ - \sphericalangle PQ$, т. е. $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$, а значит, $AB = CD$. Кроме того, $PQ \perp AB$ и $PQ \perp CD$ (см. задачу 3.24), поэтому $AB \parallel CD$.

3.27. Точки M, B и C лежат на окружности с диаметром AO . Кроме того, хорды OB и OC этой окружности равны.

3.28. Точки B и X лежат на окружности с диаметром KO , поэтому $\sphericalangle XKO = \sphericalangle XBO$. Аналогично $\sphericalangle XLO = \sphericalangle XCO$. Так как $\sphericalangle XBO = \sphericalangle XCO$, то треугольник KOL равнобедренный, причем OX — его высота.

3.29. Достаточно проверить, что $AK \cdot AL = AM \cdot AO$. В самом деле, тогда точки K, L, M и O лежат на одной окружности, и поэтому $\sphericalangle MKO = \sphericalangle MLO$. Так как $\triangle AOP \sim \triangle APM$, то $AM \cdot AO = AP^2$; ясно также, что $AK \cdot AL = AP^2$.

3.30. Пусть O — центр окружности; точки D' и E' симметричны точкам D и E относительно прямой AO . Согласно задаче 28.7 прямые ED' и $E'D$ пересекаются в точке M . Поэтому $\sphericalangle BDM = \sphericalangle EBM$ и $\sphericalangle BEM = \sphericalangle DBM$, а значит, $\triangle BDM \sim \triangle EBM$. Следовательно, $BM : DM = EM : BM$. Кроме того, если прямая ED разделяет точки B и M , то $\sphericalangle DME = \sphericalangle DE = 2\sphericalangle DCE$.

Из равенства $\sphericalangle BEM = \sphericalangle DBM$ следует, что $\sphericalangle BEM = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC$.

3.31. а) Так как $\triangle KAB \sim \triangle KBC$, то $AB : BC = KB : KC$. Аналогично $AD : DC = KD : KC$. Учитывая, что $KB = KD$, получаем требуемое.

б) Задача сводится к предыдущей, так как

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{\sin PBQ}{\sin BPQ} = \frac{\sin ABD}{\sin KBA} = \frac{\sin ABD}{\sin ADB} = \frac{AD}{AB}, \quad \frac{QR}{BQ} = \frac{CD}{CB}.$$

3.32. Опустим из центра O окружности S перпендикуляр OM на прямую l . Докажем, что точка X , в которой пересекаются AB и OM , остается неподвижной. Точки A, B и M лежат на окружности с диаметром PO . Поэтому $\sphericalangle AMO = \sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO$, а значит, $\triangle AMO \sim \triangle XAO$, так как угол при вершине O у этих треугольников общий. Следовательно, $AO : MO = XO : AO$, т. е. $OX = OA^2/MO$ — постоянная величина.

3.33. Так как $\angle OBP = \angle OAB = \angle OCB$, то $\triangle OBP \sim \triangle OCB$, а значит, $OB^2 = OP \cdot OC$. Проведем из точки C касательную CD к окружности S_1 . Тогда $OD^2 = OB^2 = OP \cdot OC$. Следовательно, $\triangle ODC \sim \triangle OPD$ и $\angle OPD = \angle ODC = 90^\circ$.

3.34. Прямые BC и AD являются высотами треугольника APB , поэтому прямая PQ , проходящая через точку Q их пересечения, перпендикулярна прямой AB .

3.35. Обозначим точки пересечения прямых AC и BD , BC и AD через K и K_1 соответственно. Согласно предыдущей задаче $KK_1 \perp AB$, поэтому достаточно доказать, что точка пересечения касательных в точках C и D лежит на прямой KK_1 .

Докажем, что касательная в точке C проходит через середину отрезка KK_1 . Пусть M — точка пересечения касательной в точке C и отрезка KK_1 . Стороны острых углов ABC и CKK_1 соответственно перпендикулярны, поэтому они равны. Аналогично $\angle CAB = \angle CK_1K$. Ясно также, что $\angle KCM = \angle ABC$, поэтому треугольник CMK равнобедренный. Аналогично треугольник CMK_1 равнобедренный и $KM = CM = K_1M$, т. е. M — середина отрезка KK_1 .

Аналогично доказывается, что касательная в точке D проходит через середину отрезка KK_1 .

3.36. а) Прямая AC пересекает окружность в точках A и A_1 , прямая BC — в точках B и B_1 . Если $A = A_1$ (или $B = B_1$), то прямая AC (или BC) — искомым перпендикуляр. Если же это не так, то AB_1 и BA_1 являются высотами треугольника ABC и искомая прямая — это прямая, проходящая через точку C и точку пересечения прямых AB_1 и BA_1 .

б) Возьмем точку C_1 , не лежащую на окружности, и опустим из нее перпендикуляр на AB . Пусть он пересекается с окружностью в точках D и E . Построим точку P пересечения прямых DC и AB , а затем точку F пересечения прямой PE с окружностью. При симметрии относительно AB точка C переходит в точку F . Поэтому CF — искомым перпендикуляр.

3.37. Так как $PA \perp O_bO_c$, то прямая PA проходит через точку O_a тогда и только тогда, когда прямая PO_a проходит через точку пересечения высот треугольника $O_aO_bO_c$. Аналогичные утверждения верны и для точек B и C . Из условия задачи следует, что P — точка пересечения высот треугольника $O_aO_bO_c$, а значит, $PO_c \perp O_aO_b$.

3.38. Пусть $2a$ и $2b$ — длины катетов, $2c$ — длина гипотенузы. Сумма площадей «луночек» равна $\pi a^2 + \pi b^2 + S_{ABC} - \pi c^2$. Ясно, что $\pi(a^2 + b^2 - c^2) = 0$.

3.39. Доказательство достаточно провести для каждой из четырех частей, на которые диаметры делят исходный круг (рис. 3.13). Рассмотрим в круге сегмент, отсекаемый хордой, на которую опирается центральный угол 90° ; пусть S и s — площади таких сегментов для исходного и четырех построенных кругов соответственно. Ясно, что $S = 4s$. Остается заметить, что площадь части с одинарной штриховкой равна $S - 2s = 2s$, а площадь части с двойной штриховкой равна $2s$.

3.40. Обозначим точки пересечения окружностей, построенных на отрезках OB и OC , OA и OC , OA и OB , через A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 3.14). $\angle OA_1B = \angle OA_1C = 90^\circ$, поэтому точки B, A_1 и C лежат на одной прямой, а так как окружности имеют одинаковые радиусы, то $BA_1 = A_1C$. Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC , поэтому $BA_1 = C_1B_1$ и $BC_1 = A_1B_1$. Так как круги имеют одинаковый радиус, то равные хорды BA_1 и C_1B_1 отсекают от кругов части равной площади, а равные хорды C_1B и B_1A_1 также отсекают от кругов части равной площади. Поэтому площадь кри-

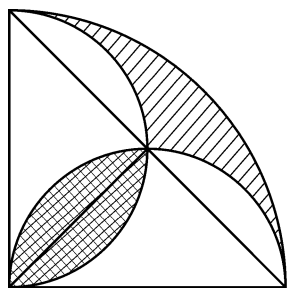


Рис. 3.13

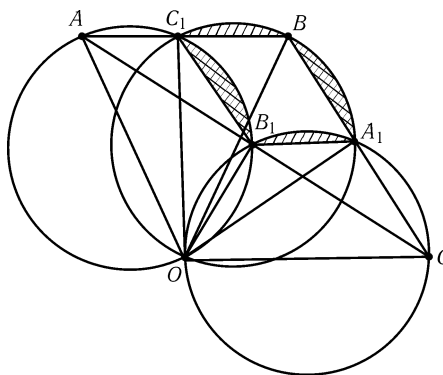


Рис. 3.14

волинейного треугольника $A_1B_1C_1$ равна площади параллелограмма $A_1B_1C_1B$, т. е. равна половине площади треугольника ABC .

3.41. Рассматриваемые окружности проходят через основания высот треугольника, а значит, точки их пересечения лежат на сторонах треугольника. Пусть x, y, z и u — площади рассматриваемых криволинейных треугольников; a, b, c, d, e и f — площади сегментов, отсекаемых от окружностей сторонами треугольника; p, q и r — площади частей треугольника, лежащих вне внутреннего криволинейного треугольника (рис. 3.15). Тогда $x + (a + b) = u + p + q + (c + f)$, $y + (c + d) = u + q + r + (e + b)$ и $z + (e + f) = u + r + p + (a + d)$. Складывая эти равенства, получаем $x + y + z = 2(p + q + r + u) + u$.

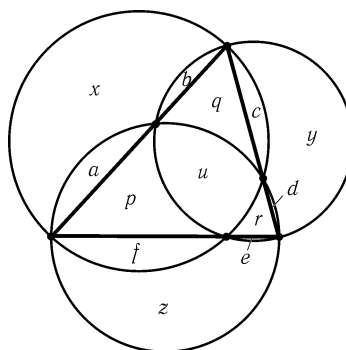


Рис. 3.15

3.42. а) Пусть O и O_1 — центры окружностей S и S_1 . Треугольники MO_1N и PON равнобедренные, причем $\angle MO_1N = \angle PON$. Следовательно, точки P, M и N лежат на одной прямой.

б) Ясно, что $PQ^2 = PM \cdot PN = PM \cdot (PM + MN)$. Пусть K — середина хорды AB . Тогда $PM^2 = PK^2 + MK^2$ и $PM \cdot MN = AM \cdot MB = AK^2 - MK^2$. Поэтому $PQ^2 = PK^2 + AK^2 = PA^2$.

3.43. Согласно задаче 3.42, б) $BE = BD$. Поэтому $\angle DAE + \angle ADE = \angle DEB = \angle BDE = \angle BDC + \angle CDE$. А так как $\angle DAB = \angle BDC$, то $\angle ADE = \angle CDE$.

3.44. Пусть O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей, CP и CQ — касательные к ним. Тогда $CO_1^2 = CP^2 + PO_1^2 = CP^2 + O_1M^2$ и, так как $CQ = CA = CP$ (задача 3.42, б)), $CO_2^2 = CQ^2 + QO_2^2 = CP^2 + O_2M^2$. Следовательно, $CO_1^2 - CO_2^2 = MO_1^2 - MO_2^2$, а значит, прямая CM перпендикулярна O_1O_2 (см. задачу 7.6). Поэтому прямая MN проходит через точку C .

З а м е ч а н и е. Если окружности не пересекаются, а касаются, утверждение остается верным; в этом случае прямую MN нужно заменить на касательную к окружностям в их общей точке.

3.45. Пусть $\angle LAB = \alpha$ и $\angle LBA = \beta$ ($\alpha + \beta = 90^\circ$). Согласно задаче 3.42, б) $AB_1 = AL$, поэтому $\angle AB_1L = 90^\circ - \alpha/2$. Аналогично $\angle BA_1L = 90^\circ - \beta/2$. Следо-

вательно, $\angle A_1LB_1 = (\alpha + \beta)/2 = 45^\circ$.

3.46. Пусть A_1 и B_1 — середины дуг BC и AC ; O — центр вписанной окружности. Тогда $A_1B_1 \perp CO$ (см. задачу 2.19, а) и $MN \perp CO$, а значит, $MN \parallel A_1B_1$. Будем перемещать точки M' и N' по лучам CA и CB так, что $M'N' \parallel A_1B_1$. Лишь при одном положении точек M' и N' точка L , в которой пересекаются прямые B_1M' и A_1N' , попадает на описанную окружность треугольника ABC . С другой стороны, если отрезок MN проходит через точку O , точка L попадает на эту окружность (см. задачу 2.50).

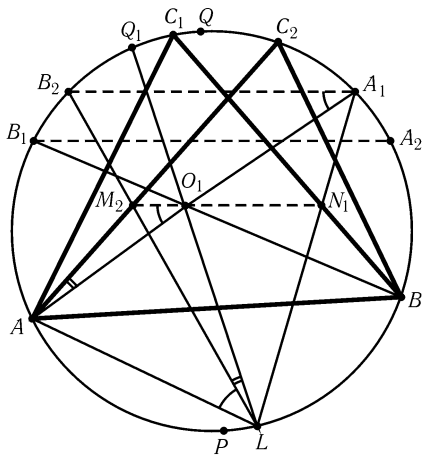


Рис. 3.16

3.47. Решение этой задачи обобщает решение предыдущей задачи. Достаточно доказать, что центр O_1 вписанной окружности треугольника ABC_1 лежит на отрезке M_2N_1 . Пусть A_1 и A_2 — середины дуг BC_1 и BC_2 , B_1 и B_2 — середины дуг AC_1 и AC_2 ; PQ — диаметр окружности S , перпендикулярный хорде AB , причем Q и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB . Точка O_1 является точкой пересечения хорд AA_1 и BB_1 , а точка L касания окружностей S и S_1 является точкой пересечения прямых A_1N_1 и B_2M_2 (рис. 3.16). Пусть $\angle C_1AB = 2\alpha$, $\angle C_1BA = 2\beta$, $\angle C_1AC_2 = 2\varphi$. Тогда $\sphericalangle A_1A_2 = 2\varphi = \sphericalangle B_1B_2$, т. е. $A_1B_2 \parallel B_1A_2$. Угол между хордами A_1B_2 и BC_1 равен $(\sphericalangle B_2C_1 + \sphericalangle A_1B) / 2 = \beta - \varphi + \alpha$, а угол между хордами BC_1 и AC_2 равен $(\sphericalangle C_1C_2 +$

$\sphericalangle AB) / 2 = 2\varphi + 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Поэтому хорда M_2N_1 образует с касательными BC_1 и AC_2 равные углы $\alpha + \beta - \varphi$, а значит, $M_2N_1 \parallel A_1B_2$.

Предположим теперь, что точки M'_2 и N'_1 перемещаются по хордам AC_2 и BC_1 так, что $M'_2N'_1 \parallel A_1B_2$. Пусть прямые $A_1N'_1$ и $B_2M'_2$ пересекаются в точке L' . Точка L' лежит на окружности S лишь при одном положении точек M'_2 и N'_1 . Поэтому достаточно указать на дуге AB такую точку L_1 , что если M''_2, N''_1 — точки пересечения хорд AC_2 и L_1B_2 , BC_1 и L_1A_1 , то $M''_2N''_1 \parallel A_1B_2$ и точка O_1 лежит на отрезке $M''_2N''_1$. Пусть Q_1 — такая точка окружности S , что $2\angle(PQ, PQ_1) = \angle(PC_2, PC_1)$, и L_1 — точка пересечения прямой Q_1O_1 с окружностью S . Докажем, что точка L_1 искомая. Так как $\sphericalangle B_1Q = 2\alpha$, то $\sphericalangle B_2Q_1 = 2(\alpha - 2\varphi) = \sphericalangle C_2A_1$. Поэтому четырехугольник $AM''_2O_1L_1$ вписанный, а значит, $\angle M''_2O_1A = \angle M''_2L_1A = \angle B_2A_1A$, т. е. $M''_2O_1 \parallel B_2A_1$. Аналогично $N''_1O_1 \parallel B_2A_1$.

3.48. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через точку A . Радиусы O_1A и O_2A перпендикулярны касательным к окружностям в точке A , поэтому окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$, т. е. $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$.

3.49. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, причем точки A, B и C лежат на отрезках B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Так как $A_1B = A_1C, B_1A = B_1C$ и $C_1A = C_1B$, то A, B и C — точки касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с его сторонами (см. задачу 5.1). Таким образом, радиусы A_1B, B_1C и C_1A данных окружностей касаются описанной окружности треугольника ABC .

3.50. Легко проверить, что угол поворота от вектора $\overrightarrow{O_iB}$ до вектора $\overrightarrow{O_iM_i}$ (против часовой стрелки) равен $2\angle(AB, AM_i)$. Ясно также, что $\angle(AB, AM_1) = \angle(AB, AM_2)$.

3.51. Проведем через точку P другую прямую, пересекающую окружность в точках A_1 и B_1 . Тогда $\triangle PAA_1 \sim \triangle PB_1B$, поэтому $PA : PA_1 = PB_1 : PB$.

3.52. Проведем через точку P касательную PC . $\triangle PAC \sim \triangle PCB$, поэтому $PA : PC = PC : PB$.

3.53. Пусть прямая, проходящая через точку P и центр окружности, пересекает окружность в точках A и B . Тогда $PA = d + R$ и $PB = |d - R|$. Поэтому $PA \cdot PB = |d^2 - R^2|$. Ясно также, что величина $d^2 - R^2$ и степень точки P относительно окружности S имеют одинаковые знаки.

3.54. Пусть R_1 и R_2 — радиусы окружностей. Рассмотрим систему координат, в которой центры окружностей имеют координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$. Согласно задаче 3.53 степени точки с координатами (x, y) относительно данных окружностей равны $(x + a)^2 + y^2 - R_1^2$ и $(x - a)^2 + y^2 - R_2^2$ соответственно. Приравнивая эти выражения, получаем $x = (R_1^2 - R_2^2)/4a$. Это уравнение задает прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей.

3.55. Степени точки пересечения окружностей относительно каждой из них равны нулю, поэтому она лежит на радикальной оси. Если точек пересечения две, то они однозначно задают радикальную ось.

3.56. Так как центры окружностей не лежат на одной прямой, радикальная ось первой и второй окружностей пересекается с радикальной осью второй и третьей окружностей. Степени точки пересечения относительно всех трех окружностей равны, поэтому она лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей.

3.57. Согласно задаче 3.55 прямые, содержащие хорды, являются радикальными осями. Согласно задаче 3.56 радикальные оси пересекаются в одной точке, если центры окружностей не лежат на одной прямой. В противном случае они перпендикулярны этой прямой.

3.58. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы. Окружность S радиуса r с центром O ортогональна окружности S_i ; тогда и только тогда, когда $r^2 = OO_i^2 - r_i^2$, т. е. квадрат радиуса окружности S равен степени точки O относительно окружности S_i . Поэтому множеством центров искомых окружностей является множество тех точек радикальной оси, степени которых относительно данных окружностей положительны.

3.59. а) Указанные точки лежат на радикальной оси.

б) Точки касания внешних касательных с окружностями являются вершинами трапеции $ABCD$ с основанием AB . Середины боковых сторон AD и BC принадлежат радикальной оси, поэтому середина O диагонали AC тоже принадлежит радикальной оси. Если прямая AC пересекает окружности в точках A_1 и C_1 , то $OA_1 \cdot OA = OC_1 \cdot OC$, а значит, $OA_1 = OC_1$ и $AA_1 = CC_1$.

3.60. а) Пусть S_A и S_B — окружности с диаметрами AA_1 и BB_1 ; S — окружность с диаметром AB . Общими хордами окружностей S и S_A , S и S_B являются высоты AH_a и BH_b , поэтому они (или их продолжения) пересекаются в точке H . Согласно задаче 3.57 общая хорда окружностей S_A и S_B проходит через точку пересечения хорд AH_a и BH_b .

б) Общая хорда окружностей S_A и S_B проходит через точку пересечения прямых A_1H_a и B_1H_b (т. е. через точку C) тогда и только тогда, когда $CB_1 \cdot CH_b = CA_1 \cdot CH_a$ (длины отрезков следует считать ориентированными). Так как $CH_b = (a^2 + b^2 - c^2)/2b$ и $CH_a = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$, приходим к

соотношению $CB_1/b = CA_1/a$.

3.61. Проведем в треугольнике CDE высоты CC_1 и DD_1 ; пусть H — точка их пересечения. Окружности с диаметрами AC и BD проходят через точки C_1 и D_1 соответственно, поэтому степень точки H относительно каждой из этих окружностей равна ее степени относительно окружности с диаметром CD (эта окружность проходит через точки C_1 и D_1). Аналогично доказывается, что степени точки H относительно окружностей с диаметрами AC, BD и EF равны, т. е. радикальные оси этих окружностей проходят через точку H . Для точек пересечения высот остальных трех треугольников доказательство проводится аналогично.

З а м е ч а н и е. Центры рассматриваемых окружностей лежат на прямой Гаусса (см. задачу 4.55), поэтому их общая радикальная ось перпендикулярна прямой Гаусса.

3.62. Прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в некоторой точке O (см. задачу 3.57). Так как $\triangle A_1OB_2 \sim \triangle B_1OA_2$, то $A_1B_2 : A_2B_1 = OA_1 : OB_1$. Аналогично $B_1C_2 : B_2C_1 = OB_1 : OC_1$ и $C_1A_2 : C_2A_1 = OC_1 : OA_1$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

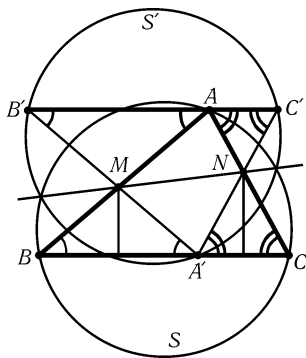


Рис. 3.17

3.63. Обозначим через B' и C' точки пересечения прямых $A'M$ и $A'N$ с прямой, проведенной через точку A параллельно BC (рис. 3.17). Так как треугольники $A'BM$ и $A'NC$ равнобедренные, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Поскольку $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M$, степени точки M относительно окружностей S и S' , описанных около треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно, равны. Это верно и для точки N , поэтому прямая MN является радикальной осью окружностей S и S' . Окружности S и S' имеют одинаковые радиусы, поэтому их радикальная ось является их осью симметрии. Точка A' , лежащая на окружности S' , при симметрии относительно прямой MN переходит в точку, лежащую на окружности S .

3.64. Пусть AC и BD — касательные; E и K — точки пересечения прямых AC и BD, AB и CD ; O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 3.18). Так как $AB \perp O_1E, O_1E \perp O_2E$ и $O_2E \perp CD$, то $AB \perp CD$, а значит, K — точка пересечения окружностей S_1 и S_2 с диаметрами AC и BD . Точка K лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_2 ; остается проверить, что этой радикальной осью является прямая O_1O_2 . Радиусы O_1A и O_1B являются касательными к S_1 и S_2 , поэтому точка O_1 лежит на радикальной оси. Аналогично точка O_2 лежит на радикальной оси.

3.65. Обозначим данные окружности через S_1, \dots, S_n . Для каждой окружности S_i рассмотрим множество M_i , состоящее из тех точек X , для которых степень относительно S_i не больше степеней относительно S_1, \dots, S_n . Тогда M_i — выпуклое множество. В самом деле, пусть M_{ij} — множество точек X , для которых степень относительно S_i не больше степени относительно S_j . M_{ij} является полуплоскостью, состоящей из точек, лежащих по одну сторону с окружностью S_i от радикальной оси окружностей S_i и S_j . Множество M_i является пересечением выпуклых множеств M_{ij} , поэтому оно само выпуклое. Кроме того, поскольку каждое из множеств M_{ij} содержит окружность S_i , то M_i содержит S_i . Так как для каждой точки плоскости какая-то из степеней относительно S_1, \dots, S_n является

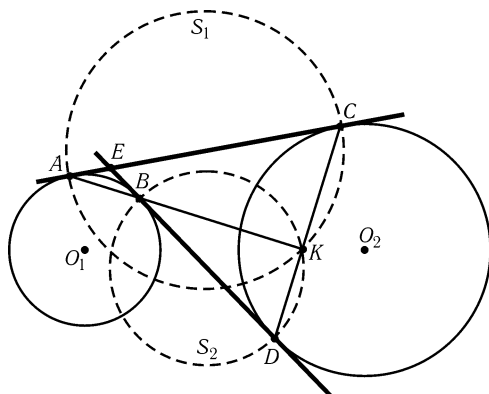


Рис. 3.18

наименьшей, множества M_i покрывают всю плоскость. Рассматривая те части множеств M_i , которые лежат внутри исходного многоугольника, получаем требуемое разбиение.

3.66. а) Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC , поэтому степени точки A' относительно описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равны степени точки A' относительно этой окружности. Значит, точка A' лежит на радикальной оси окружности Эйлера и описанной окружности треугольника ABC . Для точек B' и C' доказательство аналогично.

б) Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, образованный внешними биссектрисами треугольника ABC (треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный). Согласно задаче а) точки A', B' и C' лежат на радикальной оси описанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Радикальная ось этих окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры, т. е. прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$. Остается заметить, что точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC (см. задачу 1.57, а)).

3.67. Пусть выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ касается окружности в точках R, Q, T, S, P, U (точка R лежит на AB , Q — на BC и т. д.).

Выберем произвольное число $a > 0$ и построим на прямых BC и EF точки Q' и P' так, что $QQ' = PP' = a$, а векторы $\overrightarrow{QQ'}$ и $\overrightarrow{PP'}$ сонаправлены с векторами \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{EF} . Аналогично строим точки R', S', T', U' (рис. 3.19; $RR' = SS' = TT' = UU' = a$). Построим окружность S_1 , касающуюся прямых BC и EF в точках Q' и P' . Аналогично построим окружности S_2 и S_3 .

Докажем, что точки B и E лежат на радикальной оси окружностей S_1 и S_2 . $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$ (если $QQ' < BQ$, то $BQ' = BQ - QQ' = BR - RR' = BR'$) и $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$. Аналогично доказывается, что прямые FC и AD являются радикальными осями окружностей S_1 и S_3 , S_2 и S_3 соответственно. Так как радикальные оси трех

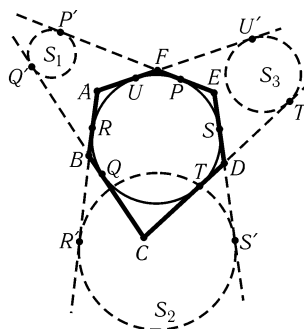


Рис. 3.19

окружностей пересекаются в одной точке, прямые AD , BE и CF пересекаются в одной точке.

3.68. Пусть A_i — точка касания окружностей S_i и S_{i+1} , X — точка пересечения прямых A_1A_4 и A_2A_3 . Тогда X — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям S_2 и S_4 (см. задачу 5.66). А так как четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ вписанный (задача 3.22), то $XA_1 \cdot XA_4 = XA_2 \cdot XA_3$, а значит, точка X лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_3 .

3.69. а) Рассмотрим систему координат с началом O в середине отрезка, соединяющего центры окружностей, а ось Ox направим вдоль этого отрезка. Пусть точка P имеет координаты (x, y) ; R и r — радиусы окружностей S_1 и S_2 ; $a = d/2$. Тогда $(x+a)^2 + y^2 = R^2$ и $p = (x-a)^2 + y^2 - r^2 = ((x+a)^2 + y^2 - R^2) - 4ax - r^2 + R^2 = R^2 - r^2 - 4ax$.

Пусть точка A имеет координаты (x_0, y_0) . Тогда $(x_0+a)^2 + y_0^2 - R^2 = (x_0-a)^2 + y_0^2 - r^2$, т. е. $x_0 = (R^2 - r^2)/4a$. Поэтому $2dh = 4a|x_0 - x| = |R^2 - r^2 - 4ax| = |p|$.

б) Пусть d — расстояние между центрами описанных окружностей треугольников ACD и BCD ; h_a и h_b — расстояния от точек A и B до прямой CD . Согласно задаче а) $|p_a| = 2dh_a$ и $|p_b| = 2dh_b$. Учитывая, что $S_{BCD} = h_bCD/2$ и $S_{ACD} = h_aCD/2$, получаем требуемое.

Глава 4

Площадь

Основные сведения

1. Площадь S треугольника ABC можно вычислять по следующим формулам:

а) $S = ah_a/2$, где $a = BC$, h_a — длина высоты, опущенной на BC ;

б) $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, где b, c — стороны треугольника, A — угол между ними;

в) $S = pr$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. В самом деле, если O — центр вписанной окружности, то

$$S = S_{ABO} + S_{AOC} + S_{OBC} = \frac{1}{2}(c + b + a)r = pr.$$

2. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника.

3. Фигуры, имеющие равную площадь, иногда называют *равновеликими*.

Вводные задачи

1. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, а φ — угол между ними.

2. Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE, ED, BF и FC , если известно, что площадь $ABCD$ равна S .

3. Многоугольник описан около окружности радиуса r . Докажите, что его площадь равна pr , где p — полупериметр многоугольника.

4. Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.

5. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон CD, DA, AB, BC квадрата $ABCD$, площадь которого равна S . Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 .

§1. Медиана делит площадь пополам

4.1. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

4.2. Дан треугольник ABC . Найдите все такие точки P , что площади треугольников ABP , BSP и ACP равны.

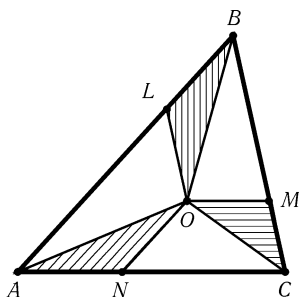


Рис. 4.1

4.3. Внутри данного треугольника ABC найдите такую точку O , что площади треугольников BOL , COM и AON равны (точки L , M и N лежат на сторонах AB , BC и CA , причем $OL \parallel BC$, $OM \parallel AC$ и $ON \parallel AB$; рис. 4.1).

4.4. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что $\vec{AB_1} = 2\vec{AB}$, $\vec{BC_1} = 2\vec{BC}$ и $\vec{CA_1} = 2\vec{CA}$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S .

4.5. На продолжениях сторон DA , AB , BC , CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 так, что $\vec{DA_1} = 2\vec{DA}$, $\vec{AB_1} = 2\vec{AB}$, $\vec{BC_1} = 2\vec{BC}$ и $\vec{CD_1} = 2\vec{CD}$. Найдите площадь получившегося четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна S .

4.6*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD , BE и CF являются диаметрами этой окружности. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE .

4.7*. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ существует такая точка O , что площади треугольников OAB , OBC , OCD и ODA равны. Докажите, что одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам.

§2. Вычисление площадей

4.8. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что длина одной из ее диагоналей равна 5.

4.9. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4.10. В прямоугольник $ABCD$ вписаны два различных прямоугольника, имеющих общую вершину K на стороне AB . Докажите, что сумма их площадей равна площади прямоугольника $ABCD$.

4.11*. В треугольнике ABC точка E — середина стороны BC , точка D лежит на стороне AC , $AC = 1$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle ACB = 20^\circ$

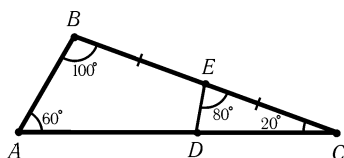


Рис. 4.2

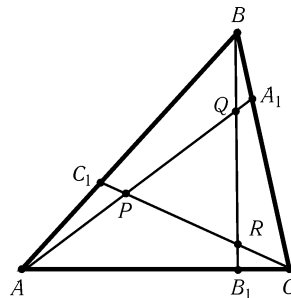


Рис. 4.3

и $\angle DEC = 80^\circ$ (рис. 4.2). Чему равна сумма площади треугольника ABC и удвоенной площади треугольника CDE ?

4.12*. В треугольник $T_a = \triangle A_1A_2A_3$ вписан треугольник $T_b = \triangle B_1B_2B_3$, а в треугольник T_b вписан треугольник $T_c = \triangle C_1C_2C_3$, причем стороны треугольников T_a и T_c параллельны. Выразите площадь треугольника T_b через площади треугольников T_a и T_c .

4.13. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , делящие его стороны в отношениях $BA_1 : A_1C = p$, $CB_1 : B_1A = q$ и $AC_1 : C_1B = r$. Точки пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 расположены так, как показано на рис. 4.3. Найдите отношение площадей треугольников PQR и ABC .

§3. Площади треугольников, на которые разбит четырехугольник

4.14. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD}$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

4.15. а) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Известны площади треугольников ABP, BCP, CDP . Найдите площадь треугольника ADP .

б) Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел представляет собой точный квадрат.

4.16*. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , причем $S_{ABP}^2 + S_{CDP}^2 = S_{BCP}^2 + S_{ADP}^2$. Докажите, что P — середина одной из диагоналей.

4.17*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ существуют три внутренние точки P_1, P_2, P_3 , не лежащие на одной прямой и обладающие тем свойством, что сумма площадей треугольников ABP_i и CDP_i равна сумме площадей треугольников BCP_i и ADP_i для $i = 1, 2, 3$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

§4. Площади частей, на которые разбит четырехугольник

4.18. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$; отрезки KM и LN пересекаются в точке O . Докажите, что

$$S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}.$$

4.19. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем отрезки KM и LN параллельны сторонам параллелограмма. Эти отрезки пересекаются в точке O . Докажите, что площади параллелограммов $KBLO$ и $MDNO$ равны тогда и только тогда, когда точка O лежит на диагонали AC .

4.20. На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ взяты точки M и N так, что $AM : MB = CN : ND$. Отрезки AN и DM пересекаются в точке K , а отрезки BN и CM — в точке L . Докажите, что $S_{KMLN} = S_{ADK} + S_{BCL}$.

4.21. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ взяты точки A_1 и B_1 , а на стороне CD — точки C_1 и D_1 , причем $AA_1 = BB_1 = pAB$ и $CC_1 = DD_1 = pCD$, где $p < 0,5$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1D_1}/S_{ABCD} = 1 - 2p$.

4.22*. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены (рис. 4.4). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырехугольника в 25 раз меньше площади исходного.

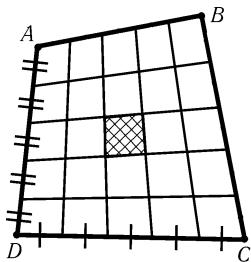


Рис. 4.4

4.23*. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

4.24*. Точки K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки L и N расположены на сторонах BC и AD так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

4.25*. Квадрат разделен на четыре части двумя перпендикулярными прямыми, точка пересечения которых лежит внутри его. Докажите, что если площади трех из этих частей равны, то равны и площади всех четырех частей.

§5. Разные задачи

4.26. Даны параллелограмм $ABCD$ и некоторая точка M . Докажите, что $S_{ACM} = |S_{ABM} \pm S_{ADM}|$.

4.27. На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены параллелограммы; P — точка пересечения продолжений их сторон, параллельных AB и BC . На стороне AC построен параллелограмм, вторая сторона которого равна и параллельна BP . Докажите, что его площадь равна сумме площадей первых двух параллелограммов.

4.28*. Точка O , лежащая внутри правильного шестиугольника, соединена с вершинами. Возникшие при этом шесть треугольников раскрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих.

4.29*. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O ; M и N — середины сторон AB и CD , P и Q — середины диагоналей AC и BD . Докажите, что:

- $S_{PMQN} = |S_{ABD} - S_{ACD}|/2$;
- $S_{OPQ} = S_{ABCD}/4$.

4.30*. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F . Пусть K, L, M и N — середины отрезков DE, BF, CE и AF . Докажите, что четырехугольник $KLMN$ выпуклый и его площадь не зависит от выбора точек E и F .

4.31*. Середины диагоналей AC, BD, CE, \dots выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ образуют выпуклый шестиугольник. Докажите, что его площадь в четыре раза меньше площади исходного шестиугольника.

4.32*. Диаметр PQ и перпендикулярная ему хорда RS пересекаются в точке A . Точка C лежит на окружности, а точка B — внутри окружности, причем $BC \parallel PQ$ и $BC = RA$. Из точек A и B опущены перпендикуляры AK и BL на прямую CQ . Докажите, что $S_{ACK} = S_{BCL}$.

* * *

4.33*. Через точку O , лежащую внутри треугольника ABC , проведены отрезки, параллельные сторонам. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 разбивают треугольник ABC на четыре треугольника и три четырехугольника (рис. 4.5). Докажите, что сумма площадей треугольников, прилежащих к вершинам A, B и C , равна площади четвертого треугольника.

4.34*. На биссектрисе угла A треугольника ABC взята точка A_1 так, что $AA_1 = p - a = (b + c - a)/2$, и через точку A_1 проведена прямая l_a , перпендикулярная биссектрисе. Если аналогично провести прямые l_b и l_c , то треугольник ABC

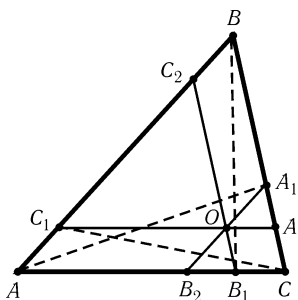


Рис. 4.5

разобьется на части, среди которых четыре треугольника. Докажите, что площадь одного из этих треугольников равна сумме площадей трех других.

См. также задачи 3.38–3.41, 13.52–13.56, 16.5, 24.5.

§6. Прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части

4.35. Отрезок MN , параллельный стороне CD четырехугольника $ABCD$, делит его площадь пополам (точки M и N лежат на сторонах BC и AD). Длины отрезков, проведенных из точек A и B параллельно CD до пересечения с прямыми BC и AD , равны a и b . Докажите, что $MN^2 = (ab + c^2)/2$, где $c = CD$.

4.36. Каждая из трех прямых делит площадь фигуры пополам. Докажите, что часть фигуры, заключенная внутри треугольника, образованного этими прямыми, имеет площадь, не превосходящую $1/4$ площади всей фигуры.

4.37*. Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что эта прямая делит проекцию данного многоугольника на прямую, перпендикулярную l , в отношении, не превосходящем $1 + \sqrt{2}$.

4.38*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

4.39*. а) Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр вписанной окружности.

б) Докажите аналогичное утверждение для любого описанного многоугольника.

4.40*. Точки A и B окружности S_1 соединены дугой окружности S_2 , делящей площадь круга, ограниченного S_1 , на равные части. Докажите, что дуга S_2 , соединяющая A и B , по длине больше диаметра S_1 .

4.41*. Кривая Γ делит квадрат на две части равной площади. Докажите, что на ней можно выбрать две точки A и B так, что прямая AB проходит через центр O квадрата.

См. также задачи 6.54, 6.55, 16.8, 18.31.

§7. Формулы для площади четырехугольника

4.42. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Расстояния от точек A, B и P до прямой CD равны a, b и p . Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $ab \cdot CD/2p$.

4.43. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R , φ — угол между его диагоналями. Докажите, что площадь S четырехугольника $ABCD$ равна $2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$.

4.44*. Докажите, что площадь четырехугольника, диагонали которого не перпендикулярны, равна $\operatorname{tg} \varphi \cdot |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/4$, где a, b, c и d — длины последовательных сторон, φ — угол между диагоналями.

4.45*. а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ вычисляется по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2((B+D)/2),$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — длины сторон.

б) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$.

в) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ описанный, то $S^2 = abcd \sin^2((B+D)/2)$.

См. также задачу 11.34.

§8. Вспомогательная площадь

4.46. Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой произвольно внутри правильного треугольника, до его сторон постоянна (и равна высоте треугольника).

4.47. Докажите, что длина биссектрисы AD треугольника ABC равна $\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

4.48. Внутри треугольника ABC взята точка O ; прямые AO, BO и CO пересекают его стороны в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что:

а) $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$;

б) $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

4.49. Даны $(2n-1)$ -угольник $A_1 \dots A_{2n-1}$ и точка O . Прямые $A_k O$ и $A_{n+k-1} A_{n+k}$ пересекаются в точке B_k . Докажите, что произведение отношений $A_{n+k-1} B_k / A_{n+k} B_k$ ($k = 1, \dots, n$) равно 1.

4.50. Дан выпуклый многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$. На стороне $A_1 A_2$ взяты точки B_1 и D_2 , на стороне $A_2 A_3$ — точки B_2 и D_3 и т. д. таким образом, что если построить параллелограммы $A_1 B_1 C_1 D_1, \dots, A_n B_n C_n D_n$, то прямые $A_1 C_1, \dots, A_n C_n$ пересекутся в одной точке O . Докажите, что $A_1 B_1 \cdot A_2 B_2 \cdot \dots \cdot A_n B_n = A_1 D_1 \cdot A_2 D_2 \cdot \dots \cdot A_n D_n$.

4.51. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности равен трети одной из высот треугольника.

4.52. Расстояния от точки X стороны BC треугольника ABC до прямых AB и AC равны d_b и d_c . Докажите, что $d_b/d_c = BX \cdot AC / (CX \cdot AB)$.

4.53*. Многоугольник, описанный около окружности радиуса r , разрезан на треугольники (произвольным образом). Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r .

4.54*. Через точку M , лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые PR и QS , параллельные сторонам BC и AB (точки P, Q, R и S лежат на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно). Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке.

4.55*. Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей (*прямая Гаусса*).

4.56*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что $AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO , где O — центр описанной окружности треугольника ABC , делит отрезок KL пополам.

4.57*. Медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Докажите, что если четырехугольник A_1BC_1M описанный, то $AB = BC$.

4.58*. Внутри треугольника ABC взята точка O . Обозначим расстояния от точки O до сторон BC, CA, AB треугольника через d_a, d_b, d_c , а расстояния от точки O до вершин A, B, C через R_a, R_b, R_c . Докажите, что:

- а) $aR_a \geq cd_c + bd_b$;
- б) $d_aR_a + d_bR_b + d_cR_c \geq 2(d_ad_b + d_bd_c + d_cd_a)$;
- в) $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$;
- г) $R_aR_bR_c \geq (R/2r)(d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_c + d_a)$.

См. также задачи 5.5, 10.6.

§9. Перегруппировка площадей

4.59. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей.

4.60. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади исходного треугольника.

4.61*. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC — на m равных частей.

- а) Точки деления соединены так, как показано на рис. 4.6, а.
- б) Точки деления соединены так, как показано на рис. 4.6, б.

Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

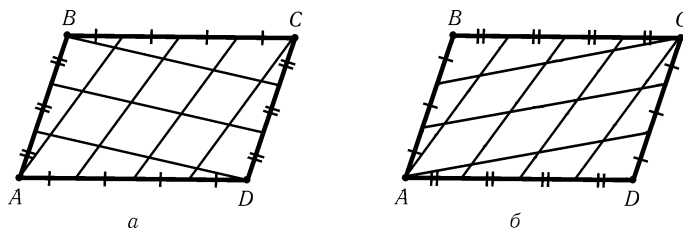


Рис. 4.6

4.62*. а) Четыре вершины правильного двенадцатиугольника расположены в серединах сторон квадрата (рис. 4.7). Докажите, что площадь заштрихованной части в 12 раз меньше площади двенадцатиугольника.

б) Докажите, что площадь двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна 3.

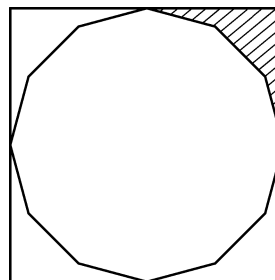


Рис. 4.7

Задачи для самостоятельного решения

4.63. Стороны вписанного четырехугольника $ABCD$ удовлетворяют соотношению $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Докажите, что площади треугольников ABC и ADC равны.

4.64. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на такие четыре части, чтобы три треугольника (из числа этих частей) были равновеликими?

4.65. Докажите, что все выпуклые четырехугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики.

4.66. Докажите, что если два треугольника, получающихся при продолжении сторон выпуклого четырехугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.

4.67. Площадь треугольника равна S , периметр равен P . Прямые, на которых расположены его стороны, отодвигаются (во внешнюю сторону) на расстояние h . Найдите площадь и периметр треугольника, образованного тремя полученными прямыми.

4.68. На стороне AB треугольника ABC взяты точки D и E так, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \varphi$. Найдите отношение $CD : CE$, если известны длины сторон AC и BC и угол φ .

4.69. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC . Докажите, что

$$S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 2abc/((a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)).$$

4.70. Точки M и N являются серединами боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Докажите, что если удвоенная площадь трапеции равна $AN \cdot NB + CM \cdot MD$, то $AB = CD = BC + AD$.

4.71. Если четырехугольник с попарно различными длинами сторон вписан в окружность радиуса R , то существует еще два не равных ему четырехугольника с такими же длинами сторон, вписанных в ту же окружность. Эти четырехугольники имеют не более трех различных длин диагоналей: d_1, d_2 и d_3 . Докажите, что площадь четырехугольника равна $d_1 d_2 d_3 / 4R$.

4.72. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 ; точки C_2, A_2 и B_2 симметричны этим точкам относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что $S_{A_1 B_1 C_1} = S_{A_2 B_2 C_2}$.

4.73. Внутри треугольника ABC взята точка P . Прямые, проходящие через точку P и вершины треугольника, пересекают стороны в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что площадь треугольника, образованного серединами отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 , равна четверти площади треугольника $A_1 B_1 C_1$.

Решения

4.1. Треугольники, прилегающие к одной стороне, имеют равные основания и общую высоту, поэтому они равновелики. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Прямая BM разрезает каждый из треугольников ABC и AMC на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ABM} = S_{BCM}$. Аналогично $S_{BCM} = S_{CAM}$.

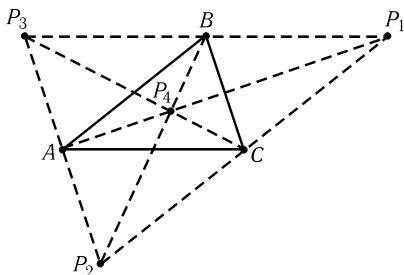


Рис. 4.8

Показывается, что точка O лежит на медианах, проведенных из вершин B и C , т. е. O — точка пересечения медиан треугольника. Проведенные рассуждения показывают также, что точка пересечения медиан треугольника обладает требуемым свойством.

4.4. Так как $S_{A_1 B B_1} = S_{A_1 A B} = S_{ABC}$, то $S_{A A_1 B_1} = 2S$. Аналогично $S_{B B_1 C_1} = S_{C C_1 A_1} = 2S$. Поэтому $S_{ABC} = 7S$.

4.5. Поскольку $AB = BB_1$, то $S_{B B_1 C} = S_{BAC}$. А так как $BC = CC_1$, то $S_{B_1 C_1 C} = S_{B B_1 C} = S_{BAC}$ и $S_{B B_1 C_1} = 2S_{BAC}$. Аналогично $S_{D D_1 A_1} = 2S_{ACD}$,

4.2. Из равенства площадей треугольников ABP и BSP следует, что расстояния от точек A и C до прямой BP равны. Поэтому прямая BP либо проходит через середину отрезка AC , либо параллельна ему. Искомые точки изображены на рис. 4.8.

4.3. Обозначим точку пересечения прямой LO со стороной AC через L_1 . Так как $S_{LOB} = S_{MOC}$ и $\triangle MOC = \triangle L_1 OC$, то $S_{LOB} = S_{L_1 OC}$. Высоты треугольников LOB и $L_1 OC$ равны, поэтому $LO = L_1 O$, т. е. точка O лежит на медиане, проведенной из вершины A . Аналогично до-

поэтому $S_{BB_1C_1} + S_{DD_1A_1} = 2S_{ABC} + 2S_{ACD} = 2S_{ABCD}$. Аналогично $S_{AA_1B_1} + S_{CC_1D_1} = 2S_{ABCD}$, поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} + S_{AA_1B_1} + S_{BB_1C_1} + S_{CC_1D_1} + S_{DD_1A_1} = 5S_{ABCD}$.

4.6. Пусть O — центр описанной окружности. Так как AD, BE и CF — диаметры, то $S_{ABO} = S_{DEO} = S_{AEO}$, $S_{BCO} = S_{EFO} = S_{CEO}$, $S_{CDO} = S_{AFO} = S_{ACO}$. Ясно также, что $S_{ABCDEF} = 2(S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CDO})$ и $S_{ACE} = S_{AEO} + S_{CEO} + S_{ACO}$. Следовательно, $S_{ABCDEF} = 2S_{ACE}$.

4.7. Пусть E и F — середины диагоналей AC и BD . Так как $S_{AOB} = S_{AOD}$, точка O лежит на прямой AF . Аналогично точка O лежит на прямой CF . Предположим, что точка пересечения диагоналей не является серединой ни одной из них. Тогда прямые AF и CF имеют единственную общую точку F , поэтому $O = F$. Аналогично доказывается, что $O = E$. Получено противоречие.

4.8. Пусть диагональ AC трапеции $ABCD$ с основанием AD равна 5. Построим треугольник ACB до параллелограмма $ACBE$. Площадь трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольного треугольника DBE . Пусть BH — высота треугольника DBE . Тогда $EH^2 = BE^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$ и $ED = BE^2/EH = 25/3$. Поэтому $S_{DBE} = ED \cdot BH/2 = 50/3$.

4.9. Так как $S_{ABE} = S_{ABC}$, то $EC \parallel AB$. Остальные диагонали тоже параллельны соответствующим сторонам. Пусть P — точка пересечения BD и EC . Если $S_{BPC} = x$, то $S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EPB} + S_{EDC} + S_{BPC} = 3 + x$ ($S_{EPB} = S_{ABE} = 1$, так как $ABPE$ — параллелограмм). Так как $S_{BPC} : S_{DPC} = BP : DP = S_{EPB} : S_{EPD}$, то $x : (1 - x) = 1 : x$, а значит, $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ и $S_{ABCDE} = (\sqrt{5} + 5)/2$.

4.10. Центры всех трех прямоугольников совпадают (см. задачу 1.7), поэтому два меньших прямоугольника имеют общую диагональ KL . Пусть M и N — вершины этих прямоугольников, лежащие на стороне BC . Точки M и N лежат на окружности с диаметром KL . Пусть O — центр этой окружности. O_1 — проекция точки O на BC . Тогда $BO_1 = CO_1$ и $MO_1 = NO_1$, а значит, $BM = NC$. Чтобы доказать, что $S_{KLM} + S_{KLN} = S_{KBCL}$, достаточно проверить, что $(S_{KBM} + S_{LCM}) + (S_{KBN} + S_{LCN}) = S_{KBCL} = BC(KB + CL)/2 = BC \cdot AB/2$. Остается заметить, что $KB \cdot BM + KB \cdot BN = KB \cdot BC$, $LC \cdot CM + LC \cdot CN = LC \cdot BC$ и $KB \cdot BC + LC \cdot BC = AB \cdot BC$.

4.11. Опустим из точки C перпендикуляр l на прямую AB . Пусть точки A', B' и E' симметричны точкам A, B и E относительно прямой l . Тогда треугольник $AA'C$ равносторонний, причем $\angle ACB = \angle BCB' = \angle B'CA' = 20^\circ$. Треугольники $EE'C$ и DEC равнобедренные с углом при вершине 20° , причем боковая сторона EC у них общая. Следовательно, $S_{ABC} + 2S_{EDC} = S_{ABC} + 2S_{EE'C}$. Так как E середина BC , то $2S_{EE'C} = S_{BE'C} = S_{BB'C}/2$. Поэтому $S_{ABC} + 2S_{EDC} = S_{AA'C}/2 = \sqrt{3}/8$.

4.12. Пусть площади треугольников T_a, T_b и T_c равны a, b и c . Треугольники T_a и T_c гомотетичны, поэтому прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке O . Коэффициент k подобия этих треугольников равен $\sqrt{a/c}$. Ясно, что $S_{A_1B_3O} : S_{C_1B_3O} = A_1O : C_1O = k$. Записывая аналогичные равенства и складывая их, получаем $a : b = k$, а значит, $b = \sqrt{ac}$.

4.13. Воспользовавшись результатом задачи 1.3, легко проверить, что

$$\frac{BQ}{BB_1} = \frac{p + pq}{1 + p + pq}, \quad \frac{B_1R}{BB_1} = \frac{qr}{1 + q + qr}, \quad \frac{CR}{CC_1} = \frac{q + qr}{1 + q + qr}, \quad \frac{CP}{CC_1} = \frac{pr}{1 + r + pr}.$$

Ясно также, что

$$\frac{S_{PQR}}{S_{RB_1C}} = \frac{QR}{RB_1} \cdot \frac{PR}{RC} \quad \text{и} \quad \frac{S_{RB_1C}}{S_{ABC}} = \frac{B_1C}{AC} \cdot \frac{B_1R}{BB_1}.$$

Поэтому

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{QR}{BB_1} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{B_1C}{AC} = \frac{QR}{BB_1} \cdot \frac{PR}{CC_1} \cdot \frac{CC_1}{CR} \cdot \frac{B_1C}{AC}.$$

Учитывая, что

$$\frac{QR}{BB_1} = 1 - \frac{p+pq}{1+p+pq} - \frac{qr}{1+q+rq} = \frac{1}{1+p+pq} - \frac{rq}{1+q+rq} = \frac{(1+q)(1-pqr)}{(1+p+pq)(1+q+qr)}$$

и

$$\frac{PR}{CC_1} = \frac{(1+r)(1-pqr)}{(1+q+qr)(1+r+pr)},$$

получаем

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{(1-pqr)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+pr)}.$$

4.14. Если $S_{AOB} = S_{COD}$, то $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Поэтому $\triangle AOD \sim \triangle COB$ и $AD \parallel BC$. Эти рассуждения обратимы.

4.15. а) Так как $S_{ADP} : S_{ABP} = DP : BP = S_{CDP} : S_{BCP}$, то $S_{ADP} = S_{ABP} \cdot S_{CDP} / S_{BCP}$.

б) Согласно задаче а) $S_{ADP} \cdot S_{BCP} = S_{ABP} \cdot S_{CDP}$. Поэтому

$$S_{ABP} \cdot S_{BCP} \cdot S_{CDP} \cdot S_{ADP} = (S_{ADP} \cdot S_{BCP})^2.$$

4.16. После сокращения на $\sin^2 \varphi / 4$, где φ — угол между диагоналями, данное равенство площадей перепишется в виде $(AP \cdot BP)^2 + (CP \cdot DP)^2 = (BP \cdot CP)^2 + (AP \cdot DP)^2$, т. е. $(AP^2 - CP^2)(BP^2 - DP^2) = 0$.

4.17. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ не параллелограмм; например, прямые AB и CD пересекаются. Согласно задаче 7.2 множеством точек P , лежащих внутри четырехугольника $ABCD$, для которых $S_{ABP} + S_{CDP} = S_{BCP} + S_{ADP} = S_{ABCD} / 2$, является отрезок. Следовательно, точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой. Получено противоречие.

4.18. Ясно, что $S_{AKON} = S_{AKO} + S_{ANO} = (S_{AOB} + S_{AOD}) / 2$. Аналогично $S_{CLOM} = (S_{BCO} + S_{COD}) / 2$. Поэтому $S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{ABCD} / 2$.

4.19. Если площади параллелограммов $KBLO$ и $MDNO$ равны, то $OK \cdot OL = OM \cdot ON$. Учитывая, что $ON = KA$ и $OM = LC$, получаем $KO : KA = LC : LO$. Следовательно, $\triangle KOA \sim \triangle LCO$, а значит, точка O лежит на диагонали AC . Эти рассуждения обратимы.

4.20. Пусть h_1, h и h_2 — расстояния от точек A, M и B до прямой CD . Согласно задаче 1.1, б) $h = ph_2 + (1-p)h_1$, где $p = AM/AB$. Поэтому $S_{DMC} = h \cdot DC / 2 = (h_2p \cdot DC + h_1(1-p) \cdot DC) / 2 = S_{BCN} + S_{ADN}$. Вычитая из обеих частей этого равенства $S_{DKN} + S_{CLN}$, получаем требуемое.

4.21. Согласно задаче 4.20 $S_{ABD_1} + S_{CDB_1} = S_{ABCD}$. Поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{A_1B_1D_1} + S_{C_1D_1B_1} = (1-2p)S_{ABD_1} + (1-2p)S_{CDB_1} = (1-2p)S_{ABCD}$.

4.22. Согласно задаче 4.21 площадь среднего из четырехугольников, заданных отрезками, соединяющими точки сторон AB и CD , в пять раз меньше площади исходного четырехугольника. А так как каждый из рассматриваемых отрезков делится отрезками, соединяющими соответствующие точки другой пары противоположных сторон, на пять равных частей (см. задачу 1.16), то, воспользовавшись еще раз результатом задачи 4.21, получим требуемое.

4.23. На сторонах AB, BC, CD и AD взяты точки K, L, M и N соответственно. Предположим, что диагональ KM не параллельна стороне AD . Фиксируем точки K, M, N и будем двигать точку L по стороне BC . При этом площадь треугольника KLM изменяется строго монотонно. Кроме того, если $LN \parallel AB$, то выполняется равенство $S_{AKN} + S_{BKL} + S_{CLM} + S_{DMN} = S_{ABCD}/2$, т. е. $S_{KLMN} = S_{ABCD}/2$.

4.24. Пусть L_1 и N_1 — середины сторон BC и AD соответственно. Тогда KL_1MN_1 — параллелограмм и его площадь равна половине площади четырехугольника $ABCD$ (см. задачу 1.38, а)). Поэтому достаточно доказать, что площади параллелограммов $KLMN$ и KL_1MN_1 равны. Если эти параллелограммы совпадают, то доказывать больше ничего не нужно, а если они не совпадают, то, так как середина отрезка KM является их центром симметрии, $LL_1 \parallel NN_1$ и $BC \parallel AD$. В этом случае средняя линия KM трапеции $ABCD$ параллельна основаниям BC и AD , и поэтому высоты треугольников KLM и KL_1M , опущенные на сторону KM , равны, т. е. равны площади параллелограммов $KLMN$ и KL_1MN_1 .

4.25. Пусть данные прямые l_1 и l_2 делят квадрат на четыре части, площади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4 , причем для первой прямой площади частей, на которые она делит квадрат, равны $S_1 + S_2$ и $S_3 + S_4$ а для второй они равны $S_2 + S_3$ и $S_1 + S_4$. Так как по условию $S_1 = S_2 = S_3$, то $S_1 + S_2 = S_2 + S_3$. Это означает, что образ прямой l_1 при повороте относительно центра квадрата на $+90^\circ$ или -90° не просто параллелен прямой l_2 , а совпадает с ней.

Остается доказать, что прямая l_1 (а значит, и прямая l_2) проходит через центр квадрата. Предположим, что это не верно. Рассмотрим образы прямых l_1 и l_2 при поворотах на $\pm 90^\circ$ и обозначим площади частей, на которые они делят квадрат, так, как показано на рис. 4.9 (на этом рисунке изображены оба различных варианта расположения прямых). Прямые l_1 и l_2 делят квадрат на четыре части, площади которых равны $a, a + b, a + 2b + c$ и $a + b$, причем числа a, b и c ненулевые. Ясно, что три из указанных четырех чисел не могут быть равны. Получено противоречие.

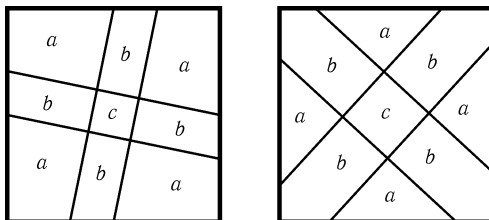


Рис. 4.9

4.26. Все три рассматриваемых треугольника имеют общее основание AM . Пусть h_b, h_c и h_d — расстояния от точек B, C и D до прямой AM . Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, то $h_c = |h_b \pm h_d|$.

4.27. Можно считать, что P — общая точка параллелограммов, построенных на сторонах AB и BC , т. е. эти параллелограммы имеют вид $ABPQ$ и $CBPR$. Ясно, что $S_{ACRQ} = S_{ABPQ} + S_{CBPR}$.

4.28. Пусть сторона данного шестиугольника равна a . Продолжения красных сторон шестиугольника образуют правильный треугольник со стороной $3a$, причем сумма площадей красных треугольников равна половине произведения a на

сумму расстояний от точки O до сторон этого треугольника, поэтому она равна $a^2 \cdot 3\sqrt{3}/4$ (см. задачу 4.46). Сумма площадей синих треугольников вычисляется аналогично.

4.29. а) Площадь параллелограмма $PMQN$ равна $BC \cdot AD \sin \alpha/4$, где α — угол между прямыми AD и BC . Высоты треугольников ABD и ACD , опущенные из вершин B и C , равны $OB \sin \alpha$ и $OC \sin \alpha$, поэтому $|S_{ABD} - S_{ACD}| = |OB - OC| \cdot AD \sin \alpha/2 = BC \cdot AD \sin \alpha/2$.

б) Пусть для определенности пересекаются лучи AD и BC . Так как $PN \parallel AO$ и $QN \parallel CO$, точка N лежит внутри треугольника OPQ . Поэтому $S_{OPQ} = S_{PQN} + S_{PON} + S_{QON} = \frac{S_{PMQN}}{2} + \frac{S_{ACD}}{4} + \frac{S_{BCD}}{4} = \frac{(S_{ABD} - S_{ACD} + S_{ACD} + S_{BCD})}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4}$.

4.30. Отрезки KM и LN являются средними линиями треугольников CED и AFB , поэтому они имеют общую точку — середину отрезка EF . Кроме того, $KM = CD/2$, $LN = AB/2$ и угол между прямыми KM и LN равен углу α между прямыми AB и CD . Поэтому площадь четырехугольника $KLMN$ равна $AB \cdot CD \sin \alpha/8$.

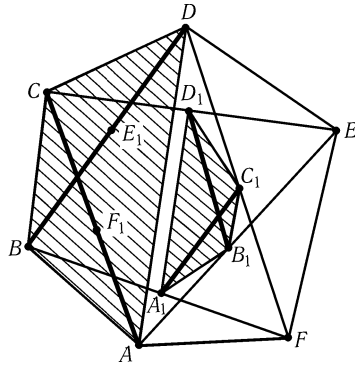


Рис. 4.10

4.31. Обозначим середины диагоналей шестиугольника $ABCDEF$ так, как показано на рис. 4.10. Докажем, что площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ в четыре раза меньше площади четырехугольника $ABCD$. Воспользуемся для этого тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними. Так как A_1C_1 и B_1D_1 — средние линии треугольников BDF и ACE , получаем требуемое. Аналогично доказывается, что площадь четырехугольника $D_1E_1F_1A_1$ в четыре раза меньше площади четырехугольника $DEFA$.

4.32. Пусть $\alpha = \angle PQC$. Тогда $2S_{ACK} = CK \cdot AK = (AP \cos \alpha) \cdot (AQ \sin \alpha) = AR^2 \sin \alpha \cos \alpha = BC^2 \sin \alpha \cos \alpha = BL \cdot CL =$

$= 2S_{BCL}$.

4.33. Пусть S_a, S_b и S_c — площади треугольников, прилегающих к вершинам A, B и C ; S — площадь четвертого рассматриваемого треугольника. Ясно, что $S_{ACC_1} + S_{BAA_1} + S_{CBB_1} = S_{ABC} - S + S_a + S_b + S_c$. Кроме того, $S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC} = S_{ACC_1} + S_{BAA_1} + S_{CBB_1}$.

4.34. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC , B_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AC . Вырежем из треугольника ABC треугольник AOB_1 и отразим его симметрично относительно биссектрисы угла OAB_1 . При этом прямая OB_1 перейдет в прямую l_a . Прделаем такую операцию для остальных треугольников. Общие части полученных при этом треугольников являются тремя треугольниками рассматриваемого разбиения, а непокрытая часть треугольника ABC — четвертым треугольником. Ясно также, что площадь непокрытой части равна сумме площадей частей, покрытых дважды.

4.35. Пусть для определенности лучи AD и BC пересекаются в точке O . Тогда $S_{CDO} : S_{MNO} = c^2 : x^2$, где $x = MN$, и $S_{ABO} : S_{MNO} = ab : x^2$, так

как $OA : ON = a : x$ и $OB : OM = b : x$. Следовательно, $x^2 - c^2 = ab - x^2$, т. е. $2x^2 = ab + c^2$.

4.36. Обозначим площади частей фигуры, на которые ее делят прямые, так, как показано на рис. 4.11. Площадь всей фигуры обозначим через S . Так как $S_3 + (S_2 + S_7) = S/2 = S_1 + S_6 + (S_2 + S_7)$, то $S_3 = S_1 + S_6$. Складывая это равенство с равенством $S/2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, получаем $S/2 = 2S_1 + S_2 + S_4 + S_6 \geq 2S_1$, т. е. $S_1 \leq S/4$.

4.37. Обозначим проекцию прямой l через B , крайние точки проекции многоугольника — через A и C . Пусть C_1 — точка многоугольника, проектирующаяся в точку C ; прямая l пересекает многоугольник в точках K и L , а K_1 и L_1 — точки прямых C_1K и C_1L , проектирующиеся в точку A (рис. 4.12).

Одна из частей, на которые прямая l делит многоугольник, содержится в трапеции K_1KLL_1 , другая часть содержит треугольник C_1KL . Поэтому $S_{K_1KLL_1} \geq S_{C_1KL}$, т. е. $AB \cdot (KL + K_1L_1) \geq BC \cdot KL$. Так как $K_1L_1 = KL \cdot (AB + BC)/BC$, то $AB \cdot (2 + AB/BC) \geq BC$. Решая это квадратное неравенство, получаем $BC/AB \leq 1 + \sqrt{2}$. Аналогично $AB/BC \leq 1 + \sqrt{2}$ (нужно провести те же рассуждения, поменяв местами A и C).

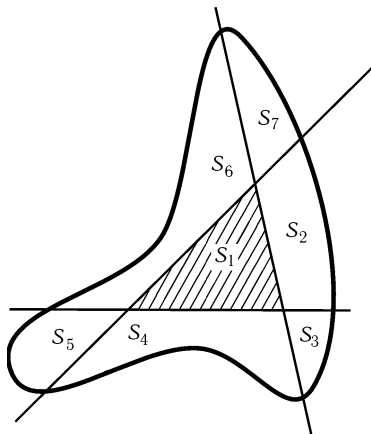


Рис. 4.11

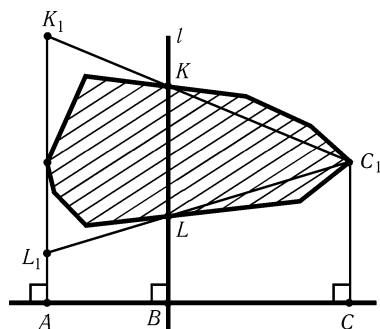


Рис. 4.12

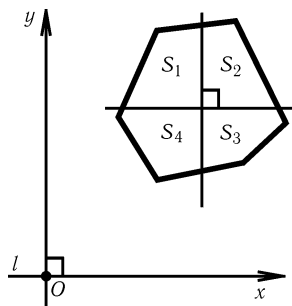


Рис. 4.13

4.38. Обозначим площадь многоугольника через S . Пусть l — произвольная прямая. Введем систему координат, для которой прямая l является осью Ox . Пусть $S(a)$ — площадь той части многоугольника, которая лежит ниже прямой $y = a$. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ $S(a)$ непрерывно меняется от 0 до S , поэтому $S(a) = S/2$ для некоторого a , т. е. прямая $y = a$ делит площадь многоугольника пополам. Аналогично существует прямая, перпендикулярная l и делящая площадь многоугольника пополам. Эти две прямые разбивают многоугольник на части, площади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4 (рис. 4.13). Так как $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ и $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$, то $S_1 = S_3 = A$ и $S_2 = S_4 = B$. При повороте прямой l на 90° A заменится на B , а B — на A . Так как A и B изменя-

ются при повороте l непрерывно, то для некоторого положения прямой $A = B$, т. е. площади всех четырех фигур равны.

4.39. а) Пусть прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через O , радиус вписанной окружности через r . Тогда $S_{ABQP} = r(AP + AB + BQ)/2$ и $S_{OQCP} = r(QC + CP)/2$. Так как прямая PQ делит периметр пополам, то $AP + AB + BQ = QC + CP$, поэтому $S_{ABQP} = S_{OQCP}$. Кроме того, $S_{ABQP} = S_{QCP}$ по условию. Поэтому $S_{OQP} = 0$, т. е. прямая QP проходит через точку O .

б) Доказательство проводится аналогично.

4.40. Рассматривая образ окружности S_2 при симметрии относительно центра окружности S_1 и учитывая равенство площадей, можно доказать, что диаметр AA_1 окружности S_1 пересекает S_2 в некоторой точке K , отличной от A , причем $AK > A_1K$. Окружность радиуса KA_1 с центром K касается окружности S_1 в точке A_1 , поэтому $BK > A_1K$, т. е. $BK + KA > A_1A$. Ясно также, что сумма длин отрезков BK и KA меньше длины дуги S_2 , соединяющей точки A и B .

4.41. Случай, когда точка O принадлежит Γ , очевиден; поэтому будем предполагать, что O не принадлежит Γ . Пусть Γ' — образ кривой Γ при симметрии относительно точки O . Если кривые Γ и Γ' не пересекаются, то части, на которые Γ делит квадрат, не могут быть равной площади. Пусть X — точка пересечения Γ и Γ' , а точка X' симметрична X относительно точки O . Так как при симметрии относительно точки O кривая Γ' переходит в Γ , то X' принадлежит Γ . Поэтому прямая XX' искома.

4.42. Пусть площади треугольников APB , BPC , CPD и DPA равны S_1 , S_2 , S_3 и S_4 . Тогда $a/p = (S_3 + S_4)/S_3$ и $b \cdot CD/2 = S_3 + S_2$, а значит, $ab \cdot CD/2p = (S_3 + S_4)(S_3 + S_2)/S_3$. Учитывая, что $S_2S_4 = S_1S_3$, получаем требуемое.

4.43. Применяя теорему синусов к треугольникам ABC и ABD , получаем $AC = 2R \sin B$ и $BD = 2R \sin A$. Поэтому $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \varphi = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$.

4.44. Так как площадь четырехугольника равна $(d_1d_2 \sin \varphi)/2$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, то остается проверить, что $2d_1d_2 \cos \varphi = |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|$. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, $\varphi = \angle AOB$. Тогда $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos \varphi$ и $BC^2 = BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cos \varphi$. Поэтому $AB^2 - BC^2 = AO^2 - CO^2 - 2BO \cdot AC \cos \varphi$. Аналогично $CD^2 - AD^2 = CO^2 - AO^2 - 2DO \cdot AC \cos \varphi$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

З а м е ч а н и е. Так как $16S^2 = 4d_1^2d_2^2 \sin^2 \varphi = 4d_1^2d_2^2 - (2d_1d_2 \cos \varphi)^2$, то $16S^2 = 4d_1^2d_2^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$.

4.45. а) Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$. Ясно, что $S = S_{ABC} + S_{ADC} = (ab \sin B + cd \sin D)/2$ и $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$. Поэтому

$$16S^2 = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \cos^2 B + 8abcd \sin B \sin D + 4c^2d^2 - 4c^2d^2 \cos^2 D, \\ (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 8abcd \cos B \cos D = 4a^2b^2 \cdot \cos^2 B + 4c^2d^2 \cos^2 D.$$

Подставляя второе равенство в первое, получаем

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos B \cos D - \sin B \sin D).$$

Ясно, что $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$ и $1 + \cos B \cos D - \sin B \sin D = 2 \cos^2((B + D)/2)$.

б) Если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle B + \angle D = 180^\circ$, а значит, $\cos^2((B + D)/2) = 0$.

в) Если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то $a + c = b + d$, поэтому $p = a + c = b + d$ и $p - a = c, p - b = d, p - c = a, p - d = b$. Следовательно, $S^2 = abcd(1 - \cos^2((B + D)/2)) = abcd \sin^2((B + D)/2)$.

Если четырехугольник $ABCD$ вписанный и описанный одновременно, то $S^2 = abcd$.

4.46. Из точки O , лежащей внутри правильного треугольника ABC , опустим перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 на стороны BC, AC и AB соответственно. Пусть a — длина стороны треугольника ABC , h — длина высоты. Ясно, что $S_{ABC} = S_{BCO} + S_{ACO} + S_{ABO}$. Следовательно, $ah = a \cdot OA_1 + a \cdot OB_1 + a \cdot OC_1$, т. е. $h = OA_1 + OB_1 + OC_1$.

4.47. Пусть $AD = l$. Тогда $2S_{ABD} = cl \sin(\alpha/2)$, $2S_{ACD} = bl \sin(\alpha/2)$ и $2S_{ABC} = bc \sin \alpha$. Следовательно, $cl \sin(\alpha/2) + bl \sin(\alpha/2) = bc \sin \alpha = 2bc \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$.

4.48. а) Пусть расстояния от точек A и O до прямой BC равны h и h_1 . Тогда $S_{OBC} : S_{ABC} = h_1 : h = OA_1 : AA_1$. Аналогично $S_{OAC} : S_{ABC} = OB_1 : BB_1$ и $S_{OAB} : S_{ABC} = OC_1 : CC_1$. Складывая эти равенства и учитывая, что $S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = S_{ABC}$, получаем требуемое.

б) Пусть расстояния от точек B и C до прямой AA_1 равны d_b и d_c . Тогда $S_{ABO} : S_{ACO} = d_b : d_c = BA_1 : A_1C$. Аналогично $S_{ACO} : S_{BCO} = AC_1 : C_1B$ и $S_{BCO} : S_{ABO} = CB_1 : B_1A$. Остается перемножить эти равенства.

4.49. Легко проверить, что отношение длин отрезков $A_{n+k-1}B_k$ и $A_{n+k}B_k$ равно отношению площадей треугольников $A_{n+k-1}OA_k$ и A_kOA_{n+k} . Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

4.50. Так как $A_iB_iC_iD_i$ — параллелограмм и точка O лежит на продолжении его диагонали A_iC_i , то $S_{A_iB_iO} = S_{A_iD_iO}$, а значит, $A_iB_i : A_iD_i = h_i : h_{i-1}$, где h_i — расстояние от точки O до стороны A_iA_{i+1} . Остается перемножить эти равенства для $i = 1, \dots, n$.

4.51. Пусть длины сторон треугольника ABC равны a, b и c , причем $a \leq b \leq c$. Тогда $2b = a + c$ и $2S_{ABC} = r(a + b + c) = 3rb$, где r — радиус вписанной окружности. С другой стороны, $2S_{ABC} = h_b b$. Поэтому $r = h_b/3$.

4.52. Достаточно заметить, что $d_b \cdot AB = 2S_{AXB} = BX \cdot AX \sin \varphi$, где $\varphi = \angle AXB$ и $d_c \cdot AC = 2S_{AXC} = CX \cdot AX \sin \varphi$.

4.53. Пусть r_1, \dots, r_n — радиусы вписанных окружностей полученных треугольников, P_1, \dots, P_n — их периметры, а S_1, \dots, S_n — площади. Площадь и периметр исходного многоугольника обозначим через S и P соответственно.

Ясно, что $P_i < P$ (см. задачу 9.27, б)). Поэтому

$$r_1 + \dots + r_n = 2 \frac{S_1}{P_1} + \dots + 2 \frac{S_n}{P_n} > 2 \frac{S_1}{P} + \dots + 2 \frac{S_n}{P} = 2 \frac{S}{P} = r.$$

4.54. Через точку N пересечения прямых BS и CM проведем прямые Q_1S_1 и P_1R_1 , параллельные прямым QS и PR (точки P_1, Q_1, R_1 и S_1 лежат на сторонах AB, BC, CD и DA). Пусть F и G — точки пересечения прямых PR и Q_1S_1, P_1R_1 и QS . Так как точка M лежит на диагонали NC параллелограмма NQ_1CR_1 , то $S_{FQ_1QM} = S_{MRR_1G}$ (задача 4.19), а значит, $S_{NQ_1QG} = S_{NFRR_1}$. Точка N лежит на диагонали BS параллелограмма $ABQS$, поэтому $S_{AP_1NS_1} = S_{NQ_1QG} = S_{NFRR_1}$. Следовательно, точка N лежит на диагонали PD параллелограмма $APRD$.

4.55. Пусть E и F — точки пересечения продолжений сторон данного четырехугольника. Обозначим вершины четырехугольника так, что E — точка

пересечения продолжений сторон AB и CD за точки B и C , F — точка пересечения лучей BC и AD . Достроим треугольники AEF и ABD до параллелограммов $AERF$ и $ABLD$.

При гомотетии с центром A и коэффициентом 2 середина диагонали BD , середина диагонали AC и середина отрезка EF переходят в точки L, C и R соответственно. Поэтому достаточно доказать, что точки L, C и R лежат на одной прямой. Именно этот факт был доказан в предыдущей задаче.

4.56. Достаточно проверить, что $S_{AKO} = S_{ALO}$, т. е. $AO \cdot AL \sin OAL = AO \cdot AK \sin OAK$. Ясно, что $AL = CB_1 = BC \cos C$, $\sin OAL = \cos B$, $AK = BC_1 = BC \cos B$ и $\sin OAK = \cos C$.

4.57. Так как четырехугольник A_1BC_1M описанный, то, во-первых, суммы длин его противоположных сторон равны: $\frac{a}{2} + \frac{m_c}{3} = \frac{c}{2} + \frac{m_a}{3}$, а во-вторых, его вписанная окружность является одновременно вписанной окружностью треугольников AA_1B и CC_1B , имеющих к тому же равные площади, поэтому периметры этих треугольников равны: $c + m_a + \frac{a}{2} = a + m_c + \frac{c}{2}$. Умножая первое равенство на 3 и складывая его со вторым, получаем требуемое.

4.58. Докажем сначала одно общее утверждение, которым мы воспользуемся при решении задач а)–г). Возьмем на лучах AB и AC произвольные точки B_1 и C_1 и опустим из них перпендикуляры B_1K и C_1L на прямую AO . Так как $B_1C_1 \geq B_1K + C_1L$, то $B_1C_1 \cdot R_a \geq B_1K \cdot R_a + C_1L \cdot R_a = 2S_{AOB_1} + 2S_{AOC_1} = AB_1 \cdot d_c + AC_1 \cdot d_b$.

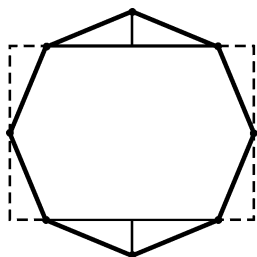


Рис. 4.14

а) Полагая $B_1 = B$ и $C_1 = C$, получаем требуемое.

б) Домножая обе части неравенства $aR_a \geq cd_c + bd_b$ на d_a/a , получаем $d_aR_a \geq (c/a)d_ad_c + (b/a)d_ad_b$. Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами для d_bR_b и d_cR_c и учитывая, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, получаем требуемое.

в) Возьмем точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 = AC$ и $AC_1 = AB$. Тогда $aR_a \geq bd_c + cd_b$, т. е. $R_a \geq (b/a)d_c + (c/a)d_b$. Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами для R_b и R_c и учитывая, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, получаем требуемое.

г) Возьмем точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 = AC_1 = 1$.

4.59. Отрежем от правильного восьмиугольника треугольники и переставим их так, как показано на рис. 4.14. В результате получим прямоугольник, стороны которого равны наибольшей и наименьшей диагоналям восьмиугольника. Тогда $B_1C_1 = 2 \sin(A/2)$, а значит, $2 \sin(A/2)R_a \geq d_c + d_b$.

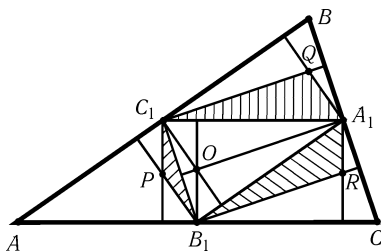


Рис. 4.15

Умножая это неравенство на аналогичные неравенства для R_b и R_c и учитывая, что $\sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2) = r/4R$ (задача 12.36, а)), получаем требуемое.

4.60. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC . Проведенные отрезки являются высотами треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C . Пусть P, Q и R — точки пересечения высот этих треугольников, а O — точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 4.15). Рассматриваемый шестиугольник

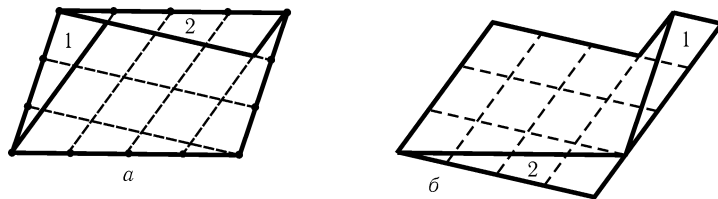


Рис. 4.16

состоит из треугольника $A_1B_1C_1$ и треугольников B_1C_1P , C_1A_1Q и A_1B_1R . Ясно, что $\triangle B_1C_1P = \triangle C_1B_1O$, $\triangle C_1A_1Q = \triangle A_1C_1O$ и $\triangle A_1B_1R = \triangle B_1A_1O$. Поэтому площадь рассматриваемого шестиугольника равна удвоенной площади треугольника $A_1B_1C_1$. Остается заметить, что $S_{ABC} = 4S_{A_1B_1C_1}$.

4.61. а) Отрежем от параллелограмма две части (рис. 4.16, а) и переставим их так, как показано на рис. 4.16, б. Получится фигура, состоящая из $mn + 1$ маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна $1/(mn + 1)$.

б) Отрежем от параллелограмма три части (рис. 4.17, а) и переставим их так, как показано на рис. 4.17, б. Получится фигура, состоящая из $mn - 1$ маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна $1/(mn - 1)$.

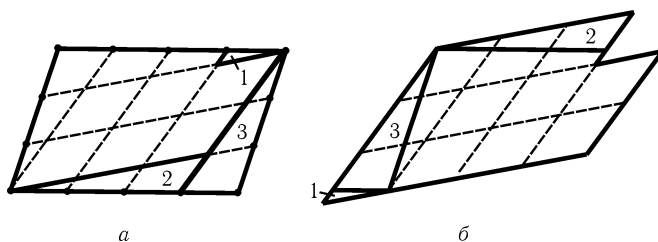


Рис. 4.17

4.62. а) Разрежем исходный квадрат на четыре квадрата и рассмотрим один из них (рис. 4.18). Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой PQ . Докажем, что $\triangle APB = \triangle OB'P$. Треугольник APB равнобедренный, причем угол при его основании равен 15° , поэтому треугольник BPQ равносторонний. Следовательно, $\angle OPB' = \angle OPQ - \angle B'PQ = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$ и $\angle POB' = \angle POQ/2 = 15^\circ$. Кроме того, $AB = OP$. Аналогично доказывается, что $\triangle BQC = \triangle OB'Q$. Следовательно, площадь заштрихованной на рис. 4.7 части равна площади треугольника OPQ .

б) Пусть площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна $12x$. Согласно задаче а) площадь квадрата, описанного около этой окружности, равна $12x + 4x = 16x$; с другой стороны, площадь этого квадрата равна 4, поэтому $x = 1/4$ и $12x = 3$.

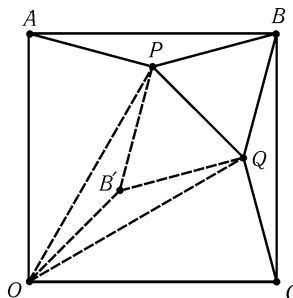


Рис. 4.18

Глава 5

Треугольники

Основные сведения

1. *Вписанной окружностью треугольника* называют окружность, касающуюся всех его сторон. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

Вневписанной окружностью треугольника ABC называют окружность, касающуюся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Для каждого треугольника имеется ровно три вневписанные окружности. Центром вневписанной окружности, касающейся стороны AB , является точка пересечения биссектрисы угла C и биссектрис внешних углов A и B .

Описанной окружностью треугольника называют окружность, проходящую через его вершины. Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Для элементов треугольника ABC часто используются следующие обозначения:

a, b и c — длины сторон BC, CA и AB ;

α, β и γ — величины углов при вершинах A, B, C ;

p — полупериметр;

R — радиус описанной окружности;

r — радиус вписанной окружности;

r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно;

h_a, h_b и h_c — длины высот, опущенных из вершин A, B и C .

3. Если AD — биссектриса угла A треугольника ABC (или биссектриса внешнего угла A), то $BD : CD = AB : AC$ (см. задачу 1.17).

4. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы (см. задачу 5.17).

5. Для доказательства того, что точки пересечения некоторых прямых лежат на одной прямой, часто используется теорема Менелая (задача 5.64).

Для доказательства того, что некоторые прямые пересекаются в одной точке, часто используется теорема Чевы (см. задачу 5.77).

Вводные задачи

6. а) Докажите, что если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

б) Докажите, что если в треугольнике биссектриса совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

7. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

8. На высоте AH треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$.

9. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC взяты точки P, Q, R так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что стороны треугольника PQR перпендикулярны сторонам треугольника ABC .

§1. Вписанная и описанная окружности

5.1. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , причем $AC_1 = AB_1, BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами.

5.2. Пусть O_a, O_b и O_c — центры невписанных окружностей треугольника ABC . Докажите, что точки A, B и C — основания высот треугольника $O_a O_b O_c$.

5.3. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90^\circ + \angle A/2$, а из центра O_a невписанной окружности под углом $90^\circ - \angle A/2$.

5.4. Внутри треугольника ABC взята такая точка P , что $\angle PAB : \angle PAC = \angle PCA : \angle PCB = \angle PBC : \angle PBA = x$. Докажите, что $x = 1$.

5.5*. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции некоторой внутренней точки O треугольника ABC на высоты. Докажите, что если длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны, то они равны $2r$.

5.6*. Угол величиной $\alpha = \angle BAC$ вращается вокруг своей вершины O — середины основания AC равнобедренного треугольника ABC . Стороны этого угла пересекают отрезки AB и BC в точках P и Q . Докажите, что периметр треугольника PBQ остается постоянным.

5.7*. В неравнобедренном треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной окружности проведена прямая MO , пересекающая высоту AH в точке E . Докажите, что $AE = r$.

5.8*. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках P и Q . Расстояния от точек P, Q и A до некоторой касательной к этой окружности равны u, v и w . Докажите, что $uv/w^2 = \sin^2(A/2)$.

5.9*. а) На стороне AB треугольника ABC взята точка P . Пусть r, r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP ; h — высота, опущенная из вершины C . Докажите, что $r = r_1 + r_2 - 2r_1r_2/h$.

б) Точки A_1, A_2, A_3, \dots лежат на одной прямой (в указанном порядке). Докажите, что если радиусы вписанных окружностей всех треугольников BA_iA_{i+1} равны одному и тому же числу r_1 , то радиусы вписанных окружностей всех треугольников BA_iA_{i+k} равны одному и тому же числу r_k .

* * *

5.10. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно его сторон, лежат на описанной окружности.

5.11. Из точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX, PY и PZ на BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $\frac{BC}{PX} = \frac{AC}{PY} + \frac{AB}{PZ}$.

* * *

5.12*. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC . Докажите, что:

- а) $d^2 = R^2 - 2Rr$, где $d = OI$;
 б) $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, где $d_a = OI_a$.

5.13*. Продолжения биссектрис углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 ; M — точка пересечения биссектрис. Докажите, что:

$$\text{а) } \frac{MA \cdot MC}{MB_1} = 2r; \quad \text{б) } \frac{MA_1 \cdot MC_1}{MB} = R.$$

5.14*. Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию, причем $a < b < c$. Биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке B_1 . Докажите, что центр O вписанной окружности делит отрезок BB_1 пополам.

5.15*. В треугольнике ABC сторона BC наименьшая. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE , равные BC . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ADE равен расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

§2. Прямоугольные треугольники

5.16. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что $r = (a + b - c)/2$ и $r_c = (a + b + c)/2$.

5.17. Пусть M — середина стороны AB треугольника ABC . Докажите, что $CM = AB/2$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90^\circ$.

5.18. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD . Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P , а при вершинах C и D — в точке Q . Докажите, что длина отрезка PQ равна половине периметра трапеции.

5.19. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно DC , пересекает AC в точке E . Докажите, что $EC = 2AD$.

5.20. На медиане BM и на биссектрисе BK треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки D и E так, что $DK \parallel AB$ и $EM \parallel BC$. Докажите, что $ED \perp BK$.

5.21. Сумма углов при основании трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

5.22. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C , а в треугольнике ACK — биссектриса CE . Докажите, что $CB = BE$.

5.23. В треугольнике ABC с прямым углом C проведены высота CD и биссектриса CF ; DK и DL — биссектрисы треугольников BDC и ADC . Докажите, что $CLFK$ — квадрат.

5.24*. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC внешним образом построен квадрат $ABPQ$. Пусть $\alpha = \angle ACQ$, $\beta = \angle QCP$ и $\gamma = \angle PCB$. Докажите, что $\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma$.

См. также задачи 1.40, 1.43, 2.39, 2.66, 2.67, 3.38, 5.32, 5.39, 5.42, 5.68, 5.144, 6.80, 11.14.

§3. Правильный треугольник

5.25. Из точки M , лежащей внутри правильного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP , MQ и MR на стороны AB , BC и CA соответственно. Докажите, что $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$ и $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$.

5.26. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle AOC = 90^\circ$.

* * *

5.27. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

5.28. Докажите, что если точка пересечения высот остроугольного треугольника делит высоты в одном и том же отношении, то треугольник правильный.

5.29. а) Докажите, что если $a + h_a = b + h_b = c + h_c$, то треугольник ABC правильный.

б) В треугольник ABC вписаны три квадрата: у одного две вершины лежат на стороне AC , у другого — на BC , у третьего — на AB . Докажите, что если все три квадрата равны, то треугольник ABC правильный.

5.30. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то треугольник ABC правильный.

5.31. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, длины высот — целые числа. Докажите, что треугольник правильный.

См. также задачи 1.29, 1.45, 1.46, 1.50 б), 1.59, 2.13, 2.15, 2.18, 2.19, 2.37, 2.45, 2.55, 4.46, 5.59, 5.60, 6.80, 7.16 б), 7.17, 7.22, 7.38, 7.45, 10.3, 10.77, 11.3, 11.5, 14.21 а), 16.7, 18.10–18.16, 18.18–18.21, 18.23–18.25, 18.40, 18.41, 24.1, 29.35, 29.36.

§4. Треугольники с углами 60° и 120°

5.32. В треугольнике ABC с углом A , равным 120° , проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный.

5.33. В треугольнике ABC с углом A , равным 120° , биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle A_1C_1O = 30^\circ$.

5.34. а) Докажите, что если угол A треугольника ABC равен 120° , то центр описанной окружности и ортоцентр симметричны относительно биссектрисы внешнего угла A .

б) В треугольнике ABC угол A равен 60° ; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC . Докажите, что $IO = IH$ и $I_aO = I_aH$.

5.35. В треугольнике ABC угол A равен 120° . Докажите, что из отрезков длиной $a, b, b + c$ можно составить треугольник.

5.36*. В остроугольном треугольнике ABC с углом A , равным 60° , высоты пересекаются в точке H .

а) Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BH и CH со сторонами AB и AC соответственно. Докажите, что точки M, N и H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит центр O описанной окружности.

5.37*. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Докажите, что если $\angle CC_1B_1 = 30^\circ$, то либо $\angle A = 60^\circ$, либо $\angle B = 120^\circ$.

См. также задачу 2.33.

§5. Целочисленные треугольники

5.38. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа. Найдите эти числа, если известно, что одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис.

5.39. Длины всех сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, причем наибольший общий делитель этих чисел равен 1. Докажите, что его катеты равны $2mn$ и $m^2 - n^2$, а гипотенуза равна $m^2 + n^2$, где m и n — натуральные числа.

Прямоугольный треугольник, длины сторон которого целые числа, называют *пифагоровым*.

5.40*. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа равны 3, 4, 5.

5.41*. Приведите пример вписанного четырехугольника с попарно различными целочисленными длинами сторон, у которого длины диагоналей, площадь и радиус описанной окружности — целые числа (Брахмагупта).

5.42*. а) Укажите два прямоугольных треугольника, из которых можно сложить треугольник, длины сторон и площадь которого — целые числа.

б) Докажите, что если площадь треугольника — целое число, а длины сторон — последовательные натуральные числа, то этот треугольник можно сложить из двух прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами.

5.43*. а) В треугольнике ABC , длины сторон которого рациональные числа, проведена высота BB_1 . Докажите, что длины отрезков AB_1 и CB_1 — рациональные числа.

б) Длины сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника — рациональные числа. Докажите, что диагонали разрезают его на четыре треугольника, длины сторон которых — рациональные числа.

См. также задачу 26.7.

§6. Разные задачи

5.44. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что их соответственные углы равны или составляют в сумме 180° . Докажите, что в действительности все соответственные углы равны.

5.45. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и построены точки A_1, B_1 и C_1 , симметричные O относительно середин сторон BC, CA и AB . Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.46. Через точку O пересечения биссектрис треугольника ABC проведены прямые, параллельные его сторонам. Прямая, параллельная AB , пересекает AC и BC в точках M и N , а прямые, параллельные AC и BC ,

пересекают AB в точках P и Q . Докажите, что $MN = AM + BN$ и периметр треугольника OPQ равен длине отрезка AB .

5.47. а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

б) Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , R — радиус описанной окружности. Докажите, что $AH^2 + BC^2 = 4R^2$ и $AH = BC |\operatorname{ctg} \alpha|$.

5.48. Пусть $x = \sin 18^\circ$. Докажите, что $4x^2 + 2x = 1$.

5.49*. Докажите, что проекции вершины A треугольника ABC на биссектрисы внешних и внутренних углов при вершинах B и C лежат на одной прямой.

5.50*. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то он равнобедренный.

5.51*. а) В треугольниках ABC и $A'B'C'$ равны стороны AC и $A'C'$, углы при вершинах B и B' и биссектрисы углов B и B' . Докажите, что эти треугольники равны (точнее говоря, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ или $\triangle ABC = \triangle C'B'A'$).

б) Через точку D биссектрисы BB_1 угла ABC проведены прямые AA_1 и CC_1 (точки A_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника). Докажите, что если $AA_1 = CC_1$, то $AB = BC$.

5.52*. Докажите, что прямая делит периметр и площадь треугольника в равных отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности.

5.53*. Точка E — середина той дуги AB описанной окружности треугольника ABC , на которой лежит точка C ; C_1 — середина стороны AB . Из точки E опущен перпендикуляр EF на AC . Докажите, что:

а) прямая C_1F делит пополам периметр треугольника ABC ;

б) три такие прямые, построенные для каждой стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

5.54*. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты ABC_1D_1 и A_2BCD_2 . Докажите, что точка пересечения прямых AD_2 и CD_1 лежит на высоте BH .

5.55*. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами A_1, B_1 и C_1 . Пусть a_1, b_1 и c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что:

$$\text{а) } a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S;$$

$$\text{б) } S_1 - S = (a^2 + b^2 + c^2)/8.$$

5.56*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что $\angle(CC_1, AB) = \angle(AA_1, BC) = \angle(BB_1, CA) = \alpha$. Прямые AA_1 и BB_1 , BB_1 и CC_1 , CC_1 и AA_1 пересекаются в точках C', A', B' соответственно. Докажите, что:

а) точка пересечения высот треугольника ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника $A'B'C'$;

б) $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, причем коэффициент подобия равен $2 \cos \alpha$.

5.57*. В каждый из углов треугольника ABC вписано по окружности. Из одной вершины окружности, вписанные в два других угла, видны под равными углами. Из другой — тоже. Докажите, что тогда и из третьей вершины две окружности видны под равными углами.

5.58*. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AB_1 : B_1C = c^n : a^n, BC_1 : C_1A = a^n : b^n$ и $CA_1 : A_1B = b^n : c^n$ (a, b и c — длины сторон треугольника). Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ высекает на сторонах треугольника ABC отрезки длиной $\pm x, \pm y$ и $\pm z$ (знаки выбираются в соответствии с ориентацией треугольника). Докажите, что $\frac{x}{a^{n-1}} + \frac{y}{b^{n-1}} + \frac{z}{c^{n-1}} = 0$.

5.59*. В треугольнике ABC проведены триссектрисы (лучи, делящие углы на три равные части). Ближайшие к стороне BC триссектрисы углов B и C пересекаются в точке A_1 ; аналогично определим точки B_1 и C_1 (рис. 5.1). Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний (*теорема Морли*).

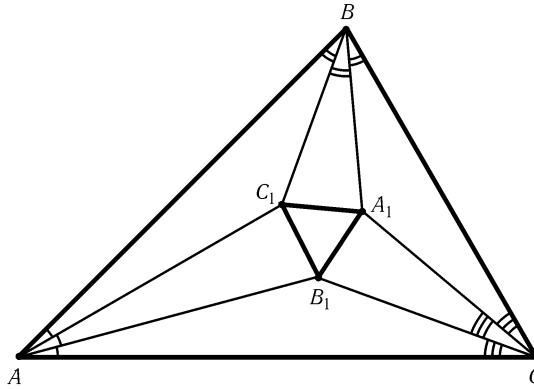


Рис. 5.1

5.60*. На сторонах правильного треугольника ABC как на основаниях внутренним образом построены равнобедренные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 с углами α, β и γ при основаниях, причем $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Прямые BC_1 и B_1C пересекаются в точке A_2, AC_1 и A_1C — в точке B_2, AB_1 и A_1B — в точке C_2 . Докажите, что углы треугольника $A_2B_2C_2$ равны $3\alpha, 3\beta$ и 3γ .

5.61*. Окружность радиуса u_a вписана в угол A треугольника ABC , окружность радиуса u_b вписана в угол B ; эти окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника со сторонами $a_1 = \sqrt{u_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)}, b_1 = \sqrt{u_b \operatorname{ctg}(\beta/2)}$ и $c_1 = \sqrt{c}$ равен $\sqrt{p}/2$, где p — полупериметр треугольника ABC .

5.62*. Окружность S_1 вписана в угол A треугольника ABC ; окружность S_2 вписана в угол B и касается S_1 (внешним образом); окружность S_3

вписана в угол C и касается S_2 ; окружность S_4 вписана в угол A и касается S_3 и т. д. Докажите, что окружность S_7 совпадает с S_1 .

5.63*. Окружность S_1 вписана в угол A треугольника ABC . Из вершины C к ней проведена касательная (отличная от CA), и в образовавшийся треугольник с вершиной B вписана окружность S_2 . Из вершины A к S_2 проведена касательная, и в образовавшийся треугольник с вершиной C вписана окружность S_3 и т. д. Докажите, что окружность S_7 совпадает с S_1 .

§7. Теорема Менелая

Пусть \vec{AB} и \vec{CD} — коллинеарные векторы. Обозначим через $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ величину $\pm \frac{AB}{CD}$, где знак плюс берется в том случае, когда векторы \vec{AB} и \vec{CD} сонаправлены, а знак минус — в случае, когда векторы \vec{AB} и \vec{CD} направлены в разные стороны.

5.64*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1 \quad (\text{теорема Менелая}).$$

5.65*. Решите задачу 5.95, а) с помощью теоремы Менелая.

5.66*. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2 . Докажите, что прямая A_1A_2 проходит через точку пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям S_1 и S_2 .

5.67*. а) Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E . Докажите, что $BE : CE = c^2 : b^2$.

б) Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.

5.68*. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK , и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE . Прямая, проходящая через точку B параллельно CE , пересекает CK в точке F . Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

5.69*. На прямых BC, CA и AB взяты точки A_1, B_1 и C_1 , причем точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Прямые, симметричные прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC , пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_2, B_2 и C_2 . Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

* * *

5.70*. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O . Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1

лежат на одной прямой (Дезарг).

5.71*. На одной прямой взяты точки A_1, B_1 и C_1 , а на другой — точки A_2, B_2 и C_2 . Прямые A_1B_2 и A_2B_1 , B_1C_2 и B_2C_1 , C_1A_2 и C_2A_1 пересекаются в точках C, A и B соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой (Папп).

5.72*. На сторонах AB, BC и CD четырехугольника $ABCD$ (или на их продолжениях) взяты точки K, L и M . Прямые KL и AC пересекаются в точке P , LM и BD — в точке Q . Докажите, что точка пересечения прямых KQ и MP лежит на прямой AD .

5.73*. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Через точку P проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках E и F . Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD, ABEF$ и $CDFE$ лежат на прямой, проходящей через точку Q .

5.74*. а) Через точки P и Q проведены тройки прямых. Обозначим их точки пересечения так, как показано на рис. 5.2. Докажите, что прямые KL, AC и MN пересекаются в одной точке (или параллельны).

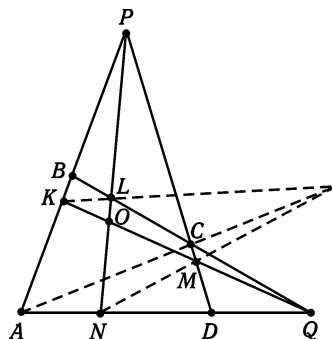


Рис. 5.2

б) Докажите, далее, что если точка O лежит на прямой BD , то точка пересечения прямых KL, AC и MN лежит на прямой PQ .

5.75*. На прямых BC, CA и AB взяты точки A_1, B_1 и C_1 . Пусть P_1 — произвольная точка прямой BC , P_2 — точка пересечения прямых P_1B_1 и AB , P_3 — точка пересечения прямых P_2A_1 и CA , P_4 — точка пересечения P_3C_1 и BC и т. д. Докажите, что точки P_7 и P_1 совпадают.

5.76*. Диагонали AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке. Пусть A' — точка пересечения прямых AC и FB , B' — точка пересечения BD и AC , C' — точка пересечения CE и BD . Докажите, что точки пересечения прямых $A'B'$ и $D'E'$, $B'C'$ и $E'F'$, $C'D'$ и $F'A'$ лежат на одной прямой.

См. также задачу 6.104.

§8. Теорема Чевы

5.77*. Дан треугольник ABC . На прямых AB, BC и CA взяты точки C_1, A_1 и B_1 , причем k из них лежат на сторонах треугольника и $3 - k$ — на продолжениях сторон. Пусть

$$R = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}.$$

Докажите, что:

а) точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $R = 1$ и k четно (Менелай);

б) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда $R = 1$ и k нечетно (Чева).

5.78*. Вписанная (или невписанная) окружность треугольника ABC касается прямых BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Точку пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, называют *точкой Жергонна*.

5.79*. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания невписанных окружностей со сторонами, пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*).

5.80*. Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

5.81*. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что:

а) прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP , пересекаются в одной точке;

б) прямые, соединяющие середины сторон BC, CA и AB с серединами отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 , пересекаются в одной точке.

5.82*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC , в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

5.83*. а) Пусть α, β и γ — произвольные углы, причем сумма любых двух из них меньше 180° . На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 , имеющие при вершинах A, B и C углы α, β и γ . Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

б) Докажите аналогичное утверждение для треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC внутренним образом.

5.84*. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC касаются окружности с центром O в точках A_1, B_1 и C_1 . На лучах OA_1, OB_1 и OC_1 отложены равные отрезки OA_2, OB_2 и OC_2 . Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

5.85*. Прямые AP, BP и CP пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_2, B_2 и C_2 выбраны на прямых BC, CA и AB так, что $\overline{BA_2} : \overline{A_2C} = \overline{A_1C} : \overline{BA_1}$, $\overline{CB_2} : \overline{B_2A} = \overline{B_1A} : \overline{CB_1}$ и $\overline{AC_2} : \overline{C_2B} = \overline{C_1B} : \overline{AC_1}$. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 тоже пересекаются в одной точке Q (или параллельны).

Такие точки P и Q называют *изотомически сопряженными* относительно треугольника ABC .

5.86*. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 . Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}.$$

5.87*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , причем прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P . Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 , симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке Q .

Такие точки P и Q называют *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC .

5.88*. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5.89*. Из некоторой точки P опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на сторону BC треугольника ABC и на высоту AA_3 . Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

5.90*. Через точки A и D , лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке S . На дуге AD взяты точки B и C . Прямые AC и BD пересекаются в точке P , AB и CD — в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через точку S .

5.91*. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1 . Внутри треугольника ABC взята точка X . Прямая AX пересекает дугу B_1C_1 вписанной окружности в точке A_2 ; точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

5.92*. Внутри треугольника ABC взята точка X . Прямая AX пересекает описанную окружность в точке A_1 . В сегмент, отсекаемый стороной BC , вписана окружность, касающаяся дуги BC в точке A_1 , а стороны BC — в точке A_2 . Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

5.93*. а) На сторонах BC, CA и AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin ABB_1 \sin CAA_1}{\sin BAA_1 \sin CBB_1}.$$

б) Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки M и N так, что $\angle CAM = \angle ABN$ и $\angle CBM = \angle BAN$. Докажите, что точки C, M и N лежат на одной прямой.

5.94*. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекают отрезки C_1B_1 и B_1A_1 в точках M и N . Докажите, что $\angle MBV_1 = \angle NBB_1$.

См. также задачи 10.56, 14.7, 14.40.

§9. Прямая Симсона

5.95*. а) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

б) Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника.

5.96*. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

5.97*. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB' и DC' на прямые AC и AB ; точка M лежит на прямой $B'C'$, причем $DM \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_1 .

5.98*. а) Из точки P описанной окружности треугольника ABC проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным) углом α к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) Докажите, что при замене в определении прямой Симсона угла 90° на угол α она повернется на угол $90^\circ - \alpha$.

5.99*. а) Из точки P описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PA_1 и PB_1 на прямые BC и AC . Докажите, что $PA \cdot PA_1 = 2Rd$, где R — радиус описанной окружности, d — расстояние от точки P до прямой A_1B_1 .

б) Пусть α — угол между прямыми A_1B_1 и BC . Докажите, что $\cos \alpha = PA/2R$.

5.100*. Пусть A_1 и B_1 — проекции точки P описанной окружности треугольника ABC на прямые BC и AC . Докажите, что длина отрезка A_1B_1 равна длине проекции отрезка AB на прямую A_1B_1 .

5.101*. На окружности фиксированы точки P и C ; точки A и B перемещаются по окружности так, что угол ACB остается постоянным. Докажите, что прямые Симсона точки P относительно треугольников ABC касаются фиксированной окружности.

5.102*. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относитель-

но треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P .

5.103*. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек (см. задачу 5.117).

5.104*. Точки A, B, C, P и Q лежат на окружности с центром O , причем углы между вектором \vec{OP} и векторами $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ и \vec{OQ} равны α, β, γ и $(\alpha + \beta + \gamma)/2$. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна OQ .

5.105*. Точки A, B, C и P лежат на окружности с центром O . Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны прямым PA, PB, PC ($PA \parallel B_1C_1$ и т. д.). Через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ проведены прямые, параллельные сторонам треугольника ABC .

а) Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке P_1 , которая лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что прямая Симсона точки P_1 параллельна прямой OP .

5.106*. Хорда PQ описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна стороне BC . Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC параллельна прямой AQ .

5.107*. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H ; P — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.

5.108*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a — прямая Симсона точки A относительно треугольника $B_1C_1D_1$, прямые l_b, l_c и l_d определяются аналогично. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5.109*. а) Докажите, что проекции точки P описанной окружности четырехугольника $ABCD$ на прямые Симсона треугольников $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1$ и $B_1A_1C_1$ лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырехугольника).

б) Докажите, что аналогично по индукции можно определить прямую Симсона вписанного n -угольника как прямую, содержащую проекции точки P на прямые Симсона всех $(n - 1)$ -угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n -угольника.

См. также задачи 5.11, 5.65.

§10. Подерный треугольник

Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB . Треугольник $A_1B_1C_1$ называют *подерным* (или *педальным*) треугольником точки P относительно треугольника ABC .

5.110. Пусть $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник точки P относительно треугольника ABC . Докажите, что $B_1C_1 = BC \cdot AP/2R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC .

5.111*. Прямые AP , BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2 ; $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник точки P относительно треугольника ABC . Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

5.112*. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P . Опустив из нее перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны, получим $\triangle A_1B_1C_1$. Прделаем для него ту же операцию, получим $\triangle A_2B_2C_2$, а затем $\triangle A_3B_3C_3$. Докажите, что $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$.

5.113*. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R с центром O . Докажите, что площадь подерного треугольника точки P относительно треугольника ABC равна $\frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| S_{ABC}$, где $d = PO$.

5.114*. Из точки P опущены перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны треугольника ABC . Прямая l_a соединяет середины отрезков PA и B_1C_1 . Аналогично определяются прямые l_b и l_c . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5.115*. а) Точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC . Докажите, что их подерные треугольники имеют общую описанную окружность, причем ее центром является середина отрезка P_1P_2 .

б) Докажите, что это утверждение останется верным, если из точек P_1 и P_2 проводить не перпендикуляры к сторонам, а прямые под данным (ориентированным) углом.

См. также задачи 5.146, 5.147, 14.21 б).

§11. Прямая Эйлера и окружность девяти точек

5.116*. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , O — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан. Докажите, что точка M лежит на отрезке OH , причем $OM : MH = 1 : 2$. (Прямую, содержащую точки O, M и H , называют *прямой Эйлера*).

5.117*. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), причем центром этой окружности является середина отрезка OH .

5.118*. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность девяти точек.

б) Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC, HBC, AHC и ABH образуют четырехугольник, симметричный четырехугольнику $HABC$.

5.119*. Какие стороны пересекает прямая Эйлера в остроугольном и тупоугольном треугольниках?

5.120*. а) Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .

б) Докажите, что описанная окружность делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей.

5.121*. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC параллельна стороне BC тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$.

5.122*. Докажите, что отрезок, отсекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из ее центра под углом $2|\angle A - \angle B|$.

5.123*. Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.

5.124*. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что прямая Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

5.125*. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Пусть A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 — диаметры окружности девяти точек треугольника ABC . Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (или параллельны).

См. также задачи 3.66 а), 13.34 б).

§12. Точки Брокара

5.126*. а) Докажите, что внутри треугольника ABC существует такая точка P , что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$.

б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные ему треугольники CA_1B, CAB_1 и C_1AB (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т. д.). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, причем эта точка совпадает с точкой задачи а).

Точку P называют *точкой Брокара* треугольника ABC . Аналогично доказывается, что существует еще и вторая точка Брокара Q , для которой $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$.

5.127*. а) Через точку Брокара P треугольника ABC проведены прямые AP, BP и CP , пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$.

б) Треугольник ABC вписан в окружность S . Докажите, что треугольник, образованный точками пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью S , может быть равен треугольнику ABC не более чем для восьми различных точек P . (Предполагается, что точки пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью отличны от точек A, B и C .)

5.128*. а) Пусть P — точка Брокара треугольника ABC . Угол $\varphi = \angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$ называется *углом Брокара* этого треугольника. Докажите, что $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$.

б) Докажите, что точки Брокара треугольника ABC изогонально сопряжены.

в) Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке C и прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекаются в точке A_1 . Докажите, что угол Брокара треугольника ABC равен углу A_1AC .

5.129*. а) Докажите, что угол Брокара любого треугольника не превосходит 30° .

б) Внутри треугольника ABC взята точка M . Докажите, что один из углов ABM, BCM и CAM не превосходит 30° .

5.130*. Пусть Q — вторая точка Брокара треугольника ABC , O — центр его описанной окружности, A_1, B_1 и C_1 — центры описанных окружностей треугольников CAQ, ABQ и BCQ . Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ и O — первая точка Брокара треугольника $A_1B_1C_1$.

5.131*. Пусть P — точка Брокара треугольника ABC ; R_1, R_2 и R_3 — радиусы описанных окружностей треугольников ABP, BCP и CAP . Докажите, что $R_1R_2R_3 = R^3$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC .

5.132*. Пусть P и Q — первая и вторая точки Брокара треугольника ABC . Прямые CP и BQ , AP и CQ , BP и AQ пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через точки P и Q .

5.133*. На сторонах CA, AB и BC остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\angle AB_1A_1 = \angle BC_1B_1 = \angle CA_1C_1$. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, причем центр поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой, совпадает с первой точкой Брокара обоих треугольников.

См. также задачу 19.56.

5.134*. Докажите, что для угла Брокара φ выполняются следующие неравенства:

а) $\varphi^3 \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)$;

б) $8\varphi^3 \leq \alpha\beta\gamma$ (неравенство *Йиффа*).

5.135*. Пусть вершины B и C треугольника фиксированы, а вершина A движется так, что угол Брокара φ треугольника ABC остается постоянным. Тогда точка A движется по окружности радиуса $(a/2)\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 3}$, где $a = BC$ (окружность *Нейберга*).

5.136*. Опустим из точки M перпендикуляры MA_1 , MB_1 и MC_1 на прямые BC , CA и AB . Для фиксированного треугольника ABC множество точек M , для которых угол Брокера треугольника $A_1B_1C_1$ имеет заданное значение, состоит из двух окружностей, причем одна из них расположена внутри описанной окружности треугольника ABC , а другая вне ее (*окружности Скоуте*).

§13. Точка Лемуана

Пусть AM — медиана треугольника ABC , а прямая AS симметрична прямой AM относительно биссектрисы угла A (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называют *симедианой* треугольника ABC ; иногда симедианой называется луч AS .

Симедианы треугольника пересекаются в точке, изогонально сопряженной точке пересечения медиан. Точку пересечения симедиан треугольника называют *точкой Лемуана*.

5.137. Прямые AM и AN симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC (точки M и N лежат на прямой BC). Докажите, что $BM \cdot BN / (CM \cdot CN) = c^2 / b^2$. В частности, если AS — симедиана, то $BS / CS = c^2 / b^2$.

5.138. Выразите длину симедианы AS через длины сторон треугольника ABC .

5.139. Отрезок B_1C_1 , где точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB , называют *антипараллельным* стороне BC , если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ и $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$. Докажите, что симедиана AS делит пополам любой отрезок B_1C_1 , антипараллельный стороне BC .

5.140. Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K . Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S . Докажите, что BD — симедиана треугольника ABC .

5.141*. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что прямая AP содержит симедиану AS .

5.142*. Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC , окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB . Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC .

5.143*. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E . Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в

точках A и X . Докажите, что AH — симедиана треугольника ABC .

* * *

5.144*. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC с прямым углом C является серединой высоты CH .

5.145*. Через точку X , лежащую внутри треугольника ABC , проведены три отрезка, антипараллельных его сторонам (см. задачу 5.139). Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X — точка Лемуана.

5.146*. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K на стороны треугольника ABC . Докажите, что K — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

5.147*. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K треугольника ABC на стороны BC, CA и AB . Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна прямой B_1C_1 .

5.148*. Прямые AK, BK и CK , где K — точка Лемуана треугольника ABC , пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что K — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

5.149*. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

См. также задачи 11.22, 19.55, 19.56.

Задачи для самостоятельного решения

5.150. Докажите, что проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного первой стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

5.151. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей треугольника ABC равна $2pR$.

5.152. Равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b и равнобедренный треугольник с основанием b и боковой стороной a вписаны в окружность радиуса R . Докажите, что если $a \neq b$, то $ab = \sqrt{5}R^2$.

5.153. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается гипотенузы AB в точке P ; CH — высота треугольника ABC . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ACH лежит на перпендикуляре, опущенном из точки P на AC .

5.154. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 , а вневписанная окружность касается продолжения сторон в точках B_2 и C_2 . Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых B_1C_1 и B_2C_2 .

5.155. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Пусть O, O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC, ABD и ACD . Докажите, что $OO_1 = OO_2$.

5.156. Треугольник, составленный: а) из медиан; б) из высот треугольника ABC , подобен треугольнику ABC . Каким соотношением связаны длины сторон треугольника ABC ?

5.157. Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что одно из чисел $1/OA_1, 1/OB_1$ и $1/OC_1$ равно сумме двух других.

5.158. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что если $\angle A = 45^\circ$, то B_1C_1 — диаметр окружности девяти точек треугольника ABC .

5.159. Углы треугольника ABC удовлетворяют соотношению $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$. Докажите, что его описанная окружность и окружность девяти точек пересекаются под прямым углом.

Решения

5.1. Пусть $AC_1 = AB_1 = x, BA_1 = BC_1 = y$ и $CA_1 = CB_1 = z$. Тогда $a = y + z, b = z + x$ и $c = x + y$. Вычитая третье равенство из суммы первых двух, получаем $z = (a + b - c)/2$. Поэтому, если треугольник ABC задан, то положение точек A_1 и B_1 определено однозначно. Аналогично положение точки C_1 определено однозначно. Остается заметить, что точки касания вписанной окружности со сторонами удовлетворяют указанным в условии задачи соотношениям.

5.2. Лучи CO_a и CO_b — биссектрисы внешних углов при вершине C , поэтому C лежит на прямой O_aO_b и $\angle O_aCB = \angle O_bCA$. Так как CO_c — биссектриса угла BCA , то $\angle BCO_c = \angle ACO_c$. Складывая эти равенства, получаем $\angle O_aCO_c = \angle O_cCO_b$, т. е. O_cC — высота треугольника $O_aO_bO_c$. Аналогично доказывается, что O_aA и O_bB — высоты этого треугольника.

5.3. Ясно, что $\angle BOC = 180^\circ - \angle CBO - \angle BCO = 180^\circ - \angle B/2 - \angle C/2 = 90^\circ + \angle A/2$, а $\angle BO_aC = 180^\circ - \angle BOC$, так как $\angle OBO_a = \angle OCO_a = 90^\circ$.

5.4. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC , O — точка их пересечения. Предположим, что $x > 1$. Тогда $\angle PAB > \angle PAC$, т. е. точка P лежит внутри треугольника AA_1C . Аналогично точка P лежит внутри треугольников CC_1B и BB_1A . Но единственной общей точкой трех этих треугольников является точка O . Получено противоречие. Случай $x < 1$ разбирается аналогично.

5.5. Пусть d_a, d_b и d_c — расстояния от точки O до сторон BC, CA и AB . Тогда $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$ и $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$. Если $h_a - d_a = h_b - d_b = h_c - d_c = x$, то $(a + b + c)x = a(h_a - d_a) + b(h_b - d_b) + c(h_c - d_c) = 6S - 2S = 4S$. Поэтому $x = 4S/2p = 2r$.

5.6. Докажем, что точка O является центром вневписанной окружности треугольника PBQ , касающейся стороны PQ . В самом деле, $\angle POQ = \angle A = 90^\circ - \angle B/2$; из центра вневписанной окружности отрезок PQ виден под таким же углом (задача 5.3). Кроме того, точка O лежит на биссектрисе угла B . Следовательно, полупериметр треугольника PBQ равен длине проекции отрезка OB на прямую CB .

5.7. Пусть P — точка касания вписанной окружности со стороной BC , PQ — диаметр вписанной окружности, R — точка пересечения прямых AQ и BC . Так как $CR = BP$ (см. задачу 19.11, а)) и M — середина стороны BC , то $RM = PM$. Кроме того, O — середина диаметра PQ , поэтому $MO \parallel QR$, а так как $AH \parallel PQ$, то $AE = OQ$.

5.8. Данная окружность может быть как вписанной, так и невписанной окружностью треугольника ABC , отсекаемого касательной от угла. Используя результат задачи 3.2, в обоих случаях легко проверить, что $uv/w^2 = (p-b)(p-c)\sin B \sin C/h_a^2$. Остается заметить, что $h_a = b \sin C = c \sin B$ и $(p-b)(p-c)/bc = \sin^2(A/2)$ (задача 12.13).

5.9. а) Пусть $x_1 = BP$ и $x_2 = AP$. Тогда $r_1 = \frac{x_1 h}{a+p+x_1}$, $r_2 = \frac{x_2 h}{b+p+x_2}$, $r = \frac{(x_1+x_2)h}{a+b+p+x_1+x_2}$. После несложных преобразований требуемое равенство приводится к виду $x_2(p^2+x_1^2-a^2) + x_1(p^2+x_2^2-b^2) = 0$. Остается заметить, что $p^2+x_1^2-a^2 = 2px_1 \cos BPC$, $p^2+x_2^2-b^2 = 2px_2 \cos APC$ и $\cos BPC = -\cos APC$.

б) Согласно задаче а) $r_{k+1} = r_1 + r_k - \frac{2r_1 r_k}{h}$, где h — расстояние от точки B до прямой $A_1 A_2$.

5.10. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, симметричные точке H относительно сторон BC, CA и AB соответственно. Так как $AB \perp CH$ и $BC \perp AH$, то $\angle(AB, BC) = \angle(CH, HA)$, а так как треугольник $AC_1 H$ равнобедренный, то $\angle(CH, HA) = \angle(AC_1, C_1 C)$. Следовательно, $\angle(AB, BC) = \angle(AC_1, C_1 C)$, т. е. точка C_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC . Аналогично доказывается, что точки A_1 и B_1 лежат на этой окружности.

5.11. Точки X, Y и Z лежат на одной прямой (задача 5.95, а)). Поэтому $S_{PYZ} = S_{PXZ} + S_{PXY}$. Кроме того, $S_{PYZ} = \frac{1}{2}PX \cdot PZ \sin \alpha$, так как $PX \perp BC$ и $PZ \perp CA$. Подставив аналогичным образом две другие площади, получим

$$\frac{\sin \alpha}{PX} = \frac{\sin \beta}{PY} + \frac{\sin \gamma}{PZ}.$$

Остается заметить, что $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = BC : CA : AB$.

5.12. а) Пусть M — точка пересечения прямой AI с описанной окружностью. Проведя через точку I диаметр, получим $AI \cdot IM = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2$. Так как $IM = CM$ (задача 2.4, а)), то $R^2 - d^2 = AI \cdot CM$. Остается заметить, что $AI = r/\sin(A/2)$ и $CM = 2R \sin(A/2)$.

б) Пусть M — точка пересечения прямой AI_a с описанной окружностью. Тогда $AI_a \cdot I_a M = d_a^2 - R^2$. Так как $I_a M = CM$ (задача 2.4, а)), то $d_a^2 - R^2 = AI_a \cdot CM$. Остается заметить, что $AI_a = r_a/\sin(A/2)$ и $CM = 2R \sin(A/2)$.

5.13. а) Так как B_1 — центр описанной окружности треугольника AMC (см. задачу 2.4, а)), то $AM = 2MB_1 \sin ACM$. Ясно также, что $MC = r/\sin ACM$. Поэтому $MA \cdot MC/MB_1 = 2r$.

б) Так как $\angle MBC_1 = \angle BMC_1 = 180^\circ - \angle BMC$ и $\angle BC_1 M = \angle A$, то

$$\frac{MC_1}{BC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{MC_1}{BM} = \frac{\sin BCM}{\sin BMC} \cdot \frac{\sin MBC_1}{\sin BC_1 M} = \frac{\sin BCM}{\sin A}.$$

Кроме того, $MB = 2MA_1 \sin BCM$. Поэтому $MC_1 \cdot MA_1/MB = BC/2 \sin A = R$.

5.14. Пусть M — середина стороны AC , N — точка касания вписанной окружности со стороной BC . Тогда $BN = p-b$ (см. задачу 3.2), поэтому $BN = AM$, так как $p = 3b/2$ по условию. Кроме того, $\angle OBN = \angle B_1 AM$, а значит, $\triangle OBN = \triangle B_1 AM$, т. е. $OB = B_1 A$. Но $B_1 A = B_1 O$ (см. задачу 2.4, а)).

5.15. Пусть O и O_1 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Рассмотрим окружность радиуса $d = OO_1$ с центром O . Проведем в этой окружности хорды O_1M и O_1N , параллельные сторонам AB и AC соответственно. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной AB , L — середина стороны AB . Так как $OK \perp AB$, $O_1L \perp AB$ и $O_1M \parallel AB$, то $O_1M = 2KL = 2BL - 2BK = c - (a + c - b) = b - a = AE$. Аналогично $O_1N = AD$, а значит, $\triangle MO_1N = \triangle EAD$. Следовательно, радиус описанной окружности треугольника EAD равен d .

5.16. Пусть вписанная окружность касается стороны AC в точке K , а внеписанная окружность касается продолжения стороны AC в точке L . Тогда $r = CK$ и $r_c = CL$. Остается воспользоваться результатом задачи 3.2.

5.17. Так как $AB/2 = AM = BM$, то $CM = AB/2$ тогда и только тогда, когда точка C лежит на окружности с диаметром AB .

5.18. Пусть M и N — середины сторон AB и CD . Треугольник APB прямоугольный, поэтому $PM = AB/2$ и $\angle MPA = \angle PAM$, а значит, $PM \parallel AD$. Аналогичные рассуждения показывают, что точки P, M, N и Q лежат на одной прямой и $PQ = PM + MN + NQ = (AB + (BC + AD) + CD)/2$.

5.19. Пусть F — точка пересечения прямых DE и BC ; K — середина отрезка EC . Отрезок CD является биссектрисой и высотой треугольника ECF , поэтому $ED = DF$, а значит, $DK \parallel FC$. Медиана DK прямоугольного треугольника EDC в два раза меньше его гипотенузы EC (задача 5.17), поэтому $AD = DK = EC/2$.

5.20. Прямая EM проходит через середину стороны AB , поэтому она проходит через середину O отрезка DK . Кроме того, $\angle EKO = \angle ABK = \angle KBC = \angle KEO$. Поэтому $OE = OK = OD$. Согласно задаче 5.17 $\angle DEK = 90^\circ$.

5.21. Пусть сумма углов при основании AD трапеции $ABCD$ равна 90° . Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через O . Точка O лежит на прямой, проходящей через середины оснований. Проведем через точку C прямую CK , параллельную этой прямой, и прямую CE , параллельную прямой AB (точки K и E лежат на основании AD). Тогда CK — медиана прямоугольного треугольника ECD , поэтому $CK = ED/2 = (AD - BC)/2$ (см. задачу 5.17).

5.22. Ясно, что $\angle CEB = \angle A + \angle ACE = \angle BCK + \angle KCE = \angle BCE$.

5.23. Отрезки CF и DK являются биссектрисами подобных треугольников ACB и CDB , поэтому $AB : FB = CB : KB$. Следовательно, $FK \parallel AC$. Аналогично доказывается, что $LF \parallel CB$. Поэтому $CLFK$ — прямоугольник, у которого диагональ CF является биссектрисой угла LCK , т. е. он квадрат.

5.24. Так как $\frac{\sin ACQ}{AQ} = \frac{\sin AQC}{AC}$, то $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - 90^\circ - \varphi)}{a \cos \varphi} = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{a \cos \varphi}$, где a — сторона квадрата $ABPQ$, $\varphi = \angle CAB$. Поэтому $\operatorname{ctg} \alpha = 1 + \operatorname{tg} \varphi$. Аналогично $\operatorname{ctg} \gamma = 1 + \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = 1 + \operatorname{ctg} \varphi$. Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \varphi} = 1$, а значит, $\cos \alpha \cos \gamma = \cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha = \sin(\alpha + \gamma) = \cos \beta$.

5.25. По теореме Пифагора $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (AM^2 - PM^2) + (BM^2 - QM^2) + (CM^2 - RM^2)$ и $PB^2 + QC^2 + RA^2 = (BM^2 - PM^2) + (CM^2 - QM^2) + (AM^2 - RM^2)$. Эти выражения равны.

Так как $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (a - PB)^2 + (a - QC)^2 + (a - RA)^2 = 3a^2 - 2a(PB + QC + RA) + PB^2 + QC^2 + RA^2$, где $a = AB$, то $PB + QC + RA = 3a/2$.

5.26. Пусть точка F делит отрезок BC в отношении $CF : FB = 1 : 2$; P

и Q — точки пересечения отрезка AF с BD и CE соответственно. Ясно, что треугольник OPQ правильный. Используя результат задачи 1.3, легко проверить, что $AP : PF = 3 : 4$ и $AQ : QF = 6 : 1$. Следовательно, $AP : PQ : QF = 3 : 3 : 1$, а значит, $AP = PQ = OP$. Поэтому $\angle AOP = (180^\circ - \angle APO)/2 = 30^\circ$ и $\angle AOC = \angle AOP + \angle POQ = 90^\circ$.

5.27. Пусть A и B , C и D , E и F — точки пересечения окружности со сторонами PQ , QR , RP треугольника PQR . Рассмотрим медиану PS . Она соединяет середины параллельных хорд FA и DC и поэтому перпендикулярна им. Следовательно, PS является высотой треугольника PQR , а значит $PQ = PR$. Аналогично $PQ = QR$.

5.28. Пусть H — точка пересечения высот AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC . По условию $A_1H \cdot BH = B_1H \cdot AH$. С другой стороны, так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB , то $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$. Следовательно, $AH = BH$ и $A_1H = B_1H$, а значит, $AC = BC$. Аналогично $BC = AB$.

5.29. а) Предположим, что треугольник ABC неправильный; например $a \neq b$. Так как $a + h_a = a + b \sin \gamma$ и $b + h_b = b + a \sin \gamma$, то $(a - b)(1 - \sin \gamma) = 0$. Поэтому $\sin \gamma = 1$, т. е. $\gamma = 90^\circ$. Но тогда $a \neq c$, и аналогичные рассуждения показывают, что $\beta = 90^\circ$. Получено противоречие.

б) Обозначим сторону квадрата, две вершины которого лежат на стороне BC , через x . Из подобия треугольников ABC и APQ , где P и Q — вершины квадрата, лежащие на AB и AC , получаем $\frac{x}{a} = \frac{h_a - x}{h_a}$, т. е. $x = \frac{ah_a}{a + h_a} = \frac{2S}{a + h_a}$. Аналогичные рассуждения для других квадратов показывают, что $a + h_a = b + h_b = c + h_c$.

5.30. Если α , β и γ — углы треугольника ABC , то углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $(\beta + \gamma)/2$, $(\gamma + \alpha)/2$ и $(\alpha + \beta)/2$. Пусть для определенности $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Тогда $(\alpha + \beta)/2 \geq (\alpha + \gamma)/2 \geq (\beta + \gamma)/2$. Следовательно, $\alpha = (\alpha + \beta)/2$ и $\gamma = (\beta + \gamma)/2$, т. е. $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$.

5.31. В любом треугольнике высота больше диаметра вписанной окружности. Поэтому длины высот — целые числа, большие 2, т. е. все они не меньше 3. Пусть S — площадь треугольника, a — наибольшая его сторона, h — соответствующая высота.

Предположим, что треугольник неправильный. Тогда его периметр P меньше $3a$. Поэтому $3a > P = Pr = 2S = ha$, т. е. $h < 3$. Получено противоречие.

5.32. Так как внешний угол при вершине A треугольника ABA_1 равен 120° и $\angle A_1AB_1 = 60^\circ$, то AB_1 — биссектриса этого внешнего угла. Кроме того, BB_1 — биссектриса внутреннего угла при вершине B , поэтому A_1B_1 — биссектриса угла AA_1C . Аналогично A_1C_1 — биссектриса угла AA_1B . Поэтому $\angle B_1A_1C_1 = (\angle AA_1C + \angle AA_1B)/2 = 90^\circ$.

5.33. Согласно решению предыдущей задачи луч A_1C_1 является биссектрисой угла AA_1B . Пусть K — точка пересечения биссектрис треугольника A_1AB . Тогда $\angle C_1KO = \angle A_1KB = 90^\circ + \angle A/2 = 120^\circ$. Поэтому $\angle C_1KO + \angle C_1AO = 180^\circ$, т. е. четырехугольник $AOKC_1$ вписанный. Следовательно, $\angle A_1C_1O = \angle KC_1O = \angle KAO = 30^\circ$.

5.34. а) Пусть S — описанная окружность треугольника ABC , S_1 — окружность, симметричная S относительно прямой BC . Ортоцентр H треугольника ABC лежит на окружности S_1 (задача 5.10), поэтому достаточно проверить, что центр O окружности S тоже принадлежит S_1 и биссектриса внешнего угла A проходит через центр окружности S_1 . Тогда $POAH$ — ромб, так как $PO \parallel HA$.

Пусть PQ — диаметр окружности S , перпендикулярный прямой BC , причем точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC . Тогда AQ — биссектриса

угла A , а AP — биссектриса внешнего угла A . Так как $\angle BPC = 120^\circ = \angle BOC$, то точка P является центром окружности S_1 , а точка O принадлежит окружности S_1 .

б) Пусть S — описанная окружность треугольника ABC , Q — точка пересечения биссектрисы угла BAC с окружностью S . Легко проверить, что Q — центр окружности S_1 , симметричной окружности S относительно прямой BC . Кроме того, точки O и H лежат на окружности S_1 , а так как $\angle BIC = 120^\circ$ и $\angle BI_aC = 60^\circ$ (см. задачу 5.3), то II_a — диаметр окружности S_1 . Ясно также, что $\angle OQI = \angle QAH = \angle AQH$, так как $OQ \parallel AH$ и $HA = QO = QH$. Поэтому точки O и H симметричны относительно прямой II_a .

5.35. Построим внешним образом на стороне AC треугольника ABC правильный треугольник AB_1C . Так как $\angle A = 120^\circ$, точка A лежит на отрезке BB_1 . Поэтому $BB_1 = b + c$ и, кроме того, $BC = a$ и $B_1C = b$, т. е. треугольник BB_1C искомым.

5.36. а) Пусть M_1 и N_1 — середины отрезков BH и CH , BB_1 и CC_1 — высоты. Прямоугольные треугольники ABB_1 и BHC_1 имеют общий острый угол при вершине B , поэтому $\angle C_1HB = \angle A = 60^\circ$. Так как треугольник BMH равнобедренный, $\angle BHM = \angle HBM = 30^\circ$. Следовательно, $\angle C_1HM = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle BHM$, т. е. точка M лежит на биссектрисе угла C_1HB . Аналогично точка N лежит на биссектрисе угла B_1HC .

б) Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи, и пусть, кроме того, B' и C' — середины сторон AC и AB . Так как $AC_1 = AC \cos A = AC/2$, то $C_1C' = |AB - AC|/2$. Аналогично $B_1B' = |AB - AC|/2$, т. е. $B_1B' = C_1C'$. Следовательно, параллельные прямые BB_1 и $B'O$, CC_1 и $C'O$ образуют не просто параллелограмм, а ромб. Поэтому его диагональ HO является биссектрисой угла при вершине H .

5.37. Так как $\angle BB_1C = \angle B_1VA + \angle B_1AB > \angle B_1VA = \angle B_1VC$, то $BC > B_1C$. Поэтому точка K , симметричная B_1 относительно биссектрисы CC_1 , лежит на стороне BC , а не на ее продолжении. Так как $\angle CC_1B = 30^\circ$, то $\angle B_1C_1K = 60^\circ$, а значит, треугольник B_1C_1K правильный. В треугольниках BC_1B_1 и BKB_1 сторона BB_1 общая, стороны C_1B_1 и KB_1 равны, равны также и углы C_1BB_1 и KBB_1 но это углы не между равными сторонами. Поэтому возможны два случая:

1. $\triangle BC_1B_1 = \triangle BKB_1$. Тогда $\angle BB_1C_1 = \angle BB_1K = 60^\circ/2 = 30^\circ$. Следовательно, если O — точка пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 , то $\angle BOC = \angle B_1OC_1 = 180^\circ - \angle OC_1B_1 - \angle OB_1C_1 = 120^\circ$. С другой стороны, $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$ (см. задачу 5.3), т. е. $\angle A = 60^\circ$.

2. $\angle BC_1B_1 + \angle BKB_1 = 180^\circ$. Тогда четырехугольник BC_1B_1K вписанный, а так как треугольник B_1C_1K правильный, то $\angle B = 180^\circ - \angle C_1B_1K = 120^\circ$.

5.38. Пусть BM — медиана, AK — биссектриса треугольника ABC и $BM \perp AK$. Прямая AK является биссектрисой и высотой треугольника ABM , поэтому $AM = AB$, т. е. $AC = 2AM = 2AB$. Следовательно, $AB = 2, BC = 3$ и $AC = 4$.

5.39. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза данного треугольника. Если числа a и b нечетные, то $a^2 + b^2$ при делении на 4 дает остаток 2 и не может быть квадратом целого числа. Поэтому одно из чисел a и b четное, а другое нечетное; пусть для определенности $a = 2p$. Числа b и c нечетные, поэтому $c + b = 2q$ и $c - b = 2r$. Следовательно $4p^2 = a^2 = c^2 - b^2 = 4qr$. Если бы числа q и r имели общий делитель d , то на d делились бы числа $a = 2\sqrt{qr}$, $b = q - r$ и $c = q + r$. Поэтому числа q и r взаимно просты, а так как $p^2 = qr$, то $q = m^2$ и $r = n^2$. В

итоге получаем $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ и $c = m^2 + n^2$.

Легко проверить также, что если $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ и $c = m^2 + n^2$, то $a^2 + b^2 = c^2$.

5.40. Пусть p — полупериметр треугольника, а a, b, c — длины его сторон. По формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. С другой стороны, $S^2 = p^2 r^2 = p^2$, так как $r = 1$. Поэтому $p = (p-a)(p-b)(p-c)$. Если ввести неизвестные $x = p-a, y = p-b, z = p-c$, то это уравнение переписывается в виде $x + y + z = xyz$. Заметим, что число p целое или полуцелое (т. е. число вида $(2n+1)/2$, где n целое), поэтому все числа x, y, z одновременно целые или полуцелые. Но если они полуцелые, то число $x + y + z$ полуцелое, а число xyz имеет вид $m/8$, где число m нечетное. Следовательно, числа x, y, z целые. Пусть для определенности $x \leq y \leq z$. Тогда $xyz = x + y + z \leq 3z$, т. е. $xy \leq 3$. Возможны три случая.

1. $x = 1, y = 1$. Тогда $2 + z = z$, чего не может быть.

2. $x = 1, y = 2$. Тогда $3 + z = 2z$, т. е. $z = 3$.

3. $x = 1, y = 3$. Тогда $4 + z = 3z$, т. е. $z = 2 < y$, чего не может быть.

Итак, $x = 1, y = 2, z = 3$. Поэтому $p = x + y + z = 6$ и $a = p - x = 5, b = 4, c = 3$.

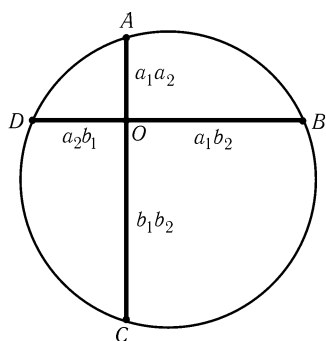


Рис. 5.3

5.41. Пусть a_1 и b_1, a_2 и b_2 — катеты двух различных пифагоровых треугольников, c_1 и c_2 — их гипотенузы. Возьмем две перпендикулярные прямые и отложим на них отрезки $OA = a_1a_2, OB = a_1b_2, OC = b_1b_2$ и $OD = a_2b_1$ (рис. 5.3). Так как $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, то четырехугольник $ABCD$ вписанный. Согласно задаче 2.72 $4R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = (c_1c_2)^2$, т. е. $R = c_1c_2/2$. Увеличив, если нужно, четырехугольник $ABCD$ в два раза, получим искомым четырехугольник.

5.42. а) Длины гипотенуз прямоугольных треугольников с катетами 5 и 12, 9 и 12 равны 13 и 15. Приложив равные катеты этих треугольников друг к другу, получим треугольник площади $12(5 +$

$+ 9)/2 = 84$.

б) Предположим сначала, что длина наименьшей стороны данного треугольника — четное число, т. е. длины сторон треугольника равны $2n, 2n + 1, 2n + 2$. Тогда по формуле Герона $16S^2 = (6n + 3)(2n + 3)(2n + 1)(2n - 1) = 4(3n^2 + 6n + 2)(4n^2 - 1) + 4n^2 - 1$. Получено противоречие, так как число, стоящее в правой части, не делится на 4. Следовательно, длины сторон треугольника равны $2n - 1, 2n$ и $2n + 1$, причем $S^2 = 3n^2(n^2 - 1)$. Поэтому $S = nk$, где k — целое число, и $k^2 = 3(n^2 - 1)$. Ясно также, что k — длина высоты, опущенной на сторону $2n$. Эта высота делит исходный треугольник на два прямоугольных треугольника с общим катетом k и гипотенузами $2n + 1$ и $2n - 1$; квадраты длин других катетов этих треугольников равны $(2n \pm 1)^2 - k^2 = 4n^2 \pm 4n + 1 - 3n^2 + 3 = (n \pm 2)^2$.

5.43. а) Так как $AB^2 - AB_1^2 = BB_1^2 = BC^2 - (AC \pm AB_1)^2$, то $AB_1 = \pm(AB^2 + AC^2 - BC^2)/2AC$.

б) Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Докажем, например, что число $q = BO/OD$ рациональное (тогда число $OD = BD/(q + 1)$ тоже рациональное). Проведем в треугольниках ABC и ADC высоты BB_1 и DD_1 . Согласно задаче а) числа AB_1 и CD_1 рациональные, а значит, число B_1D_1 тоже рациональное. Пусть E — точка пересечения прямой BB_1 и прямой, проходящей через точ-

ку D параллельно AC . В прямоугольном треугольнике BDE катет $ED = B_1D_1$ и гипотенуза BD — рациональные числа, поэтому число BE^2 тоже рациональное. Из треугольников ABB_1 и CDD_1 получаем, что числа BB_1^2 и DD_1^2 рациональные. А так как $BE^2 = (BB_1 + DD_1)^2 = BB_1^2 + DD_1^2 + 2BB_1 \cdot DD_1$, то число $BB_1 \cdot DD_1$ рациональное. Следовательно, число $BO/OD = BB_1/DD_1 = BB_1 \cdot DD_1/DD_1^2$ рациональное.

5.44. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ не может быть двух пар соответственных углов, составляющих в сумме 180° , так как иначе их сумма равна 360° и третьи углы треугольников должны быть нулевыми. Предположим теперь, что углы первого треугольника равны α, β и γ , а углы второго равны $180^\circ - \alpha, \beta$ и γ . Сумма углов двух треугольников равна 360° , поэтому $180^\circ + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, т. е. $\beta + \gamma = 90^\circ$. Следовательно, $\alpha = 90^\circ = 180^\circ - \alpha$.

5.45. Ясно, что $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{OA}$, поэтому $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{BA}$. Аналогично $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{AC}$, т. е. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Кроме того, ABA_1B_1 и ACA_1C_1 — параллелограммы. Значит, отрезки BB_1 и CC_1 проходят через середину отрезка AA_1 .

5.46. Так как $\angle MAO = \angle PAO = \angle AOM$, то $AMOP$ — ромб. Аналогично $BNOQ$ — ромб. Следовательно, $MN = MO + ON = AM + BN$ и $OP + PQ + QO = AP + PQ + QB = AB$.

5.47. а) Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам. В результате получим треугольник $A_1B_1C_1$, серединами сторон которого являются точки A, B и C . Высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ является точкой пересечения высот треугольника ABC .

б) Точка H является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $4R^2 = B_1H^2 = B_1A^2 + AH^2 = BC^2 + AH^2$. Следовательно, $AH^2 = 4R^2 - BC^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \cdot BC^2 = (BC \operatorname{ctg} \alpha)^2$.

5.48. Пусть AD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и углом 36° при вершине C . Тогда треугольник ACD равнобедренный и $\triangle ABC \sim \triangle BDA$. Поэтому $CD = AD = AB = 2xBC$ и $DB = 2xAB = 4x^2BC$, а значит, $BC = CD + DB = (2x + 4x^2)BC$.

5.49. Пусть B_1 и B_2 — проекции точки A на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B , M — середина стороны AB . Так как биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, то AB_1BB_2 — прямоугольник, и его диагональ B_1B_2 проходит через точку M . Кроме того, $\angle B_1MB = 180^\circ - 2\angle MBV_1 = 180^\circ - \angle B$. Следовательно, $B_1B_2 \parallel BC$, а значит, прямая B_1B_2 совпадает с прямой l , соединяющей середины сторон AB и AC . Аналогично доказывается, что проекции точки A на биссектрисы углов при вершине C лежат на прямой l .

5.50. Предположим, что биссектрисы углов A и B равны, но $a > b$. Тогда $\cos \frac{A}{2} < \cos \frac{B}{2}$ и $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$, т. е. $\frac{bc}{b+c} < \frac{ac}{a+c}$. Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию, так как $l_a = 2bc \cos(A/2)/(b+c)$ и $l_b = 2ac \cos(B/2)/(a+c)$ (см. задачу 4.47).

5.51. а) Согласно задаче 4.47 длина биссектрисы угла B треугольника ABC равна $2ac \cos(B/2)/(a+c)$, поэтому достаточно проверить, что система уравнений $ac/(a+c) = p, a^2 + c^2 - 2ac \cos B = q$ имеет (с точностью до перестановки чисел a и c) единственное положительное решение. Пусть $a+c = u$. Тогда $ac = pu$

и $q = u^2 - 2ru(1 + \cos \beta)$. Произведение корней этого квадратного уравнения относительно u равно $-q$, поэтому оно имеет единственный положительный корень. Ясно, что система уравнений $a + c = u, ac = ru$ имеет единственное решение.

б) В треугольниках AA_1B и CC_1B равны стороны AA_1 и CC_1 , углы при вершине B и биссектрисы углов при вершине B . Следовательно, эти треугольники равны, а значит, $AB = BC$ или $AB = BC_1$. Второе равенство выполняться не может.

5.52. Пусть точки M и N лежат на сторонах AB и AC . Если r_1 — радиус окружности с центром на отрезке MN , касающейся сторон AB и AC , то $S_{AMN} = qr_1$, где $q = (AM + AN)/2$. Прямая MN проходит через центр вписанной окружности тогда и только тогда, когда $r_1 = r$, т. е. $S_{AMN}/q = S_{ABC}/p = S_{BCNM}/(p - q)$.

5.53. а) Возьмем на продолжении отрезка AC за точку C такую точку B' , что $CB' = CB$. Треугольник BCB' равнобедренный, поэтому $\angle AEB = \angle ACB = 2\angle CBB'$, а значит, E — центр описанной окружности треугольника ABB' . Следовательно, точка F делит отрезок AB' пополам; поэтому прямая C_1F делит пополам периметр треугольника ABC .

б) Легко проверить, что прямая, проведенная через точку C параллельно BB' , является биссектрисой угла ACB . А так как $C_1F \parallel BB'$, то прямая C_1F — биссектриса угла треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC . Биссектрисы этого треугольника пересекаются в одной точке.

5.54. Пусть X — точка пересечения прямых AD_2 и CD_1 ; M, E_1 и E_2 — проекции точек X, D_1 и D_2 на прямую AC . Тогда $CE_2 = CD_2 \sin \gamma = a \sin \gamma$ и $AE_1 = c \sin \alpha$. Так как $a \sin \gamma = c \sin \alpha$, то $CE_2 = AE_1 = q$. Поэтому

$$\frac{XM}{AM} = \frac{D_2E_2}{AE_2} = \frac{a \cos \gamma}{b + q} \quad \text{и} \quad \frac{XM}{CM} = \frac{c \cos \alpha}{b + q}.$$

Следовательно, $AM : CM = c \cos \alpha : a \cos \gamma$. Высота BH делит сторону AC в таком же отношении.

5.55. а) По теореме косинусов $B_1C_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$, т. е. $a_1^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + bc \sin \alpha = \frac{b^2 + c^2}{2} + 2S$. Записывая аналогичные равенства для b_1^2 и c_1^2 и складывая их, получаем требуемое.

б) Для остроугольного треугольника ABC , прибавив к S площади треугольников ABC_1, AB_1C и A_1BC и прибавив к S_1 площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C , получим одинаковые величины (для треугольника с тупым углом A площадь треугольника AB_1C_1 следует взять со знаком минус). Поэтому $S_1 = S + (a^2 + b^2 + c^2)/4 - (ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha)/4$. Остается заметить, что $ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ac \cos \beta = 2S(\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = (a^2 + b^2 + c^2)/2$ (см. задачу 12.44, а)).

5.56. Докажем сначала, что точка B' лежит на описанной окружности треугольника AHC , где H — точка пересечения высот треугольника ABC . $\angle(AB', B'C) = \angle(AA_1, CC_1) = \angle(AA_1, BC) + \angle(BC, AB) + \angle(AB, CC_1) = \angle(BC, AB)$. Но, как следует из решения задачи 5.10, $\angle(BC, AB) = \angle(AH, HC)$, поэтому точки A, B', H и C лежат на одной окружности, причем эта окружность симметрична описанной окружности треугольника ABC относительно прямой AC . Следовательно, обе эти окружности имеют радиус R , а значит, $B'H = 2R \sin B'AH = 2R \cos \alpha$. Аналогично $A'H = 2R \cos \alpha = C'H$. Решение задачи а) тем самым завершено, а для решения задачи б) остается заметить,

что $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, так как после поворота треугольника $A'B'C'$ на угол α его стороны будут параллельны сторонам треугольника ABC .

5.57. Пусть из вершины A окружности, вписанные в углы B и C , видны под углами α_b и α_c , а радиусы этих окружностей равны r_b и r_c . Тогда

$$b = r_c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_c}{2} \quad \text{и} \quad c = r_b \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_b}{2}.$$

Поэтому равенство $\alpha_b = \alpha_c$ эквивалентно равенству

$$\frac{b}{r_c} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{r_b} - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{b}{r_c} - \frac{a+b-c}{2r} = \frac{c}{r_b} - \frac{a-b+c}{2r}.$$

После несложных преобразований получаем равенство $\frac{b}{\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r}} = \frac{c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r}}$. Ясно, что из этого равенства и из равенства $\frac{c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r}} = \frac{a}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r}}$ следует равенство $\frac{a}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r}} = \frac{b}{\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r}}$.

5.58. Пусть $a_1 = BA_1, a_2 = A_1C, b_1 = CB_1, b_2 = B_1A, c_1 = AC_1$ и $c_2 = C_1B$. Произведения длин отрезков секущих, проходящих через одну точку, равны, поэтому $a_1(a_1 + x) = c_2(c_2 - z)$, т. е. $a_1x + c_2z = c_2^2 - a_1^2$. Аналогично получаем для x, y и z еще два уравнения: $b_1y + a_2x = a_2^2 - b_1^2$ и $c_1z + b_2y = b_2^2 - c_1^2$. Домножим первое уравнение на b^{2n} , а второе и третье на c^{2n} и a^{2n} и сложим полученные уравнения. Так как, например, $c_2b^n - c_1a^n = 0$ по условию, то в правой части получим нуль. В левой части, например, коэффициент при x равен $a_1b^{2n} + a_2c^{2n} = (ac^n b^{2n} + ab^n c^{2n})/(b^n + c^n) = ab^n c^n$. Поэтому $ab^n c^n x + ba^n c^n y + ca^n b^n z = 0$. Поделив обе части равенства на $(abc)^n$, получим требуемое.

5.59. Пусть в исходном треугольнике $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta$ и $\angle C = 3\gamma$. Возьмем равносторонний треугольник $A_2B_2C_2$ и построим на его сторонах как на основаниях равнобедренные треугольники A_2B_2R, B_2C_2P и C_2A_2Q с углами при основаниях $60^\circ - \gamma, 60^\circ - \alpha, 60^\circ - \beta$ соответственно (рис. 5.4). Продолжим боковые стороны этих треугольников за точки A_2, B_2 и C_2 и обозначим точку пересечения продолжений сторон RB_2 и QC_2 через A_3, PC_2 и RA_2 через B_3, QA_2 и PB_2 че-

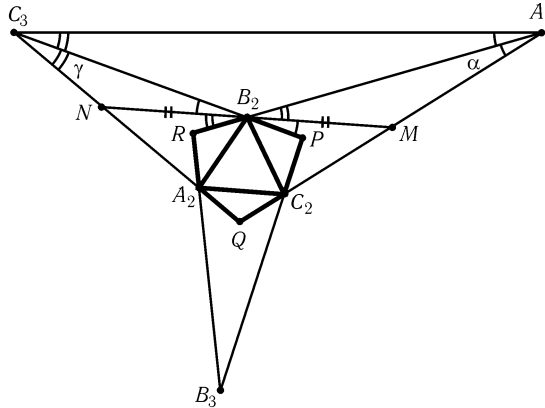


Рис. 5.4

рез C_3 . Проведем через B_2 прямую, параллельную A_2C_2 , и обозначим через M и N точки ее пересечения с прямыми QA_3 и QC_3 . Ясно, что B_2 — середина отрезка NM . Вычислим углы треугольников B_2C_3N и B_2A_3M : $\angle C_3B_2N = \angle PB_2M = \angle C_2B_2M - \angle C_2B_2P = \alpha$; $\angle B_2NC_3 = 180^\circ - \angle C_2A_2Q = 120^\circ + \beta$, значит, $\angle B_2C_3N = 180^\circ - \alpha - (120^\circ + \beta) = \gamma$. Аналогично $\angle A_3B_2M = \gamma$ и $\angle B_2A_3M = \alpha$. Следовательно, $\triangle B_2C_3N \sim \triangle A_3B_2M$. Значит, $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : B_2M$,

а так как $B_2M = B_2N$ и $\angle C_3B_2A_3 = \angle C_3NB_2$, то $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : NB_2$ и $\triangle C_3B_2A_3 \sim \triangle C_3NB_2$, следовательно, $\angle B_2C_3A_3 = \gamma$. Аналогично $\angle A_2C_3B_3 = \gamma$, а значит, $\angle A_3C_3B_3 = 3\gamma = \angle C$ и C_3B_2, C_3A_2 — триссектрисы угла C_3 треугольника $A_3B_3C_3$. Аналогичные рассуждения для вершин A_3 и B_3 показывают, что $\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$, а точки пересечения триссектрис треугольника $A_3B_3C_3$ образуют правильный треугольник $A_2B_2C_2$.

5.60. Точка A_1 лежит на биссектрисе угла BAC , поэтому точка A лежит на продолжении биссектрисы угла $B_2A_1C_2$. Кроме того, $\angle B_2AC_2 = \alpha = (180^\circ - \angle B_2A_1C_2)/2$. Поэтому A — центр вневписанной окружности треугольника $B_2A_1C_2$ (см. задачу 5.3). Пусть D — точка пересечения прямых AB и CB_2 . Тогда $\angle AB_2C_2 = \angle AB_2D = 180^\circ - \angle B_2AD - \angle ADB_2 = 180^\circ - \gamma - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ + \beta$. А так как $\angle AB_2C = 180^\circ - (\alpha + \beta) - (\beta + \gamma) = 120^\circ - \beta$, то $\angle CB_2C_2 = \angle AB_2C - \angle AB_2C_2 = 60^\circ - 2\beta$. Аналогично $\angle AB_2A_2 = 60^\circ - 2\beta$. Поэтому $\angle A_2B_2C_2 = \angle AB_2C - \angle AB_2A_2 - \angle CB_2C_2 = 3\beta$. Аналогично $\angle B_2A_2C_2 = 3\alpha$ и $\angle A_2C_2B_2 = 3\gamma$.

5.61. Длина общей касательной к данным окружностям равна $2\sqrt{u_a u_b}$, поэтому

$$u_a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{u_a u_b} + u_b \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = c,$$

т. е. $a_1^2 + 2a_1 b_1 \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + b_1^2 = c_1^2$. Согласно задаче 12.36, б)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p} \cdot \frac{p-c}{r} < 1.$$

Поэтому существует угол γ_1 , для которого

$$\cos \gamma_1 = -\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = -\sqrt{\frac{r}{p} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Мы проверили, что треугольник со сторонами a_1, b_1, c_1 действительно существует; кроме того, угол между сторонами a_1 и b_1 равен γ_1 . Поэтому диаметр описанной окружности рассматриваемого треугольника равен

$$\frac{c_1}{\cos \gamma_1} = \sqrt{\frac{c}{1 - \frac{r}{p} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}} = \sqrt{p},$$

поскольку $c = p - r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

5.62. Пусть u_1 и u_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2 . Согласно задаче 5.61 радиус описанной окружности треугольника со сторонами $\tilde{u}_1 = \sqrt{u_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$, $\tilde{u}_2 = \sqrt{u_2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}$, $\tilde{c} = \sqrt{c}$ равен $\sqrt{p}/2$; кроме того, в этом треугольнике угол между сторонами \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 тупой. Пусть φ_1, φ_2 и γ' — острые углы, опирающиеся на хорды \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 и \tilde{c} . Тогда $\varphi_1 + \varphi_2 = \gamma'$; при этом u_1 и u_2 однозначно восстанавливаются по φ_1 и φ_2 . Аналогично получаем равенства

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \gamma' = \varphi_4 + \varphi_5, \quad (1)$$

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \alpha' = \varphi_5 + \varphi_6, \quad (2)$$

$$\varphi_3 + \varphi_4 = \beta' = \varphi_6 + \varphi_7. \quad (3)$$

Сложим равенства (1) и (3) и вычтем из них равенство (2). В результате получим $\varphi_1 = \varphi_7$. Из этого следует, что радиусы окружностей S_1 и S_7 равны.

5.63. Пусть r_i — радиус окружности S_i , h_i — высота треугольника ABC , опущенная из вершины A при $i = 3k + 1$, из вершины B при $i = 3k + 2$, из вершины C при $i = 3k$. Формулу из задачи 5.9 а) можно записать в виде

$$\frac{r}{r_i} - 1 - \frac{r}{r_{i+1}} - 1 = 1 - \frac{2r}{h_{i+2}}. \quad (i)$$

Перемножим равенства (i) и (i + 2), а затем поделим их произведение на (i + 1). В результате получим

$$\frac{r}{r_i} - 1 - \frac{r}{r_{i+3}} - 1 = \frac{1 - \frac{2r}{h_{i+1}}}{1 - \frac{2r}{h_{i+2}}} \cdot \frac{1 - \frac{2r}{h_i}}{1 - \frac{2r}{h_{i+2}}}.$$

Правая часть полученного выражения не изменяется при замене i на $i+3$. Поэтому

$$\frac{r}{r_i} - 1 - \frac{r}{r_{i+3}} - 1 = \frac{r}{r_{i+3}} - 1 - \frac{r}{r_{i+6}} - 1.$$

Предполагается, что все треугольники невырожденные. В таком случае можно сократить обе части на $\frac{r}{r_{i+3}} - 1 \neq 0$, поэтому $r_i = r_{i+6}$.

5.64. Пусть при проекции на прямую, перпендикулярную прямой A_1B_1 , точки A, B и C переходят в A', B' и C' , точка C_1 — в Q , а две точки A_1 и B_1 — в одну точку P . Так как $\overline{A_1B} : \overline{A_1C} = \overline{PB'} : \overline{PC'}$, $\overline{B_1C} : \overline{B_1A} = \overline{PC'} : \overline{PA'}$ и $\overline{C_1A} : \overline{C_1B} = \overline{QA'} : \overline{QB'}$, то $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PC'}} \cdot \frac{\overline{PC'}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}} = \frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'+x}{b'+x}$, где $|x| = PQ$. Равенство $\frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'+x}{b'+x} = 1$ эквивалентно тому, что $x = 0$ (нужно учесть, что $a' \neq b'$, так как $A' \neq B'$). А равенство $x = 0$ означает, что $P = Q$, т. е. точка C_1 лежит на прямой A_1B_1 .

5.65. Пусть точка P лежит на дуге BC описанной окружности треугольника ABC . Тогда $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\frac{BP \cos PBC}{CP \cos PCB}$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -\frac{CP \cos PCA}{AP \cos PAC}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = -\frac{AP \cos PAB}{PB \cos PBA}$. Перемножая эти равенства и учитывая, что $\angle PAC = \angle PBC$, $\angle PAB = \angle PCB$ и $\angle PCA + \angle PBA = 180^\circ$, получаем $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1$.

5.66. Пусть O, O_1 и O_2 — центры окружностей S, S_1 и S_2 ; X — точка пересечения прямых O_1O_2 и A_1A_2 . Применяя теорему Менелая к треугольнику OO_1O_2 и точкам A_1, A_2 и X , получаем $\frac{O_1X}{O_2X} \cdot \frac{O_2A_2}{OA_2} \cdot \frac{OA_1}{O_1A_1} = 1$, а значит, $O_1X : O_2X = R_1 : R_2$, где R_1 и R_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2 . Следовательно, X — точка пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям S_1 и S_2 .

5.67. а) Пусть для определенности $\angle B < \angle C$. Тогда $\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \angle A/2$, а значит, $\angle CAE = \angle B$. Так как

$$\frac{BE}{AB} = \frac{\sin BAE}{\sin AEB} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{CE} = \frac{\sin AEC}{\sin CAE},$$

то

$$\frac{BE}{CE} = \frac{c \sin BAE}{b \sin CAE} = \frac{c \sin(A+B)}{b \sin B} = \frac{c \sin C}{b \sin B} = \frac{c^2}{b^2}.$$

б) В задаче а) точка E лежит на продолжении стороны BC , так как $\angle ADC = \angle BAD + \angle B > \angle CAD$. Поэтому, используя результат задачи а) и теорему Менелая, получаем требуемое.

5.68. Так как $\angle BCE = 90^\circ - \angle B/2$, то $\angle BCE = \angle BEC$, а значит, $BE = BC$. Поэтому $CF : KF = BE : BK = BC : BK$ и $AE : KE = CA : CK = BC : BK$. Пусть прямая EF пересекает AC в точке D . По теореме Менелая $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CF}{KF} \cdot \frac{KE}{AE} = 1$. Учитывая, что $CF : KF = AE : KE$, получаем требуемое.

5.69. Доказательство аналогично решению задачи 5.87; нужно только рассмотреть отношение ориентированных отрезков и углов.

5.70. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 , AB и A_1B_1 . Применим теорему Менелая к следующим треугольникам и точкам на их сторонах: OAB и (A_1, B_1, C_2) , OBC и (B_1, C_1, A_2) , OAC и (A_1, C_1, B_2) . Тогда

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} = 1, \quad \frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB_1}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1, \quad \frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC_1}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1.$$

Из теоремы Менелая следует, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

5.71. Рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$, образованный прямыми A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 (A_0 — точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2C_1 и т. д.), и применим для него теорему Менелая к следующим пяти тройкам точек: (A, B_2, C_1) , (B, C_2, A_1) , (C, A_2, B_1) , (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B_0A}}{\overline{C_0A}} \cdot \frac{\overline{A_0B_2}}{\overline{B_0B_2}} \cdot \frac{\overline{C_0C_1}}{\overline{A_0C_1}} &= 1, & \frac{\overline{C_0B}}{\overline{A_0B}} \cdot \frac{\overline{B_0C_2}}{\overline{C_0C_2}} \cdot \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{B_0A_1}} &= 1, \\ \frac{\overline{A_0C}}{\overline{B_0C}} \cdot \frac{\overline{C_0A_2}}{\overline{A_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{C_0B_1}} &= 1, & \frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{A_0A_1}} \cdot \frac{\overline{C_0B_1}}{\overline{B_0B_1}} \cdot \frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{C_0C_1}} &= 1, \\ \frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{C_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_0B_2}}{\overline{A_0B_2}} \cdot \frac{\overline{C_0C_2}}{\overline{B_0C_2}} &= 1. \end{aligned}$$

Перемножая эти равенства, получаем $\frac{\overline{B_0A}}{\overline{C_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0B}}{\overline{A_0B}} \cdot \frac{\overline{A_0C}}{\overline{B_0C}} = 1$, а значит, точки A, B и C лежат на одной прямой.

5.72. Пусть N — точка пересечения прямых AD и KQ , P' — точка пересечения прямых KL и MN . Применяя теорему Дезарга к треугольникам KBL и NDM , получаем, что точки P', A и C лежат на одной прямой. Значит, $P' = P$.

5.73. Достаточно применить теорему Дезарга к треугольникам AED и BFC и теорему Паппа к тройкам точек (B, E, C) и (A, F, D) .

5.74. а) Пусть R — точка пересечения прямых KL и MN . Применяя теорему Паппа к тройкам точек (P, L, N) и (Q, M, K) , получаем, что точки A, C и R лежат на одной прямой.

б) Применяя теорему Дезарга к треугольникам NDM и LBK , получаем, что точки пересечения прямых ND и LB , DM и BK , NM и LK лежат на одной прямой.

5.75. Воспользуемся результатом задачи 5.74, а). В качестве точек P и Q возьмем точки P_2 и P_4 , в качестве A и C — точки C_1 и P_1 , в качестве K, L, M

и N — точки P_5, A_1, B_1 и P_3 . В итоге получим, что прямая P_6C_1 проходит через точку P_1 .

5.76. Согласно теореме Дезарга точки пересечения прямых AC и DF , CE и FV , EA и BD лежат на одной прямой. Это означает, что точки пересечения прямых $A'B'$ и $D'E'$, $C'D'$ и $F'A'$, $E'F'$ и $B'C'$ лежат на одной прямой.

5.77. а) Эта задача является переформулировкой задачи 5.64, так как число $\overline{BA_1} : \overline{CA_1}$ имеет знак минус, если точка A_1 лежит на отрезке BC , и знак плюс, если она лежит вне отрезка BC .

б) Предположим сначала, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M . Любые три вектора плоскости линейно зависимы, т. е. существуют такие числа λ, μ и ν (не все равные нулю), что $\lambda\overline{AM} + \mu\overline{BM} + \nu\overline{CM} = 0$. Рассмотрим проекцию на прямую BC параллельно прямой AM . При этой проекции точки A и M переходят в A_1 , а точки B и C переходят сами в себя. Поэтому $\mu\overline{BA_1} + \nu\overline{CA_1} = 0$, т. е. $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = -\nu : \mu$. Аналогично $\overline{CB_1} : \overline{AB_1} = -\lambda : \nu$ и $\overline{AC_1} : \overline{BC_1} = -\mu : \lambda$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое. В случае, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, для доказательства достаточно заметить, что $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = \overline{BA} : \overline{CA}$ и $\overline{CB_1} : \overline{AB_1} = \overline{CB} : \overline{AB}$.

Предположим теперь, что выполняется указанное соотношение, и докажем, что тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть C_1^* — точка пересечения прямой AB с прямой, проходящей через точку C и точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Для точки C_1^* выполняется такое же соотношение, как и для точки C_1 . Поэтому $\overline{C_1^*A} : \overline{C_1^*B} = \overline{C_1A} : \overline{C_1B}$. Следовательно, $C_1^* = C_1$, т. е. прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Можно проверить также, что если выполняется указанное соотношение и две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, то третья прямая им параллельна.

5.78. Ясно, что $AB_1 = AC_1, BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$, причем в случае вписанной окружности на сторонах треугольника ABC лежат три точки, а в случае невписанной — одна точка. Остается воспользоваться теоремой Чевы.

5.79. Пусть невписанные окружности касаются сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 . Тогда

$$\frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{CB_1} \cdot \overline{AC_1}}{\overline{CA_1} \cdot \overline{AB_1} \cdot \overline{BC_1}} = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1.$$

5.80. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC . Тогда

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{b \cos A}{a \cos B} \cdot \frac{c \cos B}{b \cos C} \cdot \frac{a \cos C}{c \cos A} = 1.$$

5.81. Пусть A_2, B_2 и C_2 — середины сторон BC, CA и AB . Рассматриваемые прямые проходят через вершины треугольника $A_2B_2C_2$, причем в задаче а) они делят его стороны в таких же отношениях, в каких прямые AP, BP и CP делят стороны треугольника ABC , а в задаче б) они делят их в обратных отношениях. Остается воспользоваться теоремой Чевы.

5.82. Так как $\triangle AC_1B_2 \sim \triangle BC_1A_1$ и $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle CB_1A_1$, то $AB_2 \cdot C_1B = AC_1 \cdot BA_1$ и $AC_2 \cdot CB_1 = A_1C \cdot B_1A$. Поэтому

$$\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1.$$

5.83. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_2, B_2 и C_2 .

а) Если $\angle B + \beta < 180^\circ$ и $\angle C + \gamma < 180^\circ$, то $\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} =$
 $= \frac{AB \cdot BA_1 \sin(B + \beta)}{AC \cdot CA_1 \sin(C + \gamma)} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(B + \beta)}{\sin(C + \gamma)}$. Последнее выражение рав-

но $\overline{BA_2} : \overline{A_2C}$ во всех случаях. Запишем аналогичные выражения для $\overline{CB_2} : \overline{B_2A}$ и $\overline{AC_2} : \overline{C_2B}$ и перемножим их. Остается воспользоваться теоремой Чевы.

б) Точка A_2 лежит вне отрезка BC , только если ровно один из углов β и γ больше соответствующего ему угла B или C . Поэтому

$$\frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(B - \beta)}{\sin(C - \gamma)}.$$

5.84. Легко проверить, что эта задача является частным случаем задачи 5.83.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение верно и для вневписанной окружности.

5.85. Решение задачи очевидным образом следует из теоремы Чевы.

5.86. Применяя теорему синусов к треугольникам ACC_1 и BCC_1 , получаем $\frac{AC_1}{\sin ACC_1} = \frac{CC_1}{\sin B}$ и $\frac{CC_1}{\sin B} = \frac{AC_1}{\sin ACC_1} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$. Аналогично $\frac{C_1C}{\sin A} = \frac{C_1B}{\sin C}$ и $\frac{C_1B}{\sin C} = \frac{C_1C}{\sin A} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$. Для завершения доказательства остается перемножить эти равенства.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение справедливо и для отношений ориентированных отрезков и углов в том случае, когда точки взяты на продолжениях сторон.

5.87. Можно считать, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на сторонах треугольника ABC . Согласно задаче 5.86

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB} \cdot \frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA}.$$

Так как прямые AA_2, BB_2 и CC_2 симметричны прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно биссектрис, то $\angle ACC_2 = \angle C_1CB, \angle C_2CB = \angle ACC_1$ и т. д., поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB} \cdot \frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA} &= \frac{\sin C_1CB}{\sin ACC_1} \cdot \frac{\sin A_1AC}{\sin BAA_1} \cdot \frac{\sin B_1BA}{\sin CBB_1} = \\ &= \frac{C_1B}{AC_1} \cdot \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$, т. е. прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

З а м е ч а н и е. Утверждение остается верным и в том случае, когда точки A_1, B_1 и C_1 взяты на продолжениях сторон, если только точка P не лежит на описанной окружности S треугольника ABC ; если же P лежит на окружности S , то прямые AA_2, BB_2 и CC_2 параллельны (см. задачу 2.92).

5.88. Пусть диагонали AD и BE данного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке P ; K и L — середины сторон AB и ED . Так как $ABDE$ — трапеция, отрезок KL проходит через точку P (задача 19.2). По теореме синусов $\sin APK : \sin AKP = AK : AP$ и $\sin BPK : \sin BKP = BK : BP$. Так как $\sin APK = \sin BKP$ и $AK = BK$, то $\sin APK : \sin BPK = BP : AP = BE : AD$. Аналогичные соотношения можно записать и для отрезков, соединяющих середины двух других пар противоположных сторон. Перемножая эти

соотношения и применяя результат задачи 5.86 к треугольнику, образованному прямыми AD, BE и CF , получаем требуемое.

5.89. Рассмотрим гомотетию с центром P и коэффициентом 2. Так как $PA_1A_3A_2$ — прямоугольник, то при этой гомотетии прямая A_1A_2 переходит в прямую l_a , проходящую через точку A_3 , причем прямые l_a и A_3P симметричны относительно прямой A_3A . Прямая A_3A делит пополам угол $B_3A_3C_3$ (задача 1.57, а)). Аналогично доказывается, что прямые l_b и l_c симметричны прямым B_3P и C_3P относительно биссектрис треугольника $A_3B_3C_3$. Следовательно, прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке или параллельны (задача 5.87), а значит, в одной точке пересекаются и прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 .

5.90. Согласно задачам 5.86 и 5.77, б)

$$\frac{\sin ASP}{\sin PSD} \cdot \frac{\sin DAP}{\sin PAS} \cdot \frac{\sin SDP}{\sin PDA} = 1 = \frac{\sin ASQ}{\sin QSD} \cdot \frac{\sin DAQ}{\sin QAS} \cdot \frac{\sin SDQ}{\sin QDA}.$$

Но $\angle DAP = \angle SDQ, \angle SDP = \angle DAQ, \angle PAS = \angle QDA$ и $\angle PDA = \angle QAS$. Поэтому $\sin ASP : \sin PSD = \sin ASQ : \sin QSD$. Из этого следует, что точки S, P и Q лежат на одной прямой, так как функция $\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x}$ монотонна по x :

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = -\frac{\sin \alpha}{\sin^2 x}.$$

5.91. Второе равенство из задачи 2.59, а) означает, что

$$\frac{\sin A_2A_1C_1}{\sin A_2A_1B_1} = \frac{\sin A_2AC_1}{\sin A_2AB_1}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin A_2A_1C_1}{\sin A_2A_1B_1} \cdot \frac{\sin B_2B_1A_1}{\sin B_2B_1C_1} \cdot \frac{\sin C_2C_1B_1}{\sin C_2C_1A_1} = 1.$$

5.92. Согласно задаче 3.42, а) отрезок A_1A_2 является биссектрисой треугольника A_1BC . Поэтому

$$\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}.$$

Из того, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, следует, что

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1} = 1.$$

Поэтому

$$\frac{BA_2}{CA_2} \cdot \frac{CB_2}{AB_2} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1,$$

а значит, прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

5.93. а) По теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C}$, а по теореме синусов

$$\begin{aligned} CA_1 &= \frac{CA \sin CAA_1}{\sin AA_1B}, & A_1B &= \frac{AB \sin BAA_1}{\sin AA_1B}, \\ AB_1 &= \frac{AB \sin ABB_1}{\sin AB_1B}, & B_1C &= \frac{BC \sin CBB_1}{\sin AB_1B}. \end{aligned}$$

Подставляя эти четыре равенства в предыдущее равенство и учитывая, что $AC = BC$, получаем требуемое.

б) Обозначим точки пересечения прямых CM и CN с основанием AB через M_1 и N_1 . Нужно доказать, что $M_1 = N_1$. Из а) следует, что $AM_1 : M_1B = AN_1 : N_1B$, т. е. $M_1 = N_1$.

5.94. Пусть отрезки BM и BN пересекают сторону AC в точках P и Q . Тогда

$$\frac{\sin PBB_1}{\sin PBA} = \frac{\sin PBB_1}{\sin BPB_1} \cdot \frac{\sin APB}{\sin PBA} = \frac{PB_1}{BB_1} \cdot \frac{AB}{PA}.$$

Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , то $\frac{AP}{PB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, а значит, $\frac{\sin PBB_1}{\sin PBA} = \frac{AB}{BB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}$. Заметив, что $BC_1 : C_1A = BC : CA$, и проведя аналогичные вычисления для $\sin QBB_1 : \sin QBC$, получим $\sin PBB_1 : \sin PBA = \sin QBB_1 : \sin QBC$. А так как $\angle ABB_1 = \angle CBB_1$, то $\angle PBB_1 = \angle QBB_1$.

5.95. а) Пусть точка P лежит на дуге AC описанной окружности треугольника ABC ; A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB . Сумма углов при вершинах A_1 и C_1 четырехугольника A_1BC_1P равна 180° , поэтому $\angle A_1PC_1 = 180^\circ - \angle B = \angle APC$. Следовательно, $\angle APC_1 = \angle A_1PC$, причем одна из точек A_1 и C_1 (например, A_1) лежит на стороне треугольника, а другая — на продолжении стороны. Четырехугольники AB_1PC_1 и A_1B_1PC вписанные, поэтому $\angle AB_1C_1 = \angle APC_1 = \angle A_1PC = \angle A_1B_1C$, а значит, точка B_1 лежит на отрезке A_1C_1 .

б) Как и в задаче а), получаем $\angle(AP, PC_1) = \angle(AB_1, B_1C) = \angle(CB_1, B_1A_1) = \angle(CP, PA_1)$. Прибавляя $\angle(PC_1, PC)$, получаем $\angle(AP, PC) = \angle(PC_1, PA_1) = \angle(BC_1, BA_1) = \angle(AB, PC)$, т. е. точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC .

5.96. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков PA, PB и PC ; O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников B_1C_1P, A_1C_1P и A_1B_1P . Точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника $O_aO_bO_c$ (или их продолжения). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, поэтому точка P лежит на описанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$ (см. задачу 5.95, б)).

5.97. Пусть продолжение биссектрисы AD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P . Опустим из точки P перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на прямые BC, CA и AB ; ясно, что A_1 — середина отрезка BC . При гомотетии с центром A , переводящей P в D , точки B_1 и C_1 переходят в B' и C' , а значит, точка A_1 переходит в M , так как она лежит на прямой B_1C_1 и $PA_1 \parallel DM$.

5.98. а) Решение задачи 5.95 проходит без изменений и в этом случае.

б) Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и CA , а точки A_2 и B_2 прямых BC и AC таковы, что $\angle(PA_2, BC) = \alpha = \angle(PB_2, AC)$. Тогда $\triangle PA_1A_2 \sim \triangle PB_1B_2$, поэтому точки A_1 и B_1 переходят в A_2 и B_2 при поворотной гомотетии с центром P , причем $\angle A_1PA_2 = 90^\circ - \alpha$ — угол поворота.

5.99. а) Пусть угол между прямыми PC и AC равен φ . Тогда $PA = 2R \sin \varphi$. Так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC , угол между прямыми PA_1 и A_1B_1 тоже равен φ . Поэтому $PA_1 = d / \sin \varphi$, а значит, $PA \cdot PA_1 = 2Rd$.

б) Так как $PA_1 \perp BC$, то $\cos \alpha = \sin \varphi = d / PA_1$. Остается заметить, что $PA_1 = 2Rd / PA$.

5.100. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC , поэтому $A_1B_1 = PC \sin \angle A_1CB_1 = PC \sin C$. Пусть угол между прямыми AB и A_1B_1 равен γ

и C_1 — проекция точки P на прямую A_1B_1 . Прямые A_1B_1 и B_1C_1 совпадают, поэтому $\cos \gamma = PC/2R$ (см. задачу 5.99). Следовательно, длина проекции отрезка AB на прямую A_1B_1 равна $AB \cos \gamma = (2R \sin C)PC/2R = PC \sin C$.

5.101. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и AC . Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром PC . Так как $\sin A_1CB_1 = \sin ACB$, хорды A_1B_1 этой окружности имеют фиксированную длину. Следовательно, прямые A_1B_1 касаются фиксированной окружности.

5.102. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC и CA . Тогда $\angle(A_1B_1, PB_1) = \angle(A_1C, PC) = \sphericalangle BP/2$. Ясно также, что для всех точек P прямые PB_1 имеют одно и то же направление.

5.103. Пусть P_1 и P_2 — диаметрально противоположные точки описанной окружности треугольника ABC ; A_i и B_i — основания перпендикуляров, опущенных из точки P_i на прямые BC и AC ; M и N — середины сторон AC и BC ; X — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 . Согласно задаче 5.102 $A_1B_1 \perp A_2B_2$. Остается проверить, что $\angle(MX, XN) = \angle(BC, AC)$. Так как $AB_2 = B_1C$, то XM — медиана прямоугольного треугольника B_1XB_2 . Поэтому $\angle(XM, XB_2) = \angle(XB_2, B_2M)$. Аналогично $\angle(XA_1, XN) = \angle(A_1N, XA_1)$. Следовательно, $\angle(MX, XN) = \angle(XM, XB_2) + \angle(XB_2, XA_1) + \angle(XA_1, XN) = \angle(XB_2, B_2M) + \angle(A_1N, XA_1) + 90^\circ$. А так как $\angle(XB_2, B_2M) + \angle(AC, CB) + \angle(NA_1, A_1X) + 90^\circ = 0^\circ$, то $\angle(MN, XN) + \angle(AC, CB) = 0^\circ$.

5.104. Если точка R данной окружности такова, что $\angle(\vec{OP}, \vec{OR}) = (\beta + \gamma)/2$, то $OR \perp BC$. Остается проверить, что $\angle(OR, OQ) = \angle(PA_1, A_1B_1)$. Но $\angle(OR, OQ) = \alpha/2$, а $\angle(PA_1, A_1B_1) = \angle(PB, BC_1) = \angle(\vec{OP}, \vec{OA})/2 = \alpha/2$.

5.105. Не теряя общности, можно считать, что описанные окружности треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают. Определим углы α , β и γ , как в условии задачи 5.104. Покажем, что точки с угловыми координатами $(\alpha + \beta + \gamma)/2$, $(-\alpha + \beta + \gamma)/2$, $(\alpha - \beta + \gamma)/2$ и $(\alpha + \beta - \gamma)/2$ можно взять в качестве точек P_1 , A_1 , B_1 и C_1 . Действительно, биссектриса угла A_1OB_1 задается угловой координатой $\gamma/2$, т. е. она параллельна PC ; биссектриса угла P_1OA_1 задается угловой координатой $(\beta + \gamma)/2$, т. е. она параллельна BC .

5.106. Пусть прямые AC и PQ пересекаются в точке M . Проведем в треугольнике MPC высоты PB_1 и CA_1 . Тогда A_1B_1 — прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC . Кроме того, согласно задаче 1.53 $\angle(MB_1, B_1A_1) = \angle(CP, PM)$. Ясно также, что $\angle(CP, PM) = \angle(CA, AQ) = \angle(MB_1, AQ)$. Следовательно, $A_1B_1 \parallel AQ$.

5.107. Проведем хорду PQ , перпендикулярную BC . Пусть точки H' и P' симметричны точкам H и P относительно прямой BC ; точка H' лежит на описанной окружности треугольника ABC (задача 5.10). Докажем сначала, что $AQ \parallel P'H$. В самом деле, $\angle(AH', AQ) = \angle(PH', PQ) = \angle(AH', P'H)$. Прямая Симсона точки P параллельна AQ (задача 5.106), т. е. она проходит через середину стороны PP' треугольника $PP'H$ и параллельна стороне $P'H$, а значит, она проходит через середину стороны PH .

5.108. Пусть H_a, H_b, H_c и H_d — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC . Прямые l_a, l_b, l_c и l_d проходят через середины отрезков AH_a, BH_b, CH_c и DH_d (см. задачу 5.107). Середины этих отрезков совпадают с такой точкой H , что $2\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$, где O — центр окружности (см. задачу 13.33).

5.109. а) Пусть B_1, C_1 и D_1 — проекции точки P на прямые AB, AC и AD . Точки B_1, C_1 и D_1 лежат на окружности с диаметром AP . Прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно тре-

угольников ABC , ACD и ADB соответственно. Поэтому проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой — прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Аналогично доказывается, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек.

б) Пусть P — точка описанной окружности n -угольника $A_1 \dots A_n$; B_2, B_3, \dots, B_n — проекции точки P на прямые A_1A_2, \dots, A_1A_n . Точки B_2, \dots, B_n лежат на окружности с диаметром A_1P . Докажем по индукции, что прямая Симсона точки P относительно n -угольника $A_1 \dots A_n$ совпадает с прямой Симсона точки P относительно $(n-1)$ -угольника $B_2 \dots B_n$ (для $n=4$ это было доказано в задаче а). По предложению индукции прямая Симсона $(n-1)$ -угольника $A_1A_3 \dots A_n$ совпадает с прямой Симсона $(n-2)$ -угольника $B_3 \dots B_n$. Поэтому проекции точки P на прямые Симсона $(n-1)$ -угольников, вершины которых получаются последовательным исключением точек A_2, \dots, A_n из набора A_1, \dots, A_n , лежат на прямой Симсона $(n-1)$ -угольника $B_2 \dots B_n$. А проекция точки P на прямую Симсона $(n-1)$ -угольника $A_2 \dots A_n$ лежит на той же прямой потому, что наши рассуждения показывают, что любые $n-1$ из рассматриваемых n точек проекций лежат на одной прямой.

5.110. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AP . Поэтому $B_1C_1 = AP \sin B_1AC_1 = AP(BC/2R)$.

5.111. Эта задача является частным случаем задачи 2.44.

5.112. Ясно, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$ (первое, третье и пятое равенства получаются из вписанности соответствующих четырехугольников; остальные равенства очевидны). Аналогично $\angle B_1AP = \angle C_3A_3P$. Поэтому $\angle B_3A_3C_3 = \angle B_3A_3P + \angle C_3A_3P = \angle C_1AP + \angle B_1AP = \angle BAC$. Аналогично получаются равенства остальных углов треугольников ABC и $A_3B_3C_3$.

5.113. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB ; A_2, B_2 и C_2 — точки пересечения прямых PA, PB и PC с описанной окружностью треугольника ABC . Пусть далее S, S_1 и S_2 — площади треугольников $ABC, A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Легко проверить, что $a_1 = a \cdot AP/2R$ (задача 5.110) и $a_2 = a \cdot B_2P/CP$. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны (задача 5.111), поэтому $S_1/S_2 = k^2$, где $k = a_1/a_2 = AP \cdot CP/(2R \cdot B_2P)$. А так как $B_2P \cdot BP = |d^2 - R^2|$, то $S_1/S_2 = (AP \cdot BP \cdot CP)^2/4R^2(d^2 - R^2)^2$. Треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC вписаны в одну окружность, поэтому $S_2/S = a_2b_2c_2/abc$ (см. задачу 12.1). Ясно также, что, например, $a_2/a = B_2P/CP = |d^2 - R^2|/(BP \cdot CP)$. Следовательно, $S_2 : S = |d^2 - R^2|^3 : (AP \cdot BP \cdot CP)^2$. Поэтому $S_1/S = (S_1/S_2)(S_2/S) = |d^2 - R^2|/4R^2$.

5.114. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром PA , поэтому середина отрезка PA является центром описанной окружности треугольника AB_1C_1 . Следовательно, l_a — серединный перпендикуляр к отрезку B_1C_1 . Поэтому прямые l_a, l_b и l_c проходят через центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

5.115. а) Опустим из точек P_1 и P_2 перпендикуляры P_1B_1 и P_2B_2 на AC и перпендикуляры P_1C_1 и P_2C_2 на AB . Докажем, что точки B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности. В самом деле, $\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1 = \angle P_2AB_2 = \angle P_2C_2B_2$, а так как $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2A$, то $\angle C_1B_1A = \angle B_2C_2A$. Центр окружности, на которой лежат указанные точки, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2 , а оба эти перпендикуляра проходят через середину O отрезка P_1P_2 , т. е. O — центр этой окружности. В частности, точки B_1 и C_1 равноудалены от точки O . Аналогично точки A_1 и B_1 равноудалены от точки O , т. е. O — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме

того, $OB_1 = OB_2$.

б) Предыдущее доказательство проходит почти без изменений и в этом случае.

5.116. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB . Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны, причем коэффициент подобия равен 2. Высоты треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке O , поэтому $OA_1 : HA = 1 : 2$. Пусть M' — точка пересечения отрезков OH и AA_1 . Тогда $OM' : M'H = OA_1 : HA = 1 : 2$ и $AM' : M'A_1 = OA_1 : HA = 1 : 2$, т. е. $M' = M$.

5.117. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB ; A_2, B_2 и C_2 — основания высот; A_3, B_3 и C_3 — середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами. Так как $A_2C_1 = C_1A = A_1B_1$ и $A_1A_2 \parallel B_1C_1$, точка A_2 лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично точки B_2 и C_2 лежат на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Рассмотрим теперь окружность S с диаметром A_1A_3 . Так как $A_1B_3 \parallel CC_2$ и $A_3B_3 \parallel AB$, то $\angle A_1B_3A_3 = 90^\circ$, а значит, точка B_3 лежит на окружности S . Аналогично доказывается, что точки C_1, B_1 и C_3 лежат на окружности S . Окружность S проходит через вершины треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому она является его описанной окружностью.

При гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ описанная окружность треугольника ABC переходит в описанную окружность треугольника $A_3B_3C_3$, т. е. в окружность девяти точек. Значит, при этой гомотетии точка O переходит в центр окружности девяти точек.

5.118. а) Докажем, например, что треугольники ABC и HBC имеют общую окружность девяти точек. В самом деле, окружности девяти точек обоих треугольников проходят через середину стороны BC и середины отрезков BH и CH .

б) Прямая Эйлера проходит через центр окружности девяти точек, а окружность девяти точек у этих треугольников общая.

в) Центром симметрии является центр окружности девяти точек этих треугольников.

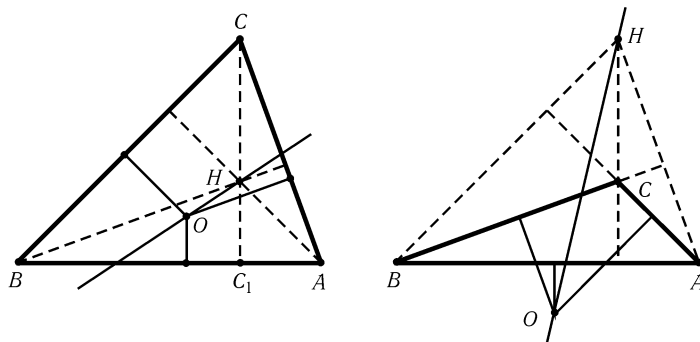


Рис. 5.5

5.119. Пусть $AB > BC > CA$. Легко проверить, что для остроугольного и тупоугольного треугольников точка H пересечения высот и центр O описанной окружности расположены именно так, как на рис. 5.5 (т. е. для остроугольного треугольника точка O лежит внутри треугольника BHC_1 , а для тупоугольного точки O и B лежат по одну сторону от прямой CH). Поэтому в остроугольном треугольнике прямая Эйлера пересекает наибольшую сторону AB и наименьшую

сторону AC , а в тупоугольном треугольнике — наибольшую сторону AB и среднюю по длине сторону BC .

5.120. а) Пусть O_a, O_b и O_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC . Вершины треугольника ABC являются основаниями высот треугольника $O_a O_b O_c$ (задача 5.2), поэтому окружность девяти точек треугольника $O_a O_b O_c$ проходит через точки A, B и C .

б) Пусть O — точка пересечения высот треугольника $O_a O_b O_c$, т. е. точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Окружность девяти точек треугольника $O_a O_b O_c$ делит пополам отрезок OO_a .

5.121. Пусть AA_1 — высота, H — точка пересечения высот. Согласно задаче 5.47, б) $AH = 2R|\cos A|$. Медианы делятся точкой их пересечения в отношении $1 : 2$, поэтому прямая Эйлера параллельна BC тогда и только тогда, когда $AH : AA_1 = 2 : 3$ и векторы \overrightarrow{AH} и $\overrightarrow{AA_1}$ сонаправлены, т. е. $2R \cos A : 2R \sin B \sin C = 2 : 3$. Учитывая, что $\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$, получаем $\sin B \sin C = 3 \cos B \cos C$.

5.122. Пусть CD — высота, O — центр описанной окружности, N — середина стороны AB , а точка E делит пополам отрезок, соединяющий C с точкой пересечения высот. Тогда $CENO$ — параллелограмм, поэтому $\angle NED = \angle OCH = |\angle A - \angle B|$ (см. задачу 2.90). Точки N, E и D лежат на окружности девяти точек, поэтому отрезок ND виден из ее центра под углом $2\angle NED = 2|\angle A - \angle B|$.

5.123. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC , H — точка пересечения высот; прямые AI и BI пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 . Предположим, что треугольник ABC не равнобедренный. Тогда $OI : IH = OA_1 : AH$ и $OI : IH = OB_1 : BH$. Так как $OB_1 = OA_1$, то $AH = BH$, а значит, $AC = BC$. Приходим к противоречию.

5.124. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC , H — ортоцентр треугольника $A_1 B_1 C_1$. Проведем в треугольнике $A_1 B_1 C_1$ высоты $A_1 A_2, B_1 B_2$ и $C_1 C_2$. Треугольник $A_1 B_1 C_1$ остроугольный (например, $\angle B_1 A_1 C_1 = (\angle B + \angle C)/2 < 90^\circ$), поэтому H — центр вписанной окружности треугольника $A_2 B_2 C_2$ (см. задачу 1.57, а)). Стороны треугольников ABC и $A_2 B_2 C_2$ параллельны (см. задачу 1.55, а)), поэтому существует гомотетия, переводящая треугольник ABC в $A_2 B_2 C_2$. При этой гомотетии точка O переходит в точку I , а точка I — в точку H , поэтому прямая IH проходит через точку O .

5.125. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , E и M — середины отрезков CH и AB (рис. 5.6). Тогда $C_1 M C_2 E$ — прямоугольник. Пусть прямая CC_2 пересекает прямую AB в точке C_3 . Докажем, что $\overline{AC_3} : \overline{C_3 B} = \tan 2\beta : \tan 2\alpha$. Легко проверить, что $\overline{C_3 M} : \overline{C_2 E} = \overline{M C_2} : \overline{EC}, \overline{EC} = R \cos \gamma, \overline{M C_2} = \overline{C_1 E} = 2R \sin \alpha \sin \beta - R \cos \gamma$ и $\overline{C_2 E} = \overline{M C_1} = R \sin(\beta - \alpha)$, поэтому

$$\overline{C_3 M} = R \sin(\beta - \alpha)(2 \sin \beta \sin \alpha - \cos \gamma) / \cos \gamma = R \sin(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha) / \cos \gamma.$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3 B}} = \frac{\overline{AM} + \overline{M C_3}}{\overline{C_3 M} + \overline{M B}} = \frac{\sin 2\gamma + \sin 2(\alpha - \beta)}{\sin 2\gamma - \sin 2(\alpha - \beta)} = \frac{\tan 2\beta}{\tan 2\alpha}.$$

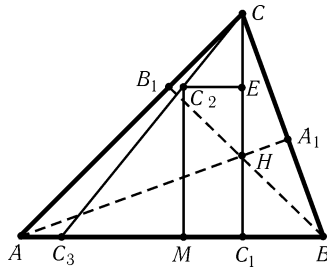


Рис. 5.6

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3B}} \cdot \frac{\overline{BA_3}}{\overline{A_3C}} \cdot \frac{\overline{CB_3}}{\overline{B_3A}} = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\gamma}{\operatorname{tg} 2\beta} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\gamma} = 1.$$

5.126. Решим сразу задачу б). Докажем сначала, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть описанные окружности треугольников A_1BC и AB_1C пересекаются в точке O . Тогда $\angle(BO, OA) = \angle(BO, OC) + \angle(OC, OA) = \angle(BA_1, A_1C) + \angle(CB_1, B_1A) = \angle(BA, AC_1) + \angle(C_1B, BA) = \angle(C_1B, AC_1)$, т. е. описанная окружность треугольника ABC_1 тоже проходит через точку O . Поэтому $\angle(AO, OA_1) = \angle(AO, OB) + \angle(BO, OA_1) = \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BC, CA_1) = 0^\circ$, т. е. прямая AA_1 проходит через точку O . Аналогично доказывается, что прямые BB_1 и CC_1 проходят через точку O .

Докажем теперь, что точка O совпадает с искомой точкой P . Так как $\angle BAP = \angle A - \angle CAP$, то равенство $\angle ABP = \angle CAP$ эквивалентно равенству $\angle BAP + \angle ABP = \angle A$, т. е. $\angle APB = \angle B + \angle C$. Для точки O последнее равенство очевидно, так как она лежит на описанной окружности треугольника ABC_1 .

5.127. а) Докажем, что $\sphericalangle AB = \sphericalangle B_1C_1$, т. е. $AB = B_1C_1$. В самом деле, $\sphericalangle AB = \sphericalangle AC_1 + \sphericalangle C_1B$, а $\sphericalangle C_1B = \sphericalangle AB_1$, поэтому $\sphericalangle AB = \sphericalangle AC_1 + \sphericalangle AB_1 = \sphericalangle B_1C_1$.

б) Будем считать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в одну окружность, причем треугольник ABC фиксирован, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается. Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника $A_1B_1C_1$ (задача 7.20, б)). При этом может возникнуть 12 различных семейств треугольников $A_1B_1C_1$: треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ могут совмещаться поворотом или осевой симметрией; кроме того, вершинам треугольника символы A_1 , B_1 и C_1 можно сопоставить шестью различными способами.

Из этих 12 семейств треугольников четыре семейства никогда не могут дать искомой точки P . Для одинаково ориентированных треугольников исключаются случаи $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$, $\triangle ABC = \triangle C_1B_1A_1$ и $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ (например, в случае $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$ точка P является точкой пересечения прямой $BC = B_1C_1$ и касательной к окружности в точке $A = A_1$; треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ при этом совпадают). Для противоположно ориентированных треугольников исключается случай $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (в этом случае $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$).

З а м е ч а н и е. Точкам Брокара соответствуют противоположно ориентированные треугольники; для первой точки Брокара $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$, а для второй точки Брокара $\triangle ABC = \triangle C_1A_1B_1$.

5.128. а) Так как $PC = \frac{AC \sin CAP}{\sin APC}$ и $PC = \frac{BC \sin CBP}{\sin BPC}$, то $\frac{\sin \varphi \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\beta - \varphi) \sin \alpha}{\sin \beta}$. Учитывая, что $\sin(\beta - \varphi) = \sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi$, получаем $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}$. Остается заметить, что $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha$.

б) Для второго угла Брокара получаем точно такое же выражение, как и в задаче а). Ясно также, что оба угла Брокара острые.

в) Так как $\angle A_1BC = \angle BCA$ и $\angle BCA_1 = \angle CAB$, то $\triangle CA_1B \sim \triangle ABC$. Поэтому точка Брокара P лежит на отрезке AA_1 (см. задачу 5.126, б)).

5.129. а) Согласно задаче 10.38, а) $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30^\circ$, поэтому $\varphi \leq 30^\circ$.

б) Пусть P — первая точка Брокера треугольника ABC . Точка M лежит внутри (или на границе) одного из треугольников ABP , BSP и CAP . Если, например, точка M лежит внутри треугольника ABP , то $\angle ABM \leq \angle ABP \leq 30^\circ$.

5.130. Прямые A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 являются серединными перпендикулярами к отрезкам AQ , BQ и CQ . Поэтому, например, $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \angle AQC = \angle A$. Для других углов доказательство аналогично.

Кроме того, прямые A_1O , B_1O и C_1O являются серединными перпендикулярами к отрезкам CA , AB и BC . Поэтому, например, острые углы OA_1C_1 и ACQ имеют взаимно перпендикулярные стороны, поэтому они равны. Аналогичные рассуждения показывают, что $\angle OA_1C_1 = \angle OB_1A_1 = \angle OC_1B_1 = \varphi$, где φ — угол Брокера треугольника ABC .

5.131. По теореме синусов $R_1 = AB/2 \sin APB$, $R_2 = BC/2 \sin BPC$ и $R_3 = CA/2 \sin CPA$. Ясно также, что $\sin APB = \sin A$, $\sin BPC = \sin B$ и $\sin CPA = \sin C$.

5.132. Треугольник ABC_1 равнобедренный, причем угол при его основании AB равен углу Брокера φ . Поэтому $\angle(PC_1, C_1Q) = \angle(BC_1, C_1A) = 2\varphi$. Аналогично $\angle(PA_1, A_1Q) = \angle(PB_1, B_1Q) = \angle(PC_1, C_1Q) = 2\varphi$.

5.133. Так как $\angle CA_1B_1 = \angle A + \angle AB_1A_1$ и $\angle AB_1A_1 = \angle CA_1C_1$, то $\angle B_1A_1C_1 = \angle A$. Аналогично доказывается, что равны и остальные углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Описанные окружности треугольников AA_1B_1 , BB_1C_1 и CC_1A_1 пересекаются в одной точке O (задача 2.81, а)). Ясно, что $\angle AOA_1 = \angle AB_1A_1 = \varphi$. Аналогично $\angle BOB_1 = \angle COC_1 = \varphi$. Поэтому $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = 180^\circ - \angle A$. Аналогично $\angle BOC = 180^\circ - \angle B$ и $\angle COA = 180^\circ - \angle C$, т. е. O — первая точка Брокера обоих треугольников. Следовательно, при поворотной гомотетии на угол φ с центром O и коэффициентом AO/A_1O треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC .

5.134. а) Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(x/\sin x) = \ln x - \ln \sin x$. Ясно, что функции

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \quad \text{и} \quad f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

положительны при $0 < x < \pi$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при возрастании x от 0 до π и, кроме того, выпукла на этом отрезке, т. е.

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

при $0 \leq x_i \leq \pi$, $0 \leq \lambda_i$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. В частности, $f(\varphi) \leq f(\pi/6)$, так как $\varphi \leq \pi/6$, и

$$\begin{aligned} f(\pi/6) = f \frac{\varphi + (\alpha - \varphi) + \varphi + (\beta - \varphi) + \varphi + (\gamma - \varphi)}{6} &\leq \\ &\leq \frac{1}{6} f(\varphi) + f(\alpha - \varphi) + f(\varphi) + f(\beta - \varphi) + f(\varphi) + f(\gamma - \varphi). \end{aligned}$$

Воспользовавшись монотонностью логарифма, эти неравенства можно переписать следующим образом:

$$\frac{\varphi}{\sin \varphi} \leq \frac{\pi/6}{\sin(\pi/6)} \leq \frac{\varphi^3 (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)}{\sin^3 \varphi \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}.$$

Учитывая, что $\sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi) = \sin^3 \varphi$, получаем

$$\varphi^3 \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi).$$

б) Из неравенства $\varphi^3 \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)$ следует, что

$$64\varphi^6 \leq 4^3 \varphi(\alpha - \varphi)\varphi(\beta - \varphi)\varphi(\gamma - \varphi).$$

Ясно также, что

$$4\varphi(\alpha - \varphi) \leq \alpha^2, \quad 4\varphi(\beta - \varphi) \leq \beta^2, \quad 4\varphi(\gamma - \varphi) \leq \gamma^2.$$

5.135. Согласно задаче 12.44, а)

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

где S — площадь треугольника. Таким образом, для треугольника с вершинами в точках с координатами $(\pm a/2, 0)$ и (x, y) угол Брокара φ определяется равенством

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^2 + (a/2 + x)^2 + y^2 + (-a/2 + x)^2 + y^2}{2ay},$$

т. е. $2x^2 + 2y^2 + 3a^2/2 = 2ay \operatorname{ctg} \varphi$. Последнее уравнение задает окружность радиуса $(a/2)\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 3}$ с центром $(0, (a/2) \operatorname{ctg} \varphi)$.

5.136. Пусть a_1, b_1, c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, S_1 — его площадь. В теореме речь идет о множестве точек M , для которых выполняется равенство

$$4S_1 \operatorname{ctg} \varphi = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AM , поэтому

$$a_1 = B_1C_1 = AM \sin B_1AC_1 = \frac{aAM}{2R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Таким образом,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \frac{a^2 AM^2 + b^2 BM^2 + c^2 CM^2}{4R^2}.$$

Поэтому если (x, y) — координаты точки M в некоторой прямоугольной системе координат, то

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}(x^2 + y^2) + px + qy + r,$$

где p, q, r — постоянные числа.

Для S_1 тоже можно получить выражение через координаты (x, y) точки M . При этом начало системы координат удобно расположить в центре O описанной окружности треугольника ABC . В таком случае

$$S_1 = \frac{S_{ABC}}{4R^2} (R^2 - x^2 - y^2)$$

(задача 5.113).

Уравнение $S_1 = 0$ определяет описанную окружность треугольника ABC . Это множество соответствует нулевому углу Брокара. Углу Брокара φ соответствует множество

$$\pm \operatorname{ctg} \varphi \frac{S_{ABC}}{4R^2} (R^2 - x^2 - y^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}(x^2 + y^2) + px + qy + r.$$

При этом знак плюс берется для точек внутри описанной окружности, а знак минус берется для точек вне описанной окружности. Легко видеть, что каждое из полученных уравнений является уравнением окружности. Дело в том, что если $f = 0$ и $g = 0$ — уравнения окружностей, то $\lambda f = g$ — тоже уравнение окружности. Более того, центр окружности $\lambda f = g$ лежит на прямой, соединяющей центры окружностей $f = 0$ и $g = 0$. В нашем случае центром одной окружности служит центр описанной окружности треугольника ABC , а центром второй окружности служит точка, для которой величина $a^2 AM^2 + b^2 BM^2 + c^2 CM^2$ минимальна (точка Лемуана).

5.137. По теореме синусов $AB/BM = \sin AMB/\sin BAM$ и $AB/BN = \sin ANB/\sin BAN$. Значит,

$$\frac{AB^2}{BM \cdot BN} = \frac{\sin AMB \sin ANB}{\sin BAM \sin BAN} = \frac{\sin AMC \sin ANC}{\sin CAN \sin CAM} = \frac{AC^2}{CM \cdot CN}.$$

5.138. Так как $\angle BAS = \angle CAM$, то $BS/CM = S_{BAS}/S_{CAM} = AB \cdot AS/(AC \cdot AM)$, т. е. $AS/AM = 2b \cdot BS/ac$. Остается заметить, что $BS = ac^2/(b^2 + c^2)$ и $2AM = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (см. задачи 5.137 и 12.11, а)).

5.139. При симметрии относительно биссектрисы угла A отрезок B_1C_1 переходит в отрезок, параллельный стороне BC , а прямая AS — в прямую AM , где M — середина стороны BC .

5.140. Возьмем на отрезках BC и BA точки A_1 и C_1 так, что $A_1C_1 \parallel BK$. Так как $\angle BAC = \angle CBK = \angle BA_1C_1$ и $\angle BCA = \angle BC_1A_1$, то отрезок A_1C_1 антипараллелен стороне AC . С другой стороны, согласно задаче 3.31, б) прямая BD делит отрезок A_1C_1 пополам.

5.141. Достаточно воспользоваться результатом задачи 3.30.

5.142. Пусть AP — общая хорда рассматриваемых окружностей, Q — точка пересечения прямых AP и BC . Тогда $BQ/AB = \sin BAQ/\sin AQB$ и $AC/CQ = \sin AQC/\sin CAQ$. Значит, $BQ/CQ = AB \sin BAP/AC \sin CAP$. Так как AC и AB — касательные к окружностям S_1 и S_2 , то $\angle CAP = \angle ABP$ и $\angle BAP = \angle ACP$, а значит, $\angle APB = \angle APC$. Поэтому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AP} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{\sin APB}{\sin ABP} \cdot \frac{\sin ACP}{\sin APC} = \frac{\sin ACP}{\sin ABP} = \frac{\sin BAP}{\sin CAP}.$$

Следовательно, $BQ/CQ = AB^2/AC^2$.

5.143. Пусть S — точка пересечения прямых AX и BC . Тогда $AS/AB = CS/CX$ и $AS/AC = BS/BX$, а значит, $CS/BS = (AC/AB) \cdot (XC/XB)$. Остается заметить, что $XC/XB = AC/AB$ (см. решение задачи 7.16, а)).

5.144. Пусть L, M и N — середины отрезков CA, CB и CH . Так как $\triangle BAC \sim \triangle CAH$, то $\triangle BAM \sim \triangle CAN$, а значит, $\angle BAM = \angle CAN$. Аналогично $\angle ABL = \angle CBN$.

5.145. Пусть B_1C_1, C_2A_2 и A_3B_3 — данные отрезки. Тогда треугольники A_2XA_3, B_1XB_3 и C_1XC_2 равнобедренные; пусть длины их боковых сторон равны a, b и c . Прямая AX делит отрезок B_1C_1 пополам тогда и только тогда, когда эта прямая содержит симедиану. Поэтому если X — точка Лемуана, то $a = b, b = c$ и $c = a$. А если $B_1C_1 = C_2A_2 = A_3B_3$, то $b + c = c + a = a + b$, а значит, $a = b = c$.

5.146. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC ; a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 — расстояния от точек K и M до сторон треугольника. Так как точки K и M изогонально сопряжены, то $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$; кроме того, $aa_2 = bb_2 = cc_2$ (см. задачу 4.1). Следовательно, $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$. Используя это

равенство и учитывая, что площади треугольников A_1B_1K , B_1C_1K и C_1A_1K равны $a_1b_1c/4R$, $b_1c_1a/4R$ и $c_1a_1b/4R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC , получаем, что площади этих треугольников равны. Кроме того, точка K лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, K — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 4.2).

5.147. Медианы треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке K (задача 5.146), поэтому стороны треугольника ABC перпендикулярны медианам треугольника $A_1B_1C_1$. После поворота на 90° стороны треугольника ABC станут параллельны медианам треугольника $A_1B_1C_1$, а значит, медианы треугольника ABC станут параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ (см. задачу 13.2). Поэтому медианы треугольника ABC перпендикулярны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

5.148. Пусть A_2, B_2 и C_2 — проекции точки K на прямые BC, CA и AB . Тогда $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ (задача 5.111) и K — точка пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$ (задача 5.146). Поэтому преобразование подобия, переводящее треугольник $A_2B_2C_2$ в треугольник $A_1B_1C_1$, переводит точку K в точку M пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, например, $\angle KA_2C_2 = \angle KBC_2 = \angle B_1A_1K$, т. е. точки K и M изогонально сопряжены относительно треугольника $A_1B_1C_1$, а значит, K — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

5.149. Пусть K — точка Лемуана треугольника ABC ; A_1, B_1 и C_1 — проекции точки K на стороны треугольника ABC ; L — середина отрезка B_1C_1 ; N — точка пересечения прямой KL и медианы AM ; O — середина отрезка AK (рис. 5.7). Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AK , поэтому со-

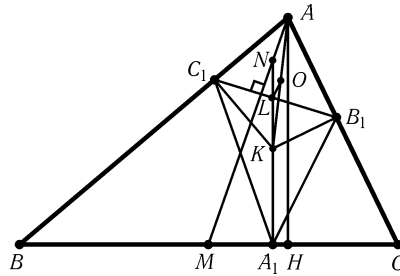


Рис. 5.7

гласно задаче 5.146 $OL \perp B_1C_1$. Кроме того, $AN \perp B_1C_1$ (задача 5.147) и O — середина отрезка AK , а значит, OL — средняя линия треугольника AKN и $KL = LN$. Следовательно, K — середина отрезка A_1N . Остается заметить, что при гомотетии с центром M , переводящей N в A , отрезок NA_1 переходит в высоту AH .

Глава 6

Многоугольники

Основные сведения

1. Многоугольник называют *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины.

2. Выпуклый многоугольник называют *описанным*, если все его стороны касаются некоторой окружности. Выпуклый четырехугольник является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$.

Выпуклый многоугольник называют *вписанным*, если все его вершины лежат на одной окружности. Выпуклый четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ABC + \angle CDA = \angle DAB + \angle BCD$.

3. Выпуклый многоугольник называют *правильным*, если все его стороны равны и все углы также равны.

Выпуклый n -угольник является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на угол $2\pi/n$ с центром в некоторой точке O он переходит в себя. Точку O называют *центром* правильного многоугольника.

Вводные задачи

1. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$.

2. Докажите, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$.

3. а) Докажите, что оси симметрии правильного многоугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что правильный $2n$ -угольник имеет центр симметрии.

4. а) Докажите, что сумма углов при вершинах выпуклого n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

б) Выпуклый n -угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что количество этих треугольников равно $n - 2$.

§1. Вписанные и описанные четырехугольники

6.1. Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник — ромб.

6.2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

6.3. Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

6.4. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

6.5. Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

6.6. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . В треугольнике AOB проведены высоты AA_1 и BB_1 , а в треугольнике COD — высоты CC_1 и DD_1 . Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой.

6.7. Углы при основании AD трапеции $ABCD$ равны 2α и 2β . Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда $BC/AD = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

6.8. В треугольнике ABC проведены отрезки PQ и RS , параллельные стороне AC , и отрезок BM (рис. 6.1). Трапеции $RPKL$ и $MLSC$ описанные. Докажите, что трапеция $APQC$ тоже описанная.

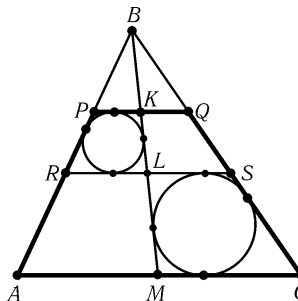


Рис. 6.1

6.9*. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и CD пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: $AB + CD = BC + AD$, $AP + CQ = AQ + CP$ или $BP + BQ = DP + DQ$.

6.10*. Через точки пересечения продолжений сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Докажите, что если четырехугольники, примыкающие к вершинам B и D , описанные, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный.

6.11*. На стороне BC треугольника ABC взяты точки K_1 и K_2 . Докажите, что общие внешние касательные к вписанным окружностям

треугольников ABK_1 и ACK_2 общие внешние касательные к вписанным окружностям треугольников ABK_2 и ACK_1 пересекаются в одной точке.

6.12*. Через каждую из точек пересечения продолжений сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведено по две прямые. Эти прямые делят четырехугольник на девять четырехугольников.

а) Докажите, что если три из четырехугольников, примыкающих к вершинам A, B, C, D , описанные, то четвертый четырехугольник тоже описанный.

б) Докажите, что если r_a, r_b, r_c, r_d — радиусы окружностей, вписанных в четырехугольники, примыкающие к вершинам A, B, C, D , то

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_d}.$$

6.13*. Окружности S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются внешним образом. Докажите, что четыре общие касательные (в точках касания окружностей) либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.

6.14*. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон исходного четырехугольника с вписанной окружностью.

* * *

6.15*. Четырехугольник $ABCD$ вписанный; H_c и H_d — ортоцентры треугольников ABD и ABC . Докажите, что CDH_cH_d — параллелограмм.

6.16*. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA и DAB образуют прямоугольник.

6.17*. Продолжения сторон четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O , пересекаются в точках P и Q , а его диагонали пересекаются в точке S .

а) Расстояния от точек P, Q и S до точки O равны p, q и s , а радиус описанной окружности равен R . Найдите длины сторон треугольника PQS .

б) Докажите, что высоты треугольника PQS пересекаются в точке O .

* * *

6.18*. Диагональ AC разбивает четырехугольник $ABCD$ на два треугольника, вписанные окружности которых касаются диагонали AC в одной точке. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и BCD тоже касаются диагонали BD в одной точке, а точки их касания со сторонами четырехугольника лежат на одной окружности.

6.19*. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на его стороны являются вершинами описанного четырехугольника, если только они не попадают на продолжения сторон.

6.20*. Докажите, что если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то проекции точки пересечения диагоналей на стороны являются вершинами вписанного четырехугольника.

См. также задачи 2.71–2.79, 13.33, 13.34, 16.4.

§2. Четырехугольники

6.21. Угол между сторонами AB и CD четырехугольника $ABCD$ равен φ . Докажите, что $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2(AB \cdot BC \cos B + BC \cdot CD \cos C + CD \cdot AB \cos \varphi)$.

6.22. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, причем лучи AB и DC пересекаются в точке O . Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей, перпендикулярна биссектрисе угла AOD .

6.23. На сторонах BC и AD четырехугольника $ABCD$ взяты точки M и N так, что $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке O . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AOD .

6.24. Докажите, что биссектрисы углов выпуклого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

6.25. Два различных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник $PQRS$ (точки A и A_1 лежат на стороне PQ , B и B_1 — на QR и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

6.26. Середины M и N диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ не совпадают. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M_1 и N_1 . Докажите, что если $MM_1 = NN_1$, то $AD \parallel BC$.

6.27*. Докажите, что два четырехугольника подобны тогда и только тогда, когда у них равны четыре соответственных угла и соответственные углы между диагоналями.

6.28*. Четырехугольник $ABCD$ выпуклый; точки A_1, B_1, C_1 и D_1 таковы, что $AB \parallel C_1D_1, AC \parallel B_1D_1$ и т. д. для всех пар вершин. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже выпуклый, причем $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$.

6.29*. Из вершин выпуклого четырехугольника опущены перпендикуляры на диагонали. Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями перпендикуляров, подобен исходному четырехугольнику.

6.30*. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

6.31*. Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC и COD равны r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно. Докажите, что $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.

6.32*. Окружность радиуса r_1 касается сторон DA , AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, окружность радиуса r_2 — сторон AB , BC и CD ; аналогично определяются r_3 и r_4 . Докажите, что $\frac{AB}{r_1} + \frac{CD}{r_3} = \frac{BC}{r_2} + \frac{AD}{r_4}$.

6.33*. О выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC , $B CD$, CDA и DAB , равны между собой. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

6.34*. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$; A_1, B_1, C_1 и D_1 — центры описанных окружностей треугольников $B CD$, CDA , DAB и ABC . Аналогично для четырехугольника $A_1 B_1 C_1 D_1$ определяются точки A_2, B_2, C_2 и D_2 . Докажите, что четырехугольники $ABCD$ и $A_2 B_2 C_2 D_2$ подобны, причем коэффициент их подобия равен $|\text{ctg } A + \text{ctg } C|(\text{ctg } B + \text{ctg } D)/4$.

6.35*. Окружности, диаметрами которых служат стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, касаются сторон CD и AB соответственно. Докажите, что $BC \parallel AD$.

6.36*. Четыре прямые задают четыре треугольника. Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой.

§3. Теорема Птолемея

6.37*. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (Птолемей).

6.38*. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

6.39*. Пусть $\alpha = \pi/7$. Докажите, что $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$.

6.40*. Расстояния от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равны d_a, d_b и d_c . Докажите, что $d_a + d_b + d_c = R + r$.

6.41*. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что $AB + AC \leq 2AD$.

6.42*. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P . Докажите, что $PA + PC = \sqrt{2}PB$.

6.43*. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность, проходящая через точку A , пересекает отрезки AB , AC и AD в точках P , Q и R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB = AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.

6.44*. На дуге $A_1 A_{2n+1}$ описанной окружности S правильного $(2n + 1)$ -угольника $A_1 \dots A_{2n+1}$ взята точка A . Докажите, что:

а) $d_1 + d_3 + \dots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \dots + d_{2n}$, где $d_i = AA_i$;

б) $l_1 + \dots + l_{2n+1} = l_2 + \dots + l_{2n}$, где l_i — длина касательной, проведенной из точки A к окружности радиуса r , касающейся S в точке A_i (все касания одновременно внутренние или внешние).

6.45*. Окружности радиуса x и y касаются окружности радиуса R , причем расстояние между точками касания равно a . Вычислите длину следующей общей касательной к первым двум окружностям:

- внешней, если оба касания внешние или внутренние одновременно;
- внутренней, если одно касание внутреннее, а другое внешнее.

6.46*. Окружности α, β, γ и δ касаются данной окружности в вершинах A, B, C и D выпуклого четырехугольника $ABCD$. Пусть $t_{\alpha\beta}$ — длина общей касательной к окружностям α и β (внешней, если оба касания внутренние или внешние одновременно, и внутренней, если одно касание внутреннее, а другое внешнее); $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}$ и т. д. определяются аналогично. Докажите, что $t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}$ (обобщенная теорема Птолемея).

См. также задачу 9.67.

§4. Пятиугольники

6.47*. В равностороннем (неправильном) пятиугольнике $ABCDE$ угол ABC вдвое больше угла DBE . Найдите величину угла ABC .

6.48*. а) Диагонали AC и BE правильного пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке K . Докажите, что описанная окружность треугольника CKE касается прямой BC .

б) Пусть a — длина стороны правильного пятиугольника, d — длина его диагонали. Докажите, что $d^2 = a^2 + ad$.

6.49*. Докажите, что в правильный пятиугольник можно так вписать квадрат, что его вершины будут лежать на четырех сторонах пятиугольника.

6.50*. Правильный пятиугольник $ABCDE$ со стороной a вписан в окружность S . Прямые, проходящие через его вершины перпендикулярно сторонам, образуют правильный пятиугольник со стороной b (рис. 6.2). Сторона правильного пятиугольника, описанного около окружности S , равна c . Докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

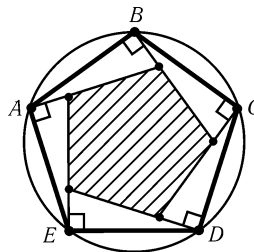


Рис. 6.2

См. также задачи 2.60, 4.9, 6.58, 6.93, 9.23, 9.44, 9.74, 9.75, 10.63, 10.67, 12.8, 13.10, 13.56, 20.11, 29.7.

§5. Шестиугольники

6.51*. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что:

а) площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.

б) площади треугольников ACE и BDF равны.

6.52*. Все углы выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны. Докажите, что $|BC - EF| = |DE - AB| = |AF - CD|$.

6.53*. Суммы углов при вершинах A, C, E и B, D, F выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ с равными сторонами равны. Докажите, что противоположные стороны этого шестиугольника параллельны.

6.54*. Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждая из трех диагоналей, соединяющих противоположные вершины, делит площадь пополам, то эти диагонали пересекаются в одной точке.

6.55*. Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждый из трех отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, делит площадь пополам, то эти отрезки пересекаются в одной точке.

См. также задачи 1.45, 2.11, 2.20, 2.47, 3.67, 4.6, 4.28, 4.31, 5.88, 6.95, 9.45 а), 9.76–9.78, 13.3, 14.6, 18.16, 18.17, 18.24, 18.25, 29.29 а), 30.42, 30.43.

§6. Правильные многоугольники

6.56. Число сторон многоугольника $A_1 \dots A_n$ нечетно. Докажите, что:

а) если этот многоугольник вписанный и все его углы равны, то он правильный;

б) если этот многоугольник описанный и все его стороны равны, то он правильный.

6.57. Все углы выпуклого многоугольника $A_1 \dots A_n$ равны, и из некоторой его внутренней точки O все стороны видны под равными углами. Докажите, что этот многоугольник правильный.

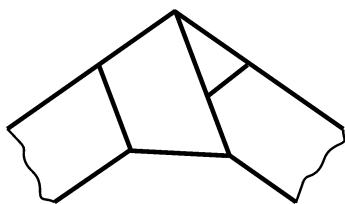


Рис. 6.3

6.58*. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем стянута так, чтобы узел стал плоским (рис. 6.3). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

6.59*. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ построены внутренним образом правильные треугольники ABK, BCL, CDM и DAN . Докажите, что середины сторон этих треугольников (не являющихся сторонами квадрата) и середины отрезков KL, LM, MN и NK образуют правильный двенадцатиугольник.

6.60*. Существует ли правильный многоугольник, длина одной диагонали которого равна сумме длин двух других диагоналей?

6.61*. Правильный $(4k + 2)$ -угольник вписан в окружность радиуса R с центром O . Докажите, что сумма длин отрезков, отсекаемых углом $A_k O A_{k+1}$ на прямых $A_1 A_{2k}, A_2 A_{2k-1}, \dots, A_k A_{k+1}$, равна R .

6.62*. В правильном восемнадцатиугольнике $A_1 \dots A_{18}$ проведены диагонали $A_a A_d, A_b A_e$ и $A_c A_f$. Пусть $k = a - b, p = b - c, m = c - d, q = d - e, n = e - f$ и $r = f - a$. Докажите, что указанные диагонали пересекаются в одной точке в любом из следующих случаев:

- а) $\{k, m, n\} = \{p, q, r\}$;
- б) $\{k, m, n\} = \{1, 2, 7\}$ и $\{p, q, r\} = \{1, 3, 4\}$;
- в) $\{k, m, n\} = \{1, 2, 8\}$ и $\{p, q, r\} = \{2, 2, 3\}$.

З а м е ч а н и е. Равенство $\{k, m, n\} = \{x, y, z\}$ означает, что указанные наборы чисел совпадают; порядок их записи при этом не учитывается.

6.63*. В правильном тридцатиугольнике проведены три диагонали. Определим для них наборы $\{k, m, n\}$ и $\{p, q, r\}$ так же, как и в предыдущей задаче. Докажите, что если $\{k, m, n\} = \{1, 3, 14\}$ и $\{p, q, r\} = \{2, 2, 8\}$, то диагонали пересекаются в одной точке.

6.64*. В правильном n -угольнике ($n \geq 3$) отмечены середины всех сторон и диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной, окружности?

6.65*. Вершины правильного n -угольника окрашены в несколько цветов так, что точки одного цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

6.66*. Докажите, что при $n \geq 6$ правильный $(n - 1)$ -угольник нельзя так вписать в правильный n -угольник, чтобы на всех сторонах n -угольника, кроме одной, лежало ровно по одной вершине $(n - 1)$ -угольника.

* * *

6.67. Пусть O — центр правильного n -угольника $A_1 \dots A_n$, X — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{XA_1} + \dots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XO}$.

6.68. Докажите, что в вершинах правильного n -угольника можно расставить действительные числа x_1, \dots, x_n , все отличные от нуля, так, чтобы для любого правильного k -угольника, все вершины которого являются вершинами исходного n -угольника, сумма чисел, стоящих в его вершинах, равнялась нулю.

6.69. Точка A лежит внутри правильного десятиугольника $X_1 \dots X_{10}$, а точка B — вне его. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AX_1} + \dots + \overrightarrow{AX_{10}}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{BX_1} + \dots + \overrightarrow{BX_{10}}$. Может ли оказаться, что $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$?

6.70. Правильный многоугольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O ; X — произвольная точка. Докажите, что $A_1 X^2 + \dots + A_n X^2 = n(R^2 + d^2)$, где $d = OX$.

6.71. Найдите сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R .

6.72. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки X до вершин правильного n -угольника будет наименьшей, если X — центр n -угольника.

6.73. Правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O ; $e_i = \overrightarrow{OA_i}$, $x_i = \overrightarrow{OX}$ — произвольный вектор. Докажите, что $\sum (e_i, x)^2 = nR^2 \cdot OX^2/2$.

6.74. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , до произвольной прямой, проходящей через центр многоугольника.

6.75. Расстояние от точки X до центра правильного n -угольника равно d , r — радиус вписанной окружности n -угольника. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки X до прямых, содержащих стороны n -угольника, равна $n(r^2 + d^2/2)$.

6.76. Докажите, что сумма квадратов длин проекций сторон правильного n -угольника на любую прямую равна $na^2/2$, где a — сторона n -угольника.

6.77* Правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность радиуса R ; X — точка этой окружности. Докажите, что $XA_1^4 + \dots + XA_n^4 = 6nR^4$.

6.78* а) Правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность радиуса 1 с центром O ; $e_i = \overrightarrow{OA_i}$, u — произвольный вектор. Докажите, что $\sum (u, e_i)e_i = nu/2$.

б) Из произвольной точки X опущены перпендикуляры XA_1, \dots, XA_n на стороны правильного n -угольника (или на их продолжения). Докажите, что $\sum X\overrightarrow{A_i} = nX\overrightarrow{O}/2$, где O — центр n -угольника.

6.79* Докажите, что если число n не является степенью простого числа, то существует выпуклый n -угольник со сторонами длиной $1, 2, \dots, n$, все углы которого равны.

См. также задачи 2.9, 4.59, 4.62, 6.39, 6.44, 6.48–6.50, 9.83, 9.84, 11.46, 11.48, 17.31, 18.32, 19.48, 23.8, 24.2.

§7. Вписанные и описанные многоугольники

6.80* На сторонах треугольника внешним образом построены три квадрата. Какими должны быть углы треугольника, чтобы шесть вершин этих квадратов, отличных от вершин треугольника, лежали на одной окружности?

6.81* В окружность вписан $2n$ -угольник $A_1 \dots A_{2n}$. Пусть p_1, \dots, p_{2n} — расстояния от произвольной точки M окружности до сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n}A_1$. Докажите, что $p_1p_3 \dots p_{2n-1} = p_2p_4 \dots p_{2n}$.

6.82*. Вписанный многоугольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов всех вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от разбиения.

6.83*. Два n -угольника вписаны в одну окружность, причем наборы длин их сторон одинаковы, но не обязательно равны соответственные стороны. Докажите, что площади этих многоугольников равны.

6.84*. Положительные числа a_1, \dots, a_n таковы, что $2a_i < a_1 + \dots + a_n$ при всех $i = 1, \dots, n$. Докажите, что существует вписанный n -угольник, длины сторон которого равны a_1, \dots, a_n .

* * *

6.85. Точка, лежащая внутри описанного n -угольника, соединена отрезками со всеми вершинами и точками касания. Образовавшиеся при этом треугольники попеременно окрашены в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.

6.86*. В $2n$ -угольнике (n нечетно) $A_1 \dots A_{2n}$, описанном около окружности с центром O , диагонали $A_1 A_{n+1}, A_2 A_{n+2}, \dots, A_{n-1} A_{2n-1}$ проходят через точку O . Докажите, что и диагональ $A_n A_{2n}$ проходит через точку O .

6.87*. Окружность радиуса r касается сторон многоугольника в точках A_1, \dots, A_n , причем длина стороны, на которой лежит точка A_i , равна a_i . Точка X удалена от центра окружности на расстояние d . Докажите, что $a_1 X A_1^2 + \dots + a_n X A_n^2 = P(r^2 + d^2)$, где P — периметр многоугольника.

6.88*. Около окружности описан n -угольник $A_1 \dots A_n$; l — произвольная касательная к окружности, не проходящая через вершины n -угольника. Пусть a_i — расстояние от вершины A_i до прямой l , b_i — расстояние от точки касания стороны $A_i A_{i+1}$ с окружностью до прямой l . Докажите, что:

- а) величина $b_1 \dots b_n / (a_1 \dots a_n)$ не зависит от выбора прямой l ;
- б) величина $a_1 a_3 \dots a_{2m-1} / (a_2 a_4 \dots a_{2m})$ не зависит от выбора прямой l , если $n = 2m$.

6.89*. Некоторые стороны выпуклого многоугольника красные, остальные синие. Сумма длин красных сторон меньше половины периметра, и нет ни одной пары соседних синих сторон. Докажите, что в этот многоугольник нельзя вписать окружность.

См. также задачи 2.12, 4.39, 19.6.

§8. Произвольные выпуклые многоугольники

6.90. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

6.91*. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

6.92*. Для каких n существует выпуклый n -угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

6.93*. Может ли выпуклый неправильный пятиугольник иметь ровно четыре стороны одинаковой длины и ровно четыре диагонали одинаковой длины?

Может ли в таком пятиугольнике пятая сторона иметь общую точку с пятой диагональю?

6.94*. Точка O , лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждыми двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Докажите, что точка O равноудалена от вершин этого многоугольника.

См. также задачи 4.49, 4.50, 9.82, 9.85, 9.86, 11.35, 13.14, 14.28, 16.8, 17.33, 17.34, 19.9, 23.13, 23.15.

§9. Теорема Паскаля

6.95*. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон (если эти стороны не параллельны) вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (Паскаль).

6.96*. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC ; R — произвольная точка. Прямые AR , BR и CR пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC , MB_1 и CA , MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R .

6.97*. Даны треугольник ABC и некоторая точка T . Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения X прямых PR и QS лежит на прямой BC .

6.98*. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2 ; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3 . Докажите, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

6.99*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность S ; X — произвольная точка, M и N — вторые точки пересечения прямых XA и XD с окружностью S . Прямые DC и AX , AB и DX пересекаются в точках E и F . Докажите, что точка пересечения прямых MN и EF лежит на прямой BC .

6.100*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90^\circ$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO .

6.101*. Точки A и A_1 , лежащие внутри окружности с центром O , симметричны относительно точки O . Лучи AP и A_1P_1 сонаправлены, лучи AQ

и A_1Q_1 тоже сонаправлены. Докажите, что точка пересечения прямых P_1Q и PQ_1 лежит на прямой AA_1 . (Точки P, P_1, Q и Q_1 лежат на окружности.)

6.102*. Две окружности касаются описанной окружности треугольника ABC в точке K ; кроме того, одна из этих окружностей касается стороны AB в точке M , а другая касается стороны AC в точке N . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой MN .

6.103*. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте шестую точку этой окружности.

6.104*. Точки A_1, \dots, A_6 лежат на одной окружности, а точки K, L, M и N — на прямых A_1A_2, A_3A_4, A_1A_6 и A_4A_5 соответственно, причем $KL \parallel A_2A_3, LM \parallel A_3A_6$ и $MN \parallel A_6A_5$. Докажите, что $NK \parallel A_5A_2$.

Задачи для самостоятельного решения

6.105. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, а P — произвольная точка, то $AP^2 + CP^2 = DP^2 + BP^2$.

6.106. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. На его сторонах внешним образом построены квадраты с центрами P, Q, R и S . Докажите, что отрезок PR проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD , причем $PR = (AC + BD)/\sqrt{2}$.

6.107. На наибольшей стороне AC треугольника ABC взяты точки A_1 и C_1 так, что $AC_1 = AB$ и $CA_1 = CB$, а на сторонах AB и BC взяты точки A_2 и C_2 так, что $AA_1 = AA_2$ и $CC_1 = CC_2$. Докажите, что четырехугольник $A_1A_2C_2C_1$ вписанный.

6.108. В окружность вписан выпуклый семиугольник. Докажите, что если какие-то три его угла равны 120° , то какие-то две его стороны равны.

6.109. На плоскости даны правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$ и точка P . Докажите, что из отрезков A_1P, \dots, A_nP можно составить замкнутую линию.

6.110. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность S_1 и описан около окружности S_2 ; K, L, M и N — точки касания его сторон с окружностью S_2 . Докажите, что $KM \perp LN$.

6.111. Около окружности описан пятиугольник $ABCDE$, длины сторон которого — целые числа, причем $AB = CD = 1$. Найдите длину отрезка BK , где K — точка касания стороны BC с окружностью.

6.112. Докажите, что в правильном $2n$ -угольнике $A_1 \dots A_{2n}$ диагонали $A_1A_{n+2}, A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ пересекаются в одной точке.

6.113. Докажите, что в правильном двадцатичетырехугольнике $A_1 \dots A_{24}$ диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16} .

Решения

6.1. Пусть O — центр вписанной окружности и точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда $\angle ACB = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Поэтому треугольники ABC и ADC равны, так как сторона AC у них общая. Следовательно, $AB = DA$. Аналогично $AB = BC = CD = DA$.

6.2. Ясно, что $\angle AOB = 180^\circ - \angle BAO - \angle ABO = 180^\circ - (\angle A + \angle B)/2$ и $\angle COD = 180^\circ - (\angle C + \angle D)/2$. Следовательно, $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)/2 = 180^\circ$.

6.3. Рассмотрим две окружности, касающиеся сторон данного четырехугольника и их продолжений. Прямые, содержащие стороны четырехугольника, являются общими внутренними и внешними касательными к этим окружностям. Прямая, соединяющая центры окружностей, содержит диагональ четырехугольника, и, кроме того, она является осью симметрии четырехугольника. Значит, вторая диагональ перпендикулярна этой прямой.

6.4. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус, a — длина хорд, высекаемых окружностью на сторонах четырехугольника. Тогда расстояния от точки O до сторон четырехугольника равны $\sqrt{R^2 - a^2/4}$, т. е. она равноудалена от сторон четырехугольника и является центром вписанной окружности.

6.5. Для параллелограмма утверждение задачи очевидно, поэтому можно считать, что прямые AB и CD пересекаются. Пусть O — центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$; M и N — середины диагоналей AC и BD . Тогда $S_{ANB} + S_{CND} = S_{AMB} + S_{CMD} = S_{AOB} + S_{COD} = S_{ABCD}/2$. Остается воспользоваться результатом задачи 7.2.

6.6. Пусть вписанная окружность касается сторон DA , AB и BC в точках M , H и N соответственно. Тогда OH — высота треугольника AOB и при симметрии относительно прямых AO и BO точка H переходит в точки M и N соответственно. Поэтому согласно задаче 1.58 точки A_1 и B_1 лежат на прямой MN . Аналогично точки C_1 и D_1 лежат на прямой MN .

6.7. Пусть r — расстояние от точки пересечения биссектрис углов A и D до основания AD , r' — расстояние от точки пересечения биссектрис углов B и C до основания BC . Тогда $AD = r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$ и $BC = r'(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$. Поэтому $r = r'$ тогда и только тогда, когда $BC/AD = (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)/(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$.

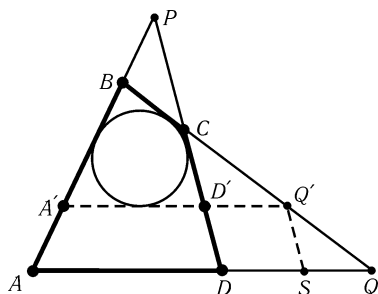


Рис. 6.4

6.8. Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\beta$ и $\angle BMA = 2\varphi$. Согласно задаче 6.7 $PK/RL = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \varphi$ и $LS/MC = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{ctg} \beta$. Так как $PQ/RS = PK/RL$ и $RS/AC = LS/MC$, то $PQ/AC = (PK/RL)(LS/MC) = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$. Следовательно, трапеция $APQC$ описанная.

6.9. Докажем сначала, что если четырехугольник $ABCD$ описанный, то выполняются все условия. Пусть K, L, M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA . Тогда $AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = BC + AD$, $AP + CQ = AK + PK + QL - CL = AN + PM + QN - CM = AQ + CP$ и $BP + BQ = AP - AB + BC + CQ = (AP + CQ) + (BC - AB) = AQ + CP + CD - AD = DP + DQ$.

Докажем теперь, например, что если $BP + BQ = DP + DQ$, то четырехугольник $ABCD$ описанный. Рассмотрим для этого окружность, касающуюся стороны BC и лучей BA и CD . Предположим, что прямая AD не касается этой окружности; сдвинем эту прямую так, чтобы она коснулась окружности (рис. 6.4). Пусть S — такая точка прямой AQ , что $Q'S \parallel DD'$. Так как $BP + BQ = DP + DQ$ и $BP + BQ' = D'P + D'Q'$, то $QS + SQ' = QQ'$. Получено противоречие. В двух других случаях доказательство проводится аналогично.

6.10. Пусть лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи BC и AD — в точке Q ; данные прямые, проходящие через точки P и Q , пересекаются в точке O . Согласно задаче 6.9 $BP + BQ = OP + OQ$ и $OP + OQ = DP + DQ$. Следовательно, $BP + BQ = DP + DQ$, а значит, четырехугольник $ABCD$ описанный.

6.11. Пусть O — точка пересечения общих внешних касательных к вписанным окружностям треугольников ABK_1 и ACK_2 (рис. 6.5). Проведем из точки O касательную l к вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AK_1 , AK_2 и касательной к вписанным окружностям треугольников ABK_1 и ACK_2 , отличной от прямой BC . Пусть

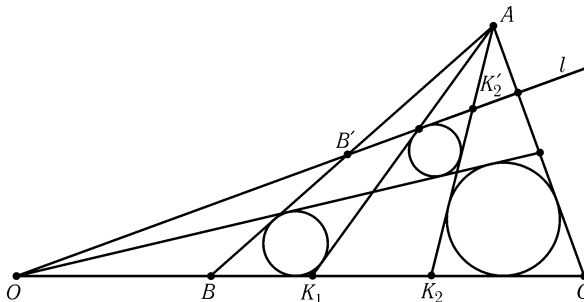


Рис. 6.5

прямая l пересекает прямые AB и AK_2 в точках B' и K_2' . Согласно задаче 6.15 четырехугольник $BK_2K_2'B'$ описанный. Это означает, что прямая l касается вписанной окружности треугольника ABK_2 . Аналогично доказывается, что прямая l касается вписанной окружности треугольника ACK_1 .

6.12. а) Сопоставим окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ с заданной на ней ориентацией (направлением обхода) точку с координатами $(a, b, \pm r)$, где знак перед r соответствует ориентации окружности. Рассмотрим пару пересекающихся прямых, на которых заданы ориентации (направления). Легко убедиться, что семейству ориентированных окружностей, касающихся данных прямых так, что в точках касания ориентации согласованы, сопоставляется прямая в пространстве, проходящая через точку плоскости $r = 0$, соответствующую точке пересечения двух данных прямых.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P , а прямые BC и AD — в точке Q . Предположим, что четырехугольники, примыкающие к вершинам A , B и C , описанные. Зададим на вписанных в них окружностях ориентации согласованным образом и перенесем эти ориентации на касательные. Пусть этим ориентированным окружностям соответствуют точки O_a , O_b и O_c . Тогда точки O_a , O_b и P лежат на одной прямой; точки O_b , O_c и Q тоже лежат на одной прямой. Следовательно, все эти точки лежат в одной плоскости. Поэтому прямые O_aQ и O_cP пересекаются в некоторой точке O_d . (Вообще говоря, эти прямые могли бы быть параллельны. Чтобы исключить такую возможность, нужно воспользоваться тем, что если, например, точка B лежит между A и P , то точка O_b лежит между O_a и P .) Точке O_d соответствует окружность, вписанная в четырехугольник, примыкающий к вершине D .

б) Радиусы r_a , r_b , r_c , r_d пропорциональны расстояниям от точек O_a , O_b , O_c ,

O_d до прямой PQ . Поэтому нужно лишь воспользоваться результатом задачи 1.3, б).

6.13. На окружностях и касательных можно выбрать ориентации согласованным образом (рис. 6.6). Пусть A_i — точка пересечения касательных к окружности S_i . Ориентации касательных задают ориентацию четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (этот четырехугольник может быть невыпуклым). Из равенства длин касательных, проведенных из точки A_i к окружности S_i , следует, что

$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_2A_3 + A_1A_4. \quad (1)$$

Воспользовавшись результатом задачи 6.9, получим, что стороны четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (или их продолжения) касаются одной окружности, если только этот четырехугольник невырожденный.

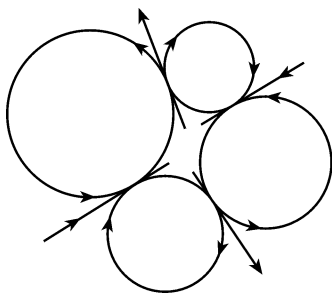


Рис. 6.6

Если три касательные пересекаются в одной точке, то из равенства (1) следует, что четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ вырождается в отрезок или в точку. В отрезок он вырождаться не может, поскольку если две касательные сливаются в одну прямую l , то они должны соответствовать противоположным сторонам четырехугольника; в этом случае все касательные пересекаются в одной точке (середине отрезка, отсекаемого на прямой l точками касания).

6.14. Пусть стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках E, F, G, H соответственно.

Покажем сначала, что прямые FH, EG и AC пересекаются в одной точке. Обозначим точки, в которых прямые FH и EG пересекают прямую AC , через M и M' соответственно. Поскольку $\angle AHM = \angle BFM$ как углы между касательными и хордой HF , то $\sin AHM = \sin CFM$. Поэтому $\frac{AM \cdot MH}{FM \cdot MC} = \frac{S_{AMH}}{S_{FMC}} = \frac{AH \cdot MH}{FC \cdot FM}$, т. е. $\frac{AM}{MC} = \frac{AH}{FC}$. Аналогично $\frac{AM'}{M'C} = \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{FC} = \frac{AM}{MC}$, поэтому $M = M'$, т. е. прямые FH, EG и AC пересекаются в одной точке.

Аналогичные рассуждения показывают, что прямые FH, EG и BD пересекаются в одной точке, поэтому прямые AC, BD, FH и EG пересекаются в одной точке.

6.15. Отрезки CH_d и DH_c параллельны, так как они перпендикулярны прямой BC . Кроме того, так как $\angle BCA = \angle BDA = \varphi$, длины этих отрезков равны $AB |\operatorname{ctg} \varphi|$ (см. задачу 5.47, б)).

6.16. Пусть O_a, O_b, O_c и O_d — центры вписанных окружностей треугольников $B CD, A CD, A BD$ и $A BC$ соответственно. Так как $\angle ADB = \angle ACB$, то $\angle AO_cB = 90^\circ + (\angle ADB/2) = 90^\circ + (\angle ACB/2) = \angle AO_dB$ (см. задачу 5.3). Поэтому четырехугольник ABO_dO_c вписанный, т. е. $\angle O_cO_dB = 180^\circ - \angle O_cAB = 180^\circ - (\angle A/2)$. Аналогично $\angle O_aO_dB = 180^\circ - (\angle C/2)$. Так как $\angle A + \angle C = 180^\circ$, то $\angle O_cO_dB + \angle O_aO_dB = 270^\circ$, а значит, $\angle O_aO_dO_c = 90^\circ$. Аналогично доказывается, что и остальные углы четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$ равны 90° .

6.17. а) Пусть лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q . Докажем, что точка M , в которой пересекаются описанные окружности треугольников CBP и CDQ , лежит на отрезке PQ . В самом деле, $\angle CMP +$

$+\angle CMQ = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Поэтому $PM + QM = PQ$, а так как $PM \cdot PQ = PD \cdot PC = p^2 - R^2$ и $QM \cdot PQ = QD \cdot QA = q^2 - R^2$, то $PQ^2 = PM \cdot PQ + QM \cdot PQ = p^2 + q^2 - 2R^2$.

Пусть N — точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и ABS . Докажем, что точка S лежит на отрезке PN . В самом деле, $\angle ANP = \angle ACP = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - \angle ABD = \angle ANS$. Поэтому $PN - SN = PS$, а так как $PN \cdot PS = PA \cdot PB = p^2 - R^2$ и $SN \cdot PS = SA \cdot SC = R^2 - s^2$, то $PS^2 = PN \cdot PS - SN \cdot PS = p^2 + s^2 - 2R^2$. Аналогично $QS^2 = q^2 + s^2 - 2R^2$.

б) Согласно задаче а) $PQ^2 - PS^2 = q^2 - s^2 = OQ^2 - OS^2$. Следовательно, $OP \perp QS$ (см. задачу 7.6). Аналогично доказывается, что $OQ \perp PS$ и $OS \perp PQ$.

6.18. Пусть вписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются диагонали AC в точках M и N соответственно. Тогда $AM = (AC + AB - BC)/2$ и $AN = (AC + AD - CD)/2$ (см. задачу 3.2). Точки M и N совпадают тогда и только тогда, когда $AM = AN$, т. е. $AB + CD = BC + AD$. Итак, если точки M и N совпадают, то четырехугольник $ABCD$ описанный, и аналогичные рассуждения показывают, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD совпадают.

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и M , а вписанная окружность треугольника ACD касается сторон AC, CD и DA в точках M, R и S . Так как $AP = AM = AS$ и $CQ = CM = CR$, то треугольники APS, BPQ, CQR и DRS равнобедренные; пусть α, β, γ и δ — углы при основаниях этих равнобедренных треугольников. Сумма углов этих треугольников равна $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \angle A + \angle B + \angle C + \angle D$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Следовательно, $\angle SPQ + \angle SRQ = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$, т. е. четырехугольник $PQRS$ вписанный.

6.19. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD ; A_1, B_1, C_1 и D_1 — ее проекции на стороны AB, BC, CD и DA . Точки A_1 и D_1 лежат на окружности с диаметром AO , поэтому $\angle OA_1D_1 = \angle OAD_1$. Аналогично $\angle OA_1B_1 = \angle OBB_1$. А так как $\angle CAD = \angle CBD$, то $\angle OA_1D_1 = \angle OA_1B_1$. Аналогично доказывается, что B_1O, C_1O и D_1O — биссектрисы углов четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, т. е. O — центр его вписанной окружности.

6.20. Воспользуемся обозначениями рис. 6.7. Условие вписанности четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ эквивалентно тому, что $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ$, а перпендикулярность диагоналей AC и BD — тому, что $(\alpha_1 + \delta_1) + (\beta_1 + \gamma_1) = 180^\circ$. Ясно также, что $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$ и $\delta = \delta_1$.

6.21. По теореме косинусов $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD$ и $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B$. А так как длина проекции отрезка AC на прямую l , перпендикулярную CD , равна сумме длин проекций отрезков AB и BC на прямую l , то $AC \cos \angle ACD = AB \cos \varphi + BC \cos \angle C$.

6.22. Пусть $\angle AOD = 2\alpha$. Тогда расстояния от точки O до проекций середин диагоналей AC и BD на биссектрису угла AOD равны $\cos \alpha(OA + OC)/2$ и $\cos \alpha(OB + OD)/2$ соответственно. Так как $OA + OC = AB + OB + OC = CD + OB + OC = OB + OD$, эти проекции

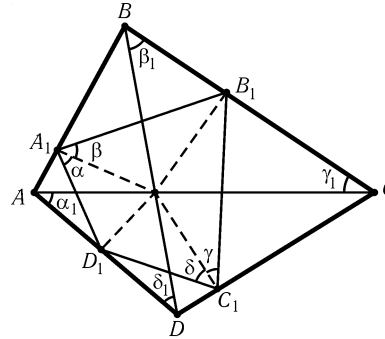


Рис. 6.7

совпадают.

6.23. Достроим треугольники ABM и DCM до параллелограммов $ABMM_1$ и $DCMM_2$. Так как $AM_1 : DM_2 = BM : MC = AN : DN$, то $\triangle ANM_1 \sim \triangle DNM_2$. Поэтому точка N лежит на отрезке M_1M_2 и $MM_1 : MM_2 = AB : CD = AN : ND = M_1N : M_2N$, т. е. MN — биссектриса угла M_1MM_2 .

6.24. Пусть a, b, c и d — биссектрисы углов при вершинах A, B, C и D . Нужно проверить, что $\angle(a, b) + \angle(c, d) = 0^\circ$. Ясно, что $\angle(a, b) = \angle(a, AB) + \angle(AB, b)$ и $\angle(c, d) = \angle(c, CD) + \angle(CD, d)$. Так как четырехугольник $ABCD$ выпуклый и $\angle(a, AB) = \angle(AD, AB)/2$, $\angle(AB, b) = \angle(AB, BC)/2$, $\angle(c, CD) = \angle(CB, CD)/2$, $\angle(CD, d) = \angle(CD, DA)/2$, то $\angle(a, b) + \angle(c, d) = (\angle(AD, AB) + \angle(AB, BC) + \angle(CB, CD) + \angle(CD, DA))/2$, $\angle(c, d) = \angle(CD, DA)/2 = 360^\circ/2 = 0^\circ$. (см. «Основные сведения» гл. 2).

6.25. Пусть для определенности $AB > A_1B_1$. При параллельном переносе на вектор \overrightarrow{CB} треугольник SD_1C_1 переходит в $S'D'_1C'_1$, а отрезок CD переходит в BA . Так как $QA_1 : QA = A_1B_1 : AB = S'D'_1 : S'A$, то $QS' \parallel A_1D'_1$. Следовательно, $QS \parallel AD$. Аналогично $PR \parallel AB$.

6.26. Предположим, что прямые AD и BC не параллельны. Пусть M_2, K, N_2 — середины сторон AB, BC, CD соответственно. Если $MN \parallel BC$, то $BC \parallel AD$, так как $AM = MC$ и $BN = ND$. Поэтому будем считать, что прямые MN и BC не параллельны, т. е. $M_1 \neq M_2$ и $N_1 \neq N_2$. Ясно, что $\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BC}/2 = \overrightarrow{NN_2}$ и $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{NN_1}$. Поэтому $M_1M_2 \parallel N_1N_2$. Следовательно, $KM \parallel AB \parallel CD \parallel KN$, т. е. $M = N$. Получено противоречие.

6.27. Преобразование подобия можно совместить одну пару соответственных сторон четырехугольников, поэтому достаточно рассмотреть четырехугольники $ABCD$ и ABC_1D_1 , у которых точки C_1 и D_1 лежат на лучах BC, AD и $CD \parallel C_1D_1$. Обозначим точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и ABC_1D_1 через O и O_1 соответственно.

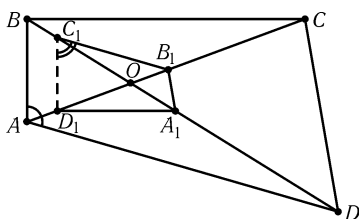


Рис. 6.8

Предположим, что точки C и D лежат ближе к точкам B и A , чем точки C_1 и D_1 . Докажем, что тогда $\angle AOB > \angle AO_1B$. В самом деле, $\angle C_1BA > \angle CAB$ и $\angle D_1BA > \angle DBA$, поэтому $\angle AO_1B = 180^\circ - \angle C_1AB - \angle D_1BA < 180^\circ - \angle CAB - \angle DBA = \angle AOB$. Получено противоречие, поэтому $C_1 = C, D_1 = D$.

6.28. Любой четырехугольник с точностью до подобия определяется направлениями своих сторон и диагоналей, поэтому достаточно построить один пример четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ с требуемыми направлениями сторон и диагоналей. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD . На луче OA возьмем произвольную точку D_1 и проведем $D_1A_1 \parallel BC, A_1B_1 \parallel CD$ и $B_1C_1 \parallel DA$ (рис. 6.8). Так как $OC_1 : OB_1 = OD : OA, OB_1 : OA_1 = OC : OD$ и $OA_1 : OD_1 = OB : OC$, то $OC_1 : OD_1 = OB : OA$, а значит, $C_1D_1 \parallel AB$. Из полученного рисунка ясно, что $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$.

6.29. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = \angle AOB < 90^\circ$. Опустим перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на диагонали четырехугольника $ABCD$. Так как $OA_1 = OA \cos \alpha, OB_1 = OB \cos \alpha, OC_1 = OC \cos \alpha, OD_1 = OD \cos \alpha$, то при

симметрии относительно биссектрисы угла AOB четырехугольник $ABCD$ переходит в четырехугольник, гомотетичный четырехугольнику $A_1B_1C_1D_1$ (с коэффициентом $1/\cos \alpha$).

6.30. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O ; H_a и H_b — ортоцентры треугольников AOB и COD ; K_a и K_b — середины сторон BC и AD ; P — середина диагонали AC . Точки пересечения медиан треугольников AOD и BOC делят отрезки K_aO и K_bO в отношении $1:2$, поэтому нужно доказать, что $H_aH_b \perp K_aK_b$.

Так как $OH_a = AB|\operatorname{ctg} \varphi|$ и $OH_b = CD|\operatorname{ctg} \varphi|$, где $\varphi = \angle AOB$ (см. задачу 5.47, б)), то $OH_a : OH_b = PK_a : PK_b$. Соответственные стороны углов H_aOH_b и K_aPK_b перпендикулярны; кроме того, векторы $\vec{OH_a}$ и $\vec{OH_b}$ направлены к прямым AB и CD при $\varphi < 90^\circ$ и от этих прямых при $\varphi > 90^\circ$. Поэтому $\angle H_aOH_b = \angle K_aPK_b$ и $\triangle H_aOH_b \sim \triangle K_aPK_b$. Следовательно, $H_aH_b \perp K_aK_b$.

6.31. Пусть $S = S_{AOD}$, $x = AO$, $y = DO$, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$; k — коэффициент подобия треугольников BOC и AOD . Тогда

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} &= \frac{d+x+y}{S} + \frac{kd+kx+ky}{k^2S}, \\ 2 \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} &= \frac{a+x+ky}{kS} + \frac{c+kx+y}{kS}, \end{aligned}$$

так как $S_{BOC} = k^2S$ и $S_{AOB} = S_{COD} = kS$. Поскольку

$$\frac{x+y}{S} + \frac{x+y}{k^2S} = \frac{x+ky}{kS} + \frac{kx+y}{kS},$$

остается заметить, что $a+c = b+d = kd+d$.

6.32. Легко проверить, что $AB = r_1(\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2))$ и $CD = r_3(\operatorname{ctg}(C/2) + \operatorname{ctg}(D/2))$. Поэтому $AB/r_1 + CD/r_3 = \operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2) + \operatorname{ctg}(C/2) + \operatorname{ctg}(D/2) = BC/r_2 + AD/r_4$.

6.33. Достроим треугольники ABD и DBC до параллелограммов $ABDA_1$ и $DBCC_1$. Отрезки, соединяющие точку D с вершинами параллелограмма ACC_1A_1 , делят его на четыре треугольника, равных треугольникам DAB , CDA , BCD и ABC , поэтому радиусы вписанных окружностей этих треугольников равны. Докажем, что точка D совпадает с точкой O пересечения диагоналей параллелограмма. Если $D \neq O$, то можно считать, что точка D лежит внутри треугольника AOC . Тогда $r_{ADC} < r_{AOC} = r_{A_1OC_1} < r_{A_1DC_1} = r_{ABC}$ (см. задачу 10.87). Получено противоречие, поэтому $D = O$.

Так как $p = S/r$, а площади и радиусы вписанных окружностей треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм ACC_1A_1 , равны, то равны и их периметры. Поэтому ACC_1A_1 — ромб, а $ABCD$ — прямоугольник.

6.34. Точки C_1 и D_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB , поэтому $AB \perp C_1D_1$. Аналогично $C_1D_1 \perp A_2B_2$, а значит, $AB \parallel A_2B_2$. Аналогично доказывается, что параллельны и остальные соответственные стороны и диагонали четырехугольников $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$. Следовательно, эти четырехугольники подобны.

Пусть M — середина отрезка AC . Тогда $B_1M = |AM \operatorname{ctg} D|$ и $D_1M = |AM \operatorname{ctg} B|$, причем $B_1D_1 = |\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D| \cdot AC/2$. Повернем четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ на 90° . Тогда, воспользовавшись результатом задачи 6.28, получим, что этот четырехугольник выпуклый, причем $\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg} C_1$ и т. д. Поэтому $A_2C_2 = |\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C| \cdot B_1D_1/2 = |(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D)/4| \cdot AC$.

6.35. Пусть M и N — середины сторон AB и CD . Опустим из точки D перпендикуляр DP на прямую MN , а из точки M перпендикуляр MQ на CD . Тогда Q — точка касания прямой CD и окружности с диаметром AB . Прямоугольные треугольники PDN и QMN подобны, поэтому $DP = ND \cdot MQ/MN = ND \cdot MA/MN$. Аналогично расстояние от точки A до прямой MN равно $ND \cdot MA/MN$. Следовательно, $AD \parallel MN$. Аналогично $BC \parallel MN$.

6.36. Достаточно проверить, что ортоцентры любых трех из данных четырех треугольников лежат на одной прямой. Пусть некоторая прямая пересекает прямые B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 в точках A , B и C соответственно; A_2 , B_2 и C_2 — ортоцентры треугольников A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Прямые AB_2 и A_2B перпендикулярны прямой A_1B_1 , поэтому они параллельны. Аналогично $BC_2 \parallel B_2C$ и $CA_2 \parallel C_2A$. Точки A , B и C лежат на одной прямой, поэтому точки A_2 , B_2 и C_2 тоже лежат на одной прямой (см. задачу 1.12, б)).

6.37. Возьмем на диагонали BD точку M так, что $\angle MCD = \angle BCA$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle DMC$, так как углы BAC и BDC опираются на одну дугу. Поэтому $AB \cdot CD = AC \cdot MD$. Поскольку $\angle MCD = \angle BCA$, то $\angle BCM = \angle ACD$ и $\triangle BCM \sim \triangle ACD$, так как углы CBD и CAD опираются на одну дугу. Поэтому $BC \cdot AD = AC \cdot BM$. Следовательно, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot MD + AC \cdot BM = AC \cdot BD$.

6.38. Пусть S — площадь четырехугольника $ABCD$, R — радиус его описанной окружности. Тогда $S = S_{ABC} + S_{ADC} = AC(AB \cdot BC + AD \cdot DC)/4R$ (см. задачу 12.1). Аналогично $S = BD(AB \cdot AD + BC \cdot CD)/4R$. Приравняв эти выражения для S , получаем требуемое.

6.39. Пусть правильный семиугольник $A_1 \dots A_7$ вписан в окружность. Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику $A_1 A_3 A_4 A_5$, получаем $A_1 A_3 \cdot A_5 A_4 + A_3 A_4 \cdot A_1 A_5 = A_1 A_4 \cdot A_3 A_5$, т. е. $\sin 2\alpha \sin \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \sin 3\alpha \sin 2\alpha$.

6.40. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , CA и AB . По теореме Птолемея $AC_1 \cdot OB_1 + AB_1 \cdot OC_1 = AO \cdot B_1C_1$, где O — центр описанной окружности. Поэтому $cd_b + bd_c = aR$. Аналогично $ad_c + cd_a = bR$ и $ad_b + bd_a = cR$. Кроме того, $ad_a + bd_b + cd_c = 2S = (a + b + c)r$. Складывая все эти равенства и сокращая на $a + b + c$, получаем требуемое.

6.41. По теореме Птолемея $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Учитывая, что $CD = BD \geq BC/2$, получаем требуемое.

6.42. Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику $ABCP$ и сокращая на длину стороны квадрата, получаем требуемое.

6.43. Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику $APQR$, получаем $AP \cdot RQ + AR \cdot QP = AQ \cdot PR$. Так как $\angle ACB = \angle RAQ = \angle RPQ$ и $\angle RQP = 180^\circ - \angle PAR = \angle ABC$, то $\triangle RQP \sim \triangle ABC$, а значит, $RQ : QP : PR = AB : BC : CA$. Остается заметить, что $BC = AD$.

6.44. а) Запишем теорему Птолемея для всех четырехугольников с вершинами в точке A и трех последовательных вершинах данного многоугольника; затем сгруппируем в полученных равенствах множители, в которые входят d_i с четными номерами, в правую часть. Сложив эти равенства, получим $(2a + b)(d_1 + \dots + d_{2n+1}) = (2a + b)(d_2 + \dots + d_{2n})$, где a — сторона данного многоугольника, b — его наименьшая диагональ.

б) Пусть R — радиус окружности S . Тогда $l_i = d_i \sqrt{(R \pm r)/R}$ (см. задачу 3.20). Остается воспользоваться результатом задачи а).

6.45. Пусть оба касания внешние и $x \leq y$. Прямая, проходящая через центр O окружности радиуса x параллельно отрезку, соединяющему точки касания, пересекает окружность радиуса $y - x$ (с центром в центре окружности радиуса y) в точках A и B (рис. 6.9). Тогда $OA = a(R+x)/R$ и $OB = OA + a(y-x)/R = a(R+y)/R$. Квадрат искомой длины общей внешней касательной равен

$$OA \cdot OB = (a/R)^2 (R+x)(R+y).$$

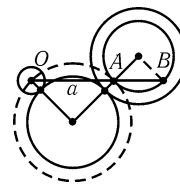


Рис. 6.9

Аналогичные рассуждения показывают, что если оба касания внутренние, то квадрат длины внешней касательной равен $(a/R)^2 (R-x)(R-y)$, а если окружность радиуса x касается внешне, а окружность радиуса y — внутренне, то квадрат длины внутренней касательной равен $(a/R)^2 (R-y)(R+x)$.

З а м е ч а н и е. В случае внутреннего касания окружностей предполагается, что $R > x$ и $R > y$.

6.46. Пусть R — радиус описанной окружности четырехугольника $ABCD$; r_a, r_b, r_c и r_d — радиусы окружностей α, β, γ и δ . Пусть далее $a = \sqrt{R \pm r_a}$, причем знак плюс берется в случае внешнего касания, а знак минус — в случае внутреннего; числа b, c и d определяются аналогично. Тогда $t_{\alpha\beta} = abAB/R$ (см. задачу 6.45) и т. д. Поэтому, домножая равенство $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ на $abcd/R$, получаем требуемое.

6.47. Так как $\angle EBD = \angle ABE + \angle CBD$, то на стороне ED можно взять точку P так, что $\angle EBP = \angle ABE = \angle AEB$, т. е. $BP \parallel AE$. Тогда $\angle PBD = \angle EBD - \angle EBP = \angle CBD = \angle BDC$, т. е. $BP \parallel CD$. Следовательно, $AE \parallel CD$, а так как $AE = CD$, то $CDEA$ — параллелограмм. Поэтому $AC = ED$, т. е. треугольник ABC равносторонний и $\angle ABC = 60^\circ$.

6.48. а) Пусть O — центр описанной окружности треугольника CKE . Достаточно проверить, что $\angle COK = 2\angle KCB$. Оба эти угла легко вычисляются: $\angle COK = 180^\circ - 2\angle OKC = 180^\circ - \angle EKC = 180^\circ - \angle EDC = 72^\circ$ и $\angle KCB = (180^\circ - \angle ABC)/2 = 36^\circ$.

б) Так как BC — касательная к описанной окружности треугольника CKE , то $BE \cdot BK = BC^2$, т. е. $d(d-a) = a^2$.

6.49. Пусть перпендикуляры, восстановленные к прямой AB в точках A и B , пересекают стороны DE и CD в точках P и Q . Любая точка отрезка CQ является вершиной прямоугольника, вписанного в пятиугольник $ABCDE$ (стороны этого прямоугольника параллельны AB и AP), причем при перемещении этой точки от Q к C отношение длин сторон прямоугольников изменяется от AP/AB до 0. Так как угол AEP тупой, то $AP > AE = AB$. Поэтому для некоторой точки отрезка QC отношение длин сторон прямоугольника равно 1.

6.50. Пусть точки A_1, \dots, E_1 симметричны точкам A, \dots, E относительно центра окружности S ; P, Q и R — точки пересечения прямых BC_1 и AB_1, AE_1 и BA_1, BA_1 и CB_1 (рис. 6.10). Тогда $PQ = AB = a$ и $QR = b$. Так как $PQ \parallel AB$ и $\angle ABA_1 = 90^\circ$, то $PR^2 = PQ^2 + QR^2 = a^2 + b^2$. Прямая PR проходит через центр окружности S и $\angle AB_1C = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ$, поэтому PR — сто-

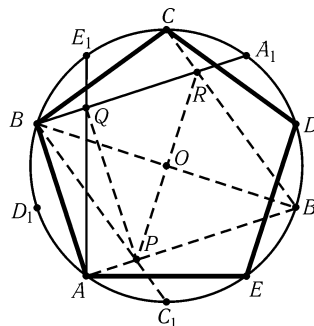


Рис. 6.10

рона правильного пятиугольника, описанного около окружности с центром B_1 , радиус B_1O которой равен радиусу окружности S .

6.51. Проведем через точки A, C и E прямые l_1, l_2 и l_3 , параллельные прямым BC, DE и FA соответственно. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2, l_2 и l_3, l_3 и l_1 через P, Q, R соответственно (рис. 6.11). Тогда

$$S_{ACE} = (S_{ABCDEF} - S_{PQR})/2 + S_{PQR} = (S_{ABCDEF} + S_{PQR})/2 \geq S_{ABCDEF}/2.$$

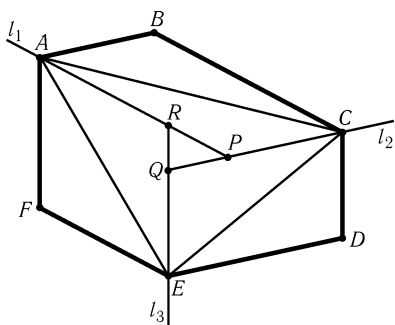


Рис. 6.11

Аналогично $S_{BDF} = (S_{ABCDEF} + S_{P'Q'R'})/2$. Ясно, что $PQ = |AB - DE|$, $QR = |CD - AF|$, $PR = |EF - BC|$, поэтому треугольники PQR и $P'Q'R'$ равны. Следовательно, $S_{ACE} = S_{BDF}$.

6.52. Построим треугольник PQR , как и в предыдущей задаче. Этот треугольник правильный, и $PQ = |AB - DE|$, $QR = |CD - AF|$, $PR = |EF - BC|$. Поэтому $|AB - DE| = |CD - AF| = |EF - BC|$.

6.53. Сумма углов при вершинах A, C и E равна 360° , поэтому из равнобедренных треугольников ABF, CBD и EDF можно сложить треугольник, приложив AB к CB , а ED и EF к CD и AF . Стороны получен-

ного треугольника равны сторонам треугольника BDF . Следовательно, при симметрии относительно прямых FB, BD и DF точки A, C и E переходят в центр O описанной окружности треугольника BDF , а значит, $AB \parallel OF \parallel DE$.

6.54. Предположим, что диагонали шестиугольника образуют треугольник PQR . Обозначим вершины шестиугольника следующим образом: вершина A лежит на луче QP , B — на RP , C — на RQ и т. д. Так как прямые AD и BE делят площадь шестиугольника пополам, то $S_{APEF} + S_{PED} = S_{PDCB} + S_{ABP}$ и $S_{APEF} + S_{ABP} = S_{PDCB} + S_{PED}$. Поэтому $S_{ABP} = S_{PED}$, т. е.

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP = (ER + RP)(DQ + QP) > ER \cdot DQ.$$

Аналогично $CQ \cdot DQ > AP \cdot FR$ и $FR \cdot ER > BP \cdot CQ$. Перемножая эти неравенства, получаем $AB \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot FR \cdot ER > ER \cdot DQ \cdot AP \cdot FR \cdot BP \cdot CQ$, чего не может быть. Поэтому диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

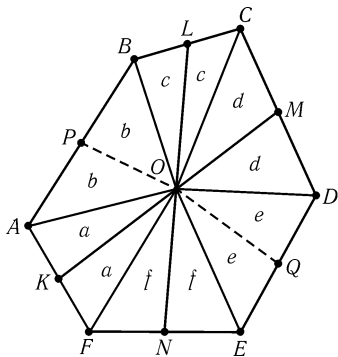


Рис. 6.12

6.55. Обозначим середины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ так, как показано на рис. 6.12. Пусть O — точка пересечения отрезков KM и LN . Площади треугольников, на которые делят шестиугольник отрезки, соединяющие точку O с вершинами и серединами сторон, обозначим так, как показано на том же рисунке. Легко проверить, что $S_{KONF} = S_{LOMC}$, т. е. $a + f = c + d$. Следовательно, ломаная POQ делит шестиугольник на две части равной площади, а значит, отрезок PQ проходит через точку O .

6.56. а) Пусть O — центр описанной окружности. Так как $\angle A_k O A_{k+2} = 360^\circ - 2\angle A_k A_{k+1} A_{k+2} = \varphi$ — постоянная

величина, то при повороте с центром O на угол φ точка A_k переходит в A_{k+2} . Для нечетного n из этого следует, что все стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ равны.

б) Пусть a — длина стороны данного многоугольника. Если одна из его сторон делится точкой касания с вписанной окружностью на отрезки длиной x и $a-x$, то соседние с ней стороны тоже делятся на отрезки длиной x и $a-x$ (смежные отрезки соседних сторон равны) и т. д. Для нечетного n из этого следует, что все стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ делятся точками касания с вписанной окружностью пополам, а значит, все его углы равны.

6.57. Стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ параллельны сторонам правильного n -угольника. Отложим на лучах OA_1, \dots, OA_n равные отрезки OB_1, \dots, OB_n . Тогда многоугольник $B_1 \dots B_n$ правильный и стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ образуют равные углы с его сторонами. Следовательно, $OA_1 : OA_2 = OA_2 : OA_3 = \dots = OA_n : OA_1 = k$, т. е. $OA_1 = kOA_2 = k^2OA_3 = \dots = k^nOA_1$, а значит, $k = 1$.

6.58. Обозначим вершины пятиугольника так, как показано на рис. 6.13. Если в треугольнике две высоты равны, то равны и стороны, на которые опущены эти высоты. Рассматривая треугольники EAB, ABC и BCD , получаем $EA = AB, AB = BC$ и $BC = CD$. Поэтому трапеции $EABC$ и $ABCD$ равнобедренные, т. е. $\angle A = \angle B = \angle C$. Рассматривая треугольники ABD и BCE , получаем $AD = BD$ и $BE = CE$. Так как треугольники EAB, ABC, BCD равны, то $BE = AC = BD$. Поэтому $AD = BE$ и $BD = CE$, т. е. трапеции $ABDE$

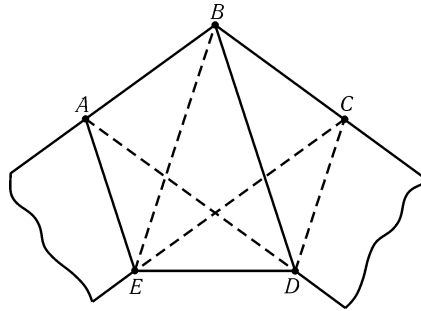


Рис. 6.13

и $CDEB$ равнобедренные. Следовательно, $ED = AB = BC = CD = AE$ и $\angle E = \angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, т. е. $ABCDE$ — правильный пятиугольник.

6.59. Треугольник BMC равнобедренный с углом при вершине 30° и углом при основании $(180^\circ - 30^\circ)/2 = 75^\circ$. Следовательно, треугольники BAM и BCN равнобедренные с углом 15° при основании. Поэтому треугольник BMN правильный. Пусть O — центр квадрата, P и Q — середины отрезков MN и BK (рис. 6.14). Так как OQ — средняя линия треугольника MBK , то $OQ = BM/2 = MP = OP$ и $\angle QON = \angle MBA = 15^\circ$, а значит, $\angle POQ = \angle PON - \angle QON = 30^\circ$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично.

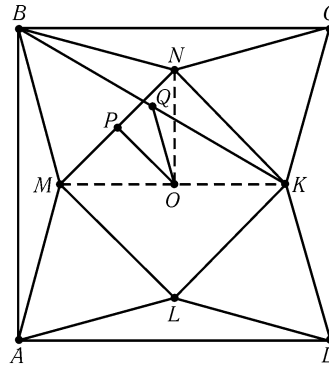


Рис. 6.14

6.60. Рассмотрим правильный двенадцатиугольник $A_1 \dots A_{12}$, вписанный в окружность радиуса R . Ясно, что $A_1A_7 = 2R, A_1A_3 = A_1A_{11} = R$. Поэтому $A_1A_7 = A_1A_3 + A_1A_{11}$.

6.61. Для $k = 3$ решение задачи ясно из рис. 6.15. В самом деле, $A_3A_4 = OQ, KL = QP$ и $MN = PA_{14}$, поэтому $A_3A_4 + KL + MN = OQ + QP + PA_{14} = OA_{14} = R$. Доказательство проводится аналогично и для любого k .

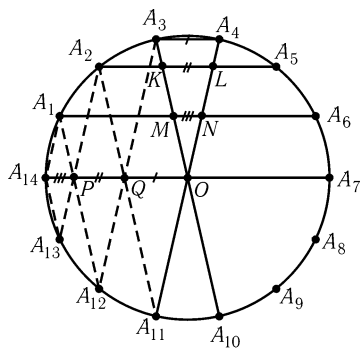


Рис. 6.15

$= \cos 6\alpha - \cos 10\alpha = 1 - 2 \sin^2 3\alpha - 1/2$, т. е. $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ = 1$ (см. задачу 5.48).

6.64. Пусть сначала $n = 2m$. Диагонали и стороны правильного $2m$ -угольника имеют m различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на $m - 1$ концентрических окружностях (по n точек на каждой) или в общем центре этих окружностей. Поскольку различные окружности имеют не более двух общих точек, окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более $1 + 2(m - 1) = 2m - 1 = n - 1$ отмеченных точек.

Пусть теперь $n = 2m + 1$. Диагонали и стороны правильного $(2m + 1)$ -угольника имеют m различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на m концентрических окружностях (по n точек на каждой). Окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более $2m = n - 1$ отмеченных точек.

В обоих случаях наибольшее число отмеченных точек, лежащих на одной окружности, равно n .

6.65. Обозначим центр многоугольника через O , вершины — через A_1, \dots, A_n . Предположим, что среди одноцветных многоугольников нет равных, т. е. они имеют $m = m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k$ сторон соответственно. Рассмотрим преобразование f , определенное на множестве вершин n -угольника и переводящее вершину A_k в вершину $A_{mk} : f(A_k) = A_{mk}$ (считаем, что $A_{p+qn} = A_p$). При этом преобразовании вершины правильного m -угольника переходят в одну точку B , поэтому сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$, где A_i — вершины m -угольника, равна $m\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$.

Поскольку $\angle A_{mi}OA_{mj} = m\angle A_iOA_j$ вершины любого правильного многоугольника с числом сторон больше m переходят при рассматриваемом преобразовании в вершины правильного многоугольника. Поэтому и сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$ по всем вершинам n -угольника и аналогичные суммы по вершинам m_2 -, m_3 -, ..., m_k -угольников равны нулю. Получено противоречие с тем, что сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$ по вершинам m -угольника не равна нулю. Поэтому среди одноцветных многоугольников найдутся два равных.

6.66. Пусть правильный $(n - 1)$ -угольник $B_1 \dots B_{n-1}$ вписан в правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$. Можно считать, что A_1 и B_1 — наименее удаленные друг от друга вершины этих многоугольников и точки B_2, B_3, B_4 и B_5 лежат на сторонах A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_6 . Пусть $\alpha_i = \angle A_{i+1}B_iB_{i+1}$ и $\beta_i = \angle B_iB_{i+1}A_{i+1}$, где $i = 1, 2, 3, 4$. По теореме синусов $A_2B_2 : B_1B_2 = \sin \alpha_1 : \sin \varphi$ и $B_2A_3 : B_2B_3 = \sin \beta_2 : \sin \varphi$, где φ — угол при вершине правильного n -угольника. Сле-

6.62. Для доказательства достаточно применить результат задач 5.86 и 5.77, б) к треугольнику $A_aA_cA_e$ и прямым A_aA_d, A_cA_f и A_eA_b . При решении задачи б) нужно еще заметить, что $\sin 20^\circ \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = (\sin 40^\circ)/2 = \sin 30^\circ \sin 40^\circ$, а при решении задачи в) нужно заметить, что $\sin 10^\circ \sin 80^\circ = \sin 30^\circ \sin 20^\circ$.

6.63. Как и в предыдущей задаче, нужно проверить равенство $\sin 2\alpha \sin 2\alpha \sin 8\alpha = \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 14\alpha$, где $\alpha = 180^\circ/30 = 6^\circ$. Ясно, что $\sin 14\alpha = \cos \alpha$, поэтому $2 \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 14\alpha = \sin 2\alpha \sin 3\alpha$. Остается проверить, что $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \sin 8\alpha = \cos 6\alpha - \cos 10\alpha = 1 - 2 \sin^2 3\alpha - 1/2$, т. е. $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ = 1$ (см. задачу 5.48).

довательно, $\sin \alpha_1 + \sin \beta_2 = a_n \sin \varphi / a_{n-1}$ где a_n и a_{n-1} — стороны данных многоугольников. Аналогичные рассуждения показывают, что $\sin \alpha_1 + \sin \beta_2 = \sin \alpha_2 + \sin \beta_3 = \sin \alpha_3 + \sin \beta_4$. Заметим теперь, что $\sin \alpha_i + \sin \beta_{i+1} = 2 \sin((\alpha_i + \beta_{i+1})/2) \cos((\alpha_i - \beta_{i+1})/2)$, и займемся вычислением $\alpha_i + \beta_{i+1}$ и $\alpha_i - \beta_{i+1}$. Так как $\alpha_i + \beta_i = 2\pi/n$ и $\alpha_{i+1} + \beta_i = 2\pi/(n-1)$, то $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 2\pi/(n(n-1))$ и $\beta_{i+1} = \beta_i - 2\pi/(n(n-1))$, а значит, $\alpha_i + \beta_{i+1} = \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n(n-1)}$ — величина постоянная и $\alpha_i - \beta_{i+1} = \alpha_{i-1} - \beta_i + 4\pi/(n(n-1))$. Следовательно, $\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi/n(n-1)) = \cos(\theta + 4\pi/(n-1)n)$ для $\theta = (\alpha_1 - \beta_2)/2$. Получено противоречие, так как на интервале, меньшем 2π , косинус не может принимать одно значение в трех различных точках.

З а м е ч а н и е. В правильный пятиугольник квадрат вписать можно (см. задачу 6.49).

6.67. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$. При повороте вокруг точки O на угол $360^\circ/n$ точка A_i переходит в A_{i+1} , а значит, вектор \mathbf{a} переходит в себя, т. е. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Так как $\overrightarrow{XA_i} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_i}$ и $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}$, то $\overrightarrow{XA_1} + \dots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XO}$.

6.68. Проведем через центр правильного многоугольника $A_1 \dots A_n$ прямую l , не проходящую через его вершины. Пусть x_i равно проекции вектора $\overrightarrow{OA_i}$ на прямую, перпендикулярную прямой l . Тогда все x_i отличны от нуля и сумма чисел x_i , стоящих в вершинах правильного k -угольника, равна нулю, поскольку равна нулю соответствующая сумма векторов $\overrightarrow{OA_i}$ (см. задачу 6.67).

6.69. Согласно задаче 6.67 $\mathbf{a} = 10\overrightarrow{AO}$ и $\mathbf{b} = 10\overrightarrow{BO}$, где O — центр многоугольника $X_1 \dots X_{10}$. Ясно, что если точка A расположена очень близко к вершине многоугольника, а точка B — очень близко к середине стороны, то $AO > BO$.

6.70. Так как

$$A_i X^2 = \overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OX}^2 = A_i O^2 + OX^2 + 2(\overrightarrow{A_i O}, \overrightarrow{OX}) = R^2 + d^2 + 2(\overrightarrow{A_i O}, \overrightarrow{OX}),$$

то $\sum A_i X^2 = n(R^2 + d^2) + 2 \sum \overrightarrow{A_i O}, \overrightarrow{OX} = n(R^2 + d^2)$ (см. задачу 6.67).

6.71. Обозначим через S_k сумму квадратов расстояний от вершины A_k до всех остальных вершин. Тогда

$$\begin{aligned} S_k &= A_k A_1^2 + A_k A_2^2 + \dots + A_k A_n^2 = \\ &= A_k O^2 + 2(\overrightarrow{A_k O}, \overrightarrow{OA_1}) + A_1 O^2 + \dots + A_k O^2 + 2(\overrightarrow{A_k O}, \overrightarrow{OA_n}) + A_n O^2 = 2nR^2, \end{aligned}$$

так как $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$. Поэтому $\sum_{k=1}^n S_k = 2n^2 R^2$. Поскольку квадрат каждой из сторон и диагоналей дважды входит в эту сумму, искомая сумма равна $n^2 R^2$.

6.72. Пусть X_k — образ точки X при повороте относительно центра O данного n -угольника, переводящем A_k в A_1 . При этом повороте отрезок $A_k X$ переходит в $A_1 X_k$. Следовательно, $A_1 X + \dots + A_n X = A_1 X_1 + \dots + A_1 X_n$. А так как n -угольник $X_1 \dots X_n$ правильный, то $\overrightarrow{A_1 X_1} + \dots + \overrightarrow{A_1 X_n} = n\overrightarrow{A_1 O}$ (см. задачу 6.67), а значит, $A_1 X_1 + \dots + A_n X_n \geq nA_1 O$.

6.73. Пусть B_i — проекция точки X на прямую OA_i . Тогда $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = (\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{B_i X}) = (\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OB_i}) = \pm R \cdot OB_i$. Точки B_1, \dots, B_n лежат на окружности с диаметром OX и являются вершинами правильного n -угольника при n нечетном и вершинами $n/2$ -угольника, взятыми по два раза, при n четном (см. задачу 2.9). Поэтому $\sum OB_i^2 = nOX^2/2$ (см. задачу 6.70).

6.74. Пусть e_1, \dots, e_n — векторы, идущие из центра данного n -угольника в его вершины; \mathbf{x} — единичный вектор, перпендикулярный прямой l . Искомая сумма равна $\sum (e_i, \mathbf{x})^2 = nR^2/2$ (см. задачу 6.73).

6.75. Пусть e_1, \dots, e_n — единичные векторы, направленные из центра O правильного n -угольника в середины его сторон; $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$. Тогда расстояние от точки X до i -й стороны равно $|(\mathbf{x}, e_i) - r|$. Поэтому искомая сумма равна $\sum ((\mathbf{x}, e_i)^2 - 2r(\mathbf{x}, e_i) + r^2) = \sum (\mathbf{x}, e_i)^2 + nr^2$. Согласно задаче 6.73 $\sum (\mathbf{x}, e_i)^2 = nd^2/2$.

6.76. Пусть \mathbf{x} — единичный вектор, параллельный прямой l , $e_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$. Тогда квадрат длины проекции стороны $A_i A_{i+1}$ на прямую l равен $(\mathbf{x}, e_i)^2$. Согласно задаче 6.73 $\sum (\mathbf{x}, e_i)^2 = na^2/2$.

6.77. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{XO}$, $e_i = \overrightarrow{OA_i}$. Тогда $XA_i^4 = |\mathbf{a} + e_i|^4 = (|\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, e_i) + |e_i|^2)^2 = 4(R^2 + (\mathbf{a}, e_i))^2 = 4(R^4 + 2R^2(\mathbf{a}, e_i) + (\mathbf{a}, e_i)^2)$. Ясно, что $\sum (\mathbf{a}, e_i) = (\mathbf{a}, \sum e_i) = 0$. Согласно задаче 6.73 $\sum (\mathbf{a}, e_i)^2 = nR^4/2$, поэтому искомая сумма равна $4(nR^4 + nR^4/2) = 6nR^4$.

6.78. а) Докажем сначала требуемое соотношение для $\mathbf{u} = e_1$. Пусть $e_i = (\sin \varphi_i, \cos \varphi_i)$, причем $\cos \varphi_1 = 1$. Тогда $\sum (e_1, e_i) e_i = \sum \cos \varphi_i e_i = \sum (\sin \varphi_i \cos \varphi_i, \cos^2 \varphi_i) = \sum ((\sin 2\varphi_i)/2, (1 + \cos 2\varphi_i)/2) = (0, n/2) = ne_1/2$. Для $\mathbf{u} = e_2$ доказательство проводится аналогично. Остается заметить, что любой вектор \mathbf{u} можно представить в виде $\mathbf{u} = \lambda e_1 + \mu e_2$.

б) Пусть $B_1 \dots B_n$ — середины сторон данного многоугольника, $e_i = \overrightarrow{OB_i/OB_i}$ и $\mathbf{u} = \overrightarrow{XO}$. Тогда $XA_i = \overrightarrow{OB_i} + (\mathbf{u}, e_i)e_i$. А так как $\sum \overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{0}$, то $\sum XA_i = \sum (\mathbf{u}, e_i)e_i = n\mathbf{u}/2 = n\overrightarrow{XO}/2$.

6.79. Пусть e_0, \dots, e_{n-1} — векторы сторон правильного n -угольника. Достаточно доказать, что, переупорядочив эти векторы, можно получить такой набор векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$, что $\sum_{k=1}^n ka_k = 0$. Число n , не являющееся степенью простого числа, можно представить в виде $n = pq$, где p и q — взаимно простые числа. Докажем теперь, что набор $\{e_0, e_p, \dots, e_{(q-1)p}; e_q, e_{q+p}, \dots, e_{q+(q-1)p}, \dots; e_{(p-1)q+p}, \dots, e_{(p-1)q+(q-1)p}\}$ искомым. Заметим сначала, что если $x_1q + y_1p \equiv x_2q + y_2p \pmod{pq}$, то $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{q}$, поэтому в рассматриваемом наборе каждый из векторов e_0, \dots, e_{n-1} встречается ровно один раз.

Концы векторов $e_q, e_{q+p}, \dots, e_{q+(q-1)p}$ с общим началом образуют правильный q -угольник, поэтому их сумма равна нулю. Кроме того, векторы $e_0, e_p, \dots, e_{(q-1)p}$ переходят в $e_q, e_{q+p}, \dots, e_{q+(p-1)q}$, при повороте на угол $\varphi = 2\pi/p$. Поэтому если $e_0 + 2e_p + \dots + qe_{(q-1)p} = \mathbf{b}$, то $(q+1)e_q + (q+2)e_{q+p} + \dots + 2qe_{q+(q-1)p} = q(e_q + \dots + e_{q+(q-1)p}) + e_q + 2e_{q+p} + \dots + qe_{q+(q-1)p} = R^\varphi \mathbf{b}$, где $R^\varphi \mathbf{b}$ — вектор, полученный из вектора \mathbf{b} поворотом на угол $\varphi = 2\pi/p$. Аналогичные рассуждения показывают, что для рассматриваемого набора векторов $\sum_{k=1}^n ka_k = \mathbf{b} + R^\varphi \mathbf{b} + \dots + R^{(p-1)\varphi} \mathbf{b} = 0$.

6.80. Предположим, что на сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты ABB_1A_1 , BCC_2B_2 , ACC_3A_3 и вершины $A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3$ лежат на одной окружности S . Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 проходят через центр окружности S . Ясно, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 совпадают с серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC , поэтому центр окружности S совпадает с центром описанной окружности треугольника.

Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O . Расстояние от точки O до прямой B_2C_2 равно $R \cos A + 2R \sin A$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Поэтому $OB_2^2 = (R \sin A)^2 + (R \cos A + 2R \sin A)^2 = R^2(3 + 2(\sin 2A - \cos 2A)) = R^2(3 - 2\sqrt{2} \cos(45^\circ + 2A))$. Ясно, что для того, чтобы треугольник обладал требуемым свойством, необходимо и достаточно, чтобы $OB_2^2 = OC_3^2 = OA_1^2$, т. е. $\cos(45^\circ + 2\angle A) = \cos(45^\circ + 2\angle B) = \cos(45^\circ + 2\angle C)$. Это равенство выполняется при $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. Если же $\angle A \neq \angle B$, то $(45^\circ + 2\angle A) + (45^\circ + 2\angle B) = 360^\circ$, т. е. $\angle A + \angle B = 135^\circ$. Тогда $\angle C = 45^\circ$ и $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ (или $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$). Мы видим, что треугольник должен быть либо равносторонним, либо равнобедренным прямоугольным.

6.81. В любом треугольнике выполнено соотношение $h_c = ab/2R$ (задача 12.33), поэтому $p_k = MA_k \cdot MA_{k+1}/2R$. Следовательно,

$$p_1 p_3 \dots p_{2n-1} = MA_1 \cdot MA_2 \dots MA_{2n} / (2R)^n = p_2 p_4 \dots p_{2n}.$$

6.82. Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность S . Обозначим расстояния от центра O окружности до сторон BC, CA и AB через a, b и c соответственно. Тогда $R+r = a+b+c$, если точка O лежит внутри треугольника ABC , и $R+r = -a+b+c$, если точки O и A лежат по разные стороны от прямой BC (см. задачу 12.38).

Каждая из диагоналей разбиения принадлежит двум треугольникам разбиения. Для одного из этих треугольников точка O и оставшаяся вершина лежат по одну сторону от диагонали, для другого — по разные стороны. Разбиение n -угольника непересекающимися диагоналями на треугольники состоит из $n-2$ треугольников. Поэтому сумма $(n-2)R + r_1 + \dots + r_{n-2}$ равна сумме расстояний от точки O до сторон n -угольника (расстояния до сторон берутся с соответствующими знаками). Из этого видно, что сумма $r_1 + \dots + r_{n-2}$ не зависит от разбиения.

6.83. Пусть многоугольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность. Рассмотрим точку A'_2 , симметричную точке A_2 относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3 . Тогда многоугольник $A_1A'_2A_3 \dots A_n$ вписанный и его площадь равна площади многоугольника $A_1 \dots A_n$. Таким образом можно поменять местами любые две соседние стороны, а значит, можно поменять местами любые две стороны. Поэтому к любой стороне можно «подогнать» любую другую сторону, к ней — любую из оставшихся и т. д. Следовательно, площадь n -угольника, вписанного в данную окружность, зависит только от набора длин сторон, но не от их порядка.

6.84. Без ограничения общности можно считать, что a_n — наибольшее из чисел a_1, \dots, a_n . Пусть n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в окружность с центром O . Тогда $A_iA_{i+1} : A_1A_n = \sin(\angle A_iOA_{i+1}/2) : \sin(\angle A_1OA_n/2)$. Поэтому поступим следующим образом. Из соотношения $\sin(\varphi_i/2) : \sin(\varphi/2) = a_i : a_n$ угол φ_i однозначно выражается через φ , если $\varphi_i < \pi$. На окружности радиуса 1 фиксируем точку A_n и рассмотрим такие переменные точки $A_1, \dots, A_{n-1}, A'_n$, что $\sphericalangle A_nA_1 = \varphi$, $\sphericalangle A_1A_2 = \varphi_1, \dots, \sphericalangle A_{n-2}A_{n-1} = \varphi_{n-2}$ и $\sphericalangle A_{n-1}A'_n = \varphi_{n-1}$, причем расположим эти точки двумя различными способами, изображенными на рис. 6.16 (первый способ (рис. 6.16, а) будет соответствовать n -угольнику, содержащему центр окружности, а второй (рис. 6.16, б) — не содержащему). Остается доказать, что при изменении φ от 0 до π в одном из этих случаев точка A'_n совпадает с A_n (в самом деле, тогда с точностью до подобия получается искомый n -угольник).

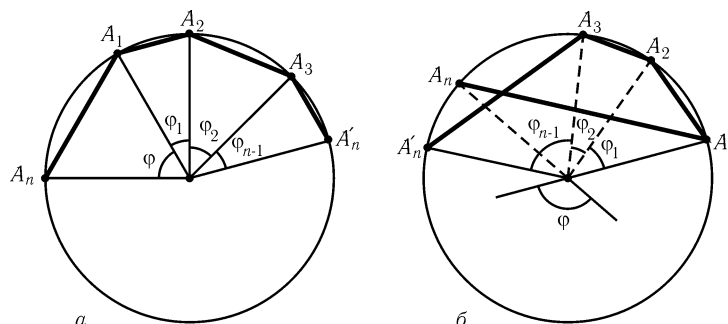


Рис. 6.16

Предположим, что в первом случае при $0 \leq \varphi \leq \pi$ точки A'_n и A_n никогда не совпадают, т. е. при $\varphi = \pi$ выполняется неравенство $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} < \pi$. Рисунок 6.16, б требует некоторых комментариев: при малых углах $\sin \alpha \approx \alpha$, поэтому из условия задачи следует, что при малых углах точка A_n действительно лежит на дуге $A_1A'_n$, так как $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} > \varphi$. Итак, при малых углах $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} > \varphi$, а если $\varphi = \pi$, то согласно предположению $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} < \pi = \varphi$. Поэтому в некоторый момент $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}$, т. е. точки A_n и A'_n совпадают.

6.85. Пусть h_1, \dots, h_n — расстояния от данной точки до соответствующих сторон, a_1, \dots, a_n — расстояния от вершин многоугольника до точек касания. Тогда произведение площадей как красных, так и синих треугольников равно $a_1 \dots a_n h_1 \dots h_n / 2^n$.

6.86. Пусть OH_i — высота треугольника OA_iA_{i+1} . Тогда $\angle H_iO A_i = \angle H_iO A_{i+1} = \varphi_i$. Из условия задачи следует, что $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}, \varphi_{n+2} + \varphi_{n+3} = \varphi_2 + \varphi_3, \varphi_3 + \varphi_4 = \varphi_{n+3} + \varphi_{n+4}, \dots, \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = \varphi_{2n-2} + \varphi_{2n-1}$ (при записи последнего равенства мы учли, что n нечетно) и $\varphi_{n-1} + 2\varphi_n + \varphi_{n+1} = \varphi_{2n-1} + 2\varphi_{2n} + \varphi_1$. Складывая все эти равенства, получаем $\varphi_{n-1} + \varphi_n = \varphi_{2n-1} + \varphi_{2n}$, что и требовалось.

6.87. Пусть O — центр данной окружности. Тогда $\vec{XA}_i = \vec{XO} + \vec{OA}_i$, а значит, $XA_i^2 = XO^2 + OA_i^2 + 2(\vec{XO}, \vec{OA}_i) = d^2 + r^2 + 2(\vec{XO}, \vec{OA}_i)$. Так как $a_1 \vec{OA}_1 + \dots + a_n \vec{OA}_n = \vec{0}$ (см. задачу 13.4), то $a_1 XA_1^2 + \dots + a_n XA_n^2 = (a_1 + \dots + a_n)(d^2 + r^2)$.

6.88. Согласно задаче 5.8 $b_{i-1}b_i/a_i^2 = \sin^2(A_i/2)$. Для решения задачи а) достаточно перемножить все такие равенства, а для решения задачи б) произведение равенств с четным индексом i нужно поделить на произведение равенств с нечетным индексом i .

6.89. Пусть BC — синяя сторона, AB и CD — соседние с BC стороны. По условию стороны AB и CD красные. Предположим, что многоугольник описанный; P, Q, R — точки касания сторон AB, BC, CD с вписанной окружностью. Ясно, что $BP = BQ, CR = CQ$ и отрезки BP, CR граничат только с одним синим отрезком. Поэтому сумма длин красных сторон не меньше суммы длин синих сторон. Получено противоречие с тем, что сумма длин красных сторон меньше половины периметра. Поэтому в многоугольник нельзя вписать окружность.

6.90. Пусть выпуклый n -угольник имеет k острых углов. Тогда сумма его углов меньше $k \cdot 90^\circ + (n - k) \cdot 180^\circ$. С другой стороны, сумма углов n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Поэтому $(n - 2) \cdot 180^\circ < k \cdot 90^\circ + (n - k) \cdot 180^\circ$, т. е. $k < 4$. Поскольку k — целое число, $k \leq 3$.

Для любого $n \geq 3$ существует выпуклый n -угольник с тремя острыми углами (рис. 6.17).

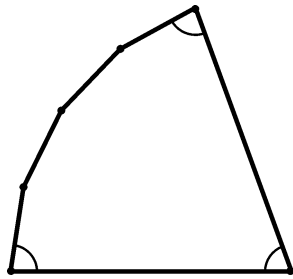


Рис. 6.17

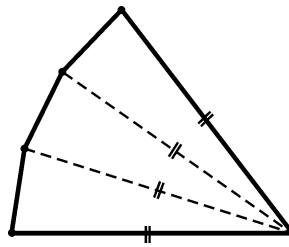


Рис. 6.18

6.91. Предположим, что несмежные стороны AB и CD равны по длине наибольшей диагонали. Тогда $AB + CD \geq AC + BD$. Но согласно задаче 9.14 $AB + CD < AC + BD$. Получено противоречие, поэтому стороны, равные по длине наибольшей диагонали, должны быть смежными, т. е. таких сторон не больше двух.

Пример многоугольника с двумя сторонами, равными по длине наибольшей диагонали, приведен на рис. 6.18. Ясно, что такой n -угольник существует при любом $n > 3$.

6.92. Докажем, что $n \leq 5$. Пусть $AB = 1$, а C — вершина, не соседняя ни с A , ни с B . Тогда $|AC - BC| < AB = 1$. Поэтому $AC = BC$, т. е. точка C лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB . Таким образом, кроме вершин A, B, C многоугольник может иметь еще лишь две вершины.

Пример пятиугольника, обладающего требуемым свойством, приведен на рис. 6.19. Поясним, как он устроен. $ACDE$ — прямоугольник, $AC = ED = 1$ и $\angle CAD = 60^\circ$. Точка B задается условием $BE = BD = 3$.

Примером четырехугольника, обладающего требуемым свойством, является прямоугольник $ACDE$ на том же рисунке.

6.93. Пример пятиугольника, удовлетворяющего условию задачи, приведен на рис. 6.20. Поясним, как он устроен. Возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник EAB , проведем серединные перпендикуляры к сторонам EA, AB и на них построим точки C и D так, что $ED = BC = AB$ (т. е. прямые BC и ED образуют с соответствующими серединными перпендикулярами углы в 30°). Ясно, что $DE = BC = AB = EA < EB < DC$ и $DB = DA = CA = CE > EB$.

Докажем теперь, что пятая сторона и пятая диагональ не могут иметь общей точки. Предположим, что пятая сторона AB имеет общую точку A с пятой диагональю. Тогда пятая диагональ — это AC или AD . Разберем эти два случая.

В первом случае $\triangle AED = \triangle CDE$, поэтому при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку ED точка A переходит в точку C . Точка B

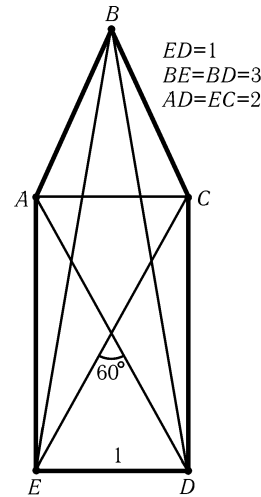


Рис. 6.19

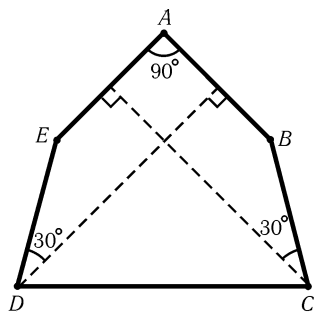


Рис. 6.20

при этой симметрии остается на месте, так как $BE = BD$. Поэтому отрезок AB переходит в CB , т. е. $AB = CB$. Получено противоречие. Во втором случае $\triangle ACE = \triangle EBD$, поэтому при симметрии относительно биссектрисы угла AED отрезок AB переходит в DC , т. е. $AB = CD$. Получено противоречие.

6.94. Рассмотрим две соседние вершины A_1 и A_2 . Если $\angle A_1OA_2 \geq 90^\circ$, то $OA_1 = OA_2$, так как к основанию равнобедренного треугольника не может прилежать прямой или тупой угол. Пусть теперь $\angle A_1OA_2 < 90^\circ$. Проведем через точку O прямые l_1 и l_2 , перпендикулярные прямым OA_1 и OA_2 . Обозначим области, на которые эти прямые разбивают плоскость, так, как показано на рис. 6.21. Если в области (3) есть вершина A_k , то $A_1O = A_kO = A_2O$, поскольку $\angle A_1OA_k \geq 90^\circ$ и $\angle A_2OA_k \geq 90^\circ$. Если же в области (3) нет вершин многоугольника, то в области (1) есть вершина A_p и в области (2) есть вершина A_q . (Если бы в одной из областей (1), (2) не было вершин многоугольника, то точка O оказалась бы вне многоугольника.) Так как $\angle A_1OA_q \geq 90^\circ$, $\angle A_2OA_p \geq 90^\circ$ и $\angle A_pOA_q \geq 90^\circ$, то $A_1O = A_qO = A_pO = A_2O$.

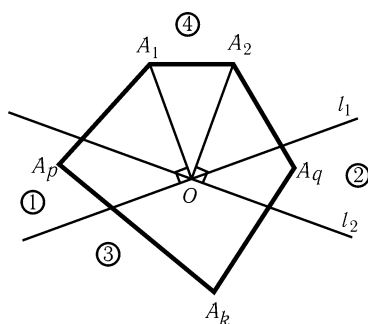


Рис. 6.21

Остается заметить, что если расстояния от точки O до любой пары соседних вершин многоугольника равны, то равны и все расстояния от точки O до вершин многоугольника.

6.95. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке G , BC и EF в точке H , CD и FA в точке K . Пусть, далее, X и Y — точки пересечения описанной окружности треугольника EBH с прямыми AB и DE . Покажем, что соответственные стороны треугольников ADK и XYH параллельны. (Из этого следует, что прямая KH проходит через точку G .)

Из равенств $\angle(YX, AB) = \angle(YX, XB) = \angle(YE, EB) = \angle(DE, EB) = \angle(DA, AB)$ следует, что $AD \parallel XY$. После этого из равенств $\angle(XY, YH) = \angle(XB, BH) = \angle(AB, BC) = \angle(AD, DC) = \angle(AD, DK)$ следует, что $DK \parallel YH$, а из равенств $\angle(YH, XH) = \angle(YE, EH) = \angle(DE, EF) = \angle(DA, AF) = \angle(DA, AK)$ следует, что $AK \parallel XH$.

Отметим, что мы нигде не пользовались тем, что шестиугольник $ABCDEF$ выпуклый; вместо шестиугольника можно взять самопересекающуюся шестизвенную ломаную с вершинами на окружности.

6.96. Пусть A_2, B_2 и C_2 — указанные точки пересечения прямых. Применяя теорему Паскаля к точкам M, A_1, A, C, B, B_1 , получаем, что точки A_2, B_2 и R лежат на одной прямой. Аналогично точки A_2, C_2 и R лежат на одной прямой. Следовательно, точки A_2, B_2, C_2 и R лежат на одной прямой.

6.97. Поскольку углы APT, ART, AST и AQT прямые, то точки A, P, R, T, S, Q лежат на окружности, построенной на отрезке AT как на диаметре. Следовательно, по теореме Паскаля (задача 30.50) точки B, C и X лежат на одной прямой.

6.98. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности S с диаметром AB . Пусть A_4 и B_4 — точки пересечения прямых AA_2 и BB_2 с прямой A_3B_3 . Согласно задаче 2.42, а) эти точки лежат на окружности S . Прямые A_1B и A_4A пересекаются в точке A_2 , а прямые BB_4 и AB_1 — в точке B_2 . Поэтому, применяя теорему Паскаля к точкам B_1, A_1, B, B_4, A_4, A , получаем, что точка пересечения прямых B_1A_1 и B_4A_4 (последняя прямая совпадает с A_3B_3) лежит на прямой A_2B_2 .

6.99. Пусть K — точка пересечения прямых BC и MN . Применяя теорему Паскаля к точкам A, M, N, D, C, B , получаем, что точки E, K и F лежат на одной прямой, а значит, K — точка пересечения прямых MN и EF .

6.100. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O . Тогда точка X лежит на прямых AB_1 и C_1D . Применим теорему Паскаля к шестиугольнику AB_1BDC_1C . Прямые AB_1 и DC_1 пересекаются в точке X , прямые BB_1 и CC_1 — в точке O ; прямые BD и AC — диагонали четырехугольника.

6.101. Пусть лучи PA и QA пересекают окружность в точках P_2 и Q_2 , т. е. P_1P_2 и Q_1Q_2 — диаметры данной окружности. Применим теорему Паскаля к шестиугольнику $PP_2P_1QQ_2Q_1$. Прямые PP_2 и QQ_2 пересекаются в точке A , а прямые P_1P_2 и Q_1Q_2 пересекаются в точке O , поэтому точка пересечения прямых P_1Q и Q_1P лежит на прямой AO .

6.102. Пусть B_1 и C_1 — середины дуг AC и AB (имеются в виду дуги, не содержащие точек B и C соответственно). Согласно задаче 3.42, а) точки M и N лежат на отрезках KC_1 и KB_1 .

Применим теорему Паскаля к шестиугольнику C_1CABB_1K . Прямые CC_1 и BB_1 — биссектрисы; прямые CA и B_1K пересекаются в точке N , прямые AB и C_1K — в точке M .

Отметим, что задача 3.46 является частным случаем этой задачи.

6.103. Пусть данные точки A, B, C, D, E лежат на одной окружности. Предположим, что мы построили точку F той же окружности. Обозначим через K, L, M точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA соответственно. Тогда по теореме Паскаля точки K, L, M лежат на одной прямой.

Из этого вытекает следующее построение. Проведем через точку E произвольную прямую a и обозначим точку ее пересечения с прямой BC через L . Затем построим точку K пересечения прямых AB и DE и точку M пересечения прямых KL и CD . Наконец, F — точка пересечения прямых AM и a . Докажем, что F лежит на нашей окружности. Пусть F_1 — точка пересечения окружности и прямой a . Из теоремы Паскаля следует, что F_1 лежит на прямой AM , т. е. F_1 является точкой пересечения a и AM . Поэтому $F_1 = F$.

6.104. Пусть P и Q — точки пересечения прямой A_3A_4 с A_1A_2 и A_1A_6 , а R и S — точки пересечения прямой A_4A_5 с A_1A_6 и A_1A_2 . Тогда $A_2K : A_3L = A_2P : A_3P, A_3L : A_6M = A_3Q : A_6Q$ и $A_6M : A_5N = A_6R : A_5R$. Поэтому требуемое соотношение $A_2K : A_5N = A_2S : A_5S$ переписывается в виде

$$\frac{A_2P}{A_3P} \cdot \frac{A_3Q}{A_6Q} \cdot \frac{A_6R}{A_5R} \cdot \frac{A_5S}{A_2S} = 1.$$

Пусть T — точка пересечения прямых A_2A_3 и A_5A_6 ; по теореме Паскаля точки S, Q и T лежат на одной прямой. Применяя теорему Менелая (см. задачу 5.64) к треугольнику PQS и точкам T, A_2 и A_3 , а также к треугольнику RQS и точкам T, A_5 и A_6 , получаем

$$\frac{A_2P}{A_2S} \cdot \frac{A_3Q}{A_3P} \cdot \frac{TS}{TQ} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{TQ}{TS} \cdot \frac{A_5S}{A_5R} \cdot \frac{A_6R}{A_6Q} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем требуемое. (Отношения отрезков следует считать ориентированными.)

Глава 7

Геометрические места точек

Основные сведения

1. *Геометрическое место точек* (сокращенно ГМТ), обладающих некоторым свойством, — это фигура, состоящая из всех точек, для которых выполнено это свойство.

2. Решение задачи на поиск ГМТ должно содержать доказательство того, что

а) точки, обладающие требуемым свойством, принадлежат фигуре Φ , являющейся ответом задачи;

б) все точки фигуры Φ обладают требуемым свойством.

3. ГМТ, обладающих двумя свойствами, является пересечением (т. е. общей частью) двух фигур: ГМТ, обладающих первым свойством, и ГМТ, обладающих вторым свойством.

4. Три важнейших ГМТ:

а) ГМТ, равноудаленных от точек A и B , является серединным перпендикуляром к отрезку AB ;

б) ГМТ, удаленных на расстояние R от данной точки O , является окружностью радиуса R с центром O ;

в) ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, является объединением двух дуг окружностей, симметричных относительно прямой AB (точки A и B не принадлежат ГМТ).

Вводные задачи

5. а) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых.

б) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

6. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

7. Дан треугольник ABC . Найдите ГМТ X , удовлетворяющих неравенствам $AX \leq BX \leq CX$.

8. Найдите геометрическое место таких точек X , что касательные, проведенные из X к данной окружности, имеют данную длину.

9. На окружности фиксирована точка A . Найдите ГМТ X , делящих хорды с концом A в отношении $1 : 2$, считая от точки A .

§1. ГМТ — прямая или отрезок

7.1. Два колеса радиусов r_1 и r_2 катаются по прямой l . Найдите множество точек пересечения M их общих внутренних касательных.

7.2. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ площади S не параллельны. Найдите ГМТ X , лежащих внутри четырехугольника, для которых $S_{ABX} + S_{CDX} = S/2$.

7.3. Даны две прямые, пересекающиеся в точке O . Найдите ГМТ X , для которых сумма длин проекций отрезков OX на эти прямые постоянна.

7.4. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ X , для которых $AX + BX = CX + DX$.

7.5*. Найдите геометрическое место точек M , лежащих внутри ромба $ABCD$ и обладающих тем свойством, что $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$.

* * *

7.6. На плоскости даны точки A и B . Найдите ГМТ M , для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

7.7. Даны окружность S и точка M вне ее. Через точку M проводятся всевозможные окружности S_1 , пересекающие окружность S ; X — точка пересечения касательной в точке M к окружности S_1 с продолжением общей хорды окружностей S и S_1 . Найдите ГМТ X .

7.8. Даны две непересекающиеся окружности. Найдите геометрическое место точек центров окружностей, делящих пополам данные окружности (т. е. пересекающих их в диаметрально противоположных точках).

7.9. Внутри окружности взята точка A . Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных через концы всевозможных хорд, содержащих точку A .

7.10*. а) Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что величина $AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2$ не зависит от выбора точки X .

б) Четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом. Докажите, что все точки X , удовлетворяющие соотношению $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, лежат на одной прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему середины диагоналей.

См. также задачи 6.17, 15.15.

§2. ГМТ — окружность или дуга окружности

7.11. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла ABC . По какой траектории движется середина этого отрезка?

7.12. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

7.13. Даны две точки A и B . Две окружности касаются прямой AB (одна — в точке A , другая — в точке B) и касаются друг друга в точке M . Найдите ГМТ M .

* * *

7.14. На плоскости даны две точки A и B . Найдите ГМТ M , для которых $AM : BM = k$ (окружность Аполлония).

7.15. Пусть S — окружность Аполлония для точек A и B , причем точка A лежит вне окружности S . Из точки A проведены касательные AP и AQ к окружности S . Докажите, что B — середина отрезка PQ .

7.16*. Пусть AD и AE — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ABC и S_a — окружность с диаметром DE , окружности S_b и S_c определяются аналогично. Докажите, что:

- а) окружности S_a , S_b и S_c имеют две общие точки M и N , причем прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC ;
- б) проекции точки M (и точки N) на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник.

7.17*. Треугольник ABC правильный, M — некоторая точка. Докажите, что если числа AM , BM и CM образуют геометрическую прогрессию, то знаменатель этой прогрессии меньше 2.

См. также задачи 14.21 а), 18.15.

§3. Вписанный угол

7.18. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольников ABC .

7.19. Точка P перемещается по описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые AP и BD пересекаются в точке Q , а прямая, проходящая через точку Q параллельно AC , пересекает прямую BP в точке X . Найдите ГМТ X .

7.20. а) На окружности фиксированы точки A и B , а точки A_1 и B_1 движутся по той же окружности так, что величина дуги A_1B_1 остается постоянной; M — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Найдите ГМТ M .

б) В окружность вписаны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем треугольник ABC неподвижен, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника $A_1B_1C_1$.

7.21*. На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

7.22*. Найдите ГМТ X , лежащих внутри правильного треугольника ABC и обладающих тем свойством, что $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$.

См. также задачи 2.5, 2.38.

§4. Вспомогательные равные треугольники

7.23*. Дана полуокружность с центром O . Из каждой точки X , лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проводится касающийся полуокружности луч и на нем откладывается отрезок XM , равный отрезку XO . Найдите ГМТ M , полученных таким образом.

7.24*. Пусть A и B — фиксированные точки плоскости. Найдите ГМТ C , обладающих следующим свойством: высота h_b треугольника ABC равна b .

7.25*. Даны окружность и точка P внутри ее. Через каждую точку Q окружности проведем касательную. Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую PQ , и касательная пересекаются в точке M . Найдите ГМТ M .

§5. Гомотетия

7.26. На окружности фиксированы точки A и B . Точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения медиан треугольников ABC .

7.27. Дан треугольник ABC . Найдите множество центров прямоугольников $PQRS$, вершины Q и P которых лежат на стороне AC , вершины R и S — на сторонах AB и BC соответственно.

7.28. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q . Какую линию описывает середина отрезка PQ , когда секущая вращается вокруг точки A ?

7.29. Точки A , B и C лежат на одной прямой, причем B находится между A и C . Найдите ГМТ M таких, что радиусы описанных окружностей треугольников AMB и $СMB$ равны.

См. также задачи 19.10, 19.22, 19.39.

§6. Метод ГМТ

7.30. Точки P и Q движутся с одинаковой постоянной скоростью v по двум прямым, пересекающимся в точке O . Докажите, что на плоскости существует неподвижная точка A , расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

7.31. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке O . Докажите, что отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырехугольника, делят его площадь на равные части.

7.32. Пусть D и E — середины сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC , а точка M лежит на стороне AC . Докажите, что если $MD < AD$, то $ME > EC$.

7.33. Внутри выпуклого многоугольника взяты точки P и Q . Докажите, что существует вершина многоугольника, менее удаленная от Q , чем от P .

7.34. Точки A, B и C таковы, что для любой четвертой точки M либо $MA \leq MB$, либо $MA \leq MC$. Докажите, что точка A лежит на отрезке BC .

7.35. Дан четырехугольник $ABCD$, причем $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD . Докажите, что $AM < MC$.

§7. ГМТ с ненулевой площадью

7.36. Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Найдите ГМТ M , для которых $AM \geq OM, BM \geq OM, CM \geq OM$ и $DM \geq OM$.

7.37. Найдите ГМТ X , из которых можно провести касательные к данной дуге AB окружности.

7.38. Пусть O — центр правильного треугольника ABC . Найдите ГМТ M , удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку M , пересекает либо отрезок AB , либо отрезок CO .

7.39. На плоскости даны два непересекающихся круга. Обязательно ли найдется точка M , лежащая вне этих кругов, удовлетворяющая такому условию: каждая прямая, проходящая через точку M , пересекает хотя бы один из этих кругов?

Найдите ГМТ M , удовлетворяющих такому условию.

См. также задачу 18.12.

§8. Теорема Карно

7.40*. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA, AB треугольника ABC , пересекаются в одной точке

тогда и только тогда, когда $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$ (Карно).

7.41*. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7.42*. Точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1, BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB , пересекаются в одной точке.

7.43*. а) Перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на соответствующие стороны треугольника ABC , тоже пересекаются в одной точке.

б) Прямые, проведенные через вершины треугольника ABC параллельно соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые, проведенные через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно соответствующим сторонам треугольника ABC , тоже пересекаются в одной точке.

7.44*. На прямой l взяты точки A_1, B_1 и C_1 и из вершин треугольника ABC на эту прямую опущены перпендикуляры AA_2, BB_2 и CC_2 . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\overline{A_1B_1} : \overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2}$ (отношения отрезков ориентированные).

7.45*. Треугольник ABC правильный, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB, PBC и PCA на прямые AB, BC и CA , пересекаются в одной точке.

7.46*. Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

§9. Окружность Ферма–Аполлония

7.47*. Докажите, что множество точек X , обладающих тем свойством, что $k_1A_1X^2 + \dots + k_nA_nX^2 = c$:

- а) при $k_1 + \dots + k_n \neq 0$ является окружностью или пустым множеством;
- б) при $k_1 + \dots + k_n = 0$ является прямой, плоскостью или пустым множеством.

7.48*. Прямая l пересекает две окружности в четырех точках. Докажите, что четырехугольник, образованный касательными в этих точках, описанный, причем центр его описанной окружности лежит на прямой, соединяющей центры данных окружностей.

7.49*. Точки M и N таковы, что $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр O описанной окружности

треугольника ABC .

См. также задачи 7.6, 7.14, 8.59–8.63.

Задачи для самостоятельного решения

7.50. На сторонах AB и BC треугольника ABC берутся точки D и E . Найдите геометрическое место середин отрезков DE .

7.51. Две окружности касаются данной прямой в двух данных точках A и B и касаются друг друга. Пусть C и D — точки касания этих окружностей с другой внешней касательной. Найдите геометрическое место середин отрезков CD .

7.52. Докажите, что если биссектриса одного из углов треугольника имеет внутри треугольника общую точку с перпендикуляром, восстановленным из середины противоположной стороны, то треугольник равнобедренный.

7.53. Дан треугольник ABC . Найдите множество всех точек M этого треугольника, для которых выполнено условие $AM \geq BM \geq CM$. Когда полученное множество есть а) пятиугольник; б) треугольник?

7.54. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место середин сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.

7.55. Дан равносторонний треугольник ABC . Найдите ГМТ M таких, что треугольники AMB и BCM равнобедренные.

7.56. Найдите геометрическое место середин отрезков длины $2/\sqrt{3}$, концы которых лежат на сторонах единичного квадрата.

7.57. На сторонах AB , BC и CA данного треугольника ABC выбирают такие точки P , Q и R , что $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel BC$. Найдите геометрическое место середин отрезков QR .

7.58. Дана полуокружность с диаметром AB . Для любой точки X этой полуокружности на луче XA строится точка Y так, что $XY = XB$. Найдите ГМТ Y .

7.59. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB , BC и CA выбирают точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Найдите ГМТ пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C .

Решения

7.1. Пусть O_1 и O_2 — центры колес радиусов r_1 и r_2 соответственно. Если M — точка пересечения внутренних касательных, то $O_1M : O_2M = r_1 : r_2$. Из этого условия легко получить, что расстояние от точки M до прямой l равно $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$. Поэтому все точки пересечения общих внутренних касательных лежат на прямой, параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстояние $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$.

7.2. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD . Отложим на лучах OA и OD отрезки OK и OL , равные AB и CD соответственно. Тогда $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{KOX} + S_{LOX} \pm S_{KXL}$. Следовательно, площадь треугольника KXL постоянна, т. е. точка X лежит на прямой, параллельной KL .

7.3. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — единичные векторы, параллельные данным прямым; $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$. Сумма длин проекций вектора \mathbf{x} на данные прямые равна $|(\mathbf{a}, \mathbf{x})| + |(\mathbf{b}, \mathbf{x})| = |(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}, \mathbf{x})|$, причем смена знака происходит на перпендикулярах, восстановленных из точки O к данным прямым. Поэтому искомое ГМТ — прямоугольник, стороны которого параллельны биссектрисам углов между данными прямыми, а вершины лежат на указанных перпендикулярах.

7.4. Пусть l — прямая, проходящая через середины сторон BC и AD . Предположим, что точка X не лежит на прямой l , например что точки A и X лежат по одну сторону от прямой l . Тогда $AX < DX$ и $BX < CX$, а значит, $AX + BX < CX + DX$. Поэтому прямая l — искомое ГМТ.

7.5. Пусть N — такая точка, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$. Тогда $\angle NAM = \angle DMA$ и $\angle NBM = \angle BMC$, поэтому четырехугольник $AMBN$ вписанный. Диагонали вписанного четырехугольника $AMBN$ равны, поэтому $AM \parallel BN$ или $BM \parallel AN$. В первом случае $\angle AMD = \angle MAN = \angle AMB$, а во втором случае $\angle BMC = \angle MBN = \angle BMA$. Если $\angle AMB = \angle AMD$, то $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$ и точка M лежит на диагонали AC , а если $\angle BMA = \angle BMC$, то точка M лежит на диагонали BD . Ясно также, что если точка M лежит на одной из диагоналей, то $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$.

7.6. Введем систему координат, выбрав точку A в качестве начала координат и направив ось Ox по лучу AB . Пусть точка M имеет координаты (x, y) . Тогда $AM^2 = x^2 + y^2$ и $BM^2 = (x - a)^2 + y^2$, где $a = AB$. Поэтому $AM^2 - BM^2 = 2ax - a^2$. Эта величина равна k для точек M с координатами $((a^2 + k)/2a, y)$; все такие точки лежат на прямой, перпендикулярной AB .

7.7. Пусть A и B — точки пересечения окружностей S и S_1 . Тогда $XM^2 = XA \cdot XB = XO^2 - R^2$, где O и R — центр и радиус окружности S . Поэтому $XO^2 - XM^2 = R^2$, а значит, точки X лежат на перпендикуляре к прямой OM (см. задачу 7.6).

7.8. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы. Окружность радиуса r с центром X пересекает первую окружность в диаметрально противоположных точках тогда и только тогда, когда $r^2 = XO_1^2 + R_1^2$, поэтому искомое ГМТ состоит из таких точек X , что $XO_1^2 + R_1^2 = XO_2^2 + R_2^2$, все такие точки X лежат на прямой, перпендикулярной O_1O_2 (задача 7.6).

7.9. Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, M — точка пересечения касательных, проведенных через концы хорды, содержащей точку A , P — середина этой хорды. Тогда $OP \cdot OM = R^2$ и $OP = OA \cos \varphi$, где $\varphi = \angle AOP$. Поэтому $AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cos \varphi = OM^2 + OA^2 - 2R^2$, а значит, величина $OM^2 - AM^2 = 2R^2 - OA^2$ постоянна. Следовательно, все точки M лежат на прямой, перпендикулярной OA (см. задачу 7.6).

7.10. Пусть P и Q — середины диагоналей AC и BD . Тогда $AX^2 + CX^2 = 2PX^2 + AC^2/2$ и $BX^2 + DX^2 = 2QX^2 + BD^2/2$ (см. задачу 12.11, а)), поэтому в задаче б) искомое ГМТ состоит из таких точек X , что $PX^2 - QX^2 = (BD^2 - AC^2)/4$, а в задаче а) $P = Q$, поэтому рассматриваемая величина равна $(BD^2 - AC^2)/2$.

7.11. Пусть M и N — концы данного отрезка, O — его середина. Точка B лежит на окружности с диаметром MN , поэтому $OB = MN/2$. Траекторией

точки O является часть окружности радиуса $MN/2$ с центром B , заключенная внутри угла ABC .

7.12. Пусть M — данная точка, O — центр данной окружности. Если X — середина хорды AB , то $XO \perp AB$. Следовательно, искомое ГМТ является окружностью с диаметром MO .

7.13. Проведем через точку M общую касательную к окружностям. Пусть O — точка пересечения этой касательной с прямой AB . Тогда $AO = MO = BO$, т. е. O — середина отрезка AB . Точка M лежит на окружности с центром O и радиусом $AB/2$. Множеством точек M является окружность с диаметром AB (точки A и B следует исключить).

7.14. При $k = 1$ получаем серединный перпендикуляр к отрезку AB . В дальнейшем будем считать, что $k \neq 1$.

Введем систему координат на плоскости так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно. Если точка M имеет координаты (x, y) , то $\frac{AM^2}{BM^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$. Уравнение $\frac{AM^2}{BM^2} = k^2$ приводится к виду

$$x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a^2 + y^2 = \frac{2ka}{1-k^2}^2.$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром $-\frac{1+k^2}{1-k^2}a, 0$ и радиусом $\frac{2ka}{|1-k^2|}$.

7.15. Пусть прямая AB пересекает окружность S в точках E и F , причем точка E лежит на отрезке AB . Тогда PE — биссектриса треугольника APB , поэтому $\angle EPB = \angle EPA = \angle EFP$. А так как $\angle EPF = 90^\circ$, то $PB \perp EF$.

7.16. а) Рассматриваемые окружности являются окружностями Аполлония для пар вершин треугольника ABC , поэтому если X — общая точка окружностей S_a и S_b , то $XB : XC = AB : AC$ и $XC : XA = BC : BA$, т. е. $XB : XA = CB : CA$, а значит, точка X принадлежит окружности S_c . Ясно также, что если $AB > BC$, то точка D лежит внутри окружности S_b , а точка A — вне ее. Следовательно, окружности S_a и S_b пересекаются в двух различных точках.

Для завершения доказательства остается воспользоваться результатом задачи 7.49.

б) Согласно задаче а) $MA = \lambda/a$, $MB = \lambda/b$ и $MC = \lambda/c$. Пусть B_1 и C_1 — проекции точки M на прямые AC и AB . Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром MA , поэтому $B_1C_1 = MA \sin B_1AC_1 = (\lambda/a)(a/2R) = \lambda/2R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Аналогично $A_1C_1 = A_1B_1 = \lambda/(2R)$.

7.17. Пусть O_1 и O_2 — такие точки, что $\vec{BO}_1 = 4\vec{BA}/3$ и $\vec{CO}_2 = 4\vec{CB}/3$. Легко проверить, что если $BM > 2AM$, то точка M лежит внутри окружности S_1 радиуса $2AB/3$ с центром O_1 (см. задачу 7.14), а если $CM > 2BM$, то точка M лежит внутри окружности S_2 радиуса $2AB/3$ с центром O_2 . Так как $O_1O_2 > BO_1 = 4AB/3$, а сумма радиусов окружностей S_1 и S_2 равна $4AB/3$, то эти окружности не пересекаются. Следовательно, если $BM = qAM$ и $CM = qBM$, то $q < 2$.

7.18. а) Пусть O — точка пересечения высот AA_1 и BB_1 . Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CO . Следовательно, $\angle AOB = 180^\circ - \angle C$. Поэтому искомое ГМТ — окружность, симметричная данной относительно прямой AB (точки, проецирующиеся в точки A и B , следует исключить).

б) Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , то $\angle AOB = 90^\circ + \angle C/2$. На каждой из двух дуг AB угол C постоянен, поэтому искомым ГМТ являются две дуги, из которых отрезок AB виден под углом $90^\circ + \angle C/2$ (точки A и B следует исключить).

7.19. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром DX , поэтому $\angle(QD, DX) = \angle(QP, PX) = \angle(AP, PB) = 45^\circ$, т. е. точка X лежит на прямой CD .

7.20. а) Если точка A_1 пройдет по окружности дугу величиной 2φ , то точка B_1 тоже пройдет дугу величиной 2φ , а значит, прямые AA_1 и BB_1 повернутся на угол φ и угол между ними не изменится. Поэтому точка M перемещается по окружности, содержащей точки A и B .

б) Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 в некоторый момент пересекаются в точке P . Тогда, например, точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 перемещается по описанной окружности треугольника ABP . Ясно также, что описанные окружности треугольников ABP, BCP и CAP имеют единственную общую точку P .

7.21. Предположим, что точки A и C лежат на противоположных сторонах прямоугольника. Пусть M и N — середины отрезков AC и BD соответственно. Проведем через точку M прямую l_1 , параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки A и C , а через точку N прямую l_2 , параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки B и D . Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2 . Ясно, что точка O лежит на окружности S , построенной на отрезке MN как на диаметре. С другой стороны, точка O является центром прямоугольника. Ясно, что прямоугольник можно построить для любой точки O , лежащей на окружности S .

Остается заметить, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки A и B , A и D . Поэтому искомым ГМТ является объединение трех окружностей.

7.22. Легко проверить, что точки высот треугольника ABC обладают требуемым свойством. Предположим, что требуемым свойством обладает точка X , не лежащая ни на одной из высот треугольника ABC . Тогда прямая BX пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках X_1 и X_2 . Так как $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ = \angle X_1AB + \angle X_1BC + \angle X_1CA$, то $\angle XAB - \angle X_1AB = \angle X_1CA - \angle XCA$, т. е. $\angle(XA, AX_1) = \angle(X_1C, CX)$. Следовательно, точка X лежит на описанной окружности треугольника AXC' , где точка C' симметрична C относительно прямой BX . Аналогично доказывается, что точка X_2 лежит на этой окружности, а значит, прямая BX пересекает эту окружность в трех различных точках. Получено противоречие.

7.23. Пусть K — точка касания прямой MX и данной полуокружности, а P — проекция точки M на диаметр. В прямоугольных треугольниках MPX и OKX равны гипотенузы и $\angle PXM = \angle OKK$, а значит, эти треугольники равны и, в частности, $MP = KO = R$, где R — радиус данной полуокружности. Следовательно, точка M лежит на прямой l , параллельной диаметру полуокружности и касающейся полуокружности. Пусть AB — отрезок прямой l , проекцией которого является диаметр полуокружности. Из точки прямой l , лежащей вне отрезка AB , нельзя провести касательную к данной полуокружности, так как касательная, проведенная к окружности, будет касаться другой полуокружности. Искомым ГМТ является отрезок AB , из которого выброшены точки A и B и его середина.

7.24. Пусть H — основание высоты h_b треугольника ABC и $h_b = b$. Обозначим через B' точку пересечения перпендикуляра к прямой AB , проведенного через точку A , и перпендикуляра к прямой AH , проведенного через точку C .

Прямоугольные треугольники $AB'C$ и BAH равны, так как $\angle AB'C = \angle BAH$ и $AC = BH$. Поэтому $AB' = AB$, т. е. точка C лежит на окружности с диаметром AB' .

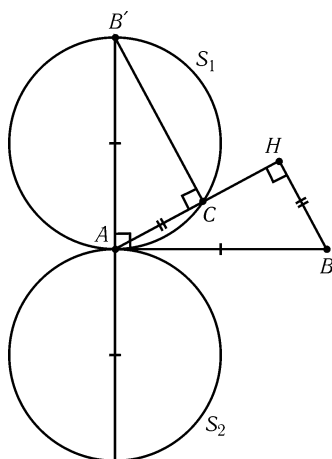


Рис. 7.1

Пусть S_1 и S_2 — образы окружности S с диаметром AB при поворотах на $\pm 90^\circ$ с центром A (рис. 7.1). Мы доказали, что точка $C \neq A$ принадлежит объединению окружностей S_1 и S_2 . Обратно, пусть точка $C \neq A$ принадлежит окружности S_1 или S_2 , AB' — диаметр соответствующей окружности. Тогда $\angle AB'C = \angle HAB$ и $A'B = AB$, поэтому $AC = HB$.

7.25. Пусть O — центр окружности, N — точка пересечения прямых OM и QP . Опустим из точки M перпендикуляр MS на прямую OP . Из подобия треугольников ONQ и OQM , OPN и OMS получаем $ON : OQ = OQ : OM$ и $OP : ON = OM : OS$. Перемножая эти равенства, получаем $OP : OQ = OQ : OS$. Поэтому $OS = OQ^2 : OP$ является постоянной величиной. А так как точка S лежит на прямой OP , ее положение не зависит от выбора точки Q . Искомым ГМТ является прямая, перпендикулярная

прямой OP и проходящая через точку S .

7.26. Пусть O — середина отрезка AB , M — точка пересечения медиан треугольника ABC . При гомотетии с центром O и коэффициентом $1/3$ точка C переходит в точку M . Поэтому точки пересечения медиан треугольников ABC лежат на окружности S , являющейся образом исходной окружности при гомотетии с центром O и коэффициентом $1/3$. Для получения искомого ГМТ из окружности S нужно выбросить образы точек A и B .

7.27. Пусть O — середина высоты BH , M — середина отрезка AC , D и E — середины сторон RQ и PS соответственно (рис. 7.2).

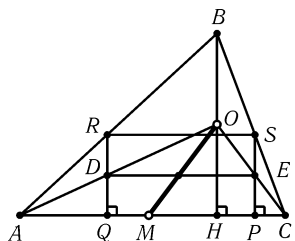


Рис. 7.2

Точки D и E лежат на прямых AO и CO соответственно. Середина отрезка DE является центром прямоугольника $PQRS$. Ясно, что она лежит на отрезке OM . Искомым ГМТ является отрезок OM , за исключением его концов.

7.28. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (точка P лежит на окружности с центром O_1), O — середина отрезка O_1O_2 ; P' , Q' и O' — проекции точек O_1, O_2 и O на прямую PQ . При вращении прямой PQ точка O' пробегает окружность S с диаметром AO . Ясно, что при гомотетии с центром A и коэффициентом 2 отрезок $P'Q'$ переходит в

отрезок PQ , т. е. точка O' переходит в середину отрезка PQ . Поэтому искомым ГМТ является образ окружности S при этой гомотетии.

7.29. Пусть P и Q — центры описанных окружностей треугольников AMB и CMB . Точка M принадлежит искомому ГМТ, если $BPMQ$ — ромб, т. е. точка M является образом середины отрезка PQ при гомотетии с центром B и коэффициентом 2. А так как проекции точек P и Q на прямую AC являются серединами отрезков AB и BC , середины всех отрезков PQ лежат на одной прямой.

(Точку прямой AC из полученного ГМТ следует исключить.)

7.30. Точка P проходит через точку O в момент t_1 , точка Q — в момент t_2 . В момент $(t_1 + t_2)/2$ точки P и Q находятся от точки O на одинаковом расстоянии, равном $|t_1 - t_2|v/2$. Проведем в этот момент перпендикуляры к прямым в точках P и Q . Легко проверить, что точка пересечения этих перпендикуляров является искомой.

7.31. Обозначим середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ через M и N соответственно. Ясно, что $S_{AMB} = S_{BMC}$ и $S_{AMD} = S_{DMC}$, т. е. $S_{DABM} = S_{BCDM}$. Поскольку при перемещении точки M параллельно BD площади четырехугольников $DABM$ и $BCDM$ не изменяются, то $S_{DABO} = S_{BCDO}$. Аналогичные рассуждения для точки N показывают, что $S_{ABCO} = S_{CDAO}$. Поэтому $S_{ADO} + S_{ABO} = S_{BCO} + S_{CDO}$ и $S_{ABO} + S_{BCO} = S_{CDO} + S_{ADO}$, а значит, $S_{ADO} = S_{BCO} = S_1$ и $S_{ABO} = S_{CDO} = S_2$, т. е. площадь каждой из четырех частей, на которые отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырехугольника, разбивают его, равна $(S_1 + S_2)/2$.

7.32. Опустим из точки B высоту BB_1 . Тогда $AD = B_1D$ и $CE = B_1E$. Ясно, что если $MD < AD$, то точка M лежит на отрезке AB_1 , т. е. вне отрезка B_1C . Следовательно, $ME > EC$.

7.33. Предположим, что все вершины многоугольника удалены от точки Q не меньше, чем точки от P . Тогда все вершины многоугольника лежат в той же полуплоскости, заданной серединным перпендикуляром к отрезку PQ , что и точка P , а точка Q лежит в другой полуплоскости. Следовательно, точка Q лежит вне многоугольника, что противоречит условию.

7.34. Найдем ГМТ M , для которых $MA > MB$ и $MA > MC$. Проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам AB и AC . $MA > MB$ для точек, лежащих внутри полуплоскости, заданной прямой l_1 и не содержащей точку A . Поэтому искомым ГМТ является пересечение полуплоскостей (без границ), заданных прямыми l_1, l_2 и не содержащих точку A . Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то это ГМТ всегда непусто. Если A, B, C лежат на одной прямой, но A не лежит на отрезке BC , то это ГМТ тоже непусто. Если же A лежит на отрезке BC , то это ГМТ пусто, т. е. для любой точки M либо $MA \leq MB$, либо $MA \leq MC$.

7.35. Пусть O — середина диагонали AC . Проекция точек B и D на прямую AC лежат на отрезке AO , поэтому проекция точки M тоже лежит на отрезке AO .

7.36. Проведем серединный перпендикуляр l к отрезку AO . Ясно, что $AM \geq OM$ тогда и только тогда, когда точка M лежит по ту же сторону от прямой l , что и точка O (или лежит на прямой l). Поэтому искомым ГМТ является ромб, образованный серединными перпендикулярами к отрезкам OA, OB, OC и OD .

7.37. Искомое ГМТ заштриховано на рис. 7.3 (граница входит в ГМТ).

7.38. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон CB и AC соответственно. Искомым ГМТ является внутренность четырехугольника OA_1CB_1 .

7.39. Проведем общие касательные к данным кругам (рис. 7.4). Легко проверить, что точки, принадлежащие заштрихованным областям (но не их границам), удовлетворяют требуемому условию, а точки, не лежащие в этих областях,

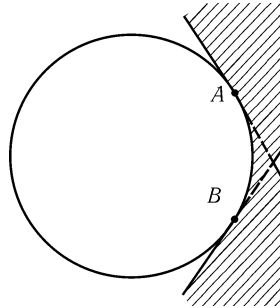


Рис. 7.3

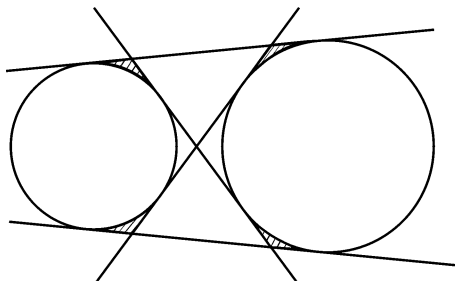


Рис. 7.4

не удовлетворяют этому условию.

7.40. Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB , пересекаются в точке M . Так как точки B_1 и M лежат на одном перпендикуляре к прямой AC , то $B_1A^2 - B_1C^2 = MA^2 - MC^2$. Аналогично $C_1B^2 - C_1A^2 = MB^2 - MA^2$ и $A_1C^2 - A_1B^2 = MC^2 - MB^2$. Складывая эти равенства, получаем $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$.

Обратно, пусть $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек A_1 и B_1 на прямые BC и AC , через M . Проведем через точку M прямую l , перпендикулярную прямой AB . Если C_1' — точка на прямой l , то, согласно предыдущему, $A_1B^2 + C_1'A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1'B^2$. Поэтому $C_1'A^2 - C_1'B^2 = C_1A^2 - C_1B^2$. Согласно задаче 7.6 ГМТ X , для которых $XA^2 - XB^2 = k$, является прямой, перпендикулярной отрезку AB . Поэтому перпендикуляр, опущенный из точки C_1 на прямую AB , проходит через точку M , что и требовалось.

7.41. Положим $A_1 = A, B_1 = B$ и $C_1 = C$. Из очевидного равенства $AB^2 + CA^2 + BC^2 = BA^2 + AC^2 + CB^2$ получаем, что высоты, опущенные из точек A, B и C на стороны BC, CA и AB , пересекаются в одной точке.

7.42. Достаточно воспользоваться результатом задачи 7.40.

7.43. а) Эта задача является очевидным следствием задачи 7.40.

б) Пусть при повороте на 90° относительно некоторой точки треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в $A_2B_2C_2$. Перпендикуляры к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$ параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на стороны треугольника $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке. Следовательно, в одной точке пересекаются перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_2B_2C_2$ на стороны треугольника ABC . Остается заметить, что при повороте на 90° , переводящем треугольник $A_2B_2C_2$ в $A_1B_1C_1$, эти перпендикуляры переходят в прямые, проходящие через стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно соответствующим сторонам треугольника ABC .

7.44. Нужно выяснить, в каком случае выполняется равенство $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$. Вычитая из обеих частей этого равенства величину $AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2$, переходим к соотношению $A_2B_1^2 + B_2C_1^2 + C_2A_1^2 = B_2A_1^2 + C_2B_1^2 + A_2C_1^2$, т. е. $(b_1 - a_2)^2 + (c_1 - b_2)^2 + (a_1 - c_2)^2 = (a_1 - b_2)^2 + (b_1 - c_2)^2 + (c_1 - a_2)^2$, где a_i, b_i и c_i — координаты точек A_i, B_i и C_i на прямой l . После сокращения получаем $a_2b_1 + b_2c_1 + c_2a_1 = a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2$, а значит, $(b_2 - a_2)(c_1 - b_1) = (b_1 - a_1)(c_2 - b_2)$, т. е. $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1C_1}$.

7.45. Можно считать, что длина стороны данного правильного треугольника равна 2. Пусть $PA = 2a, PB = 2b$ и $PC = 2c$; A_1, B_1 и C_1 — проекции центров вписанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB на прямые BC, CA и AB . Согласно задаче 3.2 $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = (1 + a - c)^2 + (1 + b - a)^2 + (1 + c - b)^2 = 3 + (a - c)^2 + (b - a)^2 + (c - b)^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$.

7.46. Отрезки, на которые биссектрисы делят стороны треугольника, легко вычисляются. В результате получаем, что если перпендикуляры, восставленные

из оснований биссектрис, пересекаются, то

$$\frac{ac}{b+c} + \frac{ab}{a+c} + \frac{bc}{a+b} = \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{a+b},$$

т. е.

$$0 = \frac{a^2(c-b)}{b+c} + \frac{b^2(a-c)}{a+c} + \frac{c^2(b-a)}{a+b} = -\frac{(b-a)(a-c)(c-b)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

7.47. Пусть (a_i, b_i) — координаты точки A_i , (x, y) — координаты точки X . Тогда уравнение, которому удовлетворяет точка X , переписется в виде $c = \sum k_i((x-a_i)^2 + (x-b_i)^2) = (\sum k_i)(x^2 + y^2) - (2\sum k_i a_i)x - (2\sum k_i b_i)y + \sum k_i(a_i^2 + b_i^2)$. Если коэффициент при $x^2 + y^2$ отличен от нуля, то это уравнение задает окружность или пустое множество, а если он равен нулю, то уравнение задает прямую, плоскость или пустое множество.

З а м е ч а н и е. Если в случае а) точки A_1, \dots, A_n лежат на одной прямой l , то эту прямую можно выбрать в качестве оси Ox . Тогда $b_i = 0$, а значит, коэффициент при y равен нулю, т. е. центр окружности лежит на прямой l .

7.48. Пусть прямая l высекает на данных окружностях дуги A_1B_1 и A_2B_2 величиной $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$; O_1 и O_2 — центры окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы. Пусть K — точка пересечения касательных в точках A_1 и A_2 . По теореме синусов $KA_1 : KA_2 = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1$, т. е. $KA_1 \sin \alpha_1 = KA_2 \sin \alpha_2$. А так как $KO_1^2 = KA_1^2 + R_1^2$ и $KO_2^2 = KA_2^2 + R_2^2$, то $(\sin^2 \alpha_1)KO_1^2 - (\sin^2 \alpha_2)KO_2^2 = (R_1 \sin \alpha_1)^2 - (R_2 \sin \alpha_2)^2 = q$. Аналогично доказывается, что и остальные точки пересечения касательных принадлежат геометрическому месту таких точек X , что $(\sin^2 \alpha_1)XO_1^2 - (\sin^2 \alpha_2)XO_2^2 = q$. Это ГМТ — окружность, центр которой лежит на прямой O_1O_2 (см. замечание к задаче 7.47).

7.49. Пусть $AM : BM : CM = p : q : r$. Все точки X , удовлетворяющие соотношению $(q^2 - r^2)AX^2 + (r^2 - p^2)BX^2 + (p^2 - q^2)CX^2 = 0$, лежат на одной прямой (см. задачу 7.47), а точки M, N и O удовлетворяют этому соотношению.

Глава 8

Построения

Основные сведения

1. Задачи на построение решаются по определенной стандартной схеме. Сначала проводим анализ, т. е. предполагаем, что искомая фигура построена, и, исследуя ее свойства, находим, как ее можно задать с помощью исходных данных. На основании этих рассуждений описываем последовательность построений. Затем нужно доказать, что указанная последовательность построений приводит к требуемому результату, а также выяснить, в каких случаях сколько имеется решений.

При написании решений я несколько отклонился от этой схемы. Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев после анализа доказательство уже совершенно очевидно. В подобных случаях доказательство не приводится, но следует помнить, что его нужно провести самостоятельно. Если же доказательство не совсем очевидно, то указывается, как преодолеть возникающие трудности. Исследование числа решений задач на построение не приводится.

2. Некоторые задачи на построение, решения которых используют геометрические преобразования, распределены по соответствующим главам.

3. Если A и B — фиксированные точки, то ГМТ X , для которых $AX : BX = k \neq 1$, является окружностью (см. задачу 7.14). Это ГМТ иногда используется при решении задач на построение.

Вводные задачи

1. Постройте треугольник ABC по стороне a , высоте h_a и углу A .
2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.
3. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.
4. Постройте прямую, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

5. Даны отрезки, длины которых равны a, b и c . Постройте отрезок длиной: а) ab/c ; б) \sqrt{ab} .

§1. Метод геометрических мест точек

8.1. Постройте треугольник ABC по a, h_a и R .

8.2. Постройте точку M внутри данного треугольника так, что $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.

8.3. Проведите через данную точку P , лежащую внутри данной окружности, хорду так, чтобы разность длин отрезков, на которые P делит хорду, имела данную величину a .

8.4. Даны прямая и окружность. Постройте окружность данного радиуса r , касающуюся их.

8.5. Даны точка A и окружность S . Проведите через точку A прямую так, чтобы хорда, отсекаемая окружностью S на этой прямой, имела данную длину d .

8.6*. Дан четырехугольник $ABCD$. Впишите в него параллелограмм с заданными направлениями сторон.

§2. Вписанный угол

8.7. Постройте треугольник по a, m_c и углу A .

8.8. Даны окружность и две точки A и B внутри ее. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

8.9. Продолжения сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N , а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q . Постройте прямоугольник $ABCD$, если даны точки M, N, P, Q и длина a стороны AB .

8.10*. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины.

8.11*. Постройте треугольник ABC по стороне a , углу A и радиусу вписанной окружности r .

§3. Подобные треугольники и гомотетия

8.12. Постройте треугольник по двум углам A, B и периметру P .

8.13. Постройте треугольник ABC по m_a, m_b и m_c .

8.14. Постройте треугольник ABC по h_a, h_b и h_c .

8.15. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC квадрат $KLMN$ так, чтобы вершины K и N лежали на сторонах AB и AC , а вершины L и M — на стороне BC .

8.16*. Постройте треугольник ABC по $h_a, b - c$ и r .

См. также задачи 19.16–19.21, 19.40, 19.41.

§4. Построение треугольников по различным элементам

В задачах этого параграфа требуется построить треугольник по указанным в условии элементам.

8.17. c, m_a и m_b .

8.18. a, b и h_a .

8.19. h_b, h_c и m_a .

8.20. $\angle A, h_b$ и h_c .

8.21. a, h_b и m_b .

8.22. h_a, m_a и h_b .

8.23. a, b и m_c .

8.24*. h_a, m_a и $\angle A$.

8.25*. a, b и l_c .

8.26*. $\angle A, h_a$ и p .

См. также задачи 17.6–17.8.

§5. Построение треугольников по различным точкам

8.27. Постройте треугольник ABC , если дана прямая l , на которой лежит сторона AB , и точки A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC и AC .

8.28. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

8.29. а) Постройте треугольник ABC , зная три точки A', B', C' , в которых биссектрисы его углов пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

б) Постройте треугольник ABC , зная три точки A', B', C' , в которых высоты треугольника пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

8.30. Постройте треугольник ABC , зная три точки A', B', C' , симметричные центру O описанной окружности этого треугольника относительно сторон BC, CA, AB .

8.31. Постройте треугольник ABC , зная три точки A', B', C' , симметричные точке пересечения высот треугольника относительно сторон BC, CA, AB (оба треугольника остроугольные).

8.32. Постройте треугольник ABC , зная три точки P, Q, R , в которых высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины C , пересекают описанную окружность.

8.33. Постройте треугольник ABC , зная положение трех точек A_1, B_1, C_1 , являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .

8.34* Постройте треугольник ABC по центру описанной окружности O , точке пересечения медиан M и основанию H высоты CH .

8.35* Постройте треугольник ABC по центрам вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей.

§6. Треугольник

8.36. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.

8.37. Постройте треугольник по сторонам a и b , если известно, что угол против одной из них в три раза больше угла против другой.

8.38. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник $PQRS$ (вершины R и Q лежат на сторонах AB и BC , P и S — на стороне AC) так, чтобы его диагональ имела данную длину.

8.39. Проведите через данную точку M прямую так, чтобы она отсекала от данного угла с вершиной A треугольника ABC данного периметра $2p$.

8.40. Постройте треугольник ABC по медиане m_c и биссектрисе l_c , если $\angle C = 90^\circ$.

8.41* Дан треугольник ABC , причем $AB < BC$. Постройте на стороне AC точку D так, чтобы периметр треугольника ABD был равен длине стороны BC .

8.42* Постройте треугольник ABC по радиусу описанной окружности и биссектрисе угла A , если известно, что разность углов B и C равна 90° .

8.43* На стороне AB треугольника ABC дана точка P . Проведите через точку P прямую (отличную от AB), пересекающую лучи CA и CB в таких точках M и N , что $AM = BN$.

8.44* Постройте треугольник ABC по радиусу вписанной окружности r и (ненулевым) длинам отрезков AO и AH , где O — центр вписанной окружности, H — ортоцентр.

См. также задачи 15.13 б), 17.12–17.15, 18.11, 18.31.

§7. Четырехугольники

8.45. Постройте ромб, две стороны которого лежат на двух данных параллельных прямых, а две другие проходят через две данные точки.

8.46. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между AB и CD .

8.47. Через вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

8.48. Даны середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Постройте этот четырехугольник.

8.49. Даны три вершины вписанного и описанного четырехугольника. Постройте его четвертую вершину.

8.50*. Даны вершины A и C равнобедренной описанной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$); известны также направления ее оснований. Постройте вершины B и D .

8.51*. На доске была начерчена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и проведены перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на основание AD и средняя линия EF . Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам OK и EF ?

8.52*. Постройте выпуклый четырехугольник, если даны длины всех его сторон и одной средней линии (средней линией четырехугольника называют отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

8.53*. Постройте вписанный четырехугольник по четырем сторонам (Брахмагупта).

См. также задачи 15.11, 15.14, 16.17, 17.4, 17.5.

§8. Окружности

8.54. Внутри угла даны две точки A и B . Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

8.55. Даны окружность S , точка A на ней и прямая l . Постройте окружность, касающуюся данной окружности в точке A и данной прямой.

8.56. а) Даны две точки A, B и прямая l . Постройте окружность, проходящую через точки A, B и касающуюся прямой l .

б) Даны две точки A и B и окружность S . Постройте окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся окружности S .

8.57*. Даны три точки A, B и C . Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

8.58*. Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из трех данных точек A, B и C , имели бы длины a, b и c соответственно.

См. также задачи 15.9, 15.10, 15.12, 15.13 а), 16.13, 16.14, 16.18–16.20, 18.26.

§9. Окружность Аполлония

8.59. Постройте треугольник по a, h_a и b/c .

8.60. Постройте треугольник ABC , если известны длина биссектрисы CD и длины отрезков AD и BD , на которые она делит сторону AB .

8.61*. На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Постройте точку M , из которой отрезки AB, BC, CD видны под равными углами.

8.62*. На плоскости даны два отрезка AB и $A'B'$. Постройте точку O так, чтобы треугольники AOB и $A'OB'$ были подобны (одинаковые буквы обозначают соответственные вершины подобных треугольников).

8.63*. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

§10. Разные задачи

8.64. а) На параллельных прямых a и b даны точки A и B . Проведите через данную точку C прямую l , пересекающую прямые a и b в таких точках A_1 и B_1 , что $AA_1 = BB_1$.

б) Проведите через точку C прямую, равноудаленную от данных точек A и B .

8.65. Постройте правильный десятиугольник.

8.66*. Постройте прямоугольник с данным отношением сторон, зная по одной точке на каждой из его сторон.

8.67*. Даны диаметр AB окружности и точка C на нем. Постройте на этой окружности точки X и Y , симметричные относительно прямой AB , так, чтобы прямые AX и YC были перпендикулярными.

См. также задачи 15.8, 16.15, 16.16, 16.21, 17.9–17.11, 17.27–17.29, 18.43.

§11. Необычные построения

8.68. С помощью циркуля и линейки разделите угол 19° на 19 равных частей.

8.69. Докажите, что угол величиной n° , где n — целое число, не делящееся на 3, можно разделить на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

8.70*. На клочке бумаги нарисованы две прямые, образующие угол, вершина которого лежит вне этого клочка. С помощью циркуля и линейки проведите ту часть биссектрисы угла, которая лежит на клочке бумаги.

8.71*. С помощью двусторонней линейки постройте центр данной окружности, диаметр которой больше ширины линейки.

8.72*. Даны точки A и B , расстояние между которыми больше 1 м. С помощью одной лишь линейки, длина которой равна 10 см, постройте отрезок AB . (Линейкой можно только проводить прямые линии.)

8.73*. На окружности радиуса a дана точка. С помощью монеты радиуса a постройте точку, диаметрально противоположную данной.

§12. Построения одной линейкой

В задачах этого параграфа требуется выполнить указанные построения с помощью одной линейки без циркуля. С помощью одной линейки почти никаких построений выполнить нельзя. Например, нельзя даже построить середину отрезка (задача 30.58). Но если на плоскости проведены какие-либо вспомогательные линии, то можно выполнить многие построения. В случае, когда на плоскости нарисована вспомогательная окружность и отмечен ее центр, то с помощью линейки можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью линейки и циркуля. При этом, правда, считается, что окружность построена, если построен ее центр и одна ее точка.

З а м е ч а н и е. Если на плоскости нарисована окружность, но не отмечен ее центр, то с помощью одной линейки построить центр нельзя (задача 30.59).

8.74*. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, лежащий на одной из данных прямых.

8.75*. Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок.

8.76*. Даны две параллельные прямые. Разделите отрезок, лежащий на одной из них, на n равных частей.

8.77*. Даны две параллельные прямые и точка P . Проведите через точку P прямую, параллельную данным прямым.

8.78*. Даны окружность, ее диаметр AB и точка P . Проведите через точку P перпендикуляр к прямой AB .

8.79*. Докажите, что если на плоскости даны какая-нибудь окружность S и ее центр O , то с помощью одной линейки можно:

а) из любой точки провести прямую, параллельную данной прямой, и опустить на данную прямую перпендикуляр;

б) на данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку;

в) построить отрезок длиной ab/c , где a, b, c — длины данных отрезков;

г) построить точки пересечения данной прямой l с окружностью, центр которой — данная точка A , а радиус равен длине данного отрезка;

д) построить точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки.

См. также задачу 6.103.

§13. Построения с помощью двусторонней линейки

В задачах этого параграфа требуется выполнить построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (без циркуля). С помощью двусторонней линейки можно выполнить все построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки.

Пусть a — ширина двусторонней линейки. С помощью этой линейки можно выполнять следующие элементарные построения:

- 1) проводить прямую через две данные точки;
- 2) проводить прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние a ;
- 3) через две данные точки A и B , где $AB \geq a$, проводить пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a (таких пар прямых две).

8.80. а) Постройте биссектрису данного угла AOB .

б) Дан острый угол AOB . Постройте угол BOC , биссектрисой которого является луч OA .

8.81. Восставьте перпендикуляр к данной прямой l в данной точке A .

8.82. а) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.

б) Постройте середину данного отрезка.

8.83. Даны угол AOB , прямая l и точка P на ней. Проведите через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB .

8.84. Даны отрезок AB , непараллельная ему прямая l и точка M на ней. Постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M .

8.85*. Даны прямая l и отрезок OA , параллельный l . Постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O .

8.86*. Даны отрезки O_1A_1 и O_2A_2 . Постройте радикальную ось окружностей радиуса O_1A_1 и O_2A_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно.

§14. Построения с помощью прямого угла

В задачах этого параграфа требуется выполнить указанные построения с помощью прямого угла. Прямой угол позволяет выполнить следующие элементарные построения:

- а) расположить прямой угол так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая сторона проходила через данную точку;
- б) расположить прямой угол так, чтобы его вершина лежала на данной прямой, а стороны проходили через две данные точки (если, конечно, для данной прямой и точек вообще существует такое положение прямого угла).

Расположив прямой угол одним из указанных способов, можно провести лучи, соответствующие его сторонам.

8.87. Проведите через данную точку A прямую, параллельную данной прямой l .

8.88. Дан отрезок AB . Постройте:

- а) середину отрезка AB ;
- б) отрезок AC , серединой которого является точка B .

8.89. Дан угол AOB . Постройте:

- а) угол, вдвое больший угла AOB ;
- б) угол, вдвое меньший угла AOB .

8.90*. Даны угол AOB и прямая l . Проведите прямую l_1 так, что угол между прямыми l и l_1 равен углу AOB .

8.91*. Даны отрезок AB , прямая l и точка O на ней. Постройте на прямой l такую точку X , что $OX = AB$.

8.92*. Дан отрезок OA , параллельный прямой l . Постройте точки, в которых окружность радиуса OA с центром O пересекает прямую l .

Задачи для самостоятельного решения

8.93. Постройте прямую, касающуюся двух данных окружностей (разберите все возможные случаи).

8.94. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые высота делит основание, и медиана, проведенная к боковой стороне.

8.95. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине A и серединам сторон BC и CD .

8.96. Постройте трапецию, боковые стороны которой лежат на данных прямых, диагонали пересекаются в данной точке, а одно из оснований имеет данную длину.

8.97. Даны две окружности. Проведите прямую так, чтобы она касалась одной окружности, а вторая окружность высекала на ней хорду данной длины.

8.98. Проведите через вершину C треугольника ABC прямую l так, чтобы площади треугольников AA_1C и BB_1C , где A_1 и B_1 — проекции точек A и B на прямую l , были равны.

8.99. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC , зная, что биссектриса AD , медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке.

8.100. Даны точки A_1, B_1 и C_1 , делящие стороны BC, CA и AB треугольника ABC в отношении $1 : 2$. Восстановите по ним треугольник ABC .

Решения

8.1. Построим отрезок BC длины a . Центр O описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения двух окружностей радиуса R с центрами в точках B и C . Выберем одну из этих точек пересечения и построим описанную окружность S треугольника ABC . Точка A является точкой пересечения окружности S и прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от нее на расстояние h_a (таких прямых две).

8.2. Построим точки A_1 и B_1 на сторонах BC и AC соответственно так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 3$ и $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Пусть точка X лежит внутри треугольника ABC . Ясно, что $S_{ABX} : S_{BCX} = 1 : 2$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на отрезке BB_1 , и $S_{ABX} : S_{ACX} = 1 : 3$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на отрезке AA_1 . Поэтому искомая точка M является точкой пересечения отрезков AA_1 и BB_1 .

8.3. Пусть O — центр данной окружности, AB — хорда, проходящая через точку P , M — середина AB . Тогда $|AP - BP| = 2PM$. Так как $\angle PMO = 90^\circ$, точка M лежит на окружности S с диаметром OP . Построим хорду PM окружности S так, что $PM = a/2$ (таких хорд две). Искомая хорда задается прямой PM .

8.4. Пусть R — радиус данной окружности, O — ее центр. Центр искомой окружности лежит на окружности S радиуса $|R \pm r|$ с центром O . С другой стороны, ее центр лежит на прямой l , параллельной данной прямой и удаленной от нее на расстояние r (таких прямых две). Любая точка пересечения окружности S и прямой l может служить центром искомой окружности.

8.5. Пусть R — радиус окружности S , O — ее центр. Если окружность S высекает на прямой, проходящей через точку A , хорду PQ и M — середина PQ , то $OM^2 = OQ^2 - MQ^2 = R^2 - d^2/4$. Поэтому искомая прямая касается окружности радиуса $\sqrt{R^2 - d^2/4}$ с центром O .

8.6. Возьмем на прямых AB и CD точки E и F так, чтобы прямые BF и CE имели заданные направления. Рассмотрим всевозможные параллелограммы $PQRS$ с заданными направлениями сторон, вершины P и R которых лежат на лучах BA и CD , а вершина Q — на стороне BC (рис. 8.1). Докажем, что геометрическим местом вершин S является отрезок EF . В самом деле, $\frac{SR}{EC} = \frac{PQ}{EC} = \frac{BQ}{BC} = \frac{FR}{FC}$, т. е. точка S лежит на отрезке EF . Обратное, если точка S' лежит на отрезке EF , то проведем $S'P' \parallel BF, P'Q' \parallel EC$ и $Q'R' \parallel BF$ (P', Q', R' — точки на прямых AB, BC, CD). Тогда $\frac{S'P'}{BF} = \frac{P'E}{BE} = \frac{Q'C}{BC} = \frac{Q'R'}{BF}$, т. е. $S'P' = Q'R'$ и $P'Q'R'S'$ — параллелограмм.

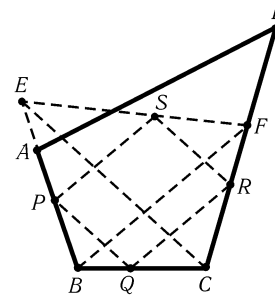


Рис. 8.1

Из этого вытекает следующее построение. Строим сначала точки E и F . Вершина S является точкой пересечения отрезков AD и EF . Дальнейшее построение очевидно.

8.7. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть A_1 и C_1 — середины сторон CB и AB . Так как $C_1A_1 \parallel AC$, то $\angle A_1C_1B = \angle A$. Из этого вытекает следующее построение. Построим сначала отрезок CB длиной a и его середину A_1 . Точка C_1 является точкой пересечения окружности радиуса m_c с центром C и дуг окружностей, из которых отрезок A_1B виден под углом A . Построив точку C_1 , отложим на луче BC_1 отрезок $BA = 2BC_1$. Тогда A — искомая вершина треугольника.

8.8. Предположим, что искомый треугольник построен и C — вершина его прямого угла. Так как $\angle ACB = 90^\circ$, точка C лежит на окружности S с диаметром AB . Поэтому точка C является точкой пересечения окружности S и данной окружности. Построив точку C и проведя прямые CA и CB , найдем оставшиеся вершины искомого треугольника.

8.9. Предположим, что прямоугольник $ABCD$ построен. Опустим из точки P

перпендикуляр PR на прямую BC . Точку R можно построить, так как она лежит на окружности с диаметром PQ и $PR = AB = a$. Построив точку R , строим прямые BC и AD и опускаем на них перпендикуляры из точек M и N .

8.10. Предположим, что треугольник ABC построен, AH — высота, AD — биссектриса, AM — медиана. Согласно задаче 2.68 точка D лежит между M и H . Точка E пересечения прямой AD и перпендикуляра, проведенного из точки M к стороне BC , лежит на описанной окружности треугольника ABC . Поэтому центр O описанной окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AE и перпендикуляра к стороне BC , проведенного через точку M .

Последовательность построений такова: на произвольной прямой (которая в дальнейшем окажется прямой BC) строим точку H , затем последовательно строим точки A, D, M, E, O . Искомые вершины B и C треугольника ABC являются точками пересечения исходной прямой с окружностью радиуса OA с центром O .

8.11. Предположим, что треугольник ABC построен и O — центр его вписанной окружности. Тогда $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$ (задача 5.3). Из точки O отрезок BC виден под углом $90^\circ + \angle A/2$, и она удалена на расстояние r от прямой BC , поэтому ее можно построить. Затем строим вписанную окружность и проводим к ней касательные из точек B и C .

8.12. Построим произвольный треугольник с углами A и B и найдем его периметр P_1 . Искомый треугольник подобен построенному треугольнику с коэффициентом P/P_1 .

8.13. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — его медианы, M — точка их пересечения, M' — точка, симметричная M относительно точки A_1 . Тогда $MM' = 2m_a/3, MC = 2m_c/3$ и $M'C = 2m_b/3$, поэтому треугольник $MM'C$ можно построить. Точка A симметрична M' относительно точки M , а точка B симметрична C относительно середины отрезка MM' .

8.14. Ясно, что $BC : AC : AB = \frac{S}{h_a} : \frac{S}{h_b} : \frac{S}{h_c} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. Возьмем произвольный отрезок $B'C'$ и построим треугольник $A'B'C'$ так, чтобы $B'C' : A'C' = h_b : h_a$ и $B'C' : A'B' = h_c : h_a$. Пусть h'_a — высота треугольника $A'B'C'$, опущенная из вершины A' . Искомый треугольник подобен треугольнику $A'B'C'$ с коэффициентом h_a/h'_a .

8.15. Возьмем на стороне AB произвольную точку K' , опустим из нее перпендикуляр $K'L'$ на сторону BC , а затем построим квадрат $K'L'M'N'$, лежащий внутри угла ABC . Пусть прямая BN' пересекает сторону AC в точке N . Ясно, что искомый квадрат является образом квадрата $K'L'M'N'$ при гомотетии с центром B и коэффициентом $BN : BN'$.

8.16. Предположим, что искомый треугольник ABC построен. Пусть Q — точка касания вписанной окружности со стороной BC , PQ — диаметр этой окружности, R — точка касания внеписанной окружности со стороной BC . Ясно, что $BR = (a+b+c)/2 - c = (a+b-c)/2$ и $BQ = (a+c-b)/2$. Поэтому $RQ = |BR - BQ| = |b - c|$. Вписанная окружность треугольника ABC и внеписанная окружность, касающаяся

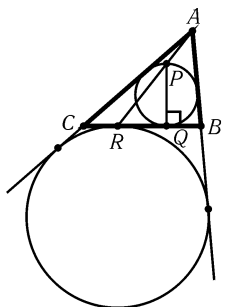


Рис. 8.2

сторону BC , гомотетичны с центром гомотетии A . Поэтому точка A лежит на прямой PR (рис. 8.2).

Из этого вытекает следующее построение. Строим прямоугольный треугольник PQR по известным катетам $PQ = 2r$ и $RQ = |b - c|$. Затем проводим две

прямые, параллельные прямой RQ и удаленные от нее на расстояние h_a . Вершина A является точкой пересечения одной из этих прямых с лучом RP . Так как длина диаметра PQ вписанной окружности известна, ее можно построить. Точки пересечения касательных к этой окружности, проведенных из точки A , с прямой RQ являются вершинами B и C треугольника.

8.17. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1 . Тогда $AM = 2m_a/3$ и $BM = 2m_b/3$. Треугольник ABM можно построить по длинам сторон $AB = c$, AM и BM . Затем на лучах AM и BM откладываем отрезки $AA_1 = m_a$ и $BB_1 = m_b$. Вершина C является точкой пересечения прямых AB_1 и A_1B .

8.18. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть H — основание высоты, опущенной из вершины A . Прямоугольный треугольник ACH можно построить по гипотенузе $AC = b$ и катету $AH = h_a$. Затем на прямой CH строим точку B так, что $CB = a$.

8.19. Предположим, что треугольник ABC построен. Опустим из середины A_1 стороны BC перпендикуляры A_1B' и A_1C' на прямые AC и AB соответственно. Ясно, что $AA_1 = m_a$, $A_1B' = h_b/2$ и $A_1C' = h_c/2$. Из этого вытекает следующее построение. Строим отрезок AA_1 длиной m_a . Затем строим прямоугольные треугольники AA_1B' и AA_1C' по известным катетам и гипотенузе так, чтобы они лежали по разные стороны от прямой AA_1 . Остается построить точки B и C на сторонах AC' и AB' угла $C'AB'$ так, чтобы отрезок BC делился точкой A_1 пополам. Для этого отложим на луче AA_1 отрезок $AD = 2AA_1$, а затем проведем через точку D прямые, параллельные сторонам угла $C'AB'$. Точки пересечения этих прямых со сторонами угла $C'AB'$ являются вершинами искомого треугольника (рис. 8.3).

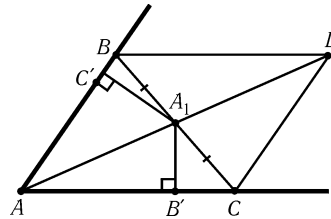


Рис. 8.3

8.20. Построим угол $B'AC'$, равный $\angle A$. Точка B строится как пересечение луча AB' и прямой, параллельной лучу AC' и удаленной от него на расстояние h_b . Аналогично строится точка C .

8.21. Предположим, что треугольник ABC построен. Опустим из точки B высоту BH и проведем медиану BB_1 . В прямоугольных треугольниках CBH и B_1BH известны катет BH и гипотенузы CB и BB_1 , поэтому их можно построить. Затем на луче CB_1 откладываем отрезок $CA = 2CB_1$. Задача имеет два решения, так как треугольники CBH и B_1BH можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой BH .

8.22. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть M — середина отрезка BC . Опустим из точки A высоту AH , а из точки M — перпендикуляр MD на сторону AC . Ясно, что $MD = h_b/2$. Поэтому треугольники AMD и AMH можно построить. Вершина C является точкой пересечения прямых AD и MH . На луче CM откладываем отрезок $CB = 2CM$. Задача имеет два решения, так как треугольники AMD и AMH можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой AM .

8.23. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. В треугольнике CC_1B_1 известны все стороны: $CC_1 = m_c$, $C_1B_1 = a/2$ и $CB_1 = b/2$, поэтому его можно построить. Точка A симметрична C относительно точки B_1 , а точка B симметрична A относительно точки C_1 .

8.24. Предположим, что треугольник ABC построен, AM — его медиана, AH — высота. Пусть точка A' симметрична A относительно точки M .

Построим отрезок $AA' = 2m_a$. Пусть M — его середина. Построим прямоугольный треугольник AMH с гипотенузой AM и катетом $AH = h_a$. Точка C лежит на дуге окружности, из которой отрезок AA' виден под углом $180^\circ - \angle A$, так как $\angle ACA' = 180^\circ - \angle CAB$. Поэтому точка C является точкой пересечения этой дуги и прямой MH . Точка B симметрична C относительно точки M .

8.25. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть CD — его биссектриса. Проведем прямую MD , параллельную стороне BC (точка M лежит на стороне AC). Треугольник CMD равнобедренный, так как $\angle MCD = \angle DCB = \angle MDC$. Поскольку $MC : AM = DB : AD = CB : AC = a : b$ и $AM + MC = b$, то $MC = ab/(a + b)$. Строим равнобедренный треугольник CMD по основанию $CD = l_c$ и боковым сторонам $MD = MC = ab/(a + b)$. Затем на луче CM откладываем отрезок $CA = b$, а на луче, симметричном лучу CM относительно прямой CD , откладываем отрезок $CB = a$.

8.26. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть S_1 — вневписанная окружность, касающаяся стороны BC . Обозначим точки касания окружности S_1 с продолжениями сторон AB и AC через K и L , а точку касания S_1 со стороной BC обозначим через M . Так как $AK = AL$, $AL = AC + CM$ и $AK = AB + BM$, то $AK = AL = p$. Пусть S_2 — окружность радиуса h_a с центром A . Прямая BC является общей внутренней касательной к окружностям S_1 и S_2 .

Из этого вытекает следующее построение. Строим угол KAL , равный по величине углу A , так, что $KA = LA = p$. Строим окружность S_1 , касающуюся сторон угла KAL в точках K и L , и окружность S_2 радиуса h_a с центром в точке A . Затем проводим общую внутреннюю касательную к окружностям S_1 и S_2 . Точки пересечения этой касательной со сторонами угла KAL являются вершинами B и C искомого треугольника.

8.27. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности S с диаметром AB . Центр O этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде A_1B_1 . Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим точку O , являющуюся точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1 и прямой l . Затем строим окружность радиуса $OA_1 = OB_1$ с центром O . Вершины A и B являются точками пересечения окружности S с прямой l . Вершина C является точкой пересечения прямой AB_1 и прямой BA_1 .

8.28. Пусть $AB = BC$ и A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC . Тогда $\angle A_1C_1C = \angle C_1CA = \angle C_1CA_1$, т. е. треугольник CA_1C_1 равнобедренный и $A_1C = A_1C_1$.

Из этого вытекает следующее построение. Через точку B_1 проводим прямую l , параллельную A_1C_1 . На прямой l строим точку C так, что $CA_1 = C_1A_1$ и $\angle C_1A_1C > 90^\circ$. Точка A симметрична точке C относительно точки B_1 , а вершина B является точкой пересечения прямых AC_1 и A_1C .

8.29. а) Согласно задаче 2.19, а) точки A, B и C являются точками пересечения продолжений высот треугольника $A'B'C'$ с его описанной окружностью.

б) Согласно задаче 2.19, б) точки A, B и C являются точками пересечения продолжений биссектрис углов треугольника $A'B'C'$ с его описанной окружностью.

8.30. Обозначим середины сторон BC, CA, AB треугольника через A_1, B_1, C_1 соответственно. Поскольку $BC \parallel B_1C_1 \parallel B'C'$ и $OA_1 \perp BC$, то $OA_1 \perp B'C'$. Аналогично $OB_1 \perp A'C'$ и $OC_1 \perp A'B'$, т. е. O — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Построив точку O , проводим серединные перпендикуляры

к отрезкам OA' , OB' , OC' . Эти прямые образуют треугольник ABC .

8.31. Согласно задаче 5.10 наша задача совпадает с задачей 8.29, б).

8.32. Пусть O — центр описанной окружности, M — середина стороны AB , H — основание высоты, опущенной из точки C . Точка Q является серединой дуги AB , поэтому $OQ \perp AB$. Из этого вытекает следующее построение. Сначала по трем данным точкам строим описанную окружность S треугольника PQR . Точка C является точкой пересечения прямой, проведенной через точку P параллельно OQ , и окружности S . Точка M является точкой пересечения прямой OQ и прямой RC . Прямая AB проходит через точку M и перпендикулярна OQ .

8.33. Согласно задаче 5.2 точки A , B и C являются основаниями высот треугольника $A_1B_1C_1$.

8.34. Пусть H_1 — точка пересечения высот треугольника ABC . Согласно задаче 5.116 $OM : MH_1 = 1 : 2$ и точка M лежит на отрезке OH_1 . Поэтому можно построить точку H_1 . Затем проводим прямую H_1N и восставляем к этой прямой в точке N перпендикуляр l . Опустив из точки O перпендикуляр на прямую l , получаем точку C_1 (середину отрезка AB). На луче C_1M строим точку C так, что $CC_1 : MC_1 = 3 : 1$. Точки A и B являются точками пересечения прямой l с окружностью радиуса CO с центром O .

8.35. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей, I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB . Описанная окружность треугольника ABC делит отрезок II_c пополам (задача 5.120, б), а отрезок II_c делит пополам дугу AB . Ясно также, что точки A и B лежат на окружности с диаметром II_c . Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность S с диаметром II_c и окружность S_1 с центром O и радиусом OD , где D — середина отрезка II_c . Окружности S и S_1 пересекаются в точках A и B . Теперь можно построить вписанную окружность треугольника ABC и провести к ней касательные в точках A и B .

8.36. Предположим, что мы построили точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$. Проведем $YY_1 \parallel AB$ и $Y_1C_1 \parallel BC$ (точки Y_1 и C_1 лежат на сторонах AC и AB). Тогда $Y_1Y = AX = BY$, т. е. BY_1C — ромб и BY_1 — биссектриса угла B .

Из этого вытекает следующее построение. Проводим биссектрису BY_1 , затем прямую Y_1Y , параллельную стороне AB (Y лежит на BC). Точка X теперь строится очевидным образом.

8.37. Пусть для определенности $a < b$. Предположим, что треугольник ABC построен. Возьмем на стороне AC точку D так, что $\angle ABD = \angle BAC$. Тогда $\angle BDC = 2\angle BAC$ и $\angle CBD = 3\angle BAC - \angle BAC = 2\angle BAC$, т. е. $CD = CB = a$. В треугольнике BCD известны все стороны: $CD = CB = a$ и $DB = AD = b - a$. Построив треугольник BCD , проводим луч BA , не пересекающий сторону CD , так, что $\angle DBA = \angle DBC/2$. Искомая вершина A является точкой пересечения прямой CD и этого луча.

8.38. Пусть точка B' лежит на прямой l , проходящей через точку B параллельно AC . Стороны треугольников ABC и $AB'C$ высекают на прямой, параллельной AC , равные отрезки. Поэтому прямоугольники $P'R'Q'S'$ и $PRQS$, вписанные в треугольники ABC и $AB'C$ соответственно, равны, если точки R , Q , R' и Q' лежат на одной прямой.

Возьмем точку B' на прямой l так, что $\angle B'AC = 90^\circ$. В треугольник $AB'C$ прямоугольник $P'R'Q'S'$ с данной диагональю $P'Q'$ вписывается очевидным образом ($P' = A$). Проведем прямую $R'Q'$, находим вершины R и Q искомого

прямоугольника.

8.39. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть K и L — точки, в которых вневписанная окружность, касающаяся стороны BC , касается продолжений сторон AB и AC соответственно. Так как $AK = AL = p$, то эту вневписанную окружность можно построить; остается провести к построенной окружности касательную через данную точку M .

8.40. Пусть продолжение биссектрисы CD пересекает описанную окружность треугольника ABC (с прямым углом C) в точке P , PQ — диаметр описанной окружности, O — ее центр. Тогда $PD : PO = PQ : PC$, т. е. $PD \cdot PC = 2R^2 = m_c^2$. Поэтому, проведя к окружности с диаметром CD касательную длиной $\sqrt{2}m_c$, легко построить отрезок длиной PC . Теперь в треугольнике OPC известны длины всех сторон.

8.41. Построим точку K на стороне AC так, что $AK = BC - AB$. Пусть точка D лежит на отрезке AC . Равенство $AD + BD + AB = BC$ эквивалентно равенству $AD + BD = AK$. Для точки D , лежащей на отрезке AK , последнее равенство переписывается в виде $AD + BD = AD + DK$, а для точки D , не лежащей на отрезке AK , — в виде $AD + BD = AD - DK$. В первом случае $BD = DK$, а второй случай невозможен. Поэтому точка D является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BK и отрезка AC .

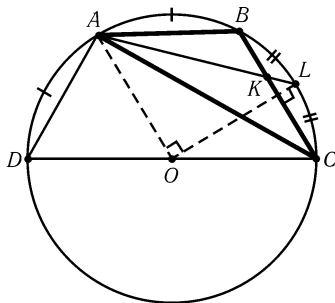


Рис. 8.4

8.42. Предположим, что треугольник ABC построен. Проведем диаметр CD описанной окружности. Пусть O — центр описанной окружности, L — точка пересечения продолжения биссектрисы AK с описанной окружностью (рис. 8.4). Так как $\angle ABC - \angle ACB = 90^\circ$, то $\angle ABD = \angle ACB$; поэтому $\sphericalangle DA = \sphericalangle AB$. Ясно также, что $\sphericalangle BL = \sphericalangle LC$. Следовательно, $\angle AOL = 90^\circ$.

Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность S с центром O и данным радиусом. На окружности S выбираем произвольную точку A . Строим точку L на окружности S так, что $\angle AOL = 90^\circ$. На отрезке AL строим отрезок AK , равный данной биссектрисе. Через точку K проводим прямую l , перпендикулярную OL . Точки пересечения прямой l с окружностью S являются вершинами B и C искомого треугольника ABC .

8.43. Возьмем на сторонах BC и AC такие точки A_1 и B_1 , что $PA_1 \parallel AC$ и $PB_1 \parallel BC$. Затем отложим на лучах A_1B и B_1A отрезки $A_1B_2 = AB_1$ и $B_1A_2 = BA_1$. Докажем, что прямая A_2B_2 искомая. В самом деле, пусть $k = AP/AB$. Тогда

$$\frac{B_1A_2}{B_1P} = \frac{(1-k)a}{ka} = \frac{(1-k)a + (1-k)b}{ka + kb} = \frac{CA_2}{CB_2},$$

т. е. $\triangle A_2B_1P \sim \triangle A_2CB_2$ и прямая A_2B_2 проходит через точку P . Кроме того, $AA_2 = |(1-k)a - kb| = BB_2$.

8.44. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть B_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AC . В прямоугольном треугольнике AOB_1 известны катет $OB_1 = r$ и гипотенуза AO , поэтому можно построить угол OAB_1 , а значит, и угол BAC . Пусть O_1 — центр описанной окружности треугольника ABC , M — середина стороны BC . В прямоугольном треугольнике BO_1M известны катет $O_1M = AH/2$ (см. решение задачи 5.116) и угол BO_1M

(он равен $\angle A$ или $180^\circ - \angle A$), поэтому его можно построить. Затем можно определить длину отрезка $OO_1 = \sqrt{R(R-2r)}$ (см. задачу 5.12, а)). Итак, можно построить отрезки длиной R и $OO_1 = d$.

После этого возьмем отрезок AO и построим точку O_1 , для которой $AO_1 = R$ и $OO_1 = d$ (таких точек может быть две). Проведем из точки A касательные к окружности радиуса r с центром O . Искомые точки B и C лежат на этих касательных, удалены от точки O_1 на расстояние R и, разумеется, отличны от точки A .

8.45. Пусть расстояние между данными параллельными прямыми равно a . Нужно провести через точки A и B параллельные прямые так, чтобы расстояние между ними было равно a . Для этого построим окружность на отрезке AB как на диаметре и найдем точки C_1 и C_2 пересечения этой окружности с окружностью радиуса a с центром B . Сторона искомого ромба лежит на прямой AC_1 (второе решение — на прямой AC_2). Затем через точку B проводим прямую, параллельную AC_1 (соответственно AC_2).

8.46. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Обозначим середины сторон AB, BC, CD и DA через P, Q, R и S соответственно и середины диагоналей AC и BD через K и L . В треугольнике KSL известны $KS = CD/2, LS = AB/2$ и угол KSL , равный углу между сторонами AB и CD . Построив треугольник KSL , можно построить треугольник KRL , так как известны длины всех его сторон. После этого достраиваем треугольники KSL и KRL до параллелограммов $KSLQ$ и $KRLP$. Вершины A, B, C, D являются вершинами параллелограммов $PLSA, QKPB, RLQC, SKRD$ (рис. 8.5).

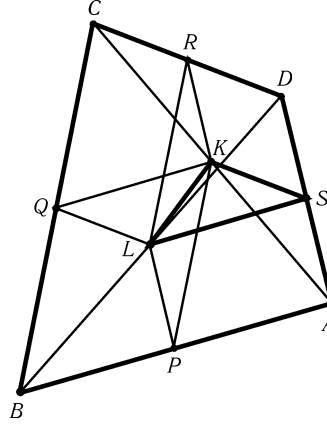


Рис. 8.5

8.47. Опустим из вершин B и D перпендикуляры BB_1 и DD_1 на диагональ AC . Пусть для определенности $DD_1 > BB_1$. Построим отрезок длины $a = DD_1 - BB_1$ и проведем прямую, параллельную прямой AC , удаленную от AC на расстояние a и пересекающую сторону CD в некоторой точке E . Ясно, что $S_{AED} = (ED/CD)S_{ACD} = (BB_1/DD_1)S_{ACD} = S_{ABC}$. Поэтому медиана треугольника AEC лежит на искомой прямой.

8.48. Пусть P, Q, R — середины равных сторон AB, BC, CD четырехугольника $ABCD$. Проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR . Поскольку $AB = BC = CD$, точки B и C лежат на прямых l_1 и l_2 и $BQ = QC$.

Из этого вытекает следующее построение. Проводим серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR . Затем через точку Q проводим отрезок с концами на прямых l_1 и l_2 так, чтобы Q была его серединой (см. задачу 16.15).

8.49. Пусть даны вершины A, B и C вписанного и описанного четырехугольника $ABCD$, причем $AB \geq BC$. Тогда $AD - CD = AB - BC \geq 0$, поэтому на стороне AD можно отложить отрезок DC_1 , равный DC . В треугольнике AC_1C известны длины сторон AC и $AC_1 = AB - BC$ и $\angle AC_1C = 90^\circ + \angle D/2 = 180^\circ - \angle B/2$. Так как угол AC_1C тупой, треугольник AC_1C по этим элементам строится однозначно. Дальнейшее построение очевидно.

8.50. Пусть $ABCD$ — описанная равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC , причем $AD > BC$; C_1 — проекция точки C на прямую AD . Докажем,

что $AB = AC_1$. В самом деле, если P и Q — точки касания сторон AB и AD с вписанной окружностью, то $AB = AP + PB = AQ + BC/2 = AQ + QC_1 = AC_1$.

Из этого вытекает следующее построение. Пусть C_1 — проекция точки C на основание AD . Тогда B — точка пересечения прямой BC и окружности радиуса AC_1 с центром A . Трапеция с $AD < BC$ строится аналогично.

8.51. Обозначим середины оснований AD и BC через L и N , а середину отрезка EF через M . Точки L, O, N лежат на одной прямой (задача 19.2). Ясно, что точка M также лежит на этой прямой. Из этого вытекает следующее построение. Проведем через точку K прямую l , перпендикулярную прямой OK . Основание AD лежит на прямой l . Точка L является точкой пересечения прямой l и прямой OM . Точка N симметрична точке L относительно точки M . Через точку O проведем прямые, параллельные прямым EN и FN . Точки пересечения этих прямых с прямой l являются вершинами A и D трапеции. Вершины B и C симметричны вершинам A и D относительно точек E и F соответственно.

8.52. Предположим, что мы построили четырехугольник $ABCD$ с данными длинами сторон и данной средней линией KP (K и P — середины сторон AB и CD). Пусть A_1 и B_1 — точки, симметричные точкам A и B относительно точки P . Треугольник A_1BC можно построить, так как в нем известны стороны $BC, CA_1 = AD$ и $BA_1 = 2KP$. Достроим треугольник A_1BC до параллелограмма A_1EBC . Теперь можно построить точку D , так как известны CD и $ED = BA$. Воспользовавшись тем, что $\overline{DA} = \overline{A_1C}$, построим точку A .

8.53. Используя формулы задач 6.37 и 6.38, легко выразить диагонали вписанного четырехугольника через его стороны. Полученные формулы можно использовать для построения диагоналей (для удобства следует ввести произвольный отрезок e в качестве отрезка единичной длины и строить отрезки длиной $pq, p/q$ и \sqrt{p} как $pq/e, pe/q$ и \sqrt{pe}).

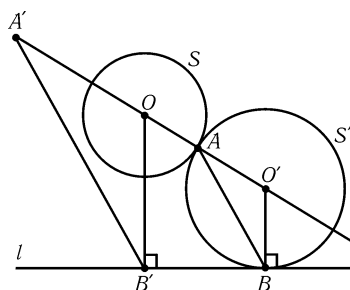


Рис. 8.6

8.54. Окружность высекает на сторонах угла равные отрезки тогда и только тогда, когда ее центр лежит на биссектрисе угла. Поэтому центром искомой окружности является точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и биссектрисы данного угла.

8.55. Предположим, что мы построили окружность S' , касающуюся данной окружности S в точке A и данной прямой l в некоторой точке B . Пусть O и O' — центры окружностей S и S' соответственно (рис. 8.6). Ясно, что точки O, O' и A лежат на одной прямой и $O'B = O'A$. Поэтому нужно построить точку O' на прямой OA так, чтобы $O'A = O'B$, где B —

основание перпендикуляра, опущенного из точки O' на прямую l . Для этого опустим перпендикуляр OB' на прямую l . Затем отложим на прямой AO отрезок OA' длины OB' . Через точку A проведем прямую AB , параллельную $A'B'$ (точка B лежит на прямой l). Точка O' является точкой пересечения прямой OA и перпендикуляра к прямой l , проведенного через точку B .

8.56. а) Пусть l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB , C — точка пересечения прямых l_1 и l , а l' — прямая, симметричная l относительно прямой l_1 . Задача сводится к тому, чтобы построить окружность, проходящую через точку A и касающуюся прямых l и l' (см. задачу 19.16).

б) Можно считать, что центр окружности S не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB (иначе построение очевидно). Возьмем произвольную точку C окружности S и построим описанную окружность треугольника ABC ; она пересекает S в некоторой точке D . Пусть M — точка пересечения прямых AB и CD . Проведем к окружности S касательные MP и MQ . Тогда описанные окружности треугольников ABP и ABQ искомые, так как $MP^2 = MQ^2 = MA \cdot MB$.

8.57. Предположим, что мы построили окружности S_1, S_2 и S_3 , попарно касающиеся в данных точках: S_1 и S_2 касаются в точке C ; S_1 и S_3 — в точке B ; S_2 и S_3 — в точке A . Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3 . Тогда точки A, B и C лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$, причем $O_1B = O_1C, O_2C = O_2A$ и $O_3A = O_3B$. Поэтому точки A, B и C являются точками касания вписанной или внеписанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ со сторонами.

Из этого вытекает следующее построение. Строим описанную окружность треугольника ABC и проводим к ней касательные в точках A, B и C . Точки пересечения этих касательных являются центрами искомых окружностей.

8.58. Предположим, что мы построили окружность S , касательные AA_1, BB_1 и CC_1 к которой имеют длины a, b и c соответственно (A_1, B_1 и C_1 — точки касания). Построим окружности S_a, S_b и S_c с центрами A, B и C и радиусами a, b и c соответственно (рис. 8.7). Если O — центр окружности S , то отрезки OA_1, OB_1 и OC_1 являются как радиусами окружности S , так и касательными к окружностям S_a, S_b и S_c . Поэтому точка O является радикальным центром окружностей S_a, S_b и S_c (см. § 10 гл. 3).

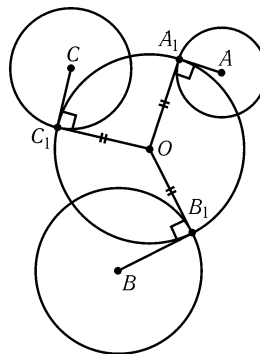


Рис. 8.7

Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим окружности S_a, S_b и S_c . Затем строим их радикальный центр O . Искомая окружность является окружностью с центром O и радиусом, равным по длине касательной, проведенной из точки O к окружности S_a .

8.59. Построим сначала отрезок BC длиной a . Затем построим ГМТ X , для которых $CX : BX = b : c$ (см. задачу 7.14). В качестве вершины A можно взять любую из точек пересечения этого ГМТ с прямой, удаленной от прямой BC на расстояние h_a .

8.60. По длинам отрезков AD' и BD можно построить отрезок AB и точку D на этом отрезке. Точка C является точкой пересечения окружности радиуса CD с центром D и ГМТ X , для которых $AX : BX = AD : BD$.

8.61. Пусть X — точка, не лежащая на прямой AB . Ясно, что $\angle AXB = \angle BCX$ тогда и только тогда, когда $AX : CX = AB : CB$. Поэтому точка M является точкой пересечения ГМТ X , для которых $AX : CX = AB : CB$, и ГМТ Y , для которых $BY : DY = BC : DC$ (эти ГМТ могут не пересекаться).

8.62. Нужно построить точку O , для которой $AO : A'O = AB : A'B'$ и $BO : B'O = AB : A'B'$. Точка O является точкой пересечения ГМТ X , для которых $AX : A'X = AB : A'B'$, и ГМТ Y , для которых $BY : B'Y = AB : A'B'$.

8.63. Пусть O — центр данной окружности. Хорды XP и XQ , проходящие через точки A и B , равны, тогда и только тогда, когда XO — биссектриса угла PXQ , т. е. $AX : BX = AO : BO$. Искомая точка X является точкой пересечения соответствующей окружности Аполлония с данной окружностью.

8.64. а) Если прямая l не пересекает отрезок AB , то ABB_1A_1 — параллелограмм и $l \parallel AB$. Если прямая l пересекает отрезок AB , то AA_1BB_1 — параллелограмм и l проходит через середину отрезка AB .

б) Одна из искомым прямых параллельна прямой AB , а другая проходит через середину AB .

8.65. Построим окружность радиуса 1 и проведем в ней два перпендикулярных диаметра AB и CD . Пусть O — центр окружности, M — середина отрезка OC , P — точка пересечения прямой AM и окружности с диаметром OC (рис. 8.8). Тогда $AM^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, а значит, $AP = AM - PM = (\sqrt{5} - 1)/2 = 2 \sin 18^\circ$ (см. задачу 5.48), т. е. AP — длина стороны правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность.

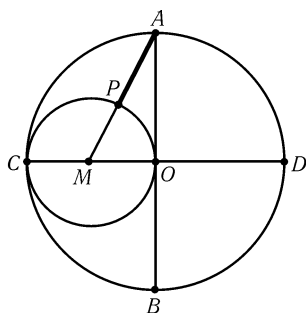


Рис. 8.8

8.66. Предположим, что мы построили прямоугольник $PQRS$ так, что данные точки A, B, C, D лежат на сторонах PQ, QR, RS, SP соответственно и $PQ : QR = a$, где a — данное отношение сторон. Пусть F — точка пересечения прямой, проведенной через точку D перпендикулярно к прямой AC , и прямой QR . Тогда $DF : AC = a$.

Из этого вытекает следующее построение. Из точки D проводим луч, пересекающий отрезок AC под прямым углом, и на этом луче строим точку F так, что $DF = a \cdot AC$. Сторона QR лежит на прямой BF . Дальнейшее построение очевидно.

8.67. Предположим, что точки X и Y , обладающие требуемыми свойствами, построены. Обозначим точку пересечения прямых AX и YC через M , а точку пересечения прямых AB и XY через K . Прямоугольные треугольники AXK и YXM имеют общий острый угол X , поэтому $\angle XAK = \angle XYM$. Углы XAB и XYB опираются на одну дугу, поэтому $\angle XAB = \angle XYB$. Следовательно, $\angle XYM = \angle XYB$. Так как $XY \perp AB$, то A — середина отрезка CB .

Обратно, если K — середина отрезка CB , то $\angle MYX = \angle BYX = \angle XAB$. Треугольники AXK и YXM имеют общий угол X и $\angle XAK = \angle XYM$, поэтому $\angle YMX = \angle AKX = 90^\circ$.

Из этого вытекает следующее построение. Через середину K отрезка CB проводим прямую l , перпендикулярную прямой AB . Точки X и Y являются точками пересечения прямой l с данной окружностью.

8.68. Если есть угол величиной α , то можно построить углы величиной $2\alpha, 3\alpha$ и т. д. Так как $19 \cdot 19^\circ = 361$, то можно построить угол 361° , совпадающий с углом 1° .

8.69. Построим сначала угол 36° (см. задачу 8.65). Затем можно построить угол $(36^\circ - 30^\circ)/2 = 3^\circ$. Если n не делится на 3, то, имея углы n° и 3° , можно построить угол 1° . В самом деле, если $n = 3k + 1$, то $1^\circ = n^\circ - k \cdot 3^\circ$, а если $n = 3k + 2$, то $1^\circ = 2n^\circ - (2k + 1) \cdot 3^\circ$.

8.70. Последовательность построений такова. Выберем на клочке бумаги произвольную точку O и произведем гомотетию с центром O и достаточно малым коэффициентом k так, чтобы образ точки пересечения данных прямых при этой гомотетии оказался на клочке бумаги. Тогда можно построить биссектрису угла между образами прямых. Затем произведем гомотетию с прежним центром и коэффициентом $1/k$ и получим искомый отрезок биссектрисы.

8.71. Построим с помощью двусторонней линейки две параллельные хорды AB и CD . Пусть P и Q — точки пересечения прямых AC и BD , AD и BC . Тогда прямая PQ проходит через центр данной окружности. Построив аналогично еще одну такую прямую, найдем центр окружности.

8.72. Проведем через точку A два луча p и q , образующие угол маленькой величины, содержащий точку B (лучи можно построить, переставляя линейку). Через точку B проведем отрезки PQ_1 и P_1Q (рис. 8.9). Если $PQ < 10$ см и $P_1Q_1 < 10$ см, то можно построить точку O , в которой пересекаются прямые PQ и P_1Q_1 . Проведем через точку O прямую P_2Q_2 . Если $PQ_2 < 10$ см и $P_2Q < 10$ см, то можно построить точку B' , в которой пересекаются прямые PQ_2 и P_2Q . Если $BB' < 10$ см, то можно построить прямую BB' , а эта прямая проходит через точку A (см. задачу 5.73).

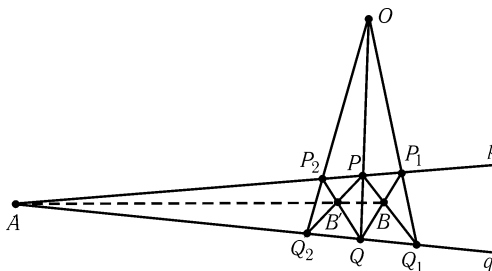


Рис. 8.9

8.73. Построение будет основано на том факте, что если A и B — точки пересечения равных окружностей с центрами P и Q , то $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BQ}$. Пусть S_1 — исходная окружность, A_1 — данная точка. Через точку A_1 проведем окружность S_2 , через точку A_2 пересечения окружностей S_1 и S_2 — окружность S_3 , через точку A_3 пересечения окружностей S_2 и S_3 — окружность S_4 , наконец, через точки B_1 и A_4 пересечения окружностей S_1 и S_3 с окружностью S_4 — окружность S_5 . Докажем, что точка B_2 пересечения окружностей S_5 и S_1 искомая. Пусть O_i — центр окружности S_i . Тогда $\overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{O_2A_2} = \overrightarrow{A_3O_3} = \overrightarrow{O_4A_4} = \overrightarrow{B_1O_5} = \overrightarrow{O_1B_2}$.

З а м е ч а н и е. Точек пересечения окружностей S_1 и S_2 две; в качестве точки B_1 можно выбирать любую из них.

8.74. Пусть AB — данный отрезок, P — произвольная точка, не лежащая на данных прямых. Построим точки C и D пересечения второй из данных прямых с прямыми PA и PB соответственно и точку Q пересечения прямых AD и BC . Согласно задаче 19.2 прямая PQ проходит через середину отрезка AB .

8.75. Пусть AB — данный отрезок, а C и D — произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить точку M — середину отрезка CD . Пусть P — точка пересечения прямых AM и BD , E — точка пересечения прямых PC и AB . Докажем, что EB — искомый отрезок. Поскольку $\triangle PMC \sim \triangle PAE$ и $\triangle PMD \sim \triangle PAB$, то

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AP} : \frac{AE}{AP} = \frac{MD}{MP} : \frac{MC}{MP} = \frac{MD}{MC} = 1.$$

8.76. Пусть AB — данный отрезок, а C и D — произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить такие точки $D_1 = D, D_2, \dots, D_n$, что все отрезки D_iD_{i+1} равны отрезку CD . Пусть P — точка пересечения прямых AC и BD_n , а B_1, \dots, B_{n-1} — точки пересечения прямой AB с прямыми PD_1, \dots, PD_{n-1} соответственно. Ясно, что точки B_1, \dots, B_{n-1} делят отрезок AB на n равных частей.

8.77. Возьмем на одной из данных прямых отрезок AB и построим его середину M (см. задачу 8.74). Пусть A_1 и M_1 — точки пересечения прямых PA

и PM со второй данной прямой, Q — точка пересечения прямых BM_1 и MA_1 . Легко проверить, что прямая PQ параллельна данным прямым.

8.78. В случае, когда точка P не лежит на прямой AB , можно воспользоваться решением задачи 3.36. Если же точка P лежит на прямой AB , то мы можем сначала опустить перпендикуляры l_1 и l_2 из каких-нибудь других точек, а затем согласно задаче 8.77 провести через точку P прямую, параллельную прямым l_1 и l_2 .

8.79. а) Пусть A — данная точка, l — данная прямая. Рассмотрим сначала случай, когда точка O не лежит на прямой l . Проведем через точку O две произвольные прямые, пересекающие прямую l в точках B и C . Согласно задаче 8.78 в треугольнике OBC можно опустить высоты на стороны OB и OC . Пусть H — точка их пересечения. Тогда можно провести прямую OH , которая перпендикулярна l . Согласно задаче 8.78 можно опустить перпендикуляр из точки A на OH . Это и есть искомая прямая, проходящая через A и параллельная l . Чтобы из A опустить перпендикуляр на l , нужно восставить из O перпендикуляр l' к OH , а затем из A опустить перпендикуляр на l' . В случае, когда точка O лежит на прямой l , согласно задаче 8.78 можно сразу опустить из точки A перпендикуляр l' на прямую l , а затем из той же точки A восставить перпендикуляр к прямой l' .

б) Пусть l — данная прямая, A — лежащая на ней данная точка и BC — данный отрезок. Проведем через точку O прямые OD и OE , параллельные прямым l и BC соответственно (D и E — точки пересечения этих прямых с окружностью S). Через точку C проведем прямую, параллельную OB , до пересечения с прямой OE в точке F , через F — прямую, параллельную ED , до пересечения с OD в точке G и, наконец, через G — прямую, параллельную OA , до пересечения с l в точке H . Тогда $AH = OG = OF = BC$, т. е. AH — требуемый отрезок.

в) Возьмем две произвольные прямые, пересекающиеся в точке P . Отложим на одной из них отрезок $PA = a$, а на другой — отрезки $PB = b$ и $PC = c$. Пусть D — точка пересечения прямой PA с прямой, проходящей через B и параллельной AC . Ясно, что $PD = ab/c$.

г) Пусть H — гомотетия (или параллельный перенос), переводящая окружность с центром A и радиусом r в окружность S (т. е. в заданную окружность с отмеченным центром O). Так как радиусы обеих окружностей известны, можно построить образ любой точки X при отображении H . Для этого нужно через точку O провести прямую, параллельную прямой AX , и отложить на ней отрезок, равный $r_S \cdot AX/r$, где r_S — радиус окружности S . Аналогично строится образ любой точки при отображении H^{-1} . Поэтому можно построить прямую $l' = H(l)$ и найти точки ее пересечения с окружностью S , а затем построить образы этих точек при отображении H^{-1} .

д) Пусть A и B — центры данных окружностей, C — одна из точек, которые нужно построить, CH — высота треугольника ABC . Записав теорему Пифагора для треугольников ACH и BCH , получим, что $AH = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$. Величины a, b и c известны, поэтому можно построить точку H и точки пересечения прямой CH с одной из данных окружностей.

8.80. а) Проведем прямые, параллельные прямым OA и OB , удаленные от последних на расстояние a и пересекающие стороны угла. Точка пересечения этих прямых лежит на искомой биссектрисе.

б) Проведем прямую, параллельную OB , удаленную от последней на расстояние a и пересекающую луч OA в некоторой точке M . Через точки O и M проведем другую пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a ; прямая, проходящая через точку O , содержит искомую сторону угла.

8.81. Проведем через точку A произвольную прямую, а затем проведем прямые l_1 и l_2 , параллельные ей и удаленные от нее на расстояние a ; эти прямые пересекают прямую l в точках M_1 и M_2 . Через точки A и M_1 проведем еще одну пару параллельных прямых l_a и l_m , расстояние между которыми равно a . Точка пересечения прямых l_2 и l_m лежит на искомом перпендикуляре.

8.82. Проведем прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние a . Теперь можно воспользоваться результатами задач 8.77 и 8.74.

8.83. Проведем через точку P прямые $PA_1 \parallel OA$ и $PB_1 \parallel OB$. Пусть прямая PM делит пополам угол между прямыми l и PA_1 . При симметрии относительно прямой PM прямая PA_1 переходит в прямую l , поэтому прямая PB_1 при этой симметрии переходит в одну из искоемых прямых.

8.84. Достроим треугольник ABM до параллелограмма $ABMN$. Проведем через точку N прямые, параллельные биссектрисам углов между прямыми l и MN . Точки пересечения этих прямых с прямой l искомы.

8.85. Проведем прямую l_1 , параллельную прямой OA и удаленную от нее на расстояние a . Возьмем на прямой l произвольную точку B . Пусть B_1 — точка пересечения прямых OB и l_1 . Проведем через точку B_1 прямую, параллельную AB ; эта прямая пересекает прямую OA в точке A_1 . Проведем теперь через точки O и A_1 пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно a (таких пар прямых может быть две); пусть X и X_1 — точки пересечения прямой, проходящей через точку O , с прямыми l и l_1 . Так как $OA_1 = OX_1$ и $\triangle OA_1X_1 \sim \triangle OAX$, точка X искомая.

8.86. Восставим в точках O_1 и O_2 перпендикуляры к прямой O_1O_2 и отложим на них отрезки $O_1B_1 = O_2A_2$ и $O_2B_2 = O_1A_1$. Построим середину M отрезка B_1B_2 и в точке M восставим перпендикуляр к B_1B_2 . Этот перпендикуляр пересечет прямую O_1O_2 в точке N . Тогда $O_1N^2 + O_1B_1^2 = O_2N^2 + O_2B_2^2$, а значит, $O_1N^2 - O_1A_1^2 = O_2N^2 - O_2A_2^2$, т. е. точка N лежит на радикальной оси. Остается восставить перпендикуляр к O_1O_2 в точке N .

8.87. Построим сначала произвольную прямую l_1 , перпендикулярную прямой l , а затем через точку A проведем прямую, перпендикулярную прямой l_1 .

8.88. а) Проведем через точки A и B прямые AP и BQ , перпендикулярные прямой AB , а затем проведем произвольный перпендикуляр к прямой AP . В результате получим прямоугольник. Остается опустить из точки пересечения его диагоналей перпендикуляр на прямую AB .

б) Восставим из точки B перпендикуляр l к прямой AB и проведем через точку A две перпендикулярные прямые; они пересекают прямую l в точках M и N . Достроим прямоугольный треугольник MAN до прямоугольника $MANR$. Основание перпендикуляра, опущенного из точки R на прямую AB , является искомой точкой C .

8.89. а) Опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую OB и построим отрезок AC , серединой которого является точка P . Тогда угол AOC искомый.

б) Возьмем на прямой OB такие точки B и B_1 , что $OB = OB_1$. Расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки B и B_1 , а вершина лежала на луче OA . Если A — вершина прямого угла, то угол AB_1B искомый.

8.90. Проведем через точку O прямую l' , параллельную прямой l . Из точки B опустим перпендикуляры BP и BQ на прямые l' и OA , а затем из точки O опустим перпендикуляр OX на прямую PQ . Тогда прямая XO искомая (см. задачу 2.3); если точка Y симметрична точке X относительно прямой l' , то прямая YO тоже искомая.

8.91. Построим треугольник OAB до параллелограмма $OABC$, а затем построим отрезок CC_1 , серединой которого является точка O . Расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки C и C_1 , а вершина лежала на прямой l . Вершина прямого угла совпадает тогда с искомой точкой X .

8.92. Построим отрезок AB , серединой которого является точка O , и расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки A и B , а вершина лежала на прямой l . Тогда вершина прямого угла совпадает с искомой точкой.

Глава 9

Геометрические неравенства

Основные сведения

1. Для элементов треугольника используются следующие обозначения:

a, b, c — длины сторон BC, CA, AB ;

α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ;

m_a, m_b, m_c — длины медиан, проведенных из вершин A, B, C ;

h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных из вершин A, B, C ;

l_a, l_b, l_c — длины биссектрис, проведенных из вершин A, B, C ;

r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

2. Если A, B, C — произвольные точки, то $AB \leq AC + CB$, причем равенство достигается, только если точка C лежит на отрезке AB (неравенство треугольника).

3. Медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон: $m_a < (b + c)/2$ (задача 9.1).

4. Если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего (задача 9.27, б).

5. Сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы длин любой пары его противоположных сторон (задача 9.14).

6. Против большей стороны треугольника лежит больший угол (задача 10.59).

7. Длина отрезка, лежащего внутри выпуклого многоугольника, не превосходит либо наибольшей стороны, либо наибольшей диагонали (задача 10.64).

8. При решении некоторых задач этой главы нужно знать разные алгебраические неравенства. Сведения об этих неравенствах и их доказательства приведены в приложениях к настоящей главе; с ними следует познакомиться, но нужно учесть, что они требуются только для решения достаточно сложных задач, а для решения простых задач понадобятся лишь неравенство $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$ и следствия из него.

Вводные задачи

1. Докажите, что $S_{ABC} \leq AB \cdot BC/2$.
2. Докажите, что $S_{ABCD} \leq (AB \cdot BC + AD \cdot DC)/2$.
3. Докажите, что $\angle ABC > 90^\circ$ тогда и только тогда, когда точка B лежит внутри окружности с диаметром AC .
4. Радиусы двух окружностей равны R и r , а расстояние между их центрами равно d . Докажите, что эти окружности пересекаются тогда и только тогда, когда $|R - r| < d < R + r$.
5. Докажите, что любая диагональ четырехугольника меньше половины его периметра.

§1. Медиана треугольника

- 9.1. Докажите, что $(a + b - c)/2 < m_c < (a + b)/2$.
- 9.2. Докажите, что в любом треугольнике сумма медиан больше $3/4$ периметра, но меньше периметра.
- 9.3. Даны n точек A_1, \dots, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + \dots + MA_n \geq n$.
- 9.4. Точки A_1, \dots, A_n не лежат на одной прямой. Пусть две разные точки P и Q обладают тем свойством, что $A_1P + \dots + A_nP = A_1Q + \dots + A_nQ = s$. Докажите, что тогда $A_1K + \dots + A_nK < s$ для некоторой точки K .
- 9.5*. На столе лежит 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

§2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника

В задачах этого параграфа a, b и c — длины сторон произвольного треугольника.

- 9.6. Докажите, что $a = y + z, b = x + z$ и $c = x + y$, где x, y и z — положительные числа.
- 9.7. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.
- 9.8. При любом натуральном n из чисел a^n, b^n и c^n можно составить треугольник. Докажите, что среди чисел a, b и c есть два равных.
- 9.9. Докажите, что

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

9.10. Пусть $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Докажите, что $|p - q| < 1$.

9.11*. Пять отрезков таковы, что из любых трех из них можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

9.12*. Докажите, что

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc.$$

9.13*. Докажите, что

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0.$$

§3. Сумма длин диагоналей четырехугольника

9.14. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что $AB + CD < AC + BD$.

9.15. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем $AB + BD \leq AC + CD$. Докажите, что $AB < AC$.

9.16*. Внутри выпуклого четырехугольника с суммой длин диагоналей d расположен выпуклый четырехугольник с суммой длин диагоналей d' . Докажите, что $d' < 2d$.

9.17*. Дана замкнутая ломаная, причем любая другая замкнутая ломаная с теми же вершинами имеет большую длину. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.

9.18*. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

9.19*. На плоскости даны n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

9.20*. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

9.21*. Пусть дан выпуклый $(2n + 1)$ -угольник $A_1A_3A_5 \dots A_{2n+1}A_2 \dots A_{2n}$. Докажите, что среди всех замкнутых ломаных с вершинами в его вершинах наибольшую длину имеет ломаная $A_1A_2A_3 \dots A_{2n+1}A_1$.

§4. Разные задачи на неравенство треугольника

9.22. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

9.23. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

9.24. Докажите, что если длины сторон треугольника связаны неравенством $a^2 + b^2 > 5c^2$, то c — длина наименьшей стороны.

9.25. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

9.26*. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что $BA_1 = \lambda \cdot BC, CB_1 = \lambda \cdot CA, AC_1 = \lambda \cdot AB$, причем $1/2 < \lambda < 1$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами $(2\lambda - 1)P < P_1 < \lambda P$.

* * *

9.27*. а) Докажите, что при переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке периметр уменьшается. (Выпуклой оболочкой многоугольника называют наименьший выпуклый многоугольник, его содержащий.)

б) Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внешнего многоугольника не меньше, чем периметр внутреннего.

9.28*. Внутри треугольника ABC периметра P взята точка O . Докажите, что $P/2 < AO + BO + CO < P$.

9.29*. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась точка E , обладающая тем свойством, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Докажите, что тогда $BC = AD/2$.

См. также задачи 13.40, 20.11.

§5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон

9.30. Дан треугольник площади 1 со сторонами $a \leq b \leq c$. Докажите, что $b \geq \sqrt{2}$.

9.31. Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{ABCD} \leq EG \cdot HF \leq (AB + CD)(AD + BC)/4$.

9.32. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

9.33. Внутри треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $4S \leq AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$, где S — площадь треугольника ABC .

9.34*. В окружность радиуса R вписан многоугольник площади S , содержащий центр окружности, и на его сторонах выбрано по точке. Докажите, что периметр выпуклого многоугольника с вершинами в выбранных точках не меньше $2S/R$.

9.35*. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S взята точка O , причем $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Докажите, что тогда $ABCD$ — квадрат и O — его центр.

§6. Неравенства с площадями

9.36. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC , причем $AM = CN$ и $AN = BM$. Докажите, что площадь четырехугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN .

9.37. Площади треугольников ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S , S_1 , S_2 соответственно, причем $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \leq 4\sqrt{S_1S_2}$.

9.38. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник площади S . Угол между прямыми AB и CD равен α , угол между AD и BC равен β . Докажите, что

$$AB \cdot CD \sin \alpha + AD \cdot BC \sin \beta \leq 2S \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

9.39. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Обозначим площади частей, на которые эти прямые разбивают треугольник, так, как показано на рис. 9.1. Докажите, что $a/\alpha + b/\beta + c/\gamma \geq 3/2$.

9.40. Площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны S и S_1 , причем треугольник ABC не тупоугольный. Наибольшее из отношений a_1/a , b_1/b и c_1/c равно k . Докажите, что $S_1 \leq k^2S$.

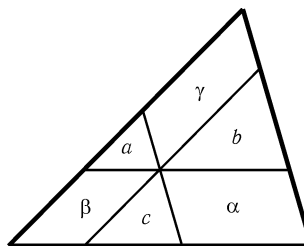


Рис. 9.1

9.41. а) Точки B , C и D делят (меньшую) дугу AE окружности на четыре равные части. Докажите, что $S_{ACE} < 8S_{BCD}$.

б) Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности. Через середину D (меньшей) дуги BC проведена касательная, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N . Докажите, что $S_{BCD} < 2S_{MAN}$.

9.42*. Все стороны выпуклого многоугольника отодвигаются во внешнюю сторону на расстояние h . Докажите, что его площадь при этом увеличится больше чем на $Ph + \pi h^2$, где P — периметр.

9.43*. Квадрат разрезан на прямоугольники. Докажите, что сумма площадей кругов, описанных около всех этих прямоугольников, не меньше площади круга, описанного около исходного квадрата.

9.44*. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

9.45*. а) Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике площади S найдется диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше $S/6$.

б) Докажите, что в любом выпуклом восьмиугольнике площади S найдется диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше $S/8$.

См. также задачу 17.19.

§7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой

9.46. Выпуклый многоугольник, площадь которого больше 0,5, помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины 0,5, параллельный стороне квадрата.

9.47*. Внутри квадрата со стороной 1 даны n точек. Докажите, что:

а) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках или вершинах квадрата не превосходит $1/(2(n+1))$;

б) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках не превосходит $1/(n-2)$.

9.48*. а) В круг площади S вписан правильный n -угольник площади S_1 , а около этого круга описан правильный n -угольник площади S_2 . Докажите, что $S^2 > S_1 S_2$.

б) В окружность, длина которой равна L , вписан правильный n -угольник периметра P_1 , а около этой окружности описан правильный n -угольник периметра P_2 . Докажите, что $L^2 < P_1 P_2$.

9.49*. Многоугольник площади B вписан в окружность площади A и описан вокруг окружности площади C . Докажите, что $2B \leq A + C$.

9.50*. В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из которых больше 1. Докажите, что эти треугольники пересекаются.

9.51*. а) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P .

б) Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2 . Докажите, что $2S_1/P_1 > S_2/P_2$.

9.52*. Докажите, что площадь параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади треугольника.

9.53*. Докажите, что площадь треугольника, вершины которого лежат на сторонах параллелограмма, не превосходит половины площади параллелограмма.

лограмма.

* * *

9.54*. Докажите, что любой остроугольный треугольник площади 1 можно поместить в прямоугольный треугольник площади $\sqrt{3}$.

9.55*. а) Докажите, что выпуклый многоугольник площади S можно поместить в некоторый прямоугольник площади не более $2S$.

б) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S можно вписать параллелограмм площади не менее $S/2$.

9.56*. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить треугольник, площадь которого не меньше: а) $1/4$; б) $3/8$.

9.57*. Выпуклый n -угольник помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдутся три такие вершины A, B и C этого n -угольника, что площадь треугольника ABC не превосходит: а) $8/n^2$; б) $16\pi/n^3$.

См. также задачу 15.7.

§8. Ломаные внутри квадрата

9.58*. Внутри квадрата со стороной 1 расположена несамопересекающаяся ломаная длины 1000. Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая эту ломаную по крайней мере в 500 точках.

9.59*. В квадрате со стороной 1 расположена ломаная длиной L . Известно, что каждая точка квадрата удалена от некоторой точки этой ломаной меньше чем на ε . Докажите, что тогда $L \geq \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\pi\varepsilon}{2}$.

9.60*. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая все эти точки, длина которой не превосходит $2n$.

9.61*. Внутри квадрата со стороной 100 расположена ломаная L , обладающая тем свойством, что любая точка квадрата удалена от L не больше чем на 0,5. Докажите, что на L есть две точки, расстояние между которыми не больше 1, а расстояние по L между ними не меньше 198.

§9. Четырехугольник

9.62. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и B равны, а $\angle D > \angle C$. Докажите, что тогда $AD < BC$.

9.63. В трапеции $ABCD$ углы при основании AD удовлетворяют неравенствам $\angle A < \angle D < 90^\circ$. Докажите, что тогда $AC > BD$.

9.64. Докажите, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче другой диагонали.

9.65. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

9.66. Угол A четырехугольника $ABCD$ тупой; F — середина стороны BC . Докажите, что $2FA < BD + CD$.

9.67. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (неравенство Птолемея).

9.68. Пусть M и N — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

9.69. Точка P лежит внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что сумма расстояний от точки P до вершин четырехугольника меньше суммы попарных расстояний между вершинами четырехугольника.

9.70. Диагонали делят выпуклый четырехугольник $ABCD$ на четыре треугольника. Пусть P — периметр четырехугольника $ABCD$, Q — периметр четырехугольника, образованного центрами вписанных окружностей полученных треугольников. Докажите, что $PQ > 4S_{ABCD}$.

9.71. Докажите, что расстояние от одной из вершин выпуклого четырехугольника до противоположной диагонали не превосходит половины этой диагонали.

9.72*. Отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, а концы его лежат на сторонах AB и CD . Докажите, что длина отрезка KL не превосходит длины одной из диагоналей.

9.73*. В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2 , а в параллелограмм P_2 вписан параллелограмм P_3 , стороны которого параллельны сторонам P_1 . Докажите, что длина хотя бы одной из сторон P_1 не превосходит удвоенной длины параллельной ей стороны P_3 .

См. также задачи 13.19, 15.3 а).

§10. Многоугольники

9.74. Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника образуют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше 36° .

9.75*. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1, причем $AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, AE = 2$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

9.76*. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 взята точка P . Докажите, что расстояния от точки P до некоторых трех вершин шестиугольника не меньше 1.

9.77*. Докажите, что если стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1, то радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не превосходит 1.

9.78*. Длины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ меньше 1. Докажите, что длина одной из диагоналей AD, BE, CF меньше 2.

9.79*. Семиугольник $A_1 \dots A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри его, то сумма углов при вершинах A_1, A_3, A_5 меньше 450° .

* * *

9.80. а) Докажите, что если длины проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые равны a и b , то его длина не меньше $(a+b)/\sqrt{2}$.

б) Длины проекций многоугольника на координатные оси равны a и b . Докажите, что его периметр не меньше $\sqrt{2}(a+b)$.

9.81*. Докажите, что из сторон выпуклого многоугольника периметра P можно составить два отрезка, длины которых отличаются не более чем на $P/3$.

9.82*. Внутри выпуклого многоугольника $A_1 \dots A_n$ взята точка O . Пусть α_k — величина угла при вершине A_k , $x_k = OA_k$, d_k — расстояние от точки O до прямой $A_k A_{k+1}$. Докажите, что $\sum x_k \sin(\alpha_k/2) \geq \sum d_k$ и $\sum x_k \cos(\alpha_k/2) \geq p$, где p — полупериметр многоугольника.

9.83*. Правильный $2n$ -угольник M_1 со стороной a лежит внутри правильного $2n$ -угольника M_2 со стороной $2a$. Докажите, что многоугольник M_1 содержит центр многоугольника M_2 .

9.84*. Внутри правильного многоугольника $A_1 \dots A_n$ взята точка O . Докажите, что по крайней мере один из углов $\angle A_i O A_j$ удовлетворяет неравенствам $\pi(1 - 1/n) \leq \angle A_i O A_j \leq \pi$.

9.85*. Докажите, что при $n \geq 7$ внутри выпуклого n -угольника найдется точка, сумма расстояний от которой до вершин больше периметра.

9.86*. а) Выпуклые многоугольники $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$ таковы, что все их соответственные стороны, кроме $A_1 A_n$ и $B_1 B_n$, равны и $\angle A_2 \geq \angle B_2, \dots, \angle A_{n-1} \geq \angle B_{n-1}$, причем хотя бы одно из неравенств строгое. Докажите, что $A_1 A_n > B_1 B_n$.

б) Соответственные стороны неравных многоугольников $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$ равны. Запишем возле каждой вершины многоугольника $A_1 \dots A_n$ знак разности $\angle A_i - \angle B_i$. Докажите, что при $n \geq 4$ соседних вершин с разными знаками будет по крайней мере четыре пары. (Вершины с нулевой разностью выбрасываются из рассмотрения: две вершины, между которыми стоят только вершины с нулевой разностью, считаются соседними.)

См. также задачи 4.37, 4.53, 13.42.

§11. Разные задачи

9.87. На отрезке длиной 1 дано n точек. Докажите, что сумма расстояний от некоторой точки отрезка до этих точек не меньше $n/2$.

9.88*. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть провод из точки A в точку B , расстояние между которыми равно l . Докажите, что для этой цели ему достаточно куска провода длиной $1,6l$.

9.89*. В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту меньше 100 м. Докажите, что этот лес можно огородить забором длиной 200 м.

9.90*. Многоугольник (не обязательно выпуклый), вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного многоугольника быть больше, чем периметр исходного?

* * *

9.91. Докажите, что замкнутую ломаную длины 1 можно поместить в круг радиуса 0,25.

9.92*. Остроугольный треугольник расположен внутри окружности. Докажите, что ее радиус не меньше радиуса описанной окружности треугольника.

Верно ли это утверждение для тупоугольного треугольника?

9.93*. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.

См. также задачи 14.25, 20.4.

Задачи для самостоятельного решения

9.94. Два отрезка делят прямоугольник $ABCD$ на четыре прямоугольника. Докажите, что площадь одного из прямоугольников, прилегающих к вершинам A и C , не превосходит четверти площади $ABCD$.

9.95. Докажите, что если $AB + BD = AC + CD$, то серединный перпендикуляр к стороне BC четырехугольника $ABCD$ пересекает отрезок AD .

9.96. Докажите, что если диагональ BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ делит пополам диагональ AC и $AB > BC$, то $AD < DC$.

9.97. Основания описанной трапеции равны 2 и 11. Докажите, что продолжения ее боковых сторон пересекаются под острым углом.

9.98. Основания трапеции равны a и b , а высота равна h . Докажите, что длина одной из ее диагоналей не меньше $\sqrt{h^2 + (b+a)^2/4}$.

9.99. Вершины n -угольника M_1 являются серединами сторон выпуклого n -угольника M . Докажите, что при $n \geq 3$ периметр M_1 не меньше половины периметра M , а при $n \geq 4$ площадь M_1 не меньше половины площади M .

9.100. В окружность радиуса 1 вписан многоугольник, длины сторон которого заключены между 1 и $\sqrt{2}$. Найдите число его сторон.

П р и л о ж е н и е. Некоторые неравенства

1. Наиболее часто используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел*: $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, где a и b — положительные числа. Это неравенство следует из того, что $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$; равенство достигается, только если $a = b$.

Из этого неравенства следует несколько полезных неравенств, например

$$x(a-x) \leq ((x+a-x)/2)^2 = a^2/4;$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a(1/a)} = 2 \quad \text{при } a > 0.$$

2. При решении некоторых задач используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для n положительных чисел*: $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + \dots + a_n)/n$, причем равенство достигается, только если $a_1 = \dots = a_n$.

Докажем сначала это неравенство для чисел вида $n = 2^m$ индукцией по m . Для $m = 1$ неравенство было доказано выше. Предположим, что оно доказано для m , и докажем его для $m + 1$. Ясно, что $a_k a_{k+2^m} \leq ((a_k + a_{k+2^m})/2)^2$. Поэтому

$$(a_1 a_2 \dots a_{2^{m+1}})^{1/2^{m+1}} \leq (b_1 b_2 \dots b_{2^m})^{1/2^m},$$

где $b_k = (a_k + a_{k+2^m})/2$, а по предположению индукции

$$(b_1 \dots b_{2^m})^{1/2^m} \leq \frac{1}{2^m} (b_1 + \dots + b_{2^m}) = \frac{1}{2^{m+1}} (a_1 + \dots + a_{2^{m+1}}).$$

Пусть теперь n любое. Тогда $n < 2^m$ для некоторого m . Положим $a_{n+1} = \dots = a_{2^m} = (a_1 + \dots + a_n)/n = A$. Ясно, что $(a_1 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + \dots + a_{2^m}) = nA + (2^m - n)A = 2^m A$ и $a_1 \dots a_{2^m} = a_1 \dots a_n \cdot A^{2^m - n}$. Поэтому $a_1 \dots a_n \cdot A^{2^m - n} \leq (2^m A / 2^m)^{2^m} = A^{2^m}$, т. е. $a_1 \dots a_n \leq A^n$; равенство достигается, только если $a_1 = \dots = a_n$.

3. Для произвольных чисел a_1, \dots, a_n справедливо неравенство $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$. В самом деле,

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \leq \sum a_i^2 + \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) = n \sum a_i^2.$$

4. Так как $\int_0^\alpha \cos t dt = \sin \alpha$ и $\int_0^\alpha \sin t dt = 1 - \cos \alpha$, то, исходя из неравенства $\cos t \leq 1$, получим $\sin \alpha \leq \alpha$, затем $1 - \cos \alpha \leq \alpha^2/2$ (т. е. $\cos \alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$), $\sin \alpha \geq \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, $\cos \alpha \leq 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$ и т. д. (неравенства справедливы при всех $\alpha \geq 0$).

5. Докажем, что $\operatorname{tg} \alpha \geq \alpha$ при $0 \leq \alpha < \pi/2$. Пусть AB — касательная к окружности радиуса 1 с центром O , причем B — точка касания; C —

точка пересечения луча OA с окружностью, S — площадь сектора BOC . Тогда $\alpha = 2S < 2S_{AOB} = \operatorname{tg} \alpha$.

6. На участке от 0 до $\pi/2$ функция $f(x) = x/\sin x$ монотонно возрастает, так как $f'(x) = (\operatorname{tg} x - x)/(\cos x \sin^2 x) > 0$. В частности, $f(\alpha) \leq f(\pi/2)$, т. е. $\alpha/\sin \alpha \leq \pi/2$ при $0 < \alpha < \pi/2$.

7. Если $f(x) = a \cos x + b \sin x$, то $f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. В самом деле, существует такой угол φ , что $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sin \varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}$, поэтому $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi - x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Равенство достигается, только если $\varphi = x + 2k\pi$, т. е. $\cos x = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sin x = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Решения

9.1. Пусть C_1 — середина стороны AB . Тогда $CC_1 + C_1A > CA$ и $BC_1 + C_1C > BC$. Поэтому $2CC_1 + BA > CA + BC$, т. е. $m_c > (a + b - c)/2$.

Пусть точка C' симметрична C относительно точки C_1 . Тогда $CC_1 = C_1C'$ и $BC' = CA$. Поэтому $2m_c = CC' < CB + BC' = CB + CA$, т. е. $m_c < (a + b)/2$.

9.2. Из предыдущей задачи следует $m_a < (b + c)/2$, $m_b < (a + c)/2$ и $m_c < (a + b)/2$, поэтому сумма длин медиан меньше периметра.

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Тогда $BO + OA > BA$, $AO + OC > AC$ и $CO + OB > CB$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $AO = 2m_a/3$, $BO = 2m_b/3$, $CO = 2m_c/3$, получаем $m_a + m_b + m_c > 3(a + b + c)/4$.

9.3. Пусть M_1 и M_2 — диаметрально противоположные точки окружности. Тогда $M_1A_k + M_2A_k \geq M_1M_2 = 2$. Складывая эти неравенства для $k = 1, \dots, n$, получаем $(M_1A_1 + \dots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \dots + M_2A_n) \geq 2n$. Поэтому либо $M_1A_1 + \dots + M_1A_n \geq n$, и тогда положим $M = M_1$, либо $M_2A_1 + \dots + M_2A_n \geq n$, и тогда положим $M = M_2$.

9.4. В качестве K можно взять середину отрезка PQ . В самом деле, тогда $A_iK \leq (A_iP + A_iQ)/2$ (см. задачу 9.1), причем хотя бы одно неравенство строгое, так как точки A_i не могут все лежать на прямой PQ .

9.5. Пусть A_i и B_i — положения конца минутных стрелок часов с номером i в моменты t и $t + 30$ мин, O_i — центр i -х часов, а O — центр стола. Тогда $OO_i \leq (OA_i + OB_i)/2$ для любого i (см. задачу 9.1). Ясно, что в некоторый момент точки A_i и B_i не лежат на прямой O_iO , т. е. по крайней мере одно из n неравенств становится строгим. Тогда либо $OO_1 + \dots + OO_n < OA_1 + \dots + OA_n$, либо $OO_1 + \dots + OO_n < OB_1 + \dots + OB_n$.

9.6. Решая систему уравнений $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$, получаем $x = (-a + b + c)/2$, $y = (a - b + c)/2$, $z = (a + b - c)/2$. Положительность чисел x , y и z следует из неравенства треугольника.

9.7. По неравенству треугольника $a^2 > (b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$, $b^2 > a^2 - 2ac + c^2$ и $c^2 > a^2 - 2ab + b^2$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

9.8. Можно считать, что $a \geq b \geq c$. Докажем, что $a = b$. В самом деле, если $b < a$, то $b \leq \lambda a$ и $c \leq \lambda a$, где $\lambda < 1$. Поэтому $b^n + c^n \leq 2\lambda^n a^n$. При достаточно большом n имеем $2\lambda^n < 1$ и получаем противоречие с неравенством треугольника.

9.9. Так как $c(a-b)^2 + 4abc = c(a+b)^2$, то $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 = a((b-c)^2 - a^2) + b((c-a)^2 - b^2) + c((a+b)^2 - c^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. (Последнее равенство проверяется простым вычислением.) Все три сомножителя положительны в силу неравенства треугольника.

9.10. Легко проверить, что $abc|p-q| = |(b-c)(c-a)(a-b)|$. А так как $|b-c| < a$, $|c-a| < b$ и $|a-b| < c$, то $|(b-c)(c-a)(a-b)| < abc$.

9.11. Обозначим длины отрезков так, что $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. Если все треугольники, которые можно составить из этих отрезков, не остроугольные, то $a_3^2 \geq a_1^2 + a_2^2$, $a_4^2 \geq a_2^2 + a_3^2$ и $a_5^2 \geq a_3^2 + a_4^2$. Поэтому $a_5^2 \geq a_3^2 + a_4^2 \geq (a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 + a_3^2) \geq 2a_1^2 + 3a_2^2$. Так как $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$, то $2a_1^2 + 3a_2^2 > a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2$. Приходим к неравенству $a_5^2 > (a_1 + a_2)^2$, противоречащему неравенству треугольника.

9.12. Первое решение. Введем новые переменные $x = -a + b + c$, $y = a - b + c$, $z = a + b - c$. Тогда $a = (y+z)/2$, $b = (x+z)/2$, $c = (x+y)/2$, т. е. нужно доказать неравенство $xyz \leq (x+y)(y+z)(x+z)/8$ или $6xyz \leq x(y^2+z^2) + y(x^2+z^2) + z(x^2+y^2)$. Последнее неравенство следует из того, что $2xyz \leq x(y^2+z^2)$, $2xyz \leq y(x^2+z^2)$, $2xyz \leq z(x^2+y^2)$, так как x, y, z — положительные числа.

Второе решение. Так как $2S = ab \sin \gamma$ и $\sin \gamma = c/2R$, то $abc = 4SR$. По формуле Герона $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 8S^2/p$. Поэтому нужно доказать, что $8S^2/p \leq 4SR$, т. е. $2S \leq pR$. Так как $S = pr$, приходим к неравенству $2r \leq R$ (см. задачу 10.26).

9.13. Введем новые переменные $x = (-a + b + c)/2$, $y = (a - b + c)/2$ и $z = (a + b - c)/2$. Тогда числа x, y, z положительны и $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$. Несложные, но несколько громоздкие вычисления показывают, что $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 2(x^3z + y^3x + z^3y - xyz(x+y+z)) = 2xyz \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z$. Так как $2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, то $2x \leq x \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y} + y$. Аналогично $2y \leq y \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{y^2}{z} + z$ и $2z \leq z \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{z^2}{x} + x$. Складывая эти неравенства, получаем $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$.

9.14. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда $AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OB) + (OC + OD) > AB + CD$.

9.15. Согласно предыдущей задаче $AB + CD < AC + BD$. Складывая это неравенство с неравенством $AB + BD \leq AC + CD$, получаем $2AB < 2AC$.

9.16. Докажем сначала, что если P — периметр выпуклого четырехугольника $ABCD$, а d_1 и d_2 — длины его диагоналей, то $P > d_1 + d_2 > P/2$. Ясно, что $AC < AB + BC$ и $AC < AD + DC$, поэтому $AC < (AB + BC + CD + AD)/2 = P/2$. Аналогично $BD < P/2$. Следовательно, $AC + BD < P$. С другой стороны, складывая неравенства $AB + CD < AC + BD$ и $BC + AD < AC + BD$ (см. задачу 9.14), получаем $P < 2(AC + BD)$.

Пусть P — периметр внешнего четырехугольника, P' — периметр внутреннего. Тогда $d > P/2$, а так как $P' < P$ (задача 9.27, б), то $d' < P' < P < 2d$.

9.17. Пусть ломаная наименьшей длины самопересекающаяся. Рассмотрим два пересекающихся звена. Вершины этих звеньев могут соединяться одним из трех способов (рис. 9.2). Рассмотрим новую ломаную, у которой два пересекающихся звена заменены на штриховые звенья (см. рис. 9.2). При этом снова получается замкнутая ломаная, но ее длина меньше, чем у исходной, так как сумма длин

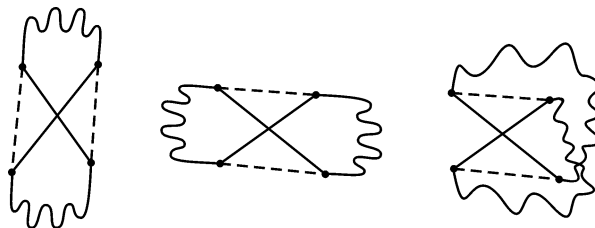


Рис. 9.2

противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы длин диагоналей. Получено противоречие, поэтому замкнутая ломаная наименьшей длины не может иметь пересекающихся звеньев.

9.18. Докажем, что число сторон у такого многоугольника не больше 5. Предположим, что все диагонали многоугольника $A_1 \dots A_n$ имеют одинаковую длину и $n \geq 6$. Тогда отрезки A_1A_4, A_1A_5, A_2A_4 и A_2A_5 имеют одинаковую длину, так как они являются диагоналями этого многоугольника. Но в выпуклом четырехугольнике $A_1A_2A_4A_5$ отрезки A_1A_5 и A_2A_4 являются противоположными сторонами, а A_1A_4 и A_2A_5 — диагоналями. Поэтому $A_1A_5 + A_2A_4 < A_1A_4 + A_2A_5$. Получено противоречие.

Ясно также, что правильный пятиугольник и квадрат удовлетворяют требуемому условию.

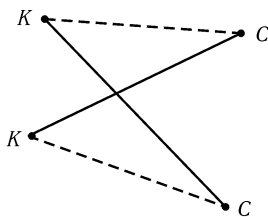


Рис. 9.3

9.19. Рассмотрим все разбиения данных точек на пары разноцветных точек. Этих разбиений конечное число, поэтому найдется разбиение, для которого сумма длин отрезков, заданных парами точек разбиения, наименьшая. Покажем, что тогда эти отрезки не будут пересекаться. В самом деле, если бы два отрезка пересекались, то мы смогли бы выбрать разбиение с меньшей суммой длин отрезков, заменив диагонали выпуклого четырехугольника на его противоположные стороны (рис. 9.3).

9.20. Пусть A_pA_{p+1} и A_qA_{q+1} — несмежные стороны n -угольника $A_1 \dots A_n$ (т. е. $|p - q| \geq 2$). Тогда $A_pA_{p+1} + A_qA_{q+1} < A_pA_q + A_{p+1}A_{q+1}$. Запишем все такие неравенства и сложим их. Для каждой стороны найдется ровно $n - 3$ несмежных с ней сторон, поэтому любая сторона входит в $n - 3$ неравенства, т. е. в левой части полученной суммы стоит $(n - 3)p$, где p — сумма длин сторон n -угольника. Диагональ A_mA_n входит в два неравенства: для $p = n, q = m$ и для $p = n - 1, q = m - 1$, поэтому в правой части стоит $2d$, где d — сумма длин диагоналей. Итак, $(n - 3)p < 2d$. Следовательно, $p/n < d/(n(n - 3)/2)$, что и требовалось.

9.21. Рассмотрим произвольную замкнутую ломаную с вершинами в вершинах данного многоугольника. Если у нее есть два непересекающихся звена, то, заменив эти звенья на диагонали заданного ими четырехугольника, мы увеличим сумму длин звеньев; при этом, однако, одна замкнутая ломаная может распаться на две. Докажем, что в случае нечетного числа звеньев после нескольких таких операций в конце концов получится все же замкнутая ломаная (так как сумма длин звеньев каждый раз увеличивается, таких операций возможно лишь конечное число). Одна из получившихся замкнутых ломаных должна иметь нечетное

число звеньев, но тогда любое из оставшихся звеньев не пересекается хотя бы с одним из звеньев этой ломаной (см. задачу 23.1, а), значит, в конце концов, получится лишь одна замкнутая ломаная.

Будем теперь последовательно строить ломаную с попарно пересекающимися звеньями (рис. 9.4). Например, вершина 10 должна лежать внутри заштрихованного треугольника, поэтому расположение вершин именно такое, как на рис. 9.4. Значит, выпуклому многоугольнику $A_1A_3A_5 \dots A_{2n+1}A_2 \dots A_{2n}$ соответствует ломаная $A_1A_2A_3 \dots A_{2n+1}A_1$.

9.22. Пусть длина третьей стороны равна n . По неравенству треугольника $3,14 - 0,67 < n < 3,14 + 0,67$. Так как n — целое число, то $n = 3$.

9.23. Ясно, что $AB + BC > AC, BC + CD > BD, CD + DE > CE, DE + EA > DA, EA + AB > EB$. Складывая все эти неравенства, получаем, что сумма длин диагоналей пятиугольника меньше удвоенного периметра.

Сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон «лучей звезды», а она в свою очередь больше периметра пятиугольника (рис. 9.5).

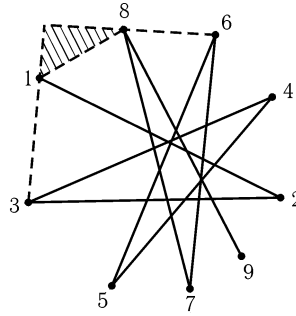


Рис. 9.4

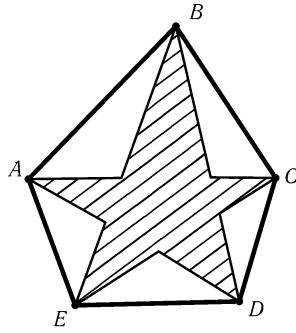


Рис. 9.5

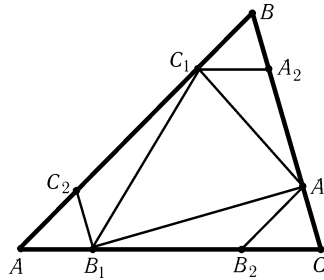


Рис. 9.6

9.24. Предположим, что c — не наименьшая сторона, например, $a \leq c$. Тогда $a^2 \leq c^2$ и $b^2 < (a+c)^2 \leq 4c^2$. Поэтому $a^2 + b^2 < 5c^2$. Получено противоречие.

9.25. Так как $c > |b-a|$ и $a = 2S/h_a, b = 2S/h_b, c = 2S/h_c$, то $\frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}$.

Значит, в нашем случае $h_c < 20 \cdot 12/8 = 30$.

9.26. Возьмем на сторонах AB, BC, CA точки C_2, A_2, B_2 так, что $A_1B_2 \parallel AB, B_1C_2 \parallel BC, C_1A_2 \parallel CA$ (рис. 9.6). Тогда $A_1B_1 < A_1B_2 + B_2B_1 = (1-\lambda)AB + (2\lambda-1)CA$. Аналогично $B_1C_1 < (1-\lambda)BC + (2\lambda-1)AB$ и $C_1A_1 < (1-\lambda)CA + (2\lambda-1)BC$. Складывая эти неравенства, получаем $P_1 < \lambda P$.

Ясно, что $A_1B_1 + A_1C > B_1C$, т. е. $A_1B_1 + (1-\lambda)BC > \lambda \cdot CA$. Аналогично $B_1C_1 + (1-\lambda)CA > \lambda \cdot AB$ и $C_1A_1 + (1-\lambda)AB > \lambda \cdot BC$. Складывая эти неравенства, получаем $P_1 > (2\lambda-1)P$.

9.27. а) При переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке некоторые ломаные, образованные сторонами, заменяются прямолинейными отрезками (рис. 9.7). Остается заметить, что длина ломаной больше длины

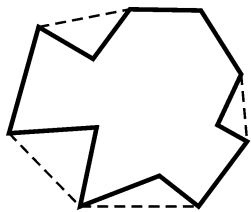


Рис. 9.7

отрезка с теми же концами.

б) Построим на сторонах внутреннего многоугольника полуполосы, обращенные наружу; параллельные края полуполос перпендикулярны соответствующей стороне многоугольника (рис. 9.8). Обозначим через P ту часть периметра внешнего многоугольника, которая находится внутри этих полуполос. Тогда периметр внутреннего многоугольника не превосходит P , а внешнего больше P .

9.28. Так как $AO + BO > AB$, $BO + OC > BC$ и $CO + OA > AC$, то $AO + BO + CO > (AB + BC + CA)/2$. Поскольку треугольник ABC содержит треугольник ABO , то $AB + BO + OA < AB + BC + CA$ (см. задачу 9.27, б), т. е. $BO + OA < BC + CA$. Аналогично $AO + OC < AB + BC$ и $CO + OB < CA + AB$. Складывая эти неравенства, получаем $AO + BO + CO < AB + BC + CA$.

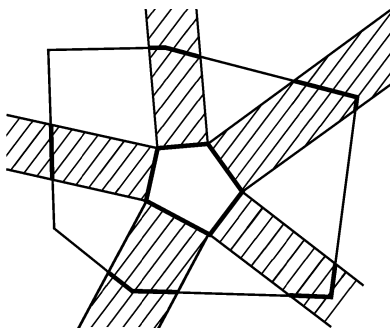


Рис. 9.8

9.29. Достаточно доказать, что $ABCE$ и $BCDE$ — параллелограммы. Достроим треугольник ABE до параллелограмма ABC_1E . Тогда периметры треугольников BC_1E и ABE равны, поэтому равны периметры треугольников BC_1E и BCE . Следовательно, $C_1 = C$, так как иначе один из треугольников BC_1E и BCE лежит внутри другого и их периметры не могут быть равны. Поэтому $ABCE$ — параллелограмм. Аналогично доказывается, что $BCDE$ — параллелограмм.

9.30. Ясно, что $2 = 2S = ab \sin \gamma \leq ab \leq b^2$, т. е. $b \geq \sqrt{2}$.

9.31. Так как EH — средняя линия треугольника ABD , то $S_{AEN} = S_{ABD}/4$. Аналогично $S_{CFG} = S_{CBD}/4$. Поэтому $S_{AEN} + S_{CFG} = S_{ABCD}/4$. Аналогично $S_{BFE} + S_{DGH} = S_{ABCD}/4$. Следовательно, $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG \cdot HF \sin \alpha$, где α — угол между прямыми EG и HF . Так как $\sin \alpha \leq 1$, то $S_{ABCD} \leq EG \cdot HF$.

Складывая равенства $\vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CG}$ и $\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DG}$, получаем $2\vec{EG} = (\vec{EB} + \vec{EA}) + (\vec{BC} + \vec{AD}) + (\vec{DG} + \vec{CG}) = \vec{BC} + \vec{AD}$. Поэтому $EG \leq (BC + AD)/2$. Аналогично $HF \leq (AB + CD)/2$. Следовательно,

$$S_{ABCD} \leq EG \cdot HF \leq (AB + CD)(BC + AD)/4.$$

9.32. Согласно задаче 9.31 $S_{ABCD} \leq (AB + CD)(BC + AD)/4$. Так как $ab \leq (a + b)^2/4$, то $S_{ABCD} \leq (AB + CD + AD + BC)^2/16 = 1$.

9.33. Опустим из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую AM . Тогда $2S_{AMB} + 2S_{AMC} = AM \cdot BB_1 + AM \cdot CC_1 \leq AM \cdot BC$, так как $BB_1 + CC_1 \leq BC$. Аналогично $2S_{BMC} + 2S_{BMA} \leq BM \cdot AC$ и $2S_{CMA} + 2S_{CMB} \leq CM \cdot AB$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

9.34. Пусть на сторонах $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ выбраны точки B_1, \dots, B_n ; O — центр окружности. Пусть далее $S_k = S_{OB_kA_{k+1}B_{k+1}} = (OA_{k+1} \cdot B_kB_{k+1} \sin \varphi)/2$, где φ — угол между OA_{k+1} и B_kB_{k+1} . Так как $OA_{k+1} = R$ и $\sin \varphi \leq 1$, то $S_k \leq (R \cdot B_kB_{k+1})/2$. Поэтому $S = S_1 + \dots + S_n \leq R(B_1B_2 + \dots + B_nB_1)/2$, т. е. периметр многоугольника $B_1B_2 \dots B_n$ не меньше $2S/R$.

9.35. Имеем $2S_{AOB} \leq AO \cdot OB \leq (AO^2 + BO^2)/2$, причем равенство возможно, только если $\angle AOB = 90^\circ$ и $AO = BO$. Аналогично $2S_{BOC} \leq (BO^2 + CO^2)/2$, $2S_{COD} \leq (CO^2 + DO^2)/2$ и $2S_{DOA} \leq (DO^2 + AO^2)/2$. Складывая эти неравенства, получаем $2S = 2(S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}) \leq AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$, причем равенство возможно, только если $AO = BO = CO = DO$ и $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$, т. е. $ABCD$ — квадрат и точка O — его центр.

9.36. Нужно доказать, что $S_{ABC}/S_{AMN} \geq 4$. Так как $AB = AM + MB = AM + AN = AN + NC = AC$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN} = \frac{(AM + AN)^2}{AM \cdot AN} \geq 4.$$

9.37. Воспользуемся формулой Герона: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Так как $p-a = (p_1 - a_1) + (p_2 - a_2)$, а $(x+y)^2 \geq 4xy$, то $(p-a)^2 \geq 4(p_1 - a_1)(p_2 - a_2)$. Аналогично $(p-b)^2 \geq 4(p_1 - b_1)(p_2 - b_2)$, $(p-c)^2 \geq 4(p_1 - c_1)(p_2 - c_2)$ и $p^2 \geq 4p_1p_2$. Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

9.38. Для определенности можно считать, что пересекаются лучи BA и CD , BC и AD (рис. 9.9). Тогда, если достроить треугольник ADC до параллелограмма $ADCK$, точка K окажется внутри четырехугольника $ABCD$. Поэтому $2S \geq 2S_{ABK} + 2S_{BCK} = AB \cdot AK \sin \alpha + BC \cdot CK \sin \beta = AB \cdot CD \sin \alpha + BC \cdot AD \sin \beta$. Равенство достигается, если точка D лежит на отрезке AC .

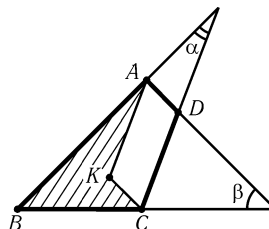


Рис. 9.9

Пусть точка D' симметрична точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC . Тогда $2S = 2S_{ABCD'} = 2S_{ABD'} + 2S_{BCD'} \leq AB \cdot AD' + BC \cdot CD' = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

9.39. Согласно неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \geq 3\sqrt[3]{abc/(\alpha\beta\gamma)} = 3/2$, так как $\alpha = 2\sqrt{bc}$, $\beta = 2\sqrt{ca}$ и $\gamma = 2\sqrt{ab}$ (см. задачу 1.34).

9.40. Неравенства $\alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_1$ и $\gamma < \gamma_1$ не могут выполняться одновременно. Поэтому, например, $\alpha_1 \leq \alpha \leq 90^\circ$, а значит, $\sin \alpha_1 \leq \sin \alpha$. Следовательно, $2S_1 = a_1 b_1 \sin \alpha_1 \leq k^2 ab \sin \alpha = 2k^2 S$.

9.41. а) Пусть хорды AE и BD пересекают диаметр CM в точках K и L . Тогда $AC^2 = CK \cdot CM$ и $BC^2 = CL \cdot CM$. Значит, $CK/CL = AC^2/BC^2 < 4$. Кроме того, $AE/BD = AE/AC < 2$. Следовательно, $S_{ACE}/S_{BCD} = AE \cdot CK/(BD \cdot CL) < 8$.

б) Пусть H — середина отрезка BC . Так как $\angle CBD = \angle BCD = \angle ABD$, то D — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Поэтому $AD/DH = AB/BH > 1$. Следовательно, $S_{MAN} > S_{ABC}/4$ и $S_{BCD} = BC \cdot DH/2 < BC \cdot AH/4 = S_{ABC}/2$.

9.42. Отрежем от полученного многоугольника прямоугольники со стороной h , построенные внешним образом на сторонах исходного многоугольника (рис. 9.10). При этом кроме исходного многоугольника останутся еще некоторые четырехугольники, из которых можно составить многоугольник, описанный около окружности радиуса h . Сумма площадей этих четырехугольников больше площади окружности радиуса h , т. е. больше πh^2 . Ясно также, что сумма площадей отрезанных прямоугольников равна Ph .

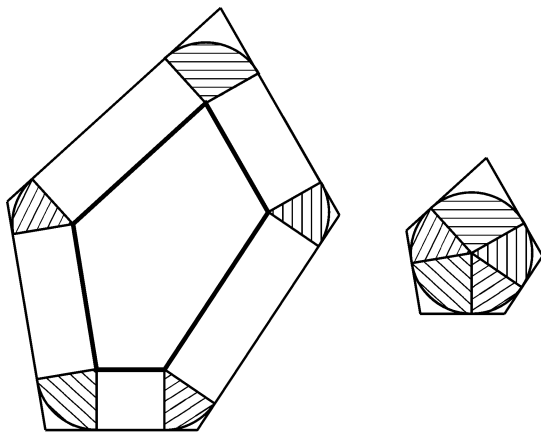


Рис. 9.10

налей AD и EC через F . Тогда $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{ABCF}$. Так как точка F лежит на отрезке EC и $S_{EAB} \geq S_{CAB}$, то $S_{EAB} \geq S_{FAB}$. Аналогично $S_{DCB} \geq S_{FCB}$. Поэтому $S_{ABCF} = S_{FAB} + S_{FCB} \leq S_{EAB} + S_{DCB}$. Следовательно, $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{EAB} + S_{DCB}$; это даже более сильное неравенство, чем требовалось.

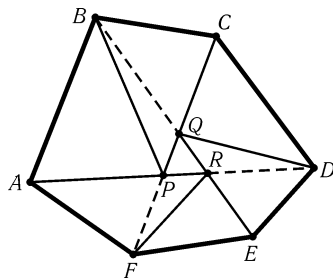


Рис. 9.11

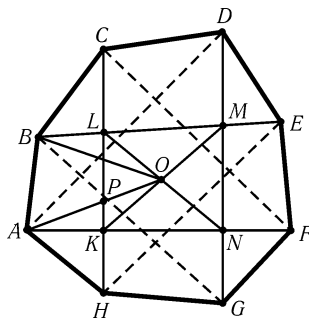


Рис. 9.12

9.45. а) Обозначим точки пересечения диагоналей AD и CF , CF и BE , BE и AD через P, Q, R соответственно (рис. 9.11). Четырехугольники $ABCP$ и $CDEQ$ не имеют общих внутренних точек, так как стороны CP и QC лежат на прямой CF , а отрезки AB и DE — по разные стороны от нее. Аналогично четырехугольники $ABCP$, $CDEQ$ и $EFAR$ не имеют попарно общих внутренних точек. Поэтому сумма их площадей не превосходит S . Следовательно, сумма площадей треугольников $ABP, BCP, CDQ, DEQ, EFR, FAR$ не превосходит S , т. е. площадь одного из них, например ABP , не превосходит $S/6$. Точка P лежит на отрезке CF , поэтому либо точка C , либо точка F удалена от прямой AB не больше, чем точка P . Следовательно, либо $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S/6$, либо $S_{ABF} \leq S_{ABP} \leq S/6$.

б) Пусть $ABCDEFGH$ — выпуклый восьмиугольник (рис. 9.12). Докажем сначала, что четырехугольники $ABEF, BCFG, CDGH$ и $DEHA$ имеют общую

9.43. Пусть s, s_1, \dots, s_n — площади квадрата и составляющих его прямоугольников, S, S_1, \dots, S_n — площади описанных около них кругов. Докажем, что $s_k \leq 2S_k/\pi$. В самом деле, если стороны прямоугольника равны a и b , то $s_k = ab$ и $S_k = \pi R^2$, где $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$. Поэтому $s_k = ab \leq (a^2 + b^2)/2 = 2\pi R^2/\pi = 2S_k/\pi$. Следовательно, $2S/\pi = s = s_1 + \dots + s_n \leq 2(S_1 + \dots + S_n)/\pi$.

9.44. Пусть для определенности ABC — треугольник наименьшей площади. Обозначим точку пересечения диагоналей

точку. Ясно, что пересечением $ABEF$ и $CDGH$ является некоторый выпуклый четырехугольник $KLMN$. Отрезки AF и HC лежат внутри углов DAN и AHE соответственно, поэтому точка K лежит внутри четырехугольника $DEHA$. Аналогично доказывается, что точка M лежит внутри четырехугольника $DEHA$, т. е. весь отрезок KM лежит внутри его. Аналогично отрезок LN лежит внутри четырехугольника $BCFG$. Точка пересечения диагоналей KM и LN принадлежит всем нашим четырехугольникам; обозначим ее O . Разобьем восьмиугольник на треугольники, соединив точку O с вершинами. Площадь одного из этих треугольников, например ABO , не превосходит $S/8$. Отрезок AO пересекает сторону KL в некоторой точке P , поэтому $S_{ABP} \leq S_{ABO} \leq S/8$. Так как точка P лежит на диагонали CH , то либо $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S/8$, либо $S_{ABH} \leq S_{ABP} \leq S/8$.

9.46. Проведем через все вершины многоугольника прямые, параллельные одной паре сторон квадрата, и разобьем тем самым квадрат на полоски. Каждая такая полоска отрезает от многоугольника трапецию или треугольник. Достаточно доказать, что длина одного из оснований этих трапеций больше 0,5. Предположим, что длины оснований всех трапеций не превосходят 0,5. Тогда площадь каждой трапеции не превосходит половины высоты полоски, ее заключающей. Поэтому площадь многоугольника, равная сумме площадей трапеций и треугольников, на которые он разрезан, не превосходит половины суммы высот полосок, т. е. не превосходит 0,5. Получено противоречие.

9.47. а) Пусть P_1, \dots, P_n — данные точки. Соединим точку P_1 с вершинами квадрата. При этом получится четыре треугольника. Затем для $k = 2, \dots, n$ сделаем следующую операцию. Если точка P_k лежит строго внутри одного из полученных ранее треугольников, то соединим ее с вершинами этого треугольника. Если точка P_k лежит на общей стороне двух треугольников, то соединим ее с вершинами этих треугольников, противоположными общей стороне. После каждой такой операции в обоих случаях число треугольников увеличивается на два. В результате получится $2(n+1)$ треугольников. Сумма площадей этих треугольников равна 1, поэтому площадь одного из них не превосходит $1/(2(n+1))$.

б) Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть он имеет k вершин. Если $k = n$, то этот k -угольник можно разбить на $n-2$ треугольников диагоналями, выходящими из одной вершины. Если же $k < n$, то внутри k -угольника лежит $n-k$ точек и его можно разбить на треугольники способом, указанным в предыдущей задаче. При этом получится $k+2(n-k-1) = 2n-k-2$ треугольников. Так как $k < n$, то $2n-k-2 > n-2$.

Сумма площадей треугольников разбиения меньше 1, а их количество не меньше $n-2$, поэтому площадь хотя бы одного из них не превосходит $1/(n-2)$.

9.48. а) Можно считать, что описанный n -угольник $A_1 \dots A_n$ и вписанный n -угольник $B_1 \dots B_n$ расположены так, что прямые $A_i B_i$ пересекаются в центре O данного круга. Пусть C_i и D_i — середины сторон $A_i A_{i+1}$ и $B_i B_{i+1}$. Тогда $S_{OB_i C_i} = p \cdot OB_i \cdot OC_i$, $S_{OB_i D_i} = p \cdot OB_i \cdot OD_i$ и $S_{OA_i C_i} = p \cdot OA_i \cdot OC_i$, где $p = (\sin A_i OC_i)/2$. Так как $OA_i : OC_i = OB_i : OD_i$, то $S_{OB_i C_i}^2 = S_{OB_i D_i} S_{OA_i C_i}$. Остается заметить, что площадь части круга, заключенной внутри угла $A_i OC_i$, больше $S_{OB_i C_i}$, а площади частей вписанного и описанного n -угольников, заключенных внутри этого угла, равны $S_{OB_i D_i}$ и $S_{OA_i C_i}$.

б) Пусть радиус окружности равен R . Тогда $P_1 = 2nR \sin(\pi/n)$, $P_2 = 2nR \operatorname{tg}(\pi/n)$ и $L = 2\pi R$. Нужно доказать, что $\sin x \operatorname{tg} x > x^2$ при $0 < x \leq \pi/3$. Так как $\frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{x^2}{6} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36}$ и $0 < \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{24}$ (см. при-

ложение в конце главы), остается проверить, что $1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36} \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, т. е. $12x^2 > x^4$. При $x \leq \pi/3$ это неравенство выполняется.

9.49. Пусть O — центр гомотетии, переводящей вписанную окружность в описанную. Разобьем плоскость лучами, выходящими из точки O и проходящими через вершины многоугольника и точки касания его сторон с вписанной окружностью (рис. 9.13). Достаточно доказать требуемое неравенство для частей кругов и многоугольника, заключенных внутри каждого из образованных этими

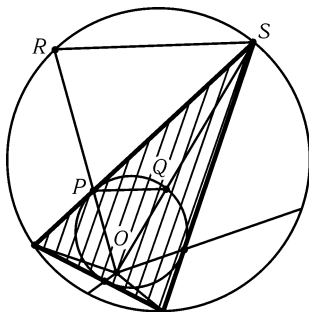


Рис. 9.13

лучами углов. Пусть стороны угла пересекают вписанную и описанную окружности в точках P, Q и R, S соответственно, причем P — точка касания, а S — вершина многоугольника. Площади частей кругов больше площадей треугольников OPQ и ORS , поэтому достаточно доказать, что $2S_{OPS} \leq S_{OPQ} + S_{ORS}$. Так как $2S_{OPS} = 2S_{OPQ} + 2S_{PQS}$ и $S_{ORS} = S_{OPQ} + S_{PQS} + S_{PRS}$, остается доказать, что $S_{PQS} \leq S_{PRS}$. Это неравенство очевидно, так как высоты треугольников PQS и PRS , опущенные на основания PQ и RS , равны, а $PQ < RS$.

9.50. Достаточно доказать, что оба треугольника содержат центр O круга. Докажем, что если треугольник ABC , помещенный в круг радиуса 1, не содержит центра круга, то его площадь меньше 1. В самом деле, для любой точки, лежащей вне треугольника, найдется прямая, проходящая через две вершины и отделяющая эту точку от третьей вершины. Пусть для определенности прямая AB разделяет точки C и O . Тогда $h_c < 1$ и $AB < 2$, поэтому $S = h_c \cdot AB/2 < 1$.

9.51. а) Построим на сторонах многоугольника внутренним образом прямоугольники со второй стороной $R = S/P$. Они покроют не весь многоугольник (эти прямоугольники перекрываются и могут вылезать за его пределы, а сумма их площадей равна площади многоугольника). Непокрытая точка удалена от всех сторон многоугольника больше, чем на R , поэтому круг радиуса R с центром в этой точке целиком лежит внутри многоугольника.

б) Из задачи а) следует, что во внутренний многоугольник можно поместить круг радиуса S_2/P_2 . Ясно, что этот круг лежит внутри внешнего многоугольника. Остается доказать, что если внутри многоугольника лежит круг радиуса R , то $R \leq 2S/P$. Для этого соединим центр O круга с вершинами. Тогда многоугольник разобьется на треугольники с площадями $h_i a_i/2$, где h_i — расстояние от точки O до i -й стороны, а a_i — длина i -й стороны. Так как $h_i \geq R$, то $2S = \sum h_i a_i \geq \sum R a_i = RP$.

9.52. Рассмотрим сначала случай, когда две стороны параллелограмма лежат на прямых AB и AC , а четвертая вершина X лежит на стороне BC . Если $BX : CX = x : (1-x)$, то отношение площади параллелограмма к площади треугольника равно $2x(1-x) \leq 1/2$.

В общем случае проведем параллельные прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма (рис. 9.14). Площадь данного параллелограмма не превосходит суммы площадей заштрихованных параллелограммов, а они относятся к разобранному выше случаю. Если прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма, пересекают лишь две стороны треугольника, то можно огра-

ничиться одним заштрихованным параллелограммом.

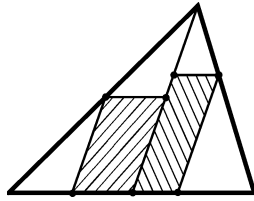


Рис. 9.14

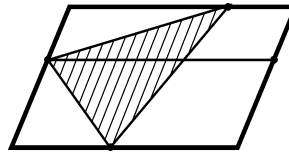


Рис. 9.15

9.53. Рассмотрим сначала такой случай: две вершины A и B треугольника ABC лежат на одной стороне PQ параллелограмма. Тогда $AB \leq PQ$ и высота, опущенная на сторону AB , не больше высоты параллелограмма. Поэтому площадь треугольника ABC не больше половины площади параллелограмма.

Если же вершины треугольника лежат на разных сторонах параллелограмма, то две из них лежат на противоположных сторонах. Проведем через третью вершину треугольника прямую, параллельную этим сторонам (рис. 9.15). Она разрезает параллелограмм на два параллелограмма, а треугольник — на два треугольника, причем у обоих треугольников две вершины лежат на сторонах параллелограмма. Приходим к рассмотренному случаю.

9.54. Пусть M — середина наибольшей стороны BC данного остроугольного треугольника ABC . Окружность радиуса MA с центром M пересекает лучи MB и MC в точках B_1 и C_1 . Так как $\angle BAC < 90^\circ$, то $MB < MB_1$. Пусть для определенности $\angle AMB \leq \angle AMC$, т. е. $\angle AMB \leq 90^\circ$. Тогда $AM^2 + MB^2 \leq AB^2 \leq BC^2 = 4MB^2$, т. е. $AM \leq \sqrt{3}BM$. Если AH — высота треугольника ABC , то $AH \cdot BC = 2S$, а значит, $S_{AB_1C_1} = B_1C_1 \cdot AH/2 = AM \cdot AH \leq \sqrt{3}BM \cdot AH = \sqrt{3}S$.

9.55. а) Пусть AB — наибольшая диагональ или сторона данного многоугольника M . Многоугольник M заключен внутри полосы, образованной перпендикулярами к отрезку AB , проходящими через точки A и B . Проведем к многоугольнику M две опорные прямые, параллельные AB ; пусть они пересекают многоугольник M в точках C и D . В результате многоугольник M заключен в прямоугольник, площадь которого равна $2S_{ABC} + 2S_{ABD} \leq 2S$.

б) Пусть M — исходный многоугольник, l — произвольная прямая. Рассмотрим многоугольник M_1 , одна из сторон которого — проекция M на l , а длины сечений многоугольников M и M_1 любой прямой, перпендикулярной l , равны (рис. 9.16). Легко проверить, что многоугольник M_1 тоже выпуклый, причем его площадь равна S . Пусть A — наиболее удаленная от l точка многоугольника M_1 . Прямая, равноудаленная от точки A и прямой l , пересекает стороны многоугольника M_1 в точках B и C . Проведем через точки B и C опорные прямые. В результате вокруг многоугольника M_1 будет описана трапеция (через точку A тоже можно провести опорную прямую); площадь этой трапеции не

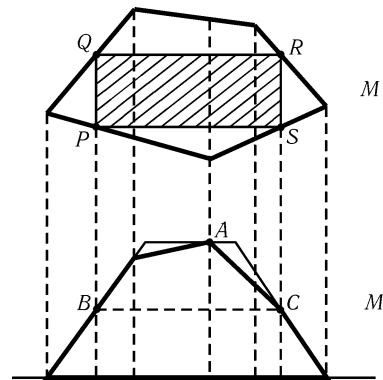


Рис. 9.16

менее S . Если высота трапеции (т. е. расстояние от точки A до прямой l) равна h , то ее площадь равна $h \cdot BC$, а значит, $h \cdot BC \geq S$. Рассмотрим сечения PQ и RS многоугольника M прямыми, перпендикулярными l и проходящими через B и C . Длины этих сечений равны $h/2$, поэтому $PQRS$ — параллелограмм, причем его площадь равна $BC \cdot h/2 \geq S/2$.

9.56. а) Заключим многоугольник в полосу, образованную параллельными прямыми. Будем сдвигать эти прямые параллельно до тех пор, пока на каждую из них не попадут некоторые вершины A и B многоугольника. Затем сделаем то же самое для полосы, образованной прямыми, параллельными AB . На эти прямые попадут некоторые вершины C и D (рис. 9.17). Исходный многоугольник заключен в параллелограмм, поэтому площадь этого параллелограмма не меньше 1. С другой стороны, сумма площадей треугольников ACB и ADB равна половине площади параллелограмма, поэтому площадь одного из этих треугольников не меньше $1/4$.

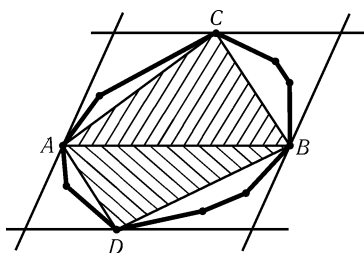


Рис. 9.17

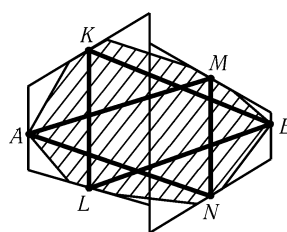


Рис. 9.18

б) Как и в задаче а), заключим многоугольник в полосу, образованную параллельными прямыми, так, чтобы вершины A и B лежали на этих прямых (рис. 9.18). Пусть ширина этой полосы равна d . Проведем три прямые, делящие эту полосу на равные полосы шириной $d/4$. Пусть первая и третья прямые пересекают стороны многоугольника в точках K, L и M, N соответственно.

Продолжим стороны, на которых лежат точки K, L, M и N , до пересечения со сторонами исходной полосы и с прямой, делящей ее пополам. При этом образуются две трапеции со средними линиями KL и MN , высоты которых равны $d/2$. Так как эти трапеции покрывают весь многоугольник, сумма их площадей не меньше его площади, т. е. $(d \cdot KL + d \cdot MN)/2 \geq 1$. Сумма площадей треугольников AMN и BKL , содержащихся в исходном многоугольнике, равна $(3d \cdot MN + 3d \cdot KL)/8 \geq 3/4$. Поэтому площадь одного из этих треугольников не меньше $3/8$.

9.57. Докажем, что найдутся даже три *последовательные* вершины, удовлетворяющие требуемому условию. Пусть α_i — угол между i -й и $(i+1)$ -й сторонами, $\beta_i = \pi - \alpha_i$, а a_i — длина i -й стороны.

а) Площадь треугольника, образованного i -й и $(i+1)$ -й сторонами, равна $S_i = (a_i a_{i+1} \sin \alpha_i)/2$. Пусть S — наименьшая из этих площадей. Тогда $2S \leq a_i a_{i+1} \sin \alpha_i$, поэтому $(2S)^n \leq (a_1^2 \dots a_n^2)(\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n) \leq a_1^2 \dots a_n^2$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $(a_1 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + \dots + a_n)/n$, поэтому $2S \leq (a_1 \dots a_n)^{2/n} \leq (a_1 + \dots + a_n)^2/n^2$. Так как $a_i \leq p_i + q_i$, где p_i и q_i — проекции i -й стороны на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата, то $a_1 + \dots + a_n \leq (p_1 + \dots + p_n) + (q_1 + \dots + q_n) \leq 4$. Поэтому $2S \leq 16n^2$, т. е. $S \leq 8/n^2$.

б) Воспользуемся доказанным выше неравенством $2S \leq \leq (a_1 \dots a_n)^{2/n} (\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n)^{1/n} \leq \frac{16}{n^2} (\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n)^{1/n}$. Так как $\sin \alpha_i = \sin \beta_i$ и $\beta_1 + \dots + \beta_n = 2\pi$, то $(\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n)^{1/n} = (\sin \beta_1 \dots \sin \beta_n)^{1/n} \leq (\beta_1 + \dots + \beta_n)/n = 2\pi/n$. Поэтому $2S \leq 32\pi/n^3$, т. е. $S \leq 16\pi/n^3$.

9.58. Пусть l_i — длина i -го звена ломаной, a_i и b_i — длины его проекций на стороны квадрата. Тогда $l_i \leq a_i + b_i$. Следовательно, $1000 = l_1 + \dots + l_n \leq (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)$, т. е. либо $a_1 + \dots + a_n \geq 500$, либо $b_1 + \dots + b_n \geq 500$. Если сумма длин проекций звеньев на сторону длиной 1 не меньше 500, то на одну из точек стороны проектируется не менее 500 различных звеньев ломаной, т. е. перпендикуляр к стороне, проходящий через эту точку, пересекает ломаную по крайней мере в 500 точках.

9.59. Геометрическое место точек, удаленных от данного отрезка не более чем на ε , изображено на рис. 9.19. Площадь этой фигуры равна $\pi\varepsilon^2 + 2\varepsilon l$, где l — длина отрезка. Построим такие фигуры для всех N звеньев данной ломаной. Так как соседние фигуры имеют $N-1$ общих кругов радиуса ε с центрами в неконцевых вершинах ломаной, то покрытая этими фигурами площадь не превосходит $N\pi\varepsilon^2 + 2\varepsilon(l_1 + \dots + l_n) - (N-1)\pi\varepsilon^2 = 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2$. Эти фигуры покрывают весь квадрат, так как любая точка квадрата удалена от некоторой точки ломаной меньше чем на ε . Поэтому $1 \leq 2\varepsilon L + \pi\varepsilon^2$, т. е. $L \geq \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\pi\varepsilon}{2}$.

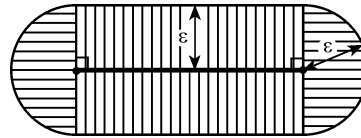


Рис. 9.19

9.60. Разобьем квадрат на n вертикальных полосок, содержащих по n точек каждая. Точки внутри каждой полосы соединим сверху вниз и получим n ломаных. Эти ломаные можно соединить в одну ломаную двумя способами (рис. 9.20, а и б). Рассмотрим отрезки, соединяющие разные полосы. Объединение всех таких

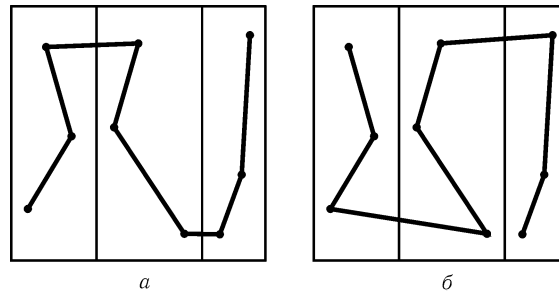


Рис. 9.20

отрезков, полученных обоими способами, представляет собой пару ломаных, причем сумма длин горизонтальных проекций звеньев каждой из них не превосходит 1. Поэтому сумма длин горизонтальных проекций соединяющих отрезков для одного из способов не превосходит 1. Рассмотрим именно это соединение. Сумма длин горизонтальных проекций для соединяющих звеньев не превосходит 1, а для всех остальных звеньев не превосходит $(n-1)(h_1 + \dots + h_n)$, где h_i — ширина i -й полосы. Ясно, что $h_1 + \dots + h_n = 1$. Сумма вертикальных проекций всех звеньев ломаной не превосходит n . В итоге получаем, что сумма вертикальных и горизонтальных проекций всех звеньев не превосходит $1 + (n-1) + n = 2n$, поэтому

и длина ломаной не превосходит $2n$.

9.61. Пусть M и N — концы ломаной. Будем идти по ломаной из M в N . Пусть A_1 — первая из встретившихся нам точек ломаной, удаленных от какой-либо вершины квадрата на расстояние $0,5$. Рассмотрим вершины квадрата, соседние с этой вершиной. Пусть B_1 — первая после A_1 точка ломаной, удаленная от одной из этих вершин на расстояние $0,5$. Вершины квадрата, ближайšie к точкам A_1 и B_1 , обозначим A и B соответственно (рис. 9.21). Часть ломаной от M до A_1 обозначим через L_1 , от A_1 до N — через L_2 . Пусть X и Y — множества точек, лежащих на AD и удаленных не более чем на $0,5$ от L_1 и L_2 соответственно. По условию X и Y покрывают всю сторону AD . Ясно, что A принадлежит X , а D не принадлежит X , поэтому D принадлежит Y , т. е. оба множества X и Y не пусты. Но каждое из них состоит из нескольких отрезков, поэтому они должны иметь общую точку P . Следовательно, на L_1 и L_2 существуют точки F_1 и F_2 , для которых $PF_1 \leq 0,5$ и $PF_2 \leq 0,5$.

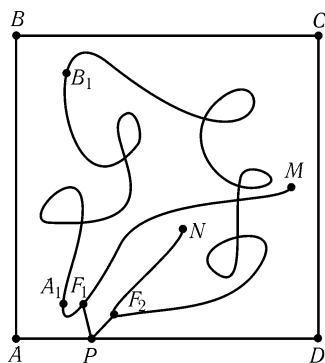


Рис. 9.21

Докажем, что F_1 и F_2 — искомые точки. В самом деле, $F_1F_2 \leq F_1P + PF_2 \leq 1$. С другой стороны, идя в F_2 из F_1 , мы должны пройти через точку B , а $F_1B_1 \geq 99$ и $F_2B_1 \geq 99$, так как точка B_1 удалена от стороны BC не больше чем на $0,5$, а F_1 и F_2 удалены от стороны AD не больше чем на $0,5$.

9.62. Пусть $\angle A = \angle B$. Достаточно доказать, что если $AD < BC$, то $\angle D > \angle C$. Возьмем на стороне BC точку D_1 так, что $BD_1 = AD$. Тогда ABD_1D — равнобедренная трапеция. Поэтому

$\angle D > \angle D_1DA = \angle DD_1B > \angle C$.

9.63. Пусть B_1 и C_1 — проекции точек B и C на основание AD . Так как $\angle BAB_1 < \angle CDC_1$ и $BB_1 = CC_1$, то $AB_1 > DC_1$ и поэтому $B_1D < AC_1$. Следовательно, $BD^2 = B_1D^2 + B_1B^2 < AC_1^2 + CC_1^2 = AC^2$.

9.64. Пусть углы B и D четырехугольника $ABCD$ тупые. Тогда точки B и D лежат внутри окружности с диаметром AC . Так как расстояние между любыми двумя точками, лежащими внутри окружности, меньше ее диаметра, то $BD < AC$.

9.65. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD равны. Поэтому $BM + (AM + CM) \geq BM + AC = BM + BD \geq DM$.

9.66. Пусть O — середина отрезка BD . Точка A лежит внутри окружности с диаметром BD , поэтому $OA < BD/2$. Кроме того, $FO = CD/2$. Следовательно, $2FA \leq 2FO + 2OA < CD + BD$.

9.67. Отложим на лучах AB, AC и AD отрезки AB', AC' и AD' длиной $1/AB, 1/AC$ и $1/AD$. Тогда $AB : AC = AC' : AB'$, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $1/(AB \cdot AC)$, поэтому $B'C' = BC/(AB \cdot AC)$. Аналогично $C'D' = CD/(AC \cdot AD)$ и $B'D' = BD/(AB \cdot AD)$. Подставив эти выражения в неравенство $B'D' \leq B'C' + C'D'$ и домножив обе части на $AB \cdot AC \cdot AD$, получим требуемое.

9.68. Ясно, что $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2S_{AMC} + 2S_{ANC} = 2(S_{AMN} + S_{CMN})$. Если отрезок AM пересекает диагональ BD в точке A_1 , то $S_{CMN} = S_{A_1MN} < S_{AMN}$. Значит, $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

9.69. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Пусть для определенности точка P лежит внутри треугольника AOB . Тогда $AP + BP \leq AO + BO < AC + BD$

(см. решение задачи 9.28) и $CP + DP < CB + BA + AD$.

9.70. Пусть r_i, S_i и p_i — радиусы вписанных окружностей, площади и полупериметры полученных треугольников. Тогда $Q \geq 2 \sum r_i = 2 \sum (S_i/p_i) > 4 \sum (S_i/P) = 4S/P$.

9.71. Пусть $AC \leq BD$. Опустим из вершин A и C перпендикуляры AA_1 и CC_1 на диагональ BD . Тогда $AA_1 + CC_1 \leq AC \leq BD$, а значит, $AA_1 \leq BD/2$ или $CC_1 \leq BD/2$.

9.72. Проведем через концы отрезка KL прямые, ему перпендикулярные, и рассмотрим проекции на них вершин четырехугольника, а также точки пересечения с ними прямых AC и BD (рис. 9.22). Пусть для определенности точка A лежит внутри полосы, заданной этими прямыми, а точка B — вне ее. Тогда можно считать, что D лежит внутри полосы, так как иначе $BD > KL$, и доказательство завершено. Так как

$$\frac{AA'}{BB'} \leq \frac{A_1K}{B_1K} = \frac{C_1L}{D_1L} \leq \frac{CC'}{DD'},$$

то либо $AA' \leq CC'$ (и тогда $AC > KL$), либо $BB' \geq DD'$ (и тогда $BD > KL$).

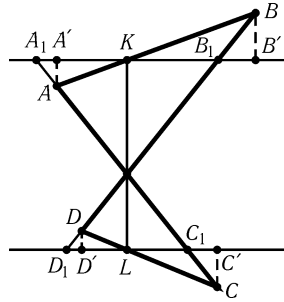


Рис. 9.22

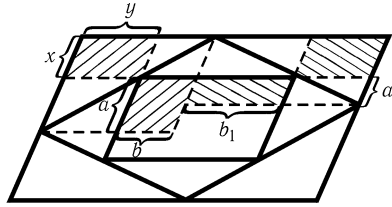


Рис. 9.23

9.73. Введем такие обозначения, как на рис. 9.23. Все рассматриваемые параллелограммы имеют общий центр (задача 1.7). Длины сторон параллелограмма P_3 равны $a + a_1$ и $b + b_1$, а длины сторон параллелограмма P_1 равны $a + a_1 + 2x$ и $b + b_1 + 2y$, поэтому нужно проверить, что $a + a_1 + 2x \leq 2(a + a_1)$ или $b + b_1 + 2y \leq 2(b + b_1)$, т. е. $2x \leq a + a_1$ или $2y \leq b + b_1$. Предположим, что $a + a_1 < 2x$ и $b + b_1 < 2y$. Тогда $\sqrt{aa_1} \leq (a + a_1)/2 < x$ и $\sqrt{bb_1} < y$. С другой стороны, равенство площадей заштрихованных параллелограммов (см. задачу 4.19) показывает, что $ab = xy = a_1b_1$, а значит, $\sqrt{aa_1}\sqrt{bb_1} = xy$. Получено противоречие.

9.74. Пусть углы пятиугольника равны $\alpha, \alpha + \gamma, \alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma, \alpha + 4\gamma$, где $\alpha, \gamma \geq 0$. Так как сумма углов пятиугольника равна 3π , то $5\alpha + 10\gamma = 3\pi$. Из выпуклости пятиугольника следует, что все его углы меньше π , т. е. $\alpha + 4\gamma < \pi$, или $-5\alpha/2 - 10\gamma > -5\pi/2$. Складывая последнее неравенство с равенством $5\alpha + 10\gamma = 3\pi$, получаем $5\alpha/2 > \pi/2$, т. е. $\alpha > \pi/5 = 36^\circ$.

9.75. Ясно, что $4 = AE^2 = |\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}|^2 = |\vec{AB} + \vec{BC}|^2 + 2(\vec{AB} + \vec{BC}, \vec{CD} + \vec{DE}) + |\vec{CD} + \vec{DE}|^2$. Так как $\angle ACE = 90^\circ$, то $(\vec{AB} + \vec{BC}, \vec{CD} + \vec{DE}) = (\vec{AC}, \vec{CE}) = 0$. Поэтому $4 = |\vec{AB} + \vec{BC}|^2 + |\vec{CD} + \vec{DE}|^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + 2(\vec{AB}, \vec{BC}) + 2(\vec{CD}, \vec{DE})$, т. е. достаточно доказать, что $abc < 2(\vec{AB}, \vec{BC})$ и $bcd < 2(\vec{CD}, \vec{DE})$. Поскольку $2(\vec{AB}, \vec{BC}) = 2ab \cos(180^\circ - \angle ABC) = 2ab \cos AEC = ab \cdot CE$ и $c < CE$, то $abc < 2(\vec{AB}, \vec{BC})$.

Второе неравенство доказывается аналогично, так как можно ввести новые обозначения $A_1 = E, B_1 = D, C_1 = C, a_1 = d, b_1 = c, c_1 = b$, и неравенство $bcd < 2(\overline{CD}, \overline{DE})$ переписется в виде $a_1 b_1 c_1 < 2(\overline{A_1 B_1}, \overline{B_1 C_1})$.

9.76. Пусть B — середина стороны $A_1 A_2$ данного шестиугольника $A_1 \dots A_6$, O — его центр. Можно считать, что точка P лежит внутри треугольника $A_1 O B$. Тогда $PA_3 \geq 1$, так как расстояние от точки A_3 до прямой BO равно 1; $PA_4 \geq 1$ и $PA_5 \geq 1$, так как расстояния от точек A_4 и A_5 до прямой $A_3 A_6$ равны 1.

9.77. Предположим, что радиусы описанных окружностей треугольников ACE и BDF больше 1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ACE . Тогда $\angle ABC > \angle AOC, \angle CDE > \angle COE$ и $\angle EFA > \angle EOA$, а значит, $\angle B + \angle D + \angle F > 2\pi$. Аналогично $\angle A + \angle C + \angle E > 2\pi$, т. е. сумма углов шестиугольника $ABCDEF$ больше 4π . Получено противоречие.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказать, что радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1.

9.78. Можно считать, что $AE \leq AC \leq CE$. Согласно задаче 9.67 $AD \cdot CE \leq AE \cdot CD + AC \cdot DE < AE + AC \leq 2CE$, т. е. $AD < 2$.

9.79. Так как $\angle A_1 = 180^\circ - \sphericalangle A_2 A_7 / 2, \angle A_3 = 180^\circ - \sphericalangle A_4 A_2 / 2$ и $\angle A_5 = 180^\circ - \sphericalangle A_6 A_4 / 2$, то $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = 2 \cdot 180^\circ + (360^\circ - \sphericalangle A_2 A_7 - \sphericalangle A_4 A_2 - \sphericalangle A_6 A_4) / 2 = 2 \cdot 180^\circ + \sphericalangle A_7 A_6 / 2$. Поскольку центр окружности лежит внутри семиугольника, то $\sphericalangle A_7 A_6 < 180^\circ$, поэтому $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$.

9.80. а) Нужно доказать, что если c — гипотенуза прямоугольного треугольника, а a и b — его катеты, то $c \geq (a+b)/\sqrt{2}$, т. е. $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Ясно, что $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \leq (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)$.

б) Пусть d_i — длина i -ой стороны многоугольника, а x_i и y_i — длины ее проекций на координатные оси. Тогда $x_1 + \dots + x_n \geq 2a, y_1 + \dots + y_n \geq 2b$. Согласно задаче а) $d_i \geq (x_i + y_i)/\sqrt{2}$. Поэтому $d_1 + \dots + d_n \geq (x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n)/\sqrt{2} \geq \sqrt{2}(a+b)$.

9.81. Возьмем отрезок длиной P и расположим на нем стороны многоугольника следующим образом: на одном конце отрезка поместим наибольшую сторону, на другом — следующую за ней по величине, а все остальные стороны поместим между ними. Так как любая сторона многоугольника меньше $P/2$, середина O отрезка не может находиться на этих двух наибольших сторонах. Длина стороны, на которой находится точка O , не превосходит $P/3$ (иначе первые две стороны тоже были бы больше $P/3$ и сумма трех сторон была бы больше P), поэтому одна из ее вершин удалена от O не более чем на $P/6$. Эта вершина разбивает отрезок на два искомого отрезка, так как разность их длин не превосходит $2 \cdot P/6 = P/3$.

9.82. Пусть $\beta_k = \angle O A_k A_{k+1}$. Тогда $x_k \sin \beta_k = d_k = x_{k+1} \sin(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})$. Поэтому $2 \sum d_k = \sum x_k (\sin(\alpha_k - \beta_k) + \sin \beta_k) = 2 \sum x_k \sin(\alpha_k/2) \cos(\alpha_k/2 - \beta_k) \leq 2 \sum x_k \sin(\alpha_k/2)$.

Ясно также, что $A_k A_{k+1} = x_k \cos \beta_k + x_{k+1} \cos(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})$. Поэтому $2p = \sum A_k A_{k+1} = \sum x_k (\cos(\alpha_k - \beta_k) + \cos \beta_k) = 2 \sum x_k \cos(\alpha_k/2) \cos(\alpha_k/2 - \beta_k) \leq 2 \sum x_k \cos(\alpha_k/2)$.

В обоих случаях равенство достигается, только если $\alpha_k = 2\beta_k$, т. е. O — центр вписанной окружности.

9.83. Предположим, что центр O многоугольника M_2 лежит вне многоугольника M_1 . Тогда существует такая сторона AB многоугольника M_1 , что многоугольник M_1 и точка O лежат по разные стороны от прямой AB . Пусть CD —

сторона многоугольника M_1 , параллельная AB . Расстояние между прямыми AB и CD равно радиусу вписанной окружности S многоугольника M_2 , поэтому прямая CD лежит вне окружности S . С другой стороны, отрезок CD лежит внутри многоугольника M_2 . Следовательно, длина отрезка CD меньше половины длины стороны многоугольника M_2 (см. задачу 10.66). Получено противоречие.

9.84. Пусть A_1 — ближайшая к O вершина многоугольника. Разобьем многоугольник на треугольники диагоналями, проходящими через вершину A_1 . Точка O окажется в одном из этих треугольников, например в треугольнике $A_1A_kA_{k+1}$. Если точка O попадет на сторону A_1A_k , то $\angle A_1OA_k = \pi$, и задача решена. Поэтому будем считать, что точка O лежит строго внутри треугольника $A_1A_kA_{k+1}$. Так как $A_1O \leq A_kO$ и $A_1O \leq A_{k+1}O$, то $\angle A_1A_kO \leq \angle A_kA_1O$ и $\angle A_1A_{k+1}O \leq \angle A_{k+1}A_1O$. Следовательно $\angle A_kOA_1 + \angle A_{k+1}OA_1 = (\pi - \angle OA_1A_k - \angle OA_kA_1) + (\pi - \angle OA_1A_{k+1} - \angle OA_{k+1}A_1) \geq 2\pi - 2\angle OA_1A_k - 2\angle OA_1A_{k+1} = 2\pi - 2\angle A_kA_1A_{k+1} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}$, т. е. один из углов A_kOA_1 и $A_{k+1}OA_1$ не меньше $\pi - \frac{1}{n}$.

9.85. Пусть d — длина наибольшей диагонали (или стороны) AB данного n -угольника. Тогда его периметр P не превосходит πd (задача 13.42). Пусть A'_i — проекция вершины A_i на отрезок AB . Тогда $\sum AA'_i \geq nd/2$ или $\sum BA'_i \geq nd/2$ (задача 9.87); пусть для определенности выполняется первое неравенство. Тогда $\sum AA_i > \sum AA'_i \geq nd/2 > nd \geq P$, так как $n/2 \geq 3,5 > \pi$. Любая точка n -угольника, достаточно близкая к вершине A , обладает требуемым свойством.

9.86. а) Предположим сначала, что $\angle A_i > \angle B_i$, а для всех остальных рассматриваемых пар углов имеет место равенство. Расположим многоугольники так, чтобы вершины A_1, \dots, A_i совпали с B_1, \dots, B_i . В треугольниках $A_1A_iA_n$ и $A_1A_iB_n$ стороны A_iA_n и A_iB_n равны и $\angle A_1A_iA_n > \angle A_1A_iB_n$, поэтому $A_1A_n > A_1B_n$.

Если же не равны несколько углов, то многоугольники $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$ можно включить в цепочку многоугольников, последовательные члены которой такие, как в разобранный выше случае.

б) При полном обходе многоугольника знак минус меняется на знак плюс столько же раз, сколько происходит обратная смена знака. Поэтому число пар соседних вершин с разными знаками четно. Остается проверить, что число изменений знака не может быть равно двум (число изменений знака не равно нулю, так как сумма углов обоих многоугольников одна и та же).

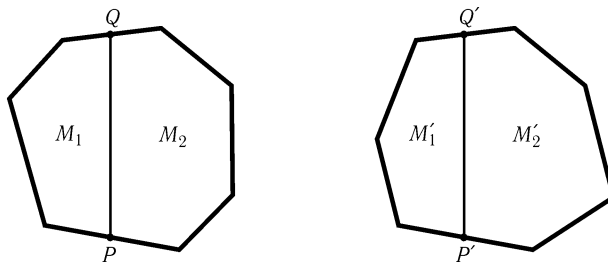


Рис. 9.24

Предположим, что число изменений знака равно двум. Пусть P и Q , P' и Q' — середины сторон многоугольников $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$, на которых происходит смена знака. К парам многоугольников M_1 и M'_1 , M_2 и M'_2 (рис. 9.24) можно

применить утверждение задачи а); в одном случае получим $PQ > P'Q'$, а в другом $PQ < P'Q'$, чего не может быть.

9.87. Пусть A и B — концы отрезка; X_1, \dots, X_n — данные точки. Так как $AX_i + BX_i = 1$, то $\sum AX_i + \sum BX_i = n$. Следовательно, $\sum AX_i \geq n/2$ или $\sum BX_i \geq n/2$.

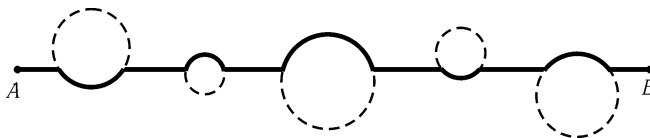


Рис. 9.25

9.88. Будем тянуть провод по отрезку AB , огибая при этом встречающиеся деревья по кратчайшей дуге (рис. 9.25). Достаточно доказать, что путь по дуге окружности не более чем в 1,6 раза длиннее пути по прямой. Отношение длины дуги угловой величины 2φ к хорде, ее стягивающей, равно $\varphi/\sin \varphi$. Так как $0 < \varphi \leq \pi/2$, то $\varphi/\sin \varphi \leq \pi/2 < 1,6$.

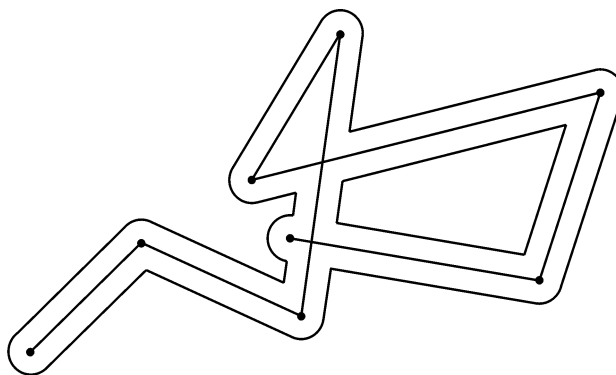


Рис. 9.26

9.89. Пусть деревья высотой $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ растут в точках A_1, \dots, A_n . Тогда по условию $A_1A_2 \leq |a_1 - a_2| = a_1 - a_2, \dots, A_{n-1}A_n \leq a_{n-1} - a_n$. Следовательно, длина ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ не превосходит $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n < 100$ м. Эту ломаную можно огородить забором, длина которого не превосходит 200 м (рис. 9.26).

9.90. Выделим в полученном многоугольнике части, по которым произошла склейка (на рис. 9.27 эти части заштрихованы). Все стороны, не принадлежащие заштрихованным многоугольникам, входят в периметр исходного и полученного многоугольников. Что же касается заштрихованных многоугольников, то их стороны, лежащие на прямой сгиба, входят в периметр полученного многоугольника, а все остальные стороны — в периметр исходного многоугольника. Так как у любого многоугольника сумма его сторон, лежащих на некоторой прямой, меньше суммы остальных сторон, то периметр исходного многоугольника всегда больше, чем периметр полученного.

9.91. Возьмем на ломаной две точки A и B , делящие ее периметр пополам. Тогда $AB \leq 1/2$. Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса $1/4$

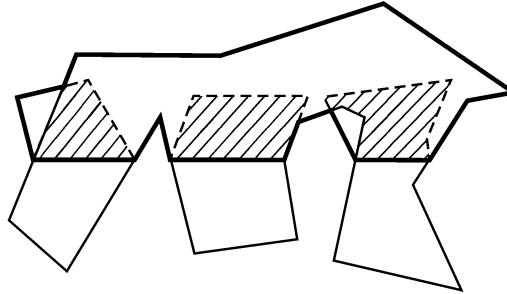


Рис. 9.27

с центром в середине O отрезка AB . Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O . Тогда $MO = M_1M/2 \leq (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \leq 1/4$, так как $BM + AM$ не превосходит половины длины ломаной.

9.92. Пусть остроугольный треугольник ABC расположен внутри окружности S . Построим описанную окружность S_1 треугольника ABC . Так как треугольник ABC остроугольный, то угловая величина дуги окружности S_1 , лежащей внутри S , больше 180° . Поэтому на этой дуге можно выбрать диаметрально противоположные точки, т. е. внутри окружности S содержится диаметр окружности S_1 . Следовательно, радиус окружности S не меньше радиуса окружности S_1 .

Аналогичное утверждение для тупоугольного треугольника не верно. Тупоугольный треугольник лежит внутри окружности, построенной на наибольшей стороне a как на диаметре. Радиус этой окружности равен $a/2$, а радиус описанной окружности треугольника равен $a/(2 \sin \alpha)$. Ясно, что $a/2 < a/(2 \sin \alpha)$.

9.93. Первое решение. Любой треугольник периметра P можно поместить в круг радиуса $P/4$, а если остроугольный треугольник помещен в круг радиуса R_1 , то $R_1 \geq R$ (задача 9.92). Поэтому $P/4 = R_1 \geq R$.

Второе решение. Если $0 < x < \pi/2$, то $\sin x > 2x/\pi$. Поэтому $a + b + c = 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) > 2R(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)/\pi = 4R$.

Глава 10

Неравенства для элементов треугольника

Эта глава тесно связана с предыдущей. Основные сведения см. в предыдущей главе.

§1. Медианы

10.1. Докажите, что если $a > b$, то $m_a < m_b$.

10.2. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Докажите, что если четырехугольник A_1MB_1C описанный, то $AC = BC$.

10.3. Периметры треугольников ABM , BCM и ACM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC , равны. Докажите, что треугольник ABC правильный.

10.4. а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон произвольного треугольника, то $a^2 + b^2 \geq c^2/2$.

б) Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 \geq 9c^2/8$.

10.5*. а) Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 27R^2/4$.

б) Докажите, что $m_a + m_b + m_c \leq 9R/2$.

10.6*. Докажите, что $|a^2 - b^2|/(2c) < m_c \leq (a^2 + b^2)/(2c)$.

10.7*. Пусть $x = ab + bc + ca$, $x_1 = m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a$. Докажите, что $9/20 < x_1/x < 5/4$.

См. также задачи 9.1, 10.74, 10.76, 17.17.

§2. Высоты

10.8. Докажите, что в любом треугольнике сумма длин высот меньше периметра.

10.9. Две высоты треугольника больше 1. Докажите, что его площадь больше $1/2$.

10.10. В треугольнике ABC высота AM не меньше BC , а высота BH не меньше AC . Найдите углы треугольника ABC .

10.11. Докажите, что $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} < \frac{1}{r}$.

10.12. Докажите, что $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

10.13. Пусть $a < b$. Докажите, что $a + h_a \leq b + h_b$.

10.14*. Докажите, что $h_a \leq \sqrt{r_b r_c}$.

10.15*. Докажите, что $h_a \leq (a/2) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

10.16*. Пусть $a \leq b \leq c$. Докажите, что тогда $h_a + h_b + h_c \leq 3b(a^2 + ac + c^2)/(4pR)$.

См. также задачи 10.28, 10.55, 10.74, 10.80.

§3. Биссектрисы

10.17*. Докажите, что $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.

10.18*. Докажите, что $h_a/l_a \geq \sqrt{2r/R}$.

10.19*. Докажите, что: а) $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2$; б) $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p$.

10.20*. Докажите, что $l_a + l_b + m_c \leq \sqrt{3}p$.

См. также задачи 6.41, 10.75, 10.74, 10.95.

§4. Длины сторон

10.21. Докажите, что $\frac{9r}{2S} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9R}{4S}$.

10.22*. Докажите, что $2bc \cos \alpha / (b+c) < b+c-a < 2bc/a$.

10.23*. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2, то $a^2 + b^2 + c^2 < 2(1-abc)$.

10.24*. Докажите, что $20Rr - 4r^2 \leq ab + bc + ca \leq 4(R+r)^2$.

§5. Радиусы описанной, вписанной и внеписанных окружностей

10.25. Докажите, что $rr_c \leq c^2/4$.

10.26*. Докажите, что $r/R \leq 2 \sin(\alpha/2)(1 - \sin(\alpha/2))$.

10.27*. Докажите, что $6r \leq a + b$.

10.28*. Докажите, что $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3$.

10.29*. Докажите, что $27Rr \leq 2p^2 \leq 27R^2/2$.

10.30*. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC , причем $OA \geq OB \geq OC$. Докажите, что $OA \geq 2r$ и $OB \geq r\sqrt{2}$.

10.31*. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин не меньше $6r$.

10.32*. Докажите, что $3\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right) \geq 4\left(\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c}\right)$.

10.33*. Докажите, что

а) $5R - r \geq \sqrt{3}p$;

б) $4R - r_a \geq (p - a)[\sqrt{3} + (a^2 + (b - c)^2)/(2S)]$.

10.34*. Докажите, что $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

10.35*. Докажите, что $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 27R^2/4$.

См. также задачи 10.11, 10.12, 10.14, 10.18, 10.24, 10.55, 10.80, 10.83, 19.7.

§6. Симметричные неравенства для углов треугольника

Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC . В задачах этого параграфа требуется доказать указанные в условиях неравенства.

З а м е ч а н и е. Если α, β и γ — углы некоторого треугольника, то существует треугольник с углами $(\pi - \alpha)/2$, $(\pi - \beta)/2$ и $(\pi - \gamma)/2$.

В самом деле, эти числа положительны и их сумма равна π . Следовательно, если некоторое симметричное неравенство справедливо для синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов *любого* треугольника, то справедливо и аналогичное неравенство, в котором $\sin x$ заменен на $\cos(x/2)$, $\cos x$ — на $\sin(x/2)$, $\operatorname{tg} x$ — на $\operatorname{ctg}(x/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ — на $\operatorname{tg}(x/2)$. Обратный переход от неравенств с половинными углами к неравенствам с целыми углами возможен лишь для остроугольных треугольников. В самом деле, если $\alpha' = (\pi - \alpha)/2$, то $\alpha = \pi - 2\alpha'$. Поэтому для остроугольного треугольника с углами α', β', γ' существует треугольник с углами $\pi - 2\alpha', \pi - 2\beta', \pi - 2\gamma'$. При такой замене $\sin(x/2)$ переходит в $\cos x$ и т. д., но полученное неравенство может оказаться справедливым лишь для остроугольных треугольников.

10.36*. а) $1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$;

б) $1 < \sin(\alpha/2) + \sin(\beta/2) + \sin(\gamma/2) \leq 3/2$.

10.37*. а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2$;

б) $\cos(\alpha/2) + \cos(\beta/2) + \cos(\gamma/2) \leq 3\sqrt{3}/2$.

10.38*. а) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2) \geq \sqrt{3}$.

10.39*. а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) \geq 3\sqrt{3}$.

б) Для остроугольного треугольника

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}.$$

10.40*. а) $\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) \leq 1/8$;

б) $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1/8$.

10.41*. а) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/8$;

б) $\cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) \leq 3\sqrt{3}/8$.

10.42*. а) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq 3/4$.

б) Для тупоугольного треугольника

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma > 1.$$

10.43*. а) $\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha \leq 3/4$.

10.44*. Для остроугольного треугольника

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha).$$

§7. Неравенства для углов треугольника

10.45. Докажите, что $1 - \sin(\alpha/2) \geq 2 \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2)$.

10.46. Докажите, что $\sin(\gamma/2) \leq c/(a + b)$.

10.47*. Докажите, что если $a + b < 3c$, то $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) < 1/2$.

10.48*. Пусть α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что если $\alpha < \beta < \gamma$, то $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

10.49*. Докажите, что $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma \leq 3/2$.

10.50*. На медиане BM треугольника ABC взята точка X . Докажите, что если $AB < BC$, то $\angle XAB > \angle XCB$.

10.51. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный.

10.52*. Из медиан треугольника с углами α, β и γ составлен треугольник с углами α_m, β_m и γ_m (угол α_m лежит против медианы AA_1 и т. д.) Докажите, что если $\alpha > \beta > \gamma$, то $\alpha > \alpha_m, \alpha > \beta_m, \gamma_m > \beta > \alpha_m, \beta_m > \gamma$ и $\gamma_m > \gamma$.

См. также задачи 10.91, 10.92, 10.94.

§8. Неравенства для площади треугольника

10.53. Докажите, что:

а) $3\sqrt{3}r^2 \leq S \leq p^2/3\sqrt{3}$;

б) $S \leq (a^2 + b^2 + c^2)/4\sqrt{3}$.

10.54*. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

10.55*. Докажите, что

а) $S^3 \leq (\sqrt{3}/4)^3(abc)^2$;

$$\text{б) } \sqrt[3]{h_a h_b h_c} \leq \sqrt[4]{3} \sqrt{S} \leq \sqrt[3]{r_a r_b r_c}.$$

* * *

10.56*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 , причем AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $S_{A_1 B_1 C_1} / S_{ABC} \leq 1/4$.

10.57*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1 и C_1 . Пусть $a = S_{AB_1 C_1}, b = S_{A_1 B C_1}, c = S_{A_1 B_1 C}$ и $u = S_{A_1 B_1 C_1}$. Докажите, что

$$u^3 + (a + b + c)u^2 \geq 4abc.$$

10.58*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что площадь одного из треугольников $AB_1 C_1, A_1 B C_1, A_1 B_1 C$ не превосходит:

- а) $S_{ABC}/4$;
 б) $S_{A_1 B_1 C_1}$.

См. также задачи 9.33, 9.37, 9.40, 10.9, 20.1, 20.7.

§9. Против большей стороны лежит больший угол

10.59. Докажите, что $\angle ABC < \angle BAC$ тогда и только тогда, когда $AC < BC$, т. е. против большего угла треугольника лежит большая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.

10.60. Докажите, что в треугольнике угол A острый тогда и только тогда, когда $m_a > a/2$.

10.61*. Пусть $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1, \angle C > \angle C_1, \angle D < \angle D_1$.

10.62*. В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM . Докажите, что $\angle B \leq 60^\circ$.

10.63*. Докажите, что выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами, углы которого удовлетворяют неравенствам $\angle A \geq \angle B \geq \angle C \geq \angle D \geq \angle E$, является правильным.

§10. Отрезок внутри треугольника меньше наибольшей стороны

10.64. а) Внутри треугольника ABC расположен отрезок MN . Докажите, что длина MN не превосходит наибольшей стороны треугольника.

б) Внутри выпуклого многоугольника расположен отрезок MN . Докажите, что длина MN не превосходит наибольшей стороны или наибольшей диагонали этого многоугольника.

10.65*. Внутри сектора AOB круга радиуса $R = AO = BO$ лежит отрезок MN . Докажите, что $MN \leq R$ или $MN \leq AB$. (Предполагается, что $\angle AOB < 180^\circ$.)

10.66*. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C . В области, ограниченной отрезками AB , AC и меньшей дугой BC , расположен отрезок. Докажите, что его длина не превышает AB .

10.67*. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник. Докажите, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

10.68*. Даны треугольник ABC со сторонами $a > b > c$ и произвольная точка O внутри его. Пусть прямые AO , BO , CO пересекают стороны треугольника в точках P , Q , R . Докажите, что $OP + OQ + OR < a$.

§11. Неравенства для прямоугольных треугольников

Во всех задачах этого параграфа ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C .

10.69. Докажите, что $c^n > a^n + b^n$ при $n > 2$.

10.70. Докажите, что $a + b < c + h_c$.

10.71*. Докажите, что для прямоугольного треугольника $0,4 < r/h < 0,5$, где h — высота, опущенная из вершины прямого угла.

10.72*. Докажите, что $c/r \geq 2(1 + \sqrt{2})$.

10.73*. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 > 29r^2$.

§12. Неравенства для остроугольных треугольников

10.74. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}.$$

10.75. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

10.76. Докажите, что если треугольник не тупоугольный, то $m_a + m_b + m_c \geq 4R$.

10.77*. Докажите, что если в остроугольном треугольнике $h_a = l_b = m_c$, то этот треугольник равносторонний.

10.78*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не превосходит половины периметра треугольника ABC .

10.79*. Пусть $\angle A < \angle B < \angle C < 90^\circ$. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит внутри треугольника BOH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот.

10.80*. Пусть h — наибольшая высота нетупоугольного треугольника. Докажите, что $r + R \leq h$.

10.81*. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что

$$2(B_1C_1 \cos \alpha + C_1A_1 \cos \beta + A_1B_1 \cos \gamma) \geq a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma.$$

* * *

10.82*. Докажите, что треугольник со сторонами a, b и c остроугольный тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.

10.83*. Докажите, что треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда $p > 2R + r$.

10.84*. Докажите, что треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда на его сторонах BC, CA и AB можно выбрать такие внутренние точки A_1, B_1 и C_1 , что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

10.85*. Докажите, что треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда длины его проекций на три различных направления равны.

См. также задачи 9.93, 10.39, 10.44, 10.48, 10.62.

§13. Неравенства в треугольниках

10.86. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его стороны в точках M и N . Докажите, что $NO \leq 2MO$.

10.87. Докажите, что если треугольник ABC лежит внутри треугольника $A'B'C'$, то $r_{ABC} < r_{A'B'C'}$.

10.88. В треугольнике ABC сторона c наибольшая, а a наименьшая. Докажите, что $l_c \leq h_a$.

10.89. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны. Докажите, что $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \geq 2/3$.

10.90. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC с основанием AC проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке M и пересекающая сторону AB в точке N . Докажите, что $AN > CM$.

10.91*. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD , медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. В каких пределах может изменяться величина угла A ?

10.92*. В треугольнике ABC стороны равны a, b, c ; соответственные углы (в радианах) равны α, β, γ . Докажите, что

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

10.93*. Внутри треугольника ABC взята точка O . Докажите, что $AO \sin BOC + BO \sin AOC + CO \sin AOB \leq p$.

10.94*. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что $CD = CB$. Докажите, что угол ABD не острый.

10.95*. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM . Докажите, что если $AB > BC$, то $AM > MK > KC$.

10.96*. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки X, Y, Z так, что прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке O . Докажите, что из отношений $OA : OX, OB : OY, OC : OZ$ по крайней мере одно не больше 2 и одно не меньше 2.

10.97*. Окружность S_1 касается сторон AC и AB треугольника ABC , окружность S_2 касается сторон BC и AB , кроме того, S_1 и S_2 касаются друг друга внешним образом. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса вписанной окружности S .

См. также задачи 14.26, 17.16, 17.18.

Задачи для самостоятельного решения

10.98. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, $P = a + b + c$, $Q = ab + bc + ca$. Докажите, что $3Q < P^2 < 4Q$.

10.99. Докажите, что произведение любых двух сторон треугольника больше $4Rr$.

10.100. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1 . Докажите, что $A_1C < AC$.

10.101. Докажите, что если $a > b$ и $a + h_a \leq b + h_b$, то $\angle C = 90^\circ$.

10.102. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $ab + bc + ca \geq (AO + BO + CO)^2$.

10.103. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники с центрами D, E и F . Докажите, что $S_{DEF} \geq S_{ABC}$.

10.104. На плоскости даны треугольники ABC и MNK , причем прямая MN проходит через середины сторон AB и AC , а в пересечении этих треугольников образуется шестиугольник площади S с попарно параллельными противоположными сторонами. Докажите, что $3S < S_{ABC} + S_{MNC}$.

Решения

10.1. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M . Так как $BC > AC$, то точки A и C лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB , а значит, по ту же сторону лежат медиана CC_1 и ее точка M . Следовательно, $AM < BM$, т. е. $m_a < m_b$.

10.2. Предположим, например, что $a > b$. Тогда $m_a < m_b$ (задача 10.1). А так как четырехугольник A_1MB_1C описанный, то $\frac{a}{2} + \frac{m_b}{3} = \frac{b}{2} + \frac{m_a}{3}$, т. е. $(a-b)/2 = (m_a - m_b)/3$. Получено противоречие.

10.3. Пусть, например, $BC > AC$. Тогда $MA < MB$ (см. задачу 10.1), поэтому $BC + MB + MC > AC + MA + MC$.

10.4. а) Так как $c \leq a + b$, то $c^2 \leq (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$.

б) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Согласно задаче а) $MA^2 + MB^2 \geq AB^2/2$, т. е. $\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} \geq c^2/2$.

10.5. а) Пусть M — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности треугольника ABC . Тогда $AO^2 + BO^2 + CO^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MO})^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MO}) + 3MO^2$. Так как $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$, то $AO^2 + BO^2 + CO^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MO^2 \geq AM^2 + BM^2 + CM^2$, т. е. $3R^2 \geq 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)/9$.

б) Достаточно заметить, что $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$ (см. приложение к гл. 9).

10.6. Формулу Герона можно переписать в виде $16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. А так как $m_c^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/4$ (задача 12.11, а)), то неравенства $m_c^2 \leq ((a^2 + b^2)/2c)^2$ и $m_c^2 > ((a^2 - b^2)/2c)^2$ эквивалентны неравенствам $16S^2 \leq 4a^2b^2$ и $16S^2 > 0$ соответственно.

10.7. Пусть $y = a^2 + b^2 + c^2$ и $y_1 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Тогда $3y = 4y_1$ (задача 12.11, б)), $y < 2x$ (задача 9.7) и $2x_1 + y_1 < 2x + y$, так как $(m_a + m_b + m_c)^2 < (a + b + c)^2$ (см. задачу 9.2). Сложив неравенство $8x_1 + 4y_1 < 8x + 4y$ с равенством $3y = 4y_1$, получим $8x_1 < y + 8x < 10x$, т. е. $x_1/x < 5/4$.

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Достроим треугольник AMB до параллелограмма $AMBN$. Применив к треугольнику AMN доказанное утверждение, получим $(x/4)/(4x_1/9) < 5/4$, т. е. $x/x_1 < 20/9$.

10.8. Ясно, что $h_a \leq b, h_b \leq c, h_c \leq a$, причем по крайней мере одно из этих неравенств строгое. Поэтому $h_a + h_b + h_c < a + b + c$.

10.9. Пусть $h_a > 1$ и $h_b > 1$. Тогда $a \geq h_b > 1$. Поэтому $S = ah_a/2 > 1/2$.

10.10. По условию $BH \geq AC$, а так как перпендикуляр короче наклонной, то $BH \geq AC \geq AM$. Аналогично $AM \geq BC \geq BH$. Поэтому $BH = AM = AC = BC$. Поскольку $AC = AM$, то отрезки AC и AM совпадают, т. е. $\angle C = 90^\circ$, а так как $AC = BC$, то углы треугольника ABC равны $45, 45, 90^\circ$.

10.11. Ясно, что $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{a+b}{2S} = \frac{a+b}{(a+b+c)r}$ и $a+b+c < 2(a+b) < 2(a+b+c)$.

10.12. Так как $ah_a = 2S = r(a + b + c)$, то $h_a = r \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$. Сложив такие равенства для h_a, h_b и h_c и воспользовавшись неравенством $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, получим требуемое.

10.13. Так как $h_a - h_b = 2S(1/a - 1/b) = 2S(b - a)/ab$ и $2S \leq ab$, то $h_a - h_b \leq b - a$.

10.14. Согласно задаче 12.21 $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$. Кроме того, $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq 2/\sqrt{r_b r_c}$.

10.15. Так как $2 \sin \beta \sin \gamma = \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) \leq 1 + \cos \alpha$, то

$$\frac{h_a}{a} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} \leq \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

10.16. Так как $b/2R = \sin \beta$, то после домножения на $2r$ переходим к неравенству $(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \leq 3 \sin \beta (a^2 + ac + c^2)$. Вычитая из обеих частей $6S$, получаем $a(h_b + h_c) + b(h_a + h_c) + c(h_a + h_b) \leq 3 \sin \beta (a^2 + c^2)$. Так как, например, $ah_b = a^2 \sin \gamma = a^2 c/2R$, переходим к неравенству $a(b^2 + c^2) - 2b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \leq 0$. Для доказательства последнего неравенства рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2(a + c) - 2x(a^2 + c^2) + ac(a + c)$. Легко проверить, что $f(a) = -a(a - c)^2 \leq 0$ и $f(c) = -c(a - c)^2 \leq 0$. А так как коэффициент при x положителен и $a \leq b \leq c$, то $f(b) \leq 0$.

10.17. Согласно задаче 12.35, а) $l_a^2 = 4bc r(p - a)/(b + c)^2$. Кроме того, $4bc \leq (b + c)^2$.

10.18. Ясно, что $h_a/l_a = \cos((\beta - \gamma)/2)$. Согласно задаче 12.36, а)

$$2r/R = 8 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = 4 \sin(\alpha/2) [\cos((\beta - \gamma)/2) - \cos((\beta + \gamma)/2)] = 4x(q - x), \quad \text{где } x = \sin(\alpha/2) \text{ и } q = \cos((\beta - \gamma)/2).$$

Остается заметить, что $4x(q - x) \leq q^2$.

10.19. а) Согласно задаче 10.17 $l_a^2 \leq p(p - a)$. Складывая три аналогичных неравенства, получаем требуемое.

б) Для любых чисел l_a, l_b и l_c справедливо неравенство $(l_a + l_b + l_c)^2 \leq 3(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2)$.

10.20. Достаточно доказать, что $\sqrt{p(p - a)} + \sqrt{p(p - b)} + m_c \leq \sqrt{3p}$. Можно считать, что $p = 1$; пусть $x = 1 - a$ и $y = 1 - b$. Тогда $m_c^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/4 = 1 - (x + y) + (x - y)^2/4 = m(x, y)$. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{m(x, y)}$. Нужно доказать, что $f(x, y) \leq \sqrt{3}$ при $x, y \geq 0$ и $x + y \leq 1$. Пусть $g(x) = f(x, x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{1 - 2x}$. Так как $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$, то при возрастании x от 0 до $1/3$ $g(x)$ возрастает от 1 до $\sqrt{3}$, а при возрастании x от $1/3$ до $1/2$ $g(x)$ убывает от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{2}$. Введем новые переменные $d = x - y$ и $q = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Легко проверить, что $(x - y)^2 - 2q^2(x + y) + q^4 = 0$, т. е. $x + y = (d^2 + q^4)/2q^2$. Поэтому

$$f(x, y) = q + \sqrt{1 - \frac{q^2}{2} - \frac{d^2(2 - q^2)}{4q^2}}.$$

Заметим теперь, что $q^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x + y) \leq 2$, т. е. $d^2(2 - q^2)/4q^2 \geq 0$. Следовательно, при фиксированном q значение функции $f(x, y)$ максимально, если $d = 0$, т. е. $x = y$; случай $x = y$ разобран выше.

10.21. Ясно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (h_a + h_b + h_c)/2S$. Кроме того, $9r \leq h_a + h_b + h_c$ (задача 10.12) и $h_a + h_b + h_c \leq m_a + m_b + m_c \leq 9R/2$ (задача 10.5, б)).

10.22. Докажем сначала, что $b + c - a < 2bc/a$. Пусть $2x = b + c - a$, $2y = a + c - b$ и $2z = a + b - c$. Требуется доказать, что $2x < 2(x + y)(x + z)/(y + z)$, т. е. $xy + xz < xy + xz + x^2 + yz$. Последнее неравенство очевидно.

Так как $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a) - 2bc$, то

$$\frac{2bc \cos \alpha}{b + c} = b + c - a + \frac{(b + c - a)a}{b + c} - \frac{2bc}{b + c}.$$

Выражение в квадратных скобках отрицательно, так как $b + c - a < 2bc/a$.

10.23. Согласно задаче 12.30 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 4p^2 - 2r^2 - 2p^2 - 8rR = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$ и $abc = 4prR$. Таким образом, нужно доказать неравенство $2p^2 - 2r^2 - 8rR < 2(1 - 4prR)$, где $p = 1$. Это неравенство очевидно.

10.24. Согласно задаче 12.30 $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr$. Кроме того, $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ (задача 10.34).

10.25. Так как $r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = c = r_c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$, то

$$c^2 = rr_c \left(2 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \geq 4rr_c.$$

10.26. Достаточно воспользоваться результатами задач 12.36, а) и 10.45. Заметим также, что $x(1 - x) \leq 1/4$, т. е. $r/R \leq 1/2$.

10.27. Так как $h_c \leq a$ и $h_c \leq b$, то $4S = 2ch_c \leq c(a + b)$. Поэтому $6r(a + b + c) = 12S \leq 4ab + 4S \leq (a + b)^2 + c(a + b) = (a + b)(a + b + c)$.

10.28. Так как $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}$ (задача 12.21), то $\frac{r_a}{h_a} = \frac{r_a}{r_b} + \frac{r_a}{r_c} / 2$. Запишем аналогичные равенства для r_b/h_b и r_c/h_c и сложим их. Учитывая, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, получаем требуемое.

10.29. Так как $Rr = RS/p = abc/4p$ (см. задачу 12.1), то приходим к неравенству $27abc \leq 8p^3 = (a + b + c)^3$.

Так как $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ для любых чисел a, b и c , то $p^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)/4 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ (см. задачу 12.11, б)). Остается заметить, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 27R^2/4$ (задача 10.5, а)).

10.30. Так как $OA = r/\sin(A/2)$, $OB = r/\sin(B/2)$ и $OC = r/\sin(C/2)$, а углы $\angle A/2$, $\angle B/2$ и $\angle C/2$ острые, то $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. Следовательно, $\angle A \leq 60^\circ$ и $\angle B \leq 90^\circ$, а значит, $\sin(A/2) \leq 1/2$ и $\sin(B/2) \leq 1/\sqrt{2}$.

10.31. Если $\angle C \geq 120^\circ$, то сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин не меньше $a + b$ (задача 12.21); кроме того, $a + b \geq 6r$ (задача 12.27).

Если все углы треугольника меньше 120° , то в точке минимума суммы расстояний до вершин треугольника квадрат этой суммы равен $(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}S$ (задача 18.22, б)). Далее, $(a^2 + b^2 + c^2)/2 \geq 2\sqrt{3}S$ (задача 10.53, б)) и $4\sqrt{3}S \geq 36r^2$ (задача 10.53, а)).

10.32. Пусть $\alpha = \cos(A/2)$, $\beta = \cos(B/2)$ и $\gamma = \cos(C/2)$. Согласно задаче 12.17, б) $a/r_a = \alpha/\beta\gamma$, $b/r_b = \beta/\gamma\alpha$ и $c/r_c = \gamma/\alpha\beta$. Поэтому после домножения на $\alpha\beta\gamma$ требуемое неравенство переписется в виде $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)$. Так как $\alpha^2 = (1 + \cos A)/2$, $\beta^2 = (1 + \cos B)/2$ и $\gamma^2 = (1 + \cos C)/2$, то переходим к неравенству $\cos A + \cos B + \cos C + 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \leq 3$. Остается воспользоваться результатами задач 10.36 и 10.43.

10.33. а) Сложив равенство $4R + r = r_a + r_b + r_c$ (задача 12.24) с неравенством $R - 2r \geq 0$ (задача 10.26), получим

$$\begin{aligned} 5R - r &\geq r_a + r_b + r_c = pr((p-a)^{-1} + (p-b)^{-1} + (p-c)^{-1}) = \\ &= p(ab + bc + ca - p^2)/S = p(2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2)/4S. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ (задача 10.54).

б) Легко проверить, что $4R - r_a = r_b + r_c - r = pr/(p-b) + pr/(p-c) - pr/p = (p-a)(p^2 - bc)/S$. Остается заметить, что $4(p^2 - bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc + ca) = 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc) \geq 4\sqrt{3}S + 2(a^2 + (b-c)^2)$.

10.34. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, $F = (a-b)(b-c)(c-a) = A - B$, где $A = ab^2 + bc^2 + ca^2$ и $B = a^2b + b^2c + c^2a$. Докажем, что требуемые неравенства можно получить, преобразовав очевидное неравенство $F^2 \geq 0$. Пусть $\sigma_1 = a + b + c = 2p$, $\sigma_2 = ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR$ и $\sigma_3 = abc = 4prR$ (см. задачу 12.30). Можно проверить, что $F^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$. В самом деле, $(\sigma_1\sigma_2)^2 - F^2 = (A + B + 3abc)^2 - (A - B)^2 = 4AB + 6(A + B)\sigma_3 + 9\sigma_3^2 = 4(a^3b^3 + \dots) + 4(a^4bc + \dots) + 6(A + B)\sigma_3 + 21\sigma_3^2$. Ясно также, что $4\sigma_2^3 = 4(a^3b^3 + \dots) + 12(A + B)\sigma_3 + 24\sigma_3^2$, $4\sigma_1^3\sigma_3 = 4(a^4bc + \dots) + 12(A + B)\sigma_3 + 24\sigma_3^2$ и $18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 18(A + B)\sigma_3 + 54\sigma_3^2$.

Выразив σ_1, σ_2 и σ_3 через p, r и R , получим

$$F^2 = -4r^2[(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 - 4R(R - 2r)^3] \geq 0.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} p^2 &\geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} = \\ &= [(R - 2r) - \sqrt{R(R - 2r)}]^2 + 16Rr - 5r^2 \geq 16Rr - 5r^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p^2 &\leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} = \\ &= 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - [(R - 2r) - \sqrt{R(R - 2r)}]^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \end{aligned}$$

10.35. Так как $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ и $r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$ (задачи 10.24 и 10.25), то $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2p^2$. Согласно задаче 10.34 $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, поэтому $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 8R^2 - 5r^2$. Остается заметить, что $r \leq R/2$ (задача 10.26).

10.36. а) Согласно задаче 12.38 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (R + r)/R$. Кроме того, $r \leq R/2$ (задача 10.26).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.37. а) Ясно, что $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = p/R$. Кроме того, $p \leq 3\sqrt{3}R/2$ (задача 10.29).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.38. а) Согласно задаче 12.44, а) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4S$. Кроме того, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ (задача 10.53, б)).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.39. а) Согласно задаче 12.44, а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) = p/r$. Кроме того, $p \geq 3\sqrt{3}r$ (задача 10.53, а)).

б) Следует из а) (см. замечание). Для тупоугольного треугольника $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma < 0$; см., например, задачу 12.46.

10.40. а) Согласно задаче 12.36, а) $\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = r/4R$. Кроме того, $r \leq R/2$ (задача 10.26).

б) Для остроугольного треугольника следует из а) (см. замечание). Для тупоугольного треугольника $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma < 0$.

10.41. а) Так как $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$, то, используя результаты задач 12.36, а) и 12.36, в), получаем $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = pr/2R^2$. Кроме того, $p \leq 3\sqrt{3}R/2$ (задача 10.29) и $r \leq R/2$ (задача 10.26).

б) Следует из а) (см. замечание).

10.42. Согласно задаче 12.39, б) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Остается заметить, что $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1/8$ (задача 10.40, б)), а для тупоугольного треугольника $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma < 0$.

10.43. Ясно, что $2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha) = (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma$. Остается заметить, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$ (задача 10.36, а)) и $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq 3/4$ (задача 10.42).

10.44. Пусть продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC с углами α, β и γ пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 . Тогда $S_{ABC} = R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)/2$ и $S_{A_1B_1C_1} = R^2(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha))/2$. Остается воспользоваться результатами задач 12.72 и 10.26.

10.45. Ясно, что $2 \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = \cos((\beta - \gamma)/2) - \cos((\beta + \gamma)/2) \leq 1 - \sin(\alpha/2)$.

10.46. Опустим из вершин A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на биссектрису угла ACB . Тогда $AB \geq AA_1 + BB_1 = b \sin(\gamma/2) + a \sin(\gamma/2)$.

10.47. Согласно задаче 12.32 $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) = (a + b - c)/(a + b + c)$. А так как $a + b < 3c$, то $a + b - c < (a + b + c)/2$.

10.48. Так как $\pi - 2\alpha > 0, \pi - 2\beta > 0, \pi - 2\gamma > 0$ и $(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi$, существует треугольник с углами $\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma$. Длины сторон, противолежащих углам $\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma$, пропорциональны числам $\sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma$. Поскольку $\pi - 2\alpha > \pi - 2\beta > \pi - 2\gamma$ и против большего угла лежит большая сторона, то $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

10.49. Заметим сначала, что $\cos 2\gamma - \cos(\pi - \alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta$. Поэтому $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta$. Так как $a \cos \varphi + b \sin \varphi \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. приложение к гл. 9), то $(1 - \cos 2\beta) \cos 2\alpha + \sin 2\beta \sin 2\alpha + \cos 2\beta \leq \sqrt{(1 - \cos 2\beta)^2 + \sin^2 2\beta} + \cos 2\beta = 2|\sin \beta| + 1 - 2\sin^2 \beta$. Остается заметить, что наибольшее значение квадратного трехчлена $2t + 1 - 2t^2$ достигается в точке $t = 1/2$ и равно $3/2$. Максимальное значение соответствует углам $\alpha = \beta = 30^\circ, \gamma = 120^\circ$.

10.50. Так как $AB < CB, AX < CX$ и $S_{ABX} = S_{BCX}$, то $\sin XAB > \sin XCB$. Учитывая, что угол XCB острый, получаем требуемое.

10.51. Если углы треугольника ABC равны α, β и γ , то углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $(\beta + \gamma)/2, (\gamma + \alpha)/2$ и $(\alpha + \beta)/2$.

10.52. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 . Достроив треугольник AMB до параллелограмма $AMBN$, получим $\angle BMC_1 = \alpha_m$ и $\angle AMC_1 = \beta_m$. Легко проверить, что $\angle C_1CB < \gamma/2$ и $\angle B_1BC < \beta/2$. Следовательно, $\alpha_m = \angle C_1CB + \angle B_1BC < (\beta + \gamma)/2 < \beta$. Аналогично $\gamma_m = \angle A_1AB + \angle B_1BA > (\alpha + \beta)/2 > \beta$.

Предположим сначала, что треугольник ABC остроугольный. Тогда точка H пересечения высот лежит внутри треугольника AMC_1 . Следовательно, $\angle AMB < \angle AHB$, т. е. $\pi - \gamma_m < \pi - \gamma$, и $\angle CMB > \angle CHB$, т. е. $\pi - \alpha_m < \pi - \alpha$. Предположим теперь, что угол α тупой. Тогда угол CC_1B тоже тупой, а значит,

угол α_m острый, т. е. $\alpha_m < \alpha$. Опустим из точки M перпендикуляр MX на BC . Тогда $\gamma_m > \angle XMB > 180^\circ - \angle HAB > \gamma$.

Так как $\alpha > \alpha_m$, то $\alpha + (\pi - \alpha_m) > \pi$, т. е. точка M лежит внутри описанной окружности треугольника AB_1C_1 . Следовательно, $\gamma = \angle AB_1C_1 < \angle AMC_1 = \beta_m$. Аналогично $\alpha = \angle CB_1A_1 > \angle CMA_1 = \beta_m$, так как $\gamma + (\pi - \gamma_m) < \pi$.

10.53. а) Ясно, что $S^2/p = (p-a)(p-b)(p-c) \leq ((p-a+p-b+p-c)/3)^3 = p^3/27$. Поэтому $pr = S \leq p^2/3\sqrt{3}$, т. е. $r \leq p/3\sqrt{3}$. Домножив последнее неравенство на r , получим требуемое.

б) Так как $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, то $S \leq p^2/3\sqrt{3} = (a+b+c)^2/12\sqrt{3} \leq (a^2+b^2+c^2)/4\sqrt{3}$.

10.54. Пусть $x = p-a, y = p-b, z = p-c$. Тогда $(a^2 - (b-c)^2) + (b^2 - (a-c)^2) + (c^2 - (a-b)^2) = 4(p-b)(p-c) + 4(p-a)(p-c) + 4(p-a)(p-b) = 4(yz + zx + xy)$ и

$$4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3(x+y+z)xyz}.$$

Итак, нужно доказать неравенство $xy + yz + zx \geq \sqrt{3(x+y+z)xyz}$. После возведения в квадрат и сокращения получаем

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + y^2xz + z^2xy.$$

Складывая неравенства $x^2yz \leq x^2(y^2 + z^2)/2, y^2xz \leq y^2(x^2 + z^2)/2$ и $z^2xy \leq z^2(x^2 + y^2)/2$, получаем требуемое.

10.55. а) Перемножив три равенства вида $S = (ab \sin \gamma)/2$, получим $S^3 = ((abc)^2 \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha)/8$. Остается воспользоваться результатом задачи 10.41.

б) Так как $(h_a h_b h_c)^2 = (2S)^6/(abc)^2$ и $(abc)^2 \geq (4/\sqrt{3})^3 S^3$, то $(h_a h_b h_c)^2 \leq (2S)^6(\sqrt{3}/4)^3/S^3 = (\sqrt{3}S)^3$.

Так как $(r_a r_b r_c)^2 = S^4/r^2$ (задача 12.18, в) и $r^2(\sqrt{3})^3 \leq S$ (задача 10.53, а)), то $(r_a r_b r_c)^2 \geq (\sqrt{3}S)^3$.

10.56. Пусть $p = BA_1/BC, q = CB_1/CA$ и $r = AC_1/AC$. Тогда $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 1 - p(1-r) - q(1-p) - r(1-q) = 1 - (p+q+r) + (pq+qr+rp)$. По теореме Чевы (задача 5.77) $pqr = (1-p)(1-q)(1-r)$, т. е. $2pqr = 1 - (p+q+r) + (pq+qr+rp)$; кроме того, $(pqr)^2 = p(1-p)q(1-q)r(1-r) \leq (1/4)^3$. Следовательно, $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 2pqr \leq \frac{1}{4}$.

10.57. Можно считать, что площадь треугольника ABC равна 1. Тогда $a+b+c = 1-u$, поэтому данное неравенство переписется в виде $u^2 \geq 4abc$. Пусть $x = BA_1/BC, y = CB_1/CA$ и $z = AC_1/AB$. Тогда $u = 1 - (x+y+z) + xy + yz + zx$ и $abc = xyz(1-x)(1-y)(1-z) = v(u-v)$, где $v = xyz$. Поэтому мы переходим к неравенству $u^2 \geq 4v(u-v)$, т. е. $(u-2v)^2 \geq 0$. Последнее неравенство очевидно.

10.58. а) Пусть $x = BA_1/BC, y = CB_1/CA$ и $z = AC_1/AB$. Можно считать, что площадь треугольника ABC равна 1. Тогда $S_{AB_1C_1} = z(1-y), S_{A_1BC_1} = x(1-z)$ и $S_{A_1B_1C} = y(1-x)$. Так как $x(1-x) \leq 1/4, y(1-y) \leq 1/4$ и $z(1-z) \leq 1/4$, то произведение чисел $S_{AB_1C_1}, S_{A_1BC_1}$ и $S_{A_1B_1C}$ не превосходит $(1/4)^3$, а значит, одно из них не превосходит $1/4$.

б) Пусть для определенности $x \geq 1/2$. Если $y \leq 1/2$, то при гомотетии с центром C и коэффициентом 2 точки A_1 и B_1 переходят во внутренние точки сторон BC и AC , а значит, $S_{A_1B_1C} \leq S_{A_1B_1C_1}$. Поэтому можно считать, что $y \geq 1/2$ и аналогично $z \geq 1/2$. Пусть $x = (1+\alpha)/2, y = (1+\beta)/2$ и $z = (1+\gamma)/2$. Тогда $S_{AB_1C_1} = (1+\gamma-\beta-\beta\gamma)/4, S_{A_1BC_1} = (1+\alpha-\gamma-\alpha\gamma)/4$ и $S_{A_1B_1C} = (1+\beta-\alpha-\alpha\beta)/4$, а значит, $S_{A_1B_1C_1} = (1+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)/4$ и $S_{AB_1C_1} + S_{A_1BC_1} + S_{A_1B_1C} \leq 3/4$.

10.59. Достаточно доказать, что если $AC < BC$, то $\angle ABC < \angle BAC$. Так как $AC < BC$, то на стороне BC можно выбрать точку A_1 так, что $A_1C = AC$. Тогда $\angle BAC > \angle A_1AC = \angle AA_1C > \angle ABC$.

10.60. Пусть A_1 — середина стороны BC . Если $AA_1 < BC/2 = BA_1 = A_1C$, то $\angle BAA_1 > \angle ABA_1$ и $\angle CAA_1 > \angle ACA_1$, поэтому $\angle A = \angle BAA_1 + \angle CAA_1 > \angle B + \angle C$, т. е. $\angle A > 90^\circ$. Аналогично, если $AA_1 > BC/2$, то $\angle A < 90^\circ$.

10.61. Если мы фиксируем две стороны треугольника, то чем больше будет угол между ними, тем больше будет третья сторона. Поэтому из неравенства $\angle A > \angle A_1$ следует, что $BD > B_1D_1$, т. е. $\angle C > \angle C_1$. Предположим теперь, что $\angle B \geq \angle B_1$. Тогда $AC \geq A_1C_1$, т. е. $\angle D > \angle D_1$. Поэтому $360^\circ = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D > \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 360^\circ$. Получено противоречие; следовательно, $\angle B < \angle B_1$ и $\angle D < \angle D_1$.

10.62. Пусть точка B_1 симметрична B относительно точки M . Так как высота, опущенная из точки M на сторону BC , равна половине AH , т. е. половине BM , то $\angle MBC = 30^\circ$. Поскольку AH — наибольшая из высот, то BC — наименьшая из сторон. Поэтому $AB_1 = BC \leq AB$, т. е. $\angle ABB_1 \leq \angle AB_1B = \angle MBC = 30^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle MBC \leq 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

10.63. Предположим сначала, что $\angle A > \angle D$. Тогда $BE > EC$ и $\angle EBA < \angle ECD$. Так как в треугольнике EBC сторона BE больше стороны EC , то $\angle ECB < \angle EBC$. Поэтому $\angle B = \angle ABE + \angle EBC < \angle ECD + \angle ECB = \angle C$, что противоречит условию задачи. Значит, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Аналогично предположение $\angle B > \angle E$ приводит к неравенству $\angle C < \angle D$. Поэтому $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$.

10.64. Будем проводить доказательство сразу для общего случая. Пусть прямая MN пересекает стороны многоугольника в точках M_1 и N_1 . Ясно, что $MN \leq M_1N_1$. Пусть точка M_1 лежит на стороне AB , а точка N_1 — на PQ . Так как $\angle AM_1N_1 + \angle BM_1N_1 = 180^\circ$, то один из этих углов не меньше 90° . Пусть для определенности $\angle AM_1N_1 \geq 90^\circ$. Тогда $AN_1 \geq M_1N_1$, так как против большего угла лежит большая сторона. Аналогично доказывается, что либо $AN_1 \leq AP$, либо $AN_1 \leq AQ$. Следовательно, длина отрезка MN не превосходит длины отрезка с концами в вершинах многоугольника.

10.65. Отрезок можно продолжить до пересечения с границей сектора, так как при этом его длина только увеличится. Поэтому можно считать, что точки M и N лежат на границе сектора. Возможны три случая.

1. Точки M и N лежат на дуге окружности. Тогда $MN = 2R \sin(MON/2) \leq 2R \sin(AOB/2) = AB$, так как $\angle MON/2 \leq \angle AOB/2 \leq 90^\circ$.

2. Точки M и N лежат на отрезках AO и BO . Тогда MN не превосходит наибольшей стороны треугольника AOB .

3. Одна из точек M и N лежит на дуге окружности, а другая — на отрезке AO или BO . Пусть для определенности M лежит на AO , а N — на дуге окружности. Тогда MN не превосходит наибольшей стороны треугольника ANO . Остается заметить, что $AO = NO = R$ и $AN \leq AB$.

10.66. Если данный отрезок не имеет общих точек с окружностью, то с помощью гомотетии с центром A (и коэффициентом больше 1) его можно перевести в отрезок, имеющий общую точку X с дугой AB и лежащий в нашей области. Проведем через точку X касательную DE к окружности (точки D и E лежат на отрезках AB и AC). Тогда отрезки AD и AE меньше AB и $DE < (DE + AD + AE)/2 = AB$, т. е. все стороны треугольника ADE меньше AB . Так как наш отрезок лежит внутри треугольника ADE (или на его стороне DE), то его длина не превосходит AB .

10.67. Предположим сначала, что центр O окружности лежит внутри данного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Рассмотрим углы $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_5OA_1$. В сумме эти пять углов дают 2π , поэтому один из них, например A_1OA_2 , не превосходит $2\pi/5$. Тогда отрезок A_1A_2 можно поместить в сектор OBC , где $\angle BOC = 2\pi/5$ и точки B и C расположены на окружности. В треугольнике OBC наибольшей стороной является BC , поэтому $A_1A_2 \leq BC$.

Если точка O не принадлежит данному пятиугольнику, то углы A_1OA_2, \dots, A_5OA_1 дают в объединении угол меньше π , причем каждая точка этого угла покрыта ими дважды. Поэтому в сумме эти пять углов дают меньше 2π , т. е. один из них меньше $2\pi/5$. Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему случаю.

Если точка O лежит на стороне пятиугольника, то один из рассматриваемых углов не больше $\pi/4$, а если она является его вершиной, то один из них не больше $\pi/3$. Ясно, что $\pi/4 < \pi/3 < 2\pi/5$.

10.68. Возьмем на сторонах BC, CA, AB точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 так, что $B_1C_2 \parallel BC, C_1A_2 \parallel CA, A_1B_2 \parallel AB$ (рис. 10.1). В треугольниках $A_1A_2O, B_1B_2O, C_1C_2O$ наибольшими сторонами являются A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Поэтому $OP < A_1A_2, OQ < B_1B_2, OR < C_1C_2$, т. е. $OP + OQ + OR < A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = A_1A_2 + CA_2 + BA_1 = BC$.

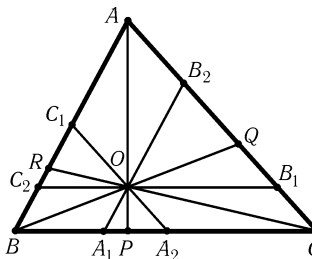


Рис. 10.1

10.69. Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то $c^n = (a^2 + b^2)c^{n-2} = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2} > a^n + b^n$.

10.70. Высота любого треугольника больше $2r$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике $2r = a + b - c$ (задача 5.16).

10.71. Так как $ch = 2S = r(a + b + c)$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{x + 1}$, где $x = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2}}$. Так как $0 < 2ab/(a^2 + b^2) \leq 1$, то $1 < x \leq \sqrt{2}$. Следовательно, $2/5 < 1/(1 + \sqrt{2}) \leq r/h < 1/2$.

10.72. Ясно, что $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ и $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$. Поэтому

$$\frac{c^2}{r^2} = \frac{(a + b + c)^2 c^2}{a^2 b^2} \geq \frac{(2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab})^2 \cdot 2ab}{a^2 b^2} = 4(1 + \sqrt{2})^2.$$

10.73. Согласно задаче 12.11, а) $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2)/4 = 5c^2/4$. Кроме того, $5c^2/4 \geq 5(1 + \sqrt{2})^2 r^2 = (15 + 10\sqrt{2})r^2 > 29r^2$ (см. задачу 10.72).

10.74. Пусть O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Тогда $m_a = AA_1 \leq AO + OA_1 = R + OA_1$. Аналогично $m_b \leq R + OB_1$ и $m_c \leq R + OC_1$. Следовательно,

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq R \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} \right).$$

Остается воспользоваться результатом задачи 12.22 и решением задачи 4.46.

10.75. Согласно задаче 4.47 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2 \cos(\alpha/2)}{l_a} \geq \frac{\sqrt{2}}{l_a}$. Складывая три аналогичных неравенства, получаем требуемое.

сложив их, получим $a \cos \beta \cos \gamma + b \cos \alpha \cos \gamma + c \cos \alpha \cos \beta = (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)/2$.

10.82. Так как $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ (задача 12.39, б)), то треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma < 1$, т. е. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$. Домножая обе части последнего неравенства на $4R^2$, получаем требуемое.

10.83. Достаточно заметить, что $p^2 - (2R + r)^2 = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ (см. задачу 12.41, б)).

10.84. Пусть $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. Если треугольник ABC не остроугольный, то $CC_1 < AC < AA_1$ для любых точек A_1 и C_1 на сторонах BC и AB . Докажем теперь, что для остроугольного треугольника можно выбрать точки A_1, B_1 и C_1 , обладающие требуемым свойством. Для этого достаточно проверить, что существует число x , удовлетворяющее следующим неравенствам: $h_a \leq x < \max(b, c) = c$, $h_b \leq x < \max(a, c) = c$ и $h_c \leq x < \max(a, b) = b$. Остается заметить, что $\max(h_a, h_b, h_c) = h_a$, $\min(b, c) = b$ и $h_a < b$.

10.85. Пусть $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. Предположим сначала, что треугольник ABC остроугольный. При повороте прямой l , в исходном положении параллельной AB , длина проекции треугольника на l будет сначала монотонно изменяться от c до h_b , затем от h_b до a , от a до h_c , от h_c до b , от b до h_a и, наконец, от h_a до c . Так как $h_b < a$, то существует такое число x , что $h_b < x < a$. Легко проверить, что отрезок длиной x встречается на любом из первых четырех интервалов монотонности.

Предположим теперь, что треугольник ABC не остроугольный. При повороте прямой l , в исходном положении параллельной AB , длина проекции треугольника на l монотонно убывает сначала от c до h_b , затем от h_b до h_c ; после этого она монотонно возрастает сначала от h_c до h_a , а затем от h_a до c . Всего получается два интервала монотонности.

10.86. Пусть точки M и N лежат на сторонах AB и AC соответственно. Проведем через вершину C прямую, параллельную стороне AB . Пусть N_1 — точка пересечения этой прямой и прямой MN . Тогда $N_1O : MO = 2$, но $NO \leq N_1O$, поэтому $NO : MO \leq 2$.

10.87. Окружность S , вписанная в треугольник ABC , лежит внутри треугольника $A'B'C'$. Проведя к этой окружности касательные, параллельные сторонам треугольника $A'B'C'$, можно получить треугольник $A''B''C''$, подобный треугольнику $A'B'C'$, для которого S является вписанной окружностью. Поэтому $r_{ABC} = r_{A''B''C''} < r_{A'B'C'}$.

10.88. Биссектриса l_c разбивает треугольник ABC на два треугольника, удвоенные площади которых равны $al_c \sin(\gamma/2)$ и $bl_c \sin(\gamma/2)$. Поэтому $ah_a = 2S = l_c(a + b) \sin(\gamma/2)$. Из условия задачи следует, что $a/(a + b) \leq 1/2 \leq \sin(\gamma/2)$.

10.89. Ясно, что $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = c/h_c \geq c/m_c$. Пусть M — точка пересечения медиан, N — середина отрезка AB . Так как треугольник AMB прямоугольный, $MN = AB/2$. Следовательно, $c = 2MN = 2m_c/3$.

10.90. Так как $BN \cdot BA = BM^2$ и $BM < BA$, то $BN < BM$, а значит, $AN > CN$.

10.91. Проведем через точку B перпендикуляр к стороне AB . Пусть F — точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением стороны AC (рис. 10.3). Докажем, что биссектриса AD , медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB = CF$. В самом деле, пусть L — точка пересечения BM и CH . Биссектриса AD проходит через точку L тогда и только тогда, когда $BA : AM = BL : LM$, но $BL : LM = FC : CM = FC : AM$.

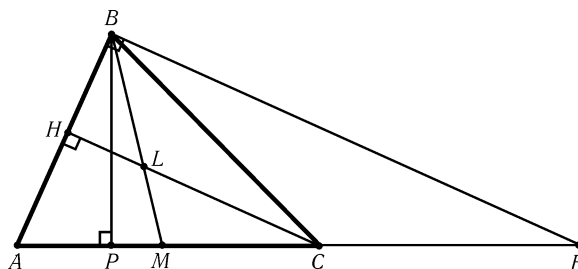


Рис. 10.3

Если на стороне AF некоторого прямоугольного треугольника ABF ($\angle ABF = 90^\circ$) отложить отрезок $CF = AB$, то углы BAC и ABC будут острыми. Остается выяснить, в каких случаях угол ACB будет острым. Опустим из точки B перпендикуляр BP на сторону AF . Угол ACB острый, если $FP > FC = AB$, т. е. $BF \sin A > BF \operatorname{ctg} A$. Следовательно, $1 - \cos^2 A = \sin^2 A > \cos A$, т. е. $\cos A < (\sqrt{5} - 1)/2$. В итоге получаем, что

$$90^\circ > \angle A > \arccos((\sqrt{5} - 1)/2) \approx 51^\circ 50'.$$

10.92. Так как против большей стороны лежит больший угол, то $(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0$, $(b - c)(\beta - \gamma) \geq 0$ и $(a - c)(\alpha - \gamma) \geq 0$. Складывая эти неравенства, получаем

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq a(\beta + \gamma) + b(\alpha + \gamma) + c(\alpha + \beta) = (a + b + c)\pi - a\alpha - b\beta - c\gamma,$$

т. е. $\pi/3 \leq (a\alpha + b\beta + c\gamma)/(a + b + c)$.

Из неравенства треугольника следует, что

$$\alpha(b + c - a) + \beta(a + c - b) + \gamma(a + b - c) > 0,$$

т. е. $a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\alpha + \gamma - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) > 0$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0$, т. е. $(a\alpha + b\beta + c\gamma)/(a + b + c) < \pi/2$.

10.93. Возьмем на лучах OB и OC такие точки C_1 и B_1 , что $OC_1 = OC$ и $OB_1 = OB$. Пусть B_2 и C_2 — проекции точек B_1 и C_1 на прямую, перпендикулярную AO . Тогда $BO \sin AOC + CO \sin AOB = B_2C_2 \leq BC$. Сложив три аналогичных неравенства, получим требуемое. Легко проверить также, что условие $B_1C_1 \perp AO$, $C_1A_1 \perp BO$ и $A_1B_1 \perp CO$ эквивалентно тому, что O — точка пересечения биссектрис.

10.94. Так как $\angle CBD = \angle C/2$ и $\angle B \geq \angle A$, то $\angle ABD = \angle B + \angle CBD \geq (\angle A + \angle B + \angle C)/2 = 90^\circ$.

10.95. По свойству биссектрисы $BM : MA = BC : CA$ и $BK : KC = BA : AC$. Поэтому $BM : MA < BK : KC$, т. е.

$$\frac{AB}{AM} = 1 + \frac{BM}{MA} < 1 + \frac{BK}{KC} = \frac{CB}{CK}.$$

Следовательно, точка M более удалена от прямой AC , чем точка K , т. е. $\angle AKM > \angle KAC = \angle KAM$ и $\angle KMC < \angle MCA = \angle MCK$. Поэтому $AM > MK$ и $MK > KC$ (см. задачу 10.59).

10.96. Предположим, что все данные отношения меньше 2. Тогда $S_{ABO} + S_{AOC} < 2S_{XBO} + 2S_{XOC} = 2S_{OBC}$, $S_{ABO} + S_{OBC} < 2S_{AOC}$ и $S_{AOC} + S_{OBC} < 2S_{ABO}$. Сложив эти неравенства, приходим к противоречию. Аналогично доказывается, что одно из данных соотношений не больше 2.

10.97. Обозначим радиусы окружностей S, S_1 и S_2 через r, r_1 и r_2 . Пусть треугольники AB_1C_1 и A_2BC_2 подобны треугольнику ABC , причем коэффициенты подобия равны r_1/r и r_2/r соответственно. Окружности S_1 и S_2 являются вписанными для треугольников AB_1C_1 и A_2BC_2 . Следовательно, эти треугольники пересекаются, так как иначе окружности S_1 и S_2 не имели бы общих точек. Поэтому $AB_1 + A_2B > AB$, т. е. $r_1 + r_2 > r$.

Глава 11

Задачи на максимум и минимум

Основные сведения

1. Геометрические задачи на максимум и минимум тесно связаны с геометрическими неравенствами, так как для решения этих задач всегда нужно доказать соответствующее геометрическое неравенство и, кроме того, доказать, что обращается в равенство. Поэтому, прежде чем решать задачи на максимум и минимум, следует еще раз посмотреть приложение к гл. 9, обращая особое внимание на условия, при которых нестрогие неравенства становятся равенствами.

2. Для элементов треугольника используются те же обозначения, что и в гл. 9.

3. Задачи на максимум и минимум иногда называются *экстремальными* задачами (от лат. *extremum* — «крайний»).

Вводные задачи

1. Среди всех треугольников с данными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.

2. Внутри треугольника ABC найдите точку, из которой сторона AB видна под наименьшим углом.

3. Докажите, что среди всех треугольников с данными стороной a и высотой h_a наибольшую величину угла α имеет равнобедренный треугольник.

4. Среди всех треугольников с данными сторонами AB и AC ($AB < AC$) найдите тот, у которого радиус описанной окружности максимален.

5. Диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 . Какое наибольшее значение может иметь его площадь?

§1. Треугольник

11.1. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным углом α и площадью S наименьшую длину стороны BC имеет равнобедренный треугольник с основанием BC .

11.2. Докажите, что среди всех треугольников ABC с фиксированным углом α и полупериметром p наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием BC .

11.3. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным полупериметром p наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

11.4. Рассмотрим все остроугольные треугольники с заданными стороной a и углом α . Чему равен максимум суммы квадратов длин сторон b и c ?

11.5. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого максимальна сумма квадратов длин сторон.

11.6*. Периметр треугольника ABC равен $2p$. На сторонах AB и AC взяты точки M и N так, что $MN \parallel BC$ и MN касается вписанной окружности треугольника ABC . Найдите наибольшее значение длины отрезка MN .

11.7*. В данный треугольник поместите центрально симметричный многоугольник наибольшей площади.

11.8*. Площадь треугольника ABC равна 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. На отрезках AB_1, CA_1, BC_1 взяты точки K, L, M соответственно. Чему равна минимальная площадь общей части треугольников KLM и $A_1B_1C_1$?

11.9*. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, из которой можно вырезать любой треугольник площадью 1?

* * *

11.10. Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

11.11*. Докажите, что если α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — углы двух треугольников, то

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

11.12*. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника площади S ; α_1, β_1 и γ_1 — углы некоторого другого треугольника. Докажите, что $a^2 \operatorname{ctg} \alpha_1 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_1 + c^2 \operatorname{ctg} \gamma_1 \geq 4S$, причем равенство достигается, только если рассматриваемые треугольники подобны.

11.13*. Дан треугольник со сторонами a , b и c , причем $a \geq b \geq c$; x , y и z — углы некоторого другого треугольника. Докажите, что

$$bc + ca - ab < bc \cos x + ca \cos y + ab \cos z \leq (a^2 + b^2 + c^2)/2.$$

См. также задачу 17.21.

§2. Экстремальные точки треугольника

11.14. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X ; M и N — ее проекции на катеты AC и BC .

а) При каком положении точки X длина отрезка MN будет наименьшей?

б) При каком положении точки X площадь четырехугольника $CMXN$ будет наибольшей?

11.15. Из точки M , лежащей на стороне AB остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны BC и AC . При каком положении точки M длина отрезка PQ минимальна?

11.16. Дан треугольник ABC . Найдите на прямой AB точку M , для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM была бы наименьшей.

11.17. Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC . При каком положении точки M длина отрезка PQ максимальна?

11.18*. Внутри треугольника ABC взята точка O . Пусть d_a , d_b , d_c — расстояния от нее до прямых BC , CA , AB . При каком положении точки O произведение $d_a d_b d_c$ будет наибольшим?

11.19*. Точки A_1 , B_1 и C_1 взяты на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC , причем отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке M . При каком положении точки M величина $\frac{MA_1}{AA_1} \cdot \frac{MB_1}{BB_1} \cdot \frac{MC_1}{CC_1}$ максимальна?

11.20*. Из точки M , лежащей внутри данного треугольника ABC , опущены перпендикуляры MA_1 , MB_1 , MC_1 на прямые BC , CA , AB . Для каких точек M внутри данного треугольника ABC величина $a/MA_1 + b/MB_1 + c/MC_1$ принимает наименьшее значение?

11.21*. Дан треугольник ABC . Найдите внутри его точку O , для которой сумма длин отрезков OA , OB , OC минимальна. (Обратите внимание на тот случай, когда один из углов треугольника больше 120° .)

11.22*. Найдите внутри треугольника ABC точку O , для которой сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника минимальна.

См. также задачу 18.22 а).

§3. Угол

11.23. На одной стороне острого угла даны точки A и B . Постройте на другой его стороне точку C , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

11.24. Дан угол XAY и точка O внутри его. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

11.25. Проведите через данную точку P , лежащую внутри угла AOB , прямую MN так, чтобы величина $OM + ON$ была минимальной (точки M и N лежат на сторонах OA и OB).

11.26. Даны угол XAY и окружность внутри его. Постройте точку окружности, сумма расстояний от которой до прямых AX и AU минимальна.

11.27*. Внутри острого угла BAC дана точка M . Постройте на сторонах BA и AC точки X и Y так, чтобы периметр треугольника XUM был минимальным.

11.28*. Дан угол XAY . Концы B и C отрезков BO и CO длиной 1 перемещаются по лучам AX и AU . Постройте четырехугольник $ABOC$ наибольшей площади.

§4. Четырехугольники

11.29. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей.

11.30. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Какую наименьшую площадь может иметь этот четырехугольник, если площадь треугольника AOB равна 4, а площадь треугольника COD равна 9?

11.31. Трапеция $ABCD$ с основанием AD разрезана диагональю AC на два треугольника. Прямая l , параллельная основанию, разрезает эти треугольники на два треугольника и два четырехугольника. При каком положении прямой l сумма площадей полученных треугольников минимальна?

11.32. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь наибольшая диагональ этой трапеции?

11.33*. На основании AD трапеции $ABCD$ дана точка K . Найдите на основании BC точку M , для которой площадь общей части треугольников AMD и BKC максимальна.

11.34*. Докажите, что среди всех четырехугольников с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник.

См. также задачи 9.35, 15.3 б).

§5. Многоугольники

11.35. Многоугольник имеет центр симметрии O . Докажите, что сумма расстояний до вершин минимальна для точки O .

11.36. Среди всех многоугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого максимальна сумма квадратов длин сторон.

11.37*. Дан выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$. Докажите, что точка многоугольника, для которой максимальна сумма расстояний от нее до всех вершин, является вершиной.

См. также задачу 6.72.

§6. Разные задачи

11.38. Внутри окружности с центром O дана точка A . Найдите точку M окружности, для которой угол OMA максимален.

11.39. На плоскости даны прямая l и точки A и B , лежащие по разные стороны от нее. Постройте окружность, проходящую через точки A и B так, чтобы прямая l высекала на ней хорду наименьшей длины.

11.40. Даны прямая l и точки P и Q , лежащие по одну сторону от нее. На прямой l берем точку M и в треугольнике PQM проводим высоты PP' и QQ' . При каком положении точки M длина отрезка $P'Q'$ минимальна?

11.41. Точки A , B и O не лежат на одной прямой. Проведите через точку O прямую l так, чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была: а) наибольшей; б) наименьшей.

* * *

11.42. Если на плоскости заданы пять точек, то, рассматривая всевозможные тройки этих точек, можно образовать 30 углов. Обозначим наименьший из этих углов α . Найдите наибольшее значение α .

11.43*. В городе 10 улиц, параллельных друг другу, и 10 улиц, пересекающих их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый автобусный маршрут, проходящий через все перекрестки?

11.44*. Чему равно наибольшее число клеток шахматной доски размером 8×8 , которые можно разрезать одной прямой?

11.45*. Какое наибольшее число точек можно поместить на отрезке длиной 1 так, чтобы на любом отрезке длиной d , содержащемся в этом отрезке, лежало не больше $1 + 1000d^2$ точек?

См. также задачи 15.1, 17.20.

§7. Экстремальные свойства правильных многоугольников

11.46*. а) Докажите, что среди всех n -угольников, описанных около данной окружности, наименьшую площадь имеет правильный n -угольник.

б) Докажите, что среди всех n -угольников, описанных около данной окружности, наименьший периметр имеет правильный n -угольник.

11.47*. Треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют общее основание AB и $\angle AC_1B = \angle AC_2B$. Докажите, что если $|AC_1 - C_1B| < |AC_2 - C_2B|$, то:

а) площадь треугольника ABC_1 больше площади треугольника ABC_2 ;

б) периметр треугольника ABC_1 больше периметра треугольника ABC_2 .

11.48*. а) Докажите, что среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный n -угольник.

б) Докажите, что среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный n -угольник.

Задачи для самостоятельного решения

11.49. На стороне острого угла с вершиной A дана точка B . Постройте на другой его стороне такую точку X , что радиус описанной окружности треугольника ABX наименьший.

11.50. Через данную точку внутри окружности проведите хорду наименьшей длины.

11.51. Среди всех треугольников с заданной суммой длин биссектрис найдите треугольник с наибольшей суммой длин высот.

11.52. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин наименьшая.

11.53. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, для которого величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ наименьшая.

11.54. На шахматной доске с обычной раскраской проведите окружность наибольшего радиуса так, чтобы она не пересекла ни одного белого поля.

11.55. Внутри квадрата дана точка O . Любая прямая, проходящая через O , разрезает квадрат на две части. Проведите через точку O прямую так, чтобы разность площадей этих частей была наибольшей.

11.56. Какую наибольшую длину может иметь наименьшая сторона треугольника, вписанного в данный квадрат?

11.57. Какую наибольшую площадь может иметь правильный треугольник, вписанный в данный квадрат?

Решения

11.1. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha) = (b - c)^2 + 4S(1 - \cos \alpha) / \sin \alpha$. Так как второе слагаемое постоянно, то a минимально, если $b = c$.

11.2. Пусть вневписанная окружность касается сторон AB и AC в точках K и L . Так как $AK = AL = p$, то вневписанная окружность S_a фиксирована. Радиус r вписанной окружности максимален, когда она касается окружности S_a , т. е. треугольник ABC равнобедренный. Ясно также, что $S = pr$.

11.3. Согласно задаче 10.53, а) $S \leq p^2/3\sqrt{3}$, причем равенство достигается только для правильного треугольника.

11.4. По теореме косинусов $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos \alpha$. Так как $2bc \leq b^2 + c^2$ и $\cos \alpha > 0$, то $b^2 + c^2 \leq a^2 + (b^2 + c^2) \cos \alpha$, т. е. $b^2 + c^2 \leq a^2 / (1 - \cos \alpha)$. Равенство достигается, если $b = c$.

11.5. Пусть O — центр окружности радиуса R ; A, B и C — вершины треугольника; $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Тогда $AB^2 + BC^2 + CA^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c} - \mathbf{a}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2) - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - 2(\mathbf{c}, \mathbf{a})$. Так как $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + 2(\mathbf{c}, \mathbf{a})$, то $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2) - |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 \leq 3(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2) = 9R^2$, причем равенство достигается, только если $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Это равенство означает, что треугольник ABC правильный.

11.6. Обозначим длину высоты, опущенной на сторону BC , через h . Так как $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, то $MN/BC = (h - 2r)/h$, т. е. $MN = a \left(1 - \frac{2r}{h}\right)$. Поскольку $r = S/p = ah/2p$, то $MN = a(1 - a/p)$. Максимум выражения $a(1 - a/p) = a(p - a)/p$ достигается при $a = p/2$; он равен $p/4$. Остается заметить, что существует треугольник периметра $2p$ со стороной $a = p/2$ (положим $b = c = 3p/4$).

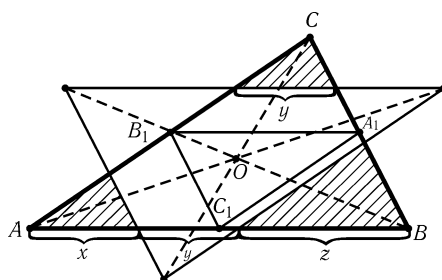


Рис. 11.1

11.7. Пусть O — центр симметрии многоугольника M , расположенного внутри треугольника T , $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O . Тогда M лежит и в T , и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T , наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T , так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый много-

угольник всегда содержит свой центр симметрии.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T = ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник (рис. 11.1). Пусть сторона AB делится сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x : y : z$, где $x + y + z = 1$. Тогда отношение суммы площадей заштрихованных треугольников к площади треугольника ABC равно $x^2 + y^2 + z^2$; нужно минимизировать это выражение. Так как $1 = (x + y + z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x - y)^2 - (y - z)^2 - (z - x)^2$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1/3$, причем равенство достигается только при $x = y = z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C , например внутри $\triangle AB_1C_1$. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причем если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1 , то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка O лежит на стороне B_1C_1 , то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x = 0$).

Искомый многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна $2/3$ площади треугольника.

11.8. Обозначим точку пересечения прямых KM и BC через T , а точки пересечения сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM так, как показано на рис. 11.2. Тогда $TL : RZ = KL : KZ = LC : ZB_1$. Так как $TL \geq BA_1 = A_1C \geq LC$, то $RZ \geq ZB_1$, т. е. $S_{RZQ} \geq S_{ZB_1Q}$. Аналогично $S_{QYP} \geq S_{YA_1P}$ и $S_{PXR} \geq S_{XC_1R}$. Складывая все эти неравенства и неравенство $S_{PQR} \geq 0$, получаем, что площадь шестиугольника $PXRZQY$ не меньше площади оставшейся части треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. его площадь не меньше $S_{A_1B_1C_1}/2 = 1/8$. Равенство достигается, например, если точка K совпадает с B_1 , а точка M — с B .

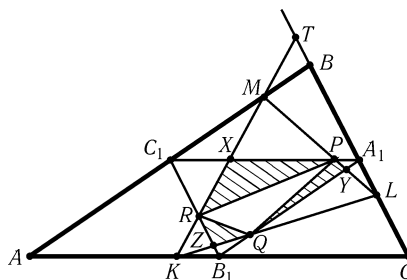


Рис. 11.2

11.9. Так как площадь правильного треугольника со стороной a равна $a^2\sqrt{3}/4$, сторона правильного треугольника площадью 1 равна $2/\sqrt[4]{3}$, а его высота $\sqrt[4]{3}$. Докажем, что из полосы шириной меньше $\sqrt[4]{3}$ нельзя вырезать правильный треугольник площадью 1. Пусть правильный треугольник ABC лежит внутри полосы шириной меньше $\sqrt[4]{3}$. Пусть для определенности проекция вершины B на границу полосы лежит между проекциями вершин A и C . Тогда прямая, проведенная через точку B перпендикулярно границе полосы, пересекает отрезок AC в некоторой точке M . Высота треугольника ABC не превосходит BM , а BM не больше ширины полосы, поэтому высота треугольника ABC меньше $\sqrt[4]{3}$, т. е. его площадь меньше 1.

Остается доказать, что из полосы шириной $\sqrt[4]{3}$ можно вырезать любой треугольник площадью 1. Докажем, что у любого треугольника площадью 1 есть высота, не превосходящая $\sqrt[4]{3}$. Для этого достаточно доказать, что у него есть сторона не меньше $2/\sqrt[4]{3}$. Предположим, что все стороны треугольника ABC меньше $2/\sqrt[4]{3}$. Пусть α — наименьший угол этого треугольника. Тогда $\alpha \leq 60^\circ$ и $S_{ABC} = (AB \cdot AC \sin \alpha)/2 < (2/\sqrt[4]{3})^2(\sqrt{3}/4) = 1$. Получено противоречие. Треугольник, у которого есть высота, не превосходящая $\sqrt[4]{3}$, можно поместить в полосу шириной $\sqrt[4]{3}$, положив сторону, на которую опущена эта высота, на сторону полосы.

11.10. Возведя обе части данного равенства в квадрат, его легко привести к виду

$$(\sqrt{ab_1} - \sqrt{a_1b})^2 + (\sqrt{ca_1} - \sqrt{c_1a})^2 + (\sqrt{bc_1} - \sqrt{cb_1})^2 = 0,$$

т. е. $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$.

11.11. Фиксируем углы α , β и γ . Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник с углами α_1 , β_1 и γ_1 . Рассмотрим векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , сонаправленные с векторами $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$

и $\overrightarrow{A_1B_1}$ и имеющие длины $\sin \alpha$, $\sin \beta$ и $\sin \gamma$. Тогда $\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} = -[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})]/(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)$. А так как $2[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})] = |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2$, то величина $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$ минимальна, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, т. е. $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$.

11.12. Пусть $x = \operatorname{ctg} \alpha_1$ и $y = \operatorname{ctg} \beta_1$. Тогда $x + y > 0$ (так как $\alpha_1 + \beta_1 < \pi$) и $\operatorname{ctg} \gamma_1 = (1 - xy)/(x + y) = (x^2 + 1)/(x + y) - x$. Поэтому $a^2 \operatorname{ctg} \alpha_1 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_1 + c^2 \operatorname{ctg} \gamma_1 = (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2(x + y) + c^2(x^2 + 1)/(x + y)$. При фиксированном x это выражение минимально при таком y , что $b^2(x + y) = c^2(x^2 + 1)/(x + y)$, т. е. $c/b = (x + y)/\sqrt{1 + x^2} = \sin \alpha_1(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1) = \sin \gamma_1/\sin \beta_1$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $a : b : c = \sin \alpha_1 : \sin \beta_1 : \sin \gamma_1$, то рассматриваемое выражение минимально. В этом случае треугольники подобны и $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma = 4S$ (см. задачу 12.44, б)).

11.13. Пусть $f = bc \cos x + ca \cos y + ab \cos z$. Так как $\cos x = -\cos y \cos z + \sin y \sin z$, то $f = c(a - b \cos z) \cos y + bc \sin y \sin z + ab \cos z$. Рассмотрим треугольник, длины двух сторон которого равны a и b , а угол между ними равен z ; пусть ξ и η — углы, лежащие против сторон a и b , t — длина стороны, лежащей против угла z . Тогда $\cos z = (a^2 + b^2 - t^2)/2ab$ и $\cos \eta = (t^2 + a^2 - b^2)/2at$, поэтому $(a - b \cos z)/t = \cos \eta$. Кроме того, $b/t = \sin \eta/\sin z$. Следовательно, $f = ct \cos(\eta - y) + (a^2 + b^2 - t^2)/2$.

Так как $\cos(\eta - y) \leq 1$, то $f \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} - \frac{(c - t)^2}{2} \leq (a^2 + b^2 + c^2)/2$.

Так как $a \geq b$, то $\xi \geq \eta$, а значит, $-\xi \leq -\eta < y - \eta < \pi - z - \eta = \xi$, т. е. $\cos(y - \eta) > \cos \xi$. Поэтому

$$f > ct \cos \xi + \frac{a^2 + b^2 - t^2}{2} = \frac{c - b}{2b} t^2 + \frac{c(b^2 - a^2)}{2b} + \frac{a^2 + b^2}{2} = g(t).$$

Коэффициент при t^2 отрицателен или равен нулю; кроме того, $t < a + b$. Следовательно, $g(t) \geq g(a + b) = bc + ca - ab$.

11.14. а) Так как $CMXN$ — прямоугольник, то $MN = CX$. Поэтому длина отрезка MN будет наименьшей, если CX — высота.

б) Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{AMX} = AX^2 \cdot S/AB^2$ и $S_{BNX} = BX^2 \cdot S/AB^2$. Поскольку $AX^2 + BX^2 \geq AB^2/2$ (причем равенство достигается, только если X — середина отрезка AB), то $S_{CMXN} = S - S_{AMX} - S_{BNX} \leq S/2$. Площадь четырехугольника $CMXN$ будет наибольшей, если X — середина стороны AB .

11.15. Точки P и Q лежат на окружности, построенной на отрезке CM как на диаметре. В этой окружности постоянный угол C опирается на хорду PQ , поэтому длина хорды PQ будет минимальна, если минимален диаметр CM окружности, т. е. CM — высота треугольника ABC .

11.16. По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников ACM и BCM равны $AC/(2 \sin \angle AMC)$ и $BC/(2 \sin \angle BMC)$ соответственно. Легко проверить, что $\sin \angle AMC = \sin \angle BMC$. Поэтому $AC/(2 \sin \angle AMC) + BC/(2 \sin \angle BMC) = (AC + BC)/(2 \sin \angle BMC)$. Последнее выражение будет наименьшим, если $\sin \angle BMC = 1$, т. е. $CM \perp AB$.

11.17. Точки P и Q лежат на окружности с диаметром AM , поэтому $PQ = AM \sin \angle PAQ = AM \sin A$. Значит, длина отрезка PQ максимальна, когда AM — диаметр описанной окружности.

11.18. Ясно, что $2S_{ABC} = ad_a + bd_b + cd_c$. Поэтому произведение $(ad_a)(bd_b)(cd_c)$ будет наибольшим, если $ad_a = bd_b = cd_c$ (см. с. 217). Так как величина abc постоянна, произведение $(ad_a)(bd_b)(cd_c)$ будет наибольшим тогда и только тогда, когда будет наибольшим произведение $d_a d_b d_c$.

Покажем, что равенство $ad_a = bd_b = cd_c$ означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Обозначим точку пересечения прямых AO и BC через A_1 . Тогда $BA_1 : A_1C = S_{ABA_1} : S_{ACA_1} = S_{ABO} : S_{ACO} = (cd_c) : (bd_b) = 1$, т. е. AA_1 — медиана. Аналогично доказывается, что точка O лежит на медианах BB_1 и CC_1 .

11.19. Пусть $\alpha = MA_1/AA_1$, $\beta = MB_1/BB_1$ и $\gamma = MC_1/CC_1$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (см. задачу 4.48, а)), то $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq (\alpha + \beta + \gamma)/3 = 1/3$, причем равенство достигается, когда $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$, т. е. M — точка пересечения медиан.

11.20. Пусть $x = MA_1$, $y = MB_1$ и $z = MC_1$. Тогда $ax + by + cz = 2S_{VMC} + 2S_{AMC} + 2S_{AMB} = 2S_{ABC}$. Поэтому $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \cdot 2S_{ABC} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} (ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2 + ab \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + bc \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + ac \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, причем равенство достигается, только если $x = y = z$, т. е. M — центр вписанной окружности треугольника ABC .

11.21. Предположим сначала, что все углы треугольника ABC меньше 120° . Тогда внутри его существует точка O , из которой все стороны видны под углом 120° . Проведем через вершины A , B и C прямые, перпендикулярные отрезкам OA , OB и OC . Эти прямые образуют правильный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 11.3). Пусть O' — любая точка, лежащая внутри треугольника ABC и отличная от точки O . Докажем, что тогда $O'A + O'B + O'C > OA + OB + OC$, т. е. O — искомая точка. Пусть A' , B' и C' — основания перпендикуляров, опущенных из точки O' на стороны B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 , a — длина стороны правильного треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда $O'A' + O'B' + O'C' = 2(S_{O'B_1C_1} + S_{O'A_1B_1} + S_{O'A_1C_1})/a = 2S_{A_1B_1C_1}/a = OA + OB + OC$. Так как наклонная длиннее перпендикуляра, то $O'A + OB + O'C > O'A' + O'B' + O'C' = OA + OB + OC$.

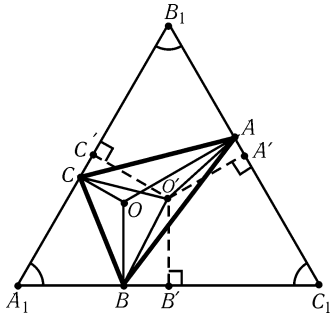


Рис. 11.3

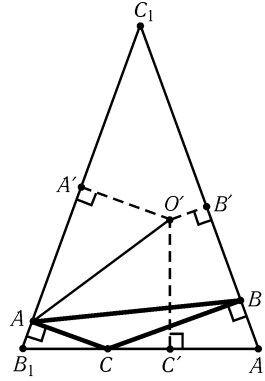


Рис. 11.4

Пусть теперь один из углов треугольника ABC , например угол C , больше или равен 120° . Проведем через точки A и B перпендикуляры B_1C_1 и C_1A_1 к отрезкам CA и CB , а через точку C — прямую A_1B_1 , перпендикулярную биссектрисе угла ACB (рис. 11.4). Так как $\angle AC_1B = 180^\circ - \angle ACB < 60^\circ$, то $B_1C_1 > A_1B_1$. Пусть O' — любая точка, лежащая внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку $B_1C_1 \cdot O'A' + C_1A_1 \cdot O'B' + A_1B_1 \cdot O'C' = 2S_{A_1B_1C_1}$, то $(O'A' + O'B' + O'C') \cdot B_1C_1 = 2S_{A_1B_1C_1} + (B_1C_1 - A_1B_1) \cdot O'C'$. Так как $B_1C_1 > A_1B_1$, то сумма $O'A' + O'B' + O'C'$ минимальна для точек, лежащих на стороне B_1A_1 . Ясно также, что $O'A +$

$+ O'B + O'C \geq O'A' + O'B' + O'C'$. Следовательно, искомой точкой является вершина C .

11.22. Пусть расстояния от точки O до сторон BC , CA и AB равны x , y и z соответственно. Тогда $ax + by + cz = 2(S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}) = 2S_{ABC}$. Ясно также, что $x : y : z = (S_{BOC}/a) : (S_{COA}/b) : (S_{AOB}/c)$.

Уравнение $ax + by + cz = 2S$ задает плоскость в трехмерном пространстве с координатами x , y , z , причем вектор (a, b, c) перпендикулярен этой плоскости, так как если $ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S$ и $ax_2 + by_2 + cz_2 = 2S$, то $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0$. Нам нужно найти точку (x_0, y_0, z_0) этой плоскости, для которой достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$, и проверить, что этой точке соответствует некоторая внутренняя точка треугольника. Так как $x^2 + y^2 + z^2$ — это квадрат расстояния от начала координат до точки (x, y, z) , то искомой точкой является основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, т. е. $x : y : z = a : b : c$. Остается проверить, что внутри треугольника существует точка O , для которой $x : y : z = a : b : c$. Это равенство эквивалентно условию

$$(S_{BOC}/a) : (S_{COA}/b) : (S_{AOB}/c) = a : b : c,$$

т. е. $S_{BOC} : S_{COA} : S_{AOB} = a^2 : b^2 : c^2$. А так как равенство $S_{BOC} : S_{AOB} = a^2 : c^2$ следует из равенств $S_{BOC} : S_{COA} = a^2 : b^2$ и $S_{COA} : S_{AOB} = b^2 : c^2$, то искомая точка — это точка пересечения прямых CC_1 и AA_1 , делящих стороны AB и BC в отношениях $BC_1 : C_1A = a^2 : b^2$ и $CA_1 : A_1B = b^2 : c^2$ соответственно.

11.23. Пусть O — вершина данного угла. Точка C является точкой касания стороны угла с окружностью, проходящей через точки A и B , т. е. $OC^2 = OA \cdot OB$. Для нахождения длины отрезка OC достаточно провести касательную к любой окружности, проходящей через точки A и B .

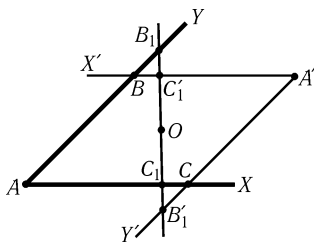


Рис. 11.5

11.24. Рассмотрим угол $X'A'Y'$, симметричный углу XAY относительно точки O . Пусть B и C — точки пересечения сторон этих углов. Обозначим точки пересечения прямой, проходящей через точку O , со сторонами углов XAY и $X'A'Y'$ через B_1 , C_1 и B'_1 , C'_1 соответственно (рис. 11.5). Так как $S_{AB_1C_1} = S_{A'B'_1C'_1}$, то $S_{AB_1C_1} = (S_{ABA'C} + S_{BB_1C'_1} + S_{CC_1B'_1})/2$. Площадь треугольника AB_1C_1 минимальна, если $B_1 = B$ и $C_1 = C$, т. е. искомой прямой является BC .

11.25. Возьмем на сторонах OA и OB точки K и L так, что $KP \parallel OB$ и $LP \parallel OA$. Тогда $KM : KP = PL : LN$, а значит, $KM + LN \geq 2\sqrt{KM \cdot LN} = 2\sqrt{KP \cdot PL} = 2\sqrt{OK \cdot OL}$, причем равенство достигается, когда $KM = LN = \sqrt{OK \cdot OL}$. Ясно также, что $OM + ON = (OK + OL) + (KM + LN)$.

11.26. Отложим на лучах AX и AY равные отрезки AB и AC . Если точка M лежит на отрезке BC , то сумма расстояний от нее до прямых AB и AC равна $2(S_{ABM} + S_{ACM})/AB = 2S_{ABC}/AB$. Поэтому сумма расстояний от точки до прямых AX и AY тем меньше, чем меньше расстояние от ее проекции на биссектрису угла XAY до точки A .

11.27. Пусть точки M_1 и M_2 симметричны M относительно прямых AB и AC . Так как $\angle BAM_1 = \angle BAM$ и $\angle CAM_2 = \angle CAM$, то $\angle M_1AM_2 = 2\angle BAC < 180^\circ$. Поэтому отрезок M_1M_2 пересекает лучи AB и AC в некоторых точках X и Y (рис. 11.6). Докажем, что X и Y — искомые точки. В самом деле, если точки X_1

и Y_1 лежат на лучах AB и AC , то $MX_1 = M_1X_1$ и $MY_1 = M_2Y_1$, т. е. периметр треугольника MX_1Y_1 равен длине ломаной $M_1X_1Y_1M_2$. Из всех ломаных с концами в точках M_1 и M_2 наименьшую длину имеет отрезок M_1M_2 .

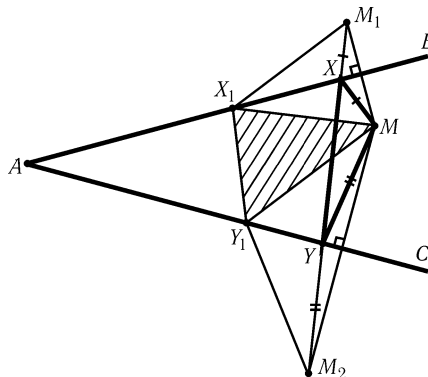


Рис. 11.6

11.28. Четырехугольник $ABOC$ наибольшей площади выпуклый. Среди всех треугольников ABC с фиксированным углом A и стороной BC наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием BC . Значит, среди всех рассматриваемых четырехугольников $ABOC$ с фиксированной диагональю BC наибольшую площадь имеет четырехугольник, для которого $AB = AC$,

т. е. точка O лежит на биссектрисе угла A . Рассмотрим, далее, треугольник ABO , в котором фиксированы угол BAO , равный $\angle A/2$, и сторона BO . Площадь этого треугольника максимальна, когда $AB = AO$.

11.29. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а O_1 — любая другая точка. Тогда $AO_1 + CO_1 \geq AC = AO + CO$ и $BO_1 + DO_1 \geq BD = BO + DO$, причем хотя бы одно из неравенств строгое. Следовательно, O — искомая точка.

11.30. Так как $S_{AOB} : S_{BOC} = AO : OC = S_{AOD} : S_{DOC}$, то $S_{BOC} \cdot S_{AOD} = S_{AOB} \cdot S_{DOC} = 36$. Следовательно, $S_{BOC} + S_{AOD} \geq 2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}} = 12$, причем равенство достигается, если $S_{BOC} = S_{AOD}$, т. е. $S_{ABC} = S_{ABD}$, откуда $AB \parallel CD$. При этом площадь четырехугольника равна $4 + 9 + 12 = 25$.

11.31. Пусть S_0 и S — рассматриваемые суммы площадей треугольников для прямой l_0 , проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции, и для некоторой другой прямой l . Легко проверить, что $S = S_0 + s$, где s — площадь треугольника, образованного диагоналями AC и BD и прямой l . Поэтому l_0 — искомая прямая.

11.32. Длины диагоналей трапеции обозначим через d_1 и d_2 , длины их проекций на основание — через p_1 и p_2 , длины оснований — через a и b , высоту — через h . Пусть для определенности $d_1 \geq d_2$. Тогда $p_1 \geq p_2$. Ясно, что $p_1 + p_2 \geq a + b$. Поэтому $p_1 \geq (a + b)/2 = S/h = 1/h$. Следовательно, $d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$, причем равенство достигается, только если $p_1 = p_2 = h = 1$. При этом $d_1 = \sqrt{2}$.

11.33. Докажем, что искомой точкой является точка M , делящая сторону BC в отношении $BM : MC = AK : KD$. Обозначим точки пересечения отрезков AM и BK , DM и CK через P , Q соответственно. Тогда $KQ : QC = KD : MC = KA : MB = KP : PB$, т. е. прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

Пусть M_1 — любая другая точка на стороне BC . Для определенности можно считать, что M_1 лежит на отрезке BM . Обозначим точки пересечения AM_1 и BK , DM_1 и CK , AM_1 и PQ , DM_1 и PQ , AM и DM_1 через P_1 , Q_1 , P_2 , Q_2 , O соответственно (рис. 11.7). Нужно доказать, что $S_{MPKQ} > S_{M_1P_1KQ_1}$, т. е. $S_{MOQ_1Q} > S_{M_1OP_1P_1}$. Ясно, что $S_{MOQ_1Q} > S_{MOQ_2Q} = S_{M_1OP_2P_2} > S_{M_1OP_1P_1}$.

11.34. Согласно задаче 4.45, а)

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2((B + D)/2).$$

Эта величина максимальна, когда $\cos((B + D)/2) = 0$, т. е. $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

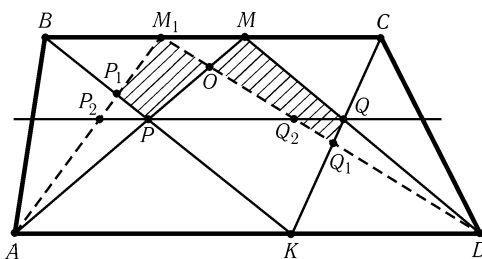


Рис. 11.7

11.35. Если A и A' — симметричные относительно точки O вершины многоугольника, то сумма расстояний до точек A и A' одна и та же для всех точек отрезка AA' , а для всех других точек она больше. Точка O принадлежит всем таким отрезкам.

11.36. Если в треугольнике ABC угол B тупой или прямой, то по теореме косинусов $AC^2 \geq AB^2 + BC^2$. Поэтому, если в многоугольнике угол при вершине B не острый, то, выбросив вершину B , получим многоугольник с не меньшей суммой квадратов длин сторон. Так как у любого n -угольника при $n \geq 3$ есть неострый угол, с помощью такой операции мы приходим к треугольнику. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую сумму квадратов длин сторон имеет правильный треугольник (см. задачу 11.5).

11.37. Если точка X делит некоторый отрезок PQ в отношении $\lambda : (1 - \lambda)$, то $A_i X = (1 - \lambda)A_i P + \lambda A_i Q$, а значит $A_i X \leq (1 - \lambda)A_i P + \lambda A_i Q$. Следовательно, $f(X) = \sum A_i X \leq (1 - \lambda) \sum A_i P + \lambda \sum A_i Q = (1 - \lambda)f(P) + \lambda f(Q)$. Пусть, например, $f(P) \leq f(Q)$; тогда $f(X) \leq f(Q)$. Поэтому функция f на отрезке PQ принимает максимальное значение в одном из его концов; точнее говоря, внутри отрезка не может быть точки строгого максимума функции f . Следовательно, если X — любая точка многоугольника, то $f(X) \leq f(Y)$, где Y — некоторая точка стороны многоугольника, а $f(Y) \leq f(Z)$, где Z — некоторая вершина.

11.38. Геометрическое место точек X , для которых угол OXA постоянен, состоит из двух симметричных относительно прямой OA дуг окружностей S_1 и S_2 . Рассмотрим тот случай, когда диаметр окружностей S_1 и S_2 равен радиусу исходной окружности, т. е. эти окружности касаются исходной окружности в точках M_1 и M_2 , для которых $\angle OAM_1 = \angle OAM_2 = 90^\circ$. Точки M_1 и M_2 являются искомыми, так как если $\angle OXA > \angle OM_1A = \angle OM_2A$, то точка X лежит строго внутри фигуры, образованной окружностями S_1 и S_2 , т. е. не может лежать на исходной окружности.

11.39. Обозначим точку пересечения прямой l и отрезка AB через O . Рассмотрим произвольную окружность S , проходящую через точки A и B . Она пересекает l в некоторых точках M и N . Поскольку $MO \cdot NO = AO \cdot BO$ — постоянная величина, то

$$MN = MO + NO \geq 2\sqrt{MO \cdot NO} = 2\sqrt{AO \cdot BO},$$

причем равенство достигается, только если $MO = NO$. В этом случае центр окружности S является точкой пересечения серединного перпендикуляра к AB и перпендикуляра к l , проходящего через точку O .

11.40. Построим окружность с диаметром PQ . Если эта окружность пересекается с прямой l , то любая из точек пересечения является искомой, поскольку

в этом случае $P' = Q'$. Если же окружность не пересекается с прямой l , то для любой точки M на прямой l угол PMQ острый и $\angle P'PQ' = 90^\circ \pm \angle PMQ$. Теперь легко убедиться, что длина хорды $P'Q'$ минимальна, если угол PMQ максимален. Для нахождения точки M остается провести через точки P и Q окружности, касающиеся прямой l (см. задачу 8.56, а), и из точек касания выбрать нужную.

11.41. Пусть сумма расстояний от точек A и B до прямой l равна $2h$. Если прямая l пересекает отрезок AB в точке X , то $S_{AOB} = h \cdot OX$, поэтому величина h экстремальна, когда экстремальна величина OX , т. е. прямая OX соответствует стороне или высоте треугольника AOB . Если прямая l не пересекает отрезок AB , то величина h равна средней линии трапеции, ограниченной перпендикулярами, опущенными из точек A и B на прямую l . Эта величина экстремальна, когда прямая l перпендикулярна медиане OM треугольника AOB или соответствует стороне треугольника AOB . Остается выбрать две из полученных четырех прямых.

11.42. Предположим сначала, что точки являются вершинами выпуклого пятиугольника. Сумма углов пятиугольника равна 540° , поэтому один из его углов не превосходит $540^\circ/5 = 108^\circ$. Диагонали делят этот угол на три угла, поэтому один из них не превосходит $108^\circ/3 = 36^\circ$. В этом случае $\alpha \leq 36^\circ$.

Если точки не являются вершинами выпуклого пятиугольника, то одна из них лежит внутри треугольника, образованного тремя другими. Один из углов этого треугольника не превосходит 60° . Отрезок, соединяющий соответствующую вершину с внутренней точкой, делит этот угол на два угла, поэтому один из них не превосходит 30° . В этом случае $\alpha \leq 30^\circ$. Во всех случаях $\alpha \leq 36^\circ$. Ясно, что для правильного пятиугольника $\alpha = 36^\circ$.

11.43. Замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки, может иметь 20 поворотов (рис. 11.8). Остается доказать, что меньше 20 поворотов такой маршрут иметь не может. После каждого поворота происходит переход с горизонтальной улицы на вертикальную или с вертикальной на горизонтальную. Поэтому число горизонтальных звеньев замкнутого маршрута равно числу вертикальных звеньев и равно половине числа поворотов. Предположим, что замкнутый маршрут имеет меньше 20 поворотов. Тогда найдутся улицы обоих направлений, по которым маршрут не проходит. Поэтому маршрут не проходит через перекресток этих улиц.

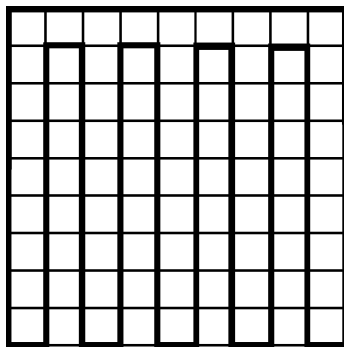


Рис. 11.8

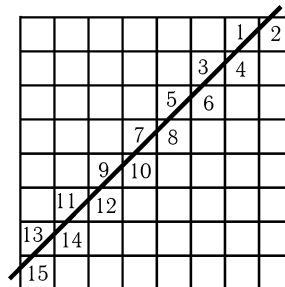


Рис. 11.9

11.44. Прямая может пересекать 15 клеток (рис. 11.9). Докажем теперь, что прямая не может пересекать более 15 клеток. Число клеток, которые пересека-

ет прямая, на 1 меньше числа точек пересечения ее с отрезками, задающими стороны клеток. Внутри квадрата имеется 14 таких отрезков. Поэтому внутри квадрата не более 14 точек пересечения прямой со сторонами клеток. Никакая прямая не может пересекать границу доски более чем в двух точках, поэтому число точек пересечения ее с отрезками не превышает 16. Следовательно, наибольшее число клеток шахматной доски размером 8×8 , которые можно пересечь одной прямой, равно 15.

11.45. Докажем сначала, что 33 точки разместить таким образом нельзя. Действительно, если на отрезке длиной 1 находятся 33 точки, то расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит $1/32$. Отрезок с концами в этих точках содержит две точки, а он должен содержать не более $1 + 1000/32^2$ точек, т. е. менее двух точек.

Докажем теперь, что 32 точки разместить можно. Возьмем 32 точки, делящие отрезок на равные части (концы данного отрезка входят в число этих 32 точек). Тогда отрезок длиной d содержит либо $[31d]$, либо $[31d]+1$ точек. Нужно доказать, что $[31d] \leq 1000d^2$. Если $31d < 1$, то $[31d] = 0 < 1000d^2$. Если $31d \geq 1$, то $[31d] \leq 31d \leq (31d)^2 = 961d^2 < 1000d^2$.

П р и м е ч а н и е. $[x]$ — целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

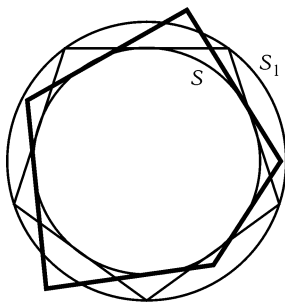


Рис. 11.10

11.46. а) Пусть неправильный n -угольник описан около окружности S . Опишем около этой окружности правильный n -угольник, а около него опишем окружность S_1 (рис. 11.10). Докажем, что площадь части неправильного n -угольника, заключенной внутри S_1 , больше площади правильного n -угольника. Все касательные к S отсекают от S_1 равные сегменты. Поэтому сумма площадей сегментов, отсекаемых от S_1 сторонами правильного n -угольника, равна сумме площадей сегментов, отсекаемых от S_1 сторонами неправильного n -угольника или их продолжениями. Но для правильного n -угольника эти сегменты не пересекаются (точнее говоря, не имеют общих внутренних точек), а для неправильного n -угольника некоторые из

них обязательно перекрываются, поэтому площадь объединения этих сегментов для правильного n -угольника больше, чем для неправильного. Следовательно, площадь части неправильного n -угольника, заключенной внутри окружности S_1 , больше площади правильного n -угольника, а площадь всего неправильного n -угольника и подавно больше площади правильного.

б) Эта задача следует из а), так как периметр многоугольника, описанного около окружности радиуса R , равен $2S/R$, где S — площадь многоугольника.

11.47. Стороны треугольника ABC пропорциональны $\sin \alpha$, $\sin \beta$ и $\sin \gamma$. Если угол γ фиксирован, то величина $|\sin \alpha - \sin \beta| = 2|\sin((\alpha - \beta)/2) \sin(\gamma/2)|$ тем больше, чем больше величина $\varphi = |\alpha - \beta|$. Остается заметить, что величины $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = R^2 \sin \gamma (\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma) = R^2 \sin \gamma (\cos \varphi + \cos \gamma)$ и $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos(\gamma/2) \cos(\varphi/2)$ монотонно убывают при возрастании φ .

11.48. а) Обозначим длину стороны правильного n -угольника, вписанного в данную окружность, через a_n . Рассмотрим произвольный неправильный n -угольник, вписанный в эту окружность. У него обязательно найдется сторона длиной меньше a_n . А вот стороны длиной больше a_n у него может и не быть, но тогда этот многоугольник можно заключить в сегмент, отсекаемый сторо-

ной правильного n -угольника. Так как при симметрии относительно стороны правильного n -угольника сегмент, отсекаемый этой стороной, попадает внутрь n -угольника, площадь n -угольника больше площади сегмента. Поэтому можно считать, что у рассматриваемого n -угольника есть сторона длиной меньше a_n и сторона длиной больше a_n .

Мы можем поменять местами соседние стороны n -угольника, т. е. вместо многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$ взять многоугольник $A_1A'_2A_3 \dots A_n$, где точка A'_2 симметрична точке A_2 относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3 (рис. 11.11). При этом оба многоугольника вписаны в одну и ту же окружность и их площади равны. Ясно, что с помощью этой операции можно сделать соседними любые две стороны многоугольника. Поэтому будем считать, что у рассматриваемого n -угольника $A_1A_2 > a_n$ и $A_2A_3 < a_n$. Пусть A'_2 — точка, симметричная точке A_2 относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1A_3 . Если точка A''_2 лежит на дуге $A_2A'_2$, то разность углов при основании A_1A_3 у треугольника $A_1A''_2A_3$ меньше, чем у треугольника $A_1A_2A_3$, так как величины углов $A_1A_3A''_2$ и $A_3A_1A''_2$ заключены между величинами углов $A_1A_3A_2$ и $A_3A_1A_2$. Поскольку $A_1A'_2 < a_n$ и $A_1A_2 > a_n$, то на дуге $A_2A'_2$ существует точка A''_2 , для которой $A_1A''_2 = a_n$. Площадь треугольника $A_1A''_2A_3$ больше площади треугольника $A_1A_2A_3$ (см. задачу 11.47, а)). Площадь многоугольника $A_1A''_2A_3 \dots A_n$ больше площади исходного многоугольника, и у него по крайней мере на 1 больше число сторон, равных a_n . За конечное число шагов мы придем к правильному n -угольнику, причем каждый раз площадь увеличивается. Следовательно, площадь любого неправильного n -угольника, вписанного в окружность, меньше площади правильного n -угольника, вписанного в ту же окружность.

б) Доказательство аналогично предыдущему, нужно только воспользоваться результатом задачи 11.47, б), а не задачи 11.47, а).

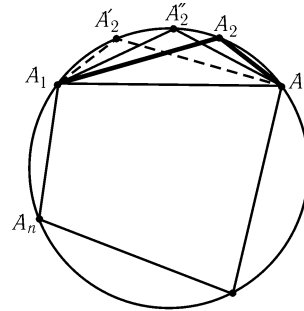


Рис. 11.11

Глава 12

Вычисления и метрические соотношения

Вводные задачи

1. Докажите теорему косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A.$$

2. Докажите теорему синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

3. Стороны параллелограмма равны a и b , а диагонали равны d и e . Докажите, что $2(a^2 + b^2) = d^2 + e^2$.

4. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $(1/2)AC \cdot BD \sin \varphi$, где φ — угол между диагоналями.

§1. Теорема синусов

12.1. Докажите, что площадь S треугольника равна $abc/4R$.

12.2. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABD и CBD равны.

12.3. Выразите площадь треугольника ABC через длину стороны BC и величины углов B и C .

12.4. Докажите, что

$$\frac{a+b}{c} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} / \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{c} = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} / \cos \frac{\gamma}{2}.$$

12.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Точки A_2 и C_2 симметричны A_1 и C_1 относительно середин сторон BC и AB . Докажите, что прямая, соединяющая вершину B с центром O описанной окружности, делит отрезок A_2C_2 пополам.

12.6*. Через точку S проведены прямые a, b, c и d ; прямая l пересекает их в точках A, B, C и D . Докажите, что величина $AC \cdot BD / (BC \cdot AD)$ не зависит от выбора прямой l .

12.7*. Даны прямые a и b , пересекающиеся в точке O , и произвольная точка P . Прямая l , проходящая через точку P , пересекает прямые a и b в точках A и B . Докажите, что величина $(AO/OB)/(PA/PB)$ не зависит от выбора прямой l .

12.8*. Обозначим вершины и точки звеньев (неправильной) пятиконечной звезды так, как показано на рис. 12.1. Докажите, что

$$A_1C \cdot B_1D \cdot C_1E \cdot D_1A \cdot E_1B = A_1D \cdot B_1E \cdot C_1A \cdot D_1B \cdot E_1C.$$

12.9. Два подобных равнобедренных треугольника имеют общую вершину. Докажите, что проекции их оснований на прямую, соединяющую середины оснований, равны.

12.10*. На окружности с диаметром AB взяты точки C и D . Прямая CD и касательная к окружности в точке B пересекаются в точке X . Выразите BX через радиус окружности R и углы $\varphi = \angle BAC$ и $\psi = \angle BAD$.

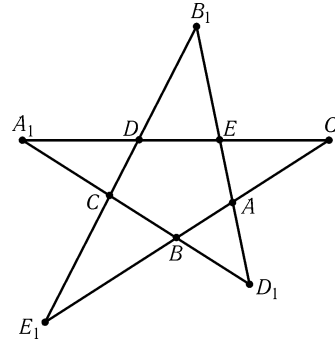


Рис. 12.1

§2. Теорема косинусов

12.11. Докажите, что:

а) $m_a^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4$;
 б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)/4$.

12.12. Докажите, что $4S = (a^2 - (b - c)^2) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.13. Докажите, что $\cos^2(\alpha/2) = p(p - a)/bc$ и $\sin^2(\alpha/2) = (p - b)(p - c)/bc$.

12.14. Длины сторон параллелограмма равны a и b , длины диагоналей — m и n . Докажите, что $a^4 + b^4 = m^2n^2$ тогда и только тогда, когда острый угол параллелограмма равен 45° .

12.15. Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

12.16*. Пусть O — центр описанной окружности (неправильного) треугольника ABC , M — точка пересечения медиан. Докажите, что прямая OM перпендикулярна медиане CC_1 тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 2c^2$.

§3. Вписанная, описанная и невписанная окружности; их радиусы

12.17. Докажите, что:

- а) $a = r(\operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2)) = r \cos(\alpha/2)/(\sin(\beta/2) \sin(\gamma/2))$;
 б) $a = r_a(\operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2)) = r_a \cos(\alpha/2)/(\cos(\beta/2) \cos(\gamma/2))$;
 в) $p - b = r \operatorname{ctg}(\beta/2) = r_a \operatorname{tg}(\gamma/2)$;
 г) $p = r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.18. Докажите, что:

- а) $rp = r_a(p - a)$, $rr_a = (p - b)(p - c)$ и $r_b r_c = p(p - a)$;
 б) $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ (формула Герона);
 в) $S^2 = r r_a r_b r_c$.

12.19. Докажите, что $S = r_c^2 \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{ctg}(\gamma/2)$.

12.20. Докажите, что $S = cr_a r_b / (r_a + r_b)$.

12.21. Докажите, что $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

12.22. Докажите, что $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

12.23. Докажите, что

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

12.24. Докажите, что $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

12.25. Докажите, что $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$.

12.26. Докажите, что $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} = \frac{12R}{S^2}$.

12.27*. Докажите, что $a(b+c) = (r+r_a)(4R+r-r_a)$ и $a(b-c) = (r_b-r_c)(4R-r_b-r_c)$.

12.28*. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ac} + \frac{OC^2}{ab} = 1$.

12.29*. а) Докажите, что если для некоторого треугольника $p = 2R + r$, то этот треугольник прямоугольный.

б) Докажите, что если $p = 2R \sin \varphi + r \operatorname{ctg}(\varphi/2)$, то φ — один из углов треугольника (предполагается, что $0 < \varphi < \pi$).

§4. Длины сторон, высоты, биссектрисы

12.30. Докажите, что $abc = 4prR$ и $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR$.

12.31. Докажите, что $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr}$.

12.32. Докажите, что $\frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

12.33. Докажите, что $h_a = bc/2R$.

12.34. Докажите, что

$$\begin{aligned} h_a &= 2(p-a) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \cos(\alpha/2) = \\ &= 2(p-b) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \sin(\alpha/2). \end{aligned}$$

12.35. Докажите, что длину биссектрисы l_a можно вычислить по следующим формулам:

- а) $l_a = \sqrt{4p(p-a)bc/(b+c)^2}$;
 б) $l_a = 2bc \cos(\alpha/2)/(b+c)$;
 в) $l_a = 2R \sin \beta \sin \gamma / \cos((\beta-\gamma)/2)$;
 г) $l_a = 4p \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) / (\sin \beta + \sin \gamma)$.

§5. Синусы и косинусы углов треугольника

Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC . В задачах этого параграфа требуется доказать соотношения, указанные в формулировках.

12.36. а) $\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = r/4R$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{tg}(\gamma/2) = r/p$;

в) $\cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) = p/4R$.

12.37. а) $\cos(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = (p-a)/4R$;

б) $\sin(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) = r_a/4R$.

12.38. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (R+r)/R$.

12.39. а) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 = 0$;

б) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$.

12.40. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

12.41. а) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = (p^2 - r^2 - 4rR)/2R^2$.

б) $4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = p^2 - (2R+r)^2$.

12.42. $ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ca \cos \beta = (a^2 + b^2 + c^2)/2$.

12.43. $\frac{\cos^2(\alpha/2)}{a} + \frac{\cos^2(\beta/2)}{b} + \frac{\cos^2(\gamma/2)}{c} = \frac{p}{4Rr}$.

§6. Тангенсы и котангенсы углов треугольника

Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC . В задачах этого параграфа требуется доказать соотношения, указанные в формулировках.

12.44. а) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4S$;

б) $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma = 4S$.

12.45. а) $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) = p/r$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2) = \left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} \right) / 2$.

$$12.46. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

$$12.47. \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{tg}(\gamma/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2) \operatorname{tg}(\alpha/2) = 1.$$

$$12.48. \text{ а) } \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma = 1;$$

$$\text{ б) } \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1/(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma).$$

$$12.49. \text{ Для прямоугольного треугольника } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 4S/(a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2).$$

§7. Вычисление углов

12.50. Даны две пересекающиеся окружности радиуса R , причем расстояние между их центрами больше R . Докажите, что $\beta = 3\alpha$ (рис. 12.2).

12.51. Докажите, что если $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_a}$, то $\angle A = 120^\circ$.

12.52. В треугольнике ABC высота AH равна медиане BM . Найдите угол MBC .

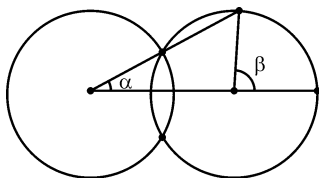


Рис. 12.2

12.53. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE . Найдите величину угла C , если известно, что $AD \cdot BC = BE \cdot AC$ и $AC \neq BC$.

12.54. Найдите угол B треугольника ABC , если длина высоты CH равна половине длины стороны AB , а $\angle BAC = 75^\circ$.

12.55*. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A на высоте AD как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K и сторону AC в точке M . Отрезки AD и KM пересекаются в точке L . Найдите острые углы треугольника ABC , если известно, что $AK : AL = AL : AM$.

12.56*. В треугольнике ABC угол C вдвое больше угла A и $b = 2a$. Найдите углы этого треугольника.

12.57*. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE и на стороне BC взята точка K так, что $\angle KVB = 2\angle AEB$. Найдите величину угла AKE , если $\angle AEB = \alpha$.

* * *

12.58*. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80° . Внутри треугольника ABC взята точка M так, что $\angle MBC = 30^\circ$ и $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите величину угла AMC .

12.59*. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20° . На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60^\circ$ и $\angle ECA = 50^\circ$. Найдите угол ADE .

12.60*. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO , где O — центр описанной окружности, продолжены до пересечения в точках D и E

со сторонами AC и AB . Оказалось, что $\angle BDE = 50^\circ$ и $\angle CED = 30^\circ$. Найдите величины углов треугольника ABC .

§8. Окружности

12.61. Окружность S с центром O на основании BC равнобедренного треугольника ABC касается равных сторон AB и AC . На сторонах AB и AC взяты точки P и Q так, что отрезок PQ касается окружности S . Докажите, что тогда $4PB \cdot CQ = BC^2$.

12.62*. Пусть E — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точки F и G выбраны на сторонах BC и CD так, что $AG \parallel EF$. Докажите, что отрезок FG касается окружности, вписанной в квадрат $ABCD$.

12.63*. Хорда окружности удалена от центра на расстояние h . В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, а две другие — на хорде или ее продолжении (рис. 12.3). Чему равна разность длин сторон этих квадратов?

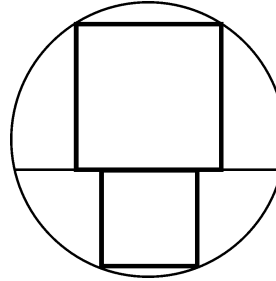


Рис. 12.3

12.64*. Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

* * *

12.65*. В окружность вписан квадрат, а в сегмент, отсеченный от круга из сторон этого квадрата, вписан другой квадрат. Найдите отношение длин сторон этих квадратов.

12.66*. На отрезке AB взята точка C и на отрезках AC, BC и AB как на диаметрах построены полуокружности, лежащие по одну сторону от прямой AB . Через точку C проведена прямая, перпендикулярная AB , и в образовавшиеся криволинейные треугольники ACD и BCD вписаны окружности S_1 и S_2 (рис. 12.4). Докажите, что радиусы этих окружностей равны.

12.67*. Центры окружностей с радиусами 1, 3 и 4 расположены на сторонах AD и BC прямоугольника $ABCD$. Эти окружности касаются друг друга и прямых AB и CD так, как показано на рис. 12.5. Докажите, что существует окружность, касающаяся всех этих окружностей и прямой AB .

§9. Разные задачи

12.68. Найдите все треугольники, у которых углы образуют арифметическую прогрессию, а стороны: а) арифметическую прогрессию; б) геометрическую прогрессию.

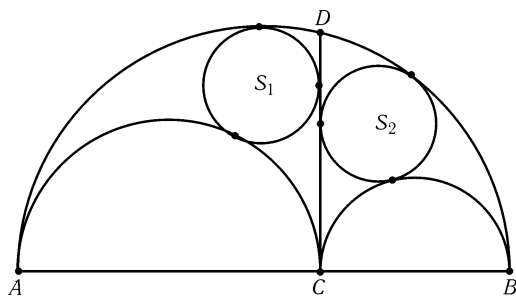


Рис. 12.4

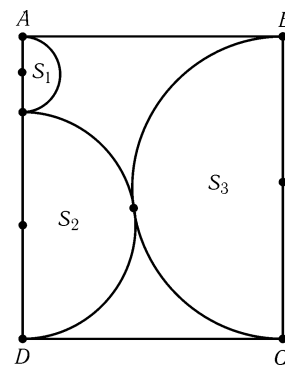


Рис. 12.5

12.69. Найдите высоту трапеции, у которой основания AB и CD равны a и b ($a < b$), угол между диагоналями равен 90° , а угол между продолжениями боковых сторон равен 45° .

12.70. Вписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке K . Докажите, что площадь треугольника равна $BK \cdot KC \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.71. Докажите, что если $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = (b+c)/a$, то треугольник прямоугольный.

12.72. Продолжения биссектрис треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = 2r/R$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

12.73. Докажите, что сумма котангенсов углов треугольника ABC равна сумме котангенсов углов треугольника, составленного из медиан треугольника ABC .

12.74*. Пусть A_4 — ортоцентр треугольника $A_1A_2A_3$. Докажите, что существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, что $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$, причем, если треугольник не прямоугольный, то $\sum(1/\lambda_i) = 0$.

§10. Метод координат

12.75. Координаты вершин треугольника рациональны. Докажите, что координаты центра его описанной окружности также рациональны.

12.76. Диаметры AB и CD окружности S перпендикулярны. Хорда EA пересекает диаметр CD в точке K , хорда EC пересекает диаметр AB в точке L . Докажите, что если $CK : KD = 2 : 1$, то $AL : LB = 3 : 1$.

12.77. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что при гомотетии с центром C и коэффициентом 2 вписанная окружность переходит в окружность, касающуюся описанной окружности.

12.78*. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ , где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l , а Q — середина стороны AB .

См. также задачи 3.54, 7.6, 7.14, 7.47, 22.16.

Задачи для самостоятельного решения

12.79. Каждая из двух окружностей касается обеих сторон данного прямого угла. Найдите отношение радиусов окружностей, если известно, что одна из них проходит через центр другой.

12.80. Пусть продолжения сторон AB и CD , BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках K и M соответственно. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ACM , BDK , ACK , BDM , связаны соотношением $R_{ACM} \cdot R_{BDK} = R_{ACK} \cdot R_{BDM}$.

12.81. Три окружности радиусов 1, 2, 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

12.82. Пусть точка K лежит на стороне BC треугольника ABC . Докажите, что

$$AC^2 \cdot BK + AB^2 \cdot CK = BC(AK^2 + BK \cdot KC).$$

12.83. Докажите, что длина биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC равна $\frac{2bc \sin(\alpha/2)}{|b-c|}$.

12.84. Две окружности радиусов R и r расположены так, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной.

12.85. Докажите, что сумма углов при лучах любой (неправильной) пятиконечной звезды равна 180° .

12.86. Докажите, что в любом треугольнике

$$S = (p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

12.87. Пусть $a < b < c$ — длины сторон треугольника; l_a, l_b, l_c и l'_a, l'_b, l'_c — длины его биссектрис и биссектрис внешних углов. Докажите, что $\frac{1}{al'_a l'_a} + \frac{1}{cl'_c l'_c} = \frac{1}{bl'_b l'_b}$.

12.88. В каждый угол треугольника вписана окружность, касающаяся вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если известны радиусы этих окружностей.

12.89. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA в точках K, L, M соответственно. Докажите, что:

$$\text{а) } S = \frac{1}{2} \left(\frac{MK^2}{\sin \alpha} + \frac{KL^2}{\sin \beta} + \frac{LM^2}{\sin \gamma} \right);$$

$$\text{б) } S^2 = \frac{1}{4} (bcMK^2 + caKL^2 + abLM^2);$$

$$\text{в) } \frac{MK^2}{h_b h_c} + \frac{KL^2}{h_c h_a} + \frac{LM^2}{h_a h_b} = 1.$$

Решения

12.1. По теореме синусов $\sin \gamma = c/2R$, поэтому $S = (ab \sin \gamma)/2 = abc/4R$.

12.2. Радиусы описанных окружностей треугольников ABD и CBD равны $AB/2 \sin ADB$ и $BC/2 \sin BDC$. Остается заметить, что $AB = BC$ и $\sin ADB = \sin BDC$.

12.3. По теореме синусов $b = a \sin \beta / \sin \alpha = a \sin \beta / \sin(\beta + \gamma)$, поэтому $S = ab \sin \gamma / 2 = a^2 \sin \beta \sin \gamma / 2 \sin(\beta + \gamma)$.

12.4. По теореме синусов $(a + b)/c = (\sin \alpha + \sin \beta) / \sin \gamma$. Кроме того, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2) = 2 \cos(\gamma/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$ и $\sin \gamma = 2 \sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2)$. Второе равенство доказывается аналогично.

12.5. В треугольнике A_2BC_2 длины сторон A_2B и BC_2 равны $b \cos \gamma$ и $b \cos \alpha$; прямая BO делит угол A_2BC_2 на углы $90^\circ - \gamma$ и $90^\circ - \alpha$. Пусть прямая BO пересекает отрезок A_2C_2 в точке M . По теореме синусов $A_2M = A_2B \sin A_2BM / \sin A_2MB = b \cos \gamma \cos \alpha / \sin C_2MB = C_2M$.

12.6. Пусть $\alpha = \angle(a, c)$, $\beta = \angle(c, d)$ и $\gamma = \angle(d, b)$. Тогда

$$(AC/AS)/(BC/BS) = \sin \alpha / \sin(\beta + \gamma), \quad (BD/BS)/(AD/AS) = \sin \gamma / \sin(\alpha + \beta).$$

Поэтому

$$(AC \cdot BD)/(BC \cdot AD) = \sin \alpha \sin \gamma / \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma).$$

12.7. Так как $OA/PA = \sin OPA / \sin POA$ и $OB/PB = \sin OPB / \sin POB$, то $(OA/OB)/(PA/PB) = \sin POB / \sin POA$.

12.8. Достаточно перемножить пять равенств вида $D_1A/D_1B = \sin B / \sin A$.

12.9. Пусть O — общая вершина данных треугольников, M и N — середины оснований, k — отношение длин оснований к высотам. Проекции оснований данных треугольников на прямую MN равны $k \cdot OM \sin OMN$ и $k \cdot ON \sin ONM$. Остается заметить, что $OM / \sin ONM = ON / \sin OMN$.

12.10. По теореме синусов $BX / \sin BDX = BD / \sin BXD = 2R \sin \psi / \sin BXD$. Кроме того, $\sin BDX = \sin BDC = \sin \varphi$; величина угла BXD легко вычисляется: если точки C и D лежат по одну сторону от AB , то $\angle BXD = \pi - \varphi - \psi$, а если по разные, то $\angle BXD = |\varphi - \psi|$. Значит, $BX = 2R \sin \varphi \sin \psi / \sin |\varphi \pm \psi|$.

12.11. а) Пусть A_1 — середина отрезка BC . Складывая равенства $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot BA_1 \cos BA_1A$ и $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cos CA_1A$ и учитывая, что $\cos BA_1A = -\cos CA_1A$, получаем требуемое.

б) Очевидным образом следует из задачи а).

12.12. По теореме косинусов $a^2 - (b-c)^2 = 2bc(1 - \cos \alpha) = 4S(1 - \cos \alpha) / \sin \alpha = 4S \operatorname{tg}(\alpha/2)$.

12.13. По теореме косинусов $\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$. Остается воспользоваться формулами $\cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos \alpha)/2$ и $\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2$.

12.14. Пусть α — угол при вершине параллелограмма. По теореме косинусов $m^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ и $n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. Поэтому $m^2 n^2 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab \cos \alpha)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2 b^2(1 - 2 \cos^2 \alpha)$. Значит, $m^2 n^2 = a^4 + b^4$ тогда и только тогда, когда $\cos^2 \alpha = 1/2$.

12.15. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1 . Угол AMB прямой тогда и только тогда, когда $AM^2 + BM^2 = AB^2$, т. е. $4(m_a^2 + m_b^2)/9 = c^2$. Согласно задаче 12.11 $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2)/4$.

12.16. Пусть $m = C_1M$ и $\varphi = \angle C_1MO$. Тогда $OC_1^2 = C_1M^2 + OM^2 - 2OM \cdot C_1M \cos \varphi$ и $BO^2 = CO^2 = OM^2 + MC^2 + 2OM \cdot CM \cos \varphi = OM^2 + 4C_1M^2 + 4OM \cdot C_1M \cos \varphi$. Поэтому $BC_1^2 = BO^2 - OC_1^2 = 3C_1M^2 + 6OM \cdot C_1M \cos \varphi$, т. е. $c^2 = 4BC_1^2 = 12m^2 + 24OM \cdot C_1M \cos \varphi$. Ясно также, что $18m^2 = 2m_c^2 = a^2 + b^2 - c^2/2$ (см. задачу 12.21). Поэтому равенство $a^2 + b^2 = 2c^2$ эквивалентно тому, что $18m^2 = 3c^2/2$, т. е. $c^2 = 12m^2$. Так как $c^2 = 12m^2 + 24OM \cdot C_1M \cos \varphi$, равенство $a^2 + b^2 = 2c^2$ эквивалентно тому, что $\angle C_1MO = \varphi = 90^\circ$, т. е. $CC_1 \perp OM$.

12.17. Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K , а вне-вписанная — в точке L . Тогда $BC = BK + KC = r \operatorname{ctg}(\beta/2) + r \operatorname{ctg}(\gamma/2)$ и $BC = BL + LC = r_a \operatorname{ctg} LBO_a + r_a \operatorname{ctg} LCO_a = r_a \operatorname{tg}(\beta/2) + r_a \operatorname{tg}(\gamma/2)$. Кроме того, $\cos(\alpha/2) = \sin \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Согласно задаче 3.2 $p - b = BK = r \operatorname{ctg}(\beta/2)$ и $p - b = CL = r_a \operatorname{tg}(\gamma/2)$.

Если вписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках P и Q , то $p = AP = AQ = r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

12.18. а) Согласно задаче 12.17 $p = r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ и $r \operatorname{ctg}(\alpha/2) = p - a$; $r \operatorname{ctg}(\beta/2) = p - b$ и $r_a \operatorname{tg}(\beta/2) = p - c$; $r_c \operatorname{tg}(\beta/2) = p - a$ и $r_b \operatorname{ctg}(\beta/2) = p$. Перемножая эти пары равенств, получаем требуемое.

б) Перемножая равенства $rp = r_a(p - a)$ и $rr_a = (p - b)(p - c)$, получаем $r^2 p = (p - a)(p - b)(p - c)$. Ясно также, что $S^2 = p(r^2 p)$.

в) Достаточно перемножить равенства $rr_a = (p - b)(p - c)$ и $r_b r_c = p(p - a)$ и воспользоваться формулой Герона.

12.19. Согласно задаче 12.17 $r = r_c \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2)$ и $p = r_c \operatorname{ctg}(\gamma/2)$.

12.20. Согласно задаче 12.18, а) $r_a = rp/(p - a)$ и $r_b = rp/(p - b)$. Поэтому $cr_a r_b = cr^2 p^2 / ((p - a)(p - b))$ и $r_a + r_b = rpc / ((p - a)(p - b))$, а значит, $cr_a r_b / (r_a + r_b) = rp = S$.

12.21. Согласно задаче 12.18, а) $1/r_b = (p - b)/pr$ и $1/r_c = (p - c)/pr$. Поэтому $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = a/pr = a/S = 2/h_a$.

12.22. Легко проверить, что $1/h_a = a/2pr$ и $1/r_a = (p - a)/pr$. Складывая аналогичные равенства, получаем требуемое.

12.23. Согласно задаче 12.18, а) $1/((p - b)(p - c)) = 1/rr_a$. Остается сложить аналогичные равенства и воспользоваться результатом задачи 12.22.

12.24. Согласно задаче 12.1 $4SR = abc$. Ясно также, что

$$abc = p(p - b)(p - c) + p(p - c)(p - a) + p(p - a)(p - b) - (p - a)(p - b)(p - c) = \frac{S^2}{(p - a)} + \frac{S^2}{(p - b)} + \frac{S^2}{(p - c)} - \frac{S^2}{p} = S(r_a + r_b + r_c - r).$$

12.25. Согласно задаче 12.18, а) $r_a r_b = p(p - c)$, $r_b r_c = p(p - a)$ и $r_c r_a = p(p - b)$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

12.26. Так как $S = rp = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$, то выражение в левой части равно $(p^3 - (p-a)^3 - (p-b)^3 - (p-c)^3)/S^3 = 3abc/S^3$. Остается заметить, что $abc/S = 4R$ (задача 12.1).

12.27. Пусть углы треугольника ABC равны $2\alpha, 2\beta$ и 2γ . Согласно задачам 12.36, а) и 12.37, б) $r = 4R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ и $r_a = 4R \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Поэтому $(r + r_a)(4R + r - r_a) = 16R^2 \sin \alpha (\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma)(1 + \sin \alpha (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma)) = 16R^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)(1 - \sin \alpha \cos(\beta + \gamma)) = 16R^2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) \cos^2 \alpha$. Остается заметить, что $4R \sin \alpha \cos \alpha = a$ и $4R \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) = 2R(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) = b + c$. Второе равенство доказывается аналогично.

12.28. Так как $OA = r/\sin(\alpha/2)$ и $bc = 2S/\sin \alpha$, то $OA^2/bc = r^2 \operatorname{ctg}(\alpha/2)/S = r(p-a)/S$ (см. задачу 12.17, в). Остается заметить, что $r(p-a+p-b+p-c) = rp = S$.

12.29. Решим сразу задачу б), частным случаем которой является задача а). Так как $\operatorname{ctg}(\varphi/2) = \sin \varphi/(1 - \cos \varphi)$, то $p^2(1-x)^2 = (1-x^2)(2R(1-x)+r)^2$, где $x = \cos \varphi$. Корень $x_0 = 1$ этого уравнения нас не интересует, так как в этом случае $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ был бы не определен; поэтому, сократив обе части уравнения на $1-x$, приходим к кубическому уравнению. Используя результаты задач 12.38, 12.39, б), 12.41, б), можно проверить, что это уравнение совпадает с уравнением $(x - \cos \alpha)(x - \cos \beta)(x - \cos \gamma) = 0$, где α, β и γ — углы треугольника. Значит, косинус угла φ равен косинусу одного из углов треугольника; кроме того, косинус монотонен на интервале от 0 до π .

12.30. Ясно, что $2pr = 2S = ab \sin \gamma = abc/2R$, т. е. $4prR = abc$. Для доказательства второго равенства воспользуемся формулой Герона: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, т. е. $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc = -p^3 + p(ab+bc+ca) - 4prR$. Сокращая на p , получаем требуемое.

12.31. Так как $abc = 4RS$ (задача 12.1), то выражение в левой части равно $(c+a+b)/4RS = 2p/4Rpr = 1/2Rr$.

12.32. Достаточно заметить, что $(p-c)/p = r/r_c$ (задача 12.18, а)), $r = c \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2)/\cos(\gamma/2)$ и $r_c = c \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)/\cos(\gamma/2)$ (задача 12.17).

12.33. Согласно задаче 12.1 $S = abc/4R$. С другой стороны, $S = ah_a/2$. Поэтому $h_a = bc/2R$.

12.34. Так как $ah_a = 2S = 2(p-a)r_a$ и $r_a/a = \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)/\cos(\alpha/2)$ (задача 12.17, б)), то $h_a = 2(p-a) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)/\cos(\alpha/2)$. Учитывая, что $(p-a) \operatorname{ctg}(\beta/2) = r_c = (p-b) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ (задача 12.17, в)), получаем $h_a = 2(p-b) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2)/\sin(\alpha/2)$.

12.35. а) Пусть продолжение биссектрисы AD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M . Тогда $AD \cdot DM = BD \cdot DC$ и, так как $\triangle ABD \sim \triangle AMC$, $AB \cdot AC = AD \cdot AM = AD(AD + DM) = AD^2 + BD \cdot DC$. Кроме того, $BD = ac/(b+c)$ и $DC = ab/(b+c)$. Значит, $AD^2 = bc - bca^2/(b+c)^2 = 4p(p-a)bc/(b+c)^2$.

б) См. решение задачи 4.47.

в) Пусть AD — биссектриса, AH — высота треугольника ABC . Тогда $AH = c \sin \beta = 2R \sin \beta \sin \gamma$. С другой стороны, $AH = AD \sin \angle ADH = l_a \sin(\beta + (\alpha/2)) = l_a \sin((\pi + \beta - \gamma)/2) = l_a \cos((\beta - \gamma)/2)$.

г) Учитывая, что $p = 4R \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)$ (задача 12.36, в) и $\sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin((\beta + \gamma)/2) \cos((\beta - \gamma)/2) = 2 \cos(\alpha/2) \cos((\beta - \gamma)/2)$, приходим к формуле задачи в).

12.36. а) Пусть O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB . Тогда

$$2R \sin \gamma = AB = AK + KB = r(\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)) = \\ = r \sin((\alpha + \beta)/2)(\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2)).$$

Учитывая, что $\sin \gamma = 2 \sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2)$ и $\sin((\alpha + \beta)/2) = \cos(\gamma/2)$, получаем требуемое.

б) Согласно задаче 3.2 $p - a = AK = r \operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Аналогично $p - b = r \operatorname{ctg}(\beta/2)$ и $p - c = r \operatorname{ctg}(\gamma/2)$. Перемножая эти равенства и учитывая, что $p(p - a)(p - b) \times (p - c) = S^2 = (pr)^2$, получаем требуемое.

в) Очевидным образом следует из задач а) и б).

12.37. а) Перемножая равенства

$$r \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) = p - a, \quad \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = r/4R$$

(см. задачи 12.17, в) и 12.36, а)), получаем требуемое.

б) Согласно задаче 12.17, в) $r_a \operatorname{tg}(\gamma/2) = p - b = r \operatorname{ctg}(\beta/2)$. Умножая это равенство на равенство $r/4R = \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2)$, получаем требуемое.

12.38. Складывая равенства $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$ и $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = -2 \cos^2((\alpha + \beta)/2) + 1$ и учитывая, что $\cos((\alpha - \beta)/2) - \cos((\alpha + \beta)/2) = 2 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2)$, получаем $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin(\alpha/2) \times \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) + 1 = \frac{r}{R} + 1$ (см. задачу 12.36, а)).

12.39. а) Складывая равенства $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta)$ и $\cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1 = -2 \cos \gamma \cos(\alpha + \beta) - 1$ и учитывая, что $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, получаем требуемое.

б) Достаточно подставить выражения вида $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ в равенство, полученное в задаче а).

12.40. Складывая равенства $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \gamma \times \cos(\alpha - \beta)$ и $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma = -2 \sin \gamma \cos(\alpha + \beta)$ и учитывая, что $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$, получаем требуемое.

12.41. а) Ясно, что $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4R$ и $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 4p^2 - 2(r^2 + p^2 + 4rR)$ (см. задачу 12.30).

б) Согласно задаче 12.39, б) $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2$. Остается воспользоваться результатом задачи а).

12.42. Теорему косинусов можно переписать в виде $ab \cos \gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/2$. Складывая три аналогичных равенства, получаем требуемое.

12.43. Согласно задаче 12.13 $\cos^2(\alpha/2)/a = p(p - a)/abc$. Остается заметить, что $p(p - a) + p(p - b) + p(p - c) = p^2$ и $abc = 4SR = 4prR$.

12.44. а) Так как $bc \cos \alpha = 2S \operatorname{ctg} \alpha$, то $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} \alpha$. Складывая три аналогичных равенства, получаем требуемое.

б) Для остроугольного треугольника $a^2 \operatorname{ctg} \alpha = 2R^2 \sin 2\alpha = 4S_{BOC}$, где O — центр описанной окружности. Остается сложить три аналогичных равенства. Для треугольника с тупым углом α величину S_{BOC} нужно взять со знаком минус.

12.45. Согласно задаче 12.17 $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) = c/r$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) = c/r_c$. Остается сложить такие равенства для всех пар углов треугольника.

12.46. Ясно, что $\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)/(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$. Домножая обе части на $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$, получаем требуемое.

12.47. $\operatorname{tg}(\gamma/2) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = [1 - \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2)]/[\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2)]$. Остается домножить обе части на $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2)$.

12.48. а) Домножим обе части равенства на $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Дальнейший ход доказательства таков: $\cos \gamma(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) + \sin \gamma(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \cos \gamma \sin(\alpha + \beta) + \sin \gamma \cos(\alpha + \beta) = \cos \gamma \sin \gamma - \sin \gamma \cos \gamma = 0$.

б) Домножим обе части равенства на $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Дальнейший ход доказательства таков: $\cos \alpha(\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) + \sin \alpha(\cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

12.49. Так как $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ (см. задачу 12.39, б)) и $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, остается проверить, что $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \times \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha$. Последнее равенство доказано в решении задачи 12.48, а).

12.50. Пусть A и B — вершины углов α и β , P — точка пересечения несопадающих сторон этих углов, Q — общая точка данных окружностей, лежащая на отрезке PA . Треугольник AQB равнобедренный, поэтому $\angle PQB = 2\alpha$. А так как $\angle PQB + \angle QPB = \beta + \angle QBA$, то $\beta = 3\alpha$.

12.51. Согласно задаче 4.47 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \cos(\alpha/2)/l_a$, поэтому $\cos(\alpha/2) = 1/2$, т. е. $\alpha = 120^\circ$.

12.52. Опустим из точки M перпендикуляр MD на прямую BC . Тогда $MD = AH/2 = BM/2$. В прямоугольном треугольнике BDM катет MD равен половине гипотенузы BM . Поэтому $\angle MBC = \angle MBD = 30^\circ$.

12.53. Величины $AD \cdot BC \sin ADB$ и $BE \cdot AC \sin AEB$ равны, так как они равны удвоенной площади треугольника ABC . Поэтому $\sin ADB = \sin AEB$. Возможны два случая.

1. $\angle ADB = \angle AEB$; в этом случае точки A, E, D, B лежат на одной окружности, поэтому $\angle EAD = \angle EBD$, т. е. $\angle A = \angle B$, чего не может быть по условию.

2. $\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$; в этом случае $\angle ECD + \angle EOD = 180^\circ$, где O — точка пересечения биссектрис. Так как $\angle EOD = 90^\circ + \angle C/2$ (задача 5.3), то $\angle C = 60^\circ$.

12.54. Пусть B' — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC с прямой AB . Тогда $AB' = CB'$ и $\angle AB'C = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Поэтому $AB' = CB' = 2CH = AB$, т. е. $B' = B$ и $\angle B = 30^\circ$.

12.55. Ясно, что $AKDM$ — прямоугольник и L — точка пересечения его диагоналей. Так как $AD \perp BC$ и $AM \perp BA$, то $\angle DAM = \angle ABC$. Аналогично, $\angle KAD = \angle ACB$. Опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую KM . Пусть для определенности $\angle B < \angle C$. Тогда точка P лежит на отрезке KL . Из подобия треугольников AKP и MKA получаем $AK : AP = MK : MA$. Поэтому $AK \cdot AM = AP \cdot MK = AP \cdot AD = 2AP \cdot AL$. По условию $AL^2 = AK \cdot AM$, следовательно, $AL = 2AP$, т. е. $\angle ALP = 30^\circ$. Ясно, что $\angle KMA = \angle ALP/2 = 15^\circ$. Поэтому острые углы треугольника ABC равны 15° и 75° .

12.56. Пусть CD — биссектриса. Тогда $BD = ac/(a+b)$. С другой стороны, $\triangle BDC \sim \triangle BCA$, поэтому $BD : BC = BC : BA$, т. е. $BD = a^2/c$. Следовательно, $c^2 = a(a+b) = 3a^2$. Стороны треугольника ABC равны $a, 2a$ и $\sqrt{3}a$, поэтому его углы равны $30^\circ, 90^\circ$ и 60° .

12.57. Пусть $\angle ABC = 2x$, тогда внешний угол A треугольника ABE равен $\angle ABE + \angle AEB = x + \alpha$. Далее, $\angle KAE - \angle BAK = (180^\circ - x - \alpha) - (180^\circ - 2x - 2\alpha) = x + \alpha$. Следовательно, AE — биссектриса внешнего угла A треугольника ABK . А так как BE — биссектриса внутреннего угла B этого треугольника, то E — центр его вневписанной окружности, касающейся стороны AK . Поэтому $\angle AKE = \angle AKC/2 = 90^\circ - \alpha$.

12.58. Пусть $A_1 \dots A_{18}$ — правильный восемнадцатиугольник. В качестве треугольника ABC можно взять треугольник $A_{14}A_1A_9$. Согласно задаче 6.62, б)

диагонали A_1A_{12} , A_2A_{14} и A_9A_{18} пересекаются в одной точке, поэтому $\angle AMC = (\sphericalangle A_{18}A_2 + \sphericalangle A_9A_{14})/2 = 70^\circ$.

12.59. Пусть $A_1 \dots A_{18}$ — правильный восемнадцатиугольник, O — его центр. В качестве треугольника ABC можно взять треугольник A_1OA_{18} . Диагонали A_2A_{14} и $A_{18}A_6$ симметричны относительно диаметра A_1A_{10} , а диагональ A_2A_{14} проходит через точку пересечения диагоналей A_1A_{12} и A_9A_{18} (см. решение предыдущей задачи), поэтому $\angle ADE = (\sphericalangle A_1A_2 + \sphericalangle A_{12}A_{14})/2 = 30^\circ$.

12.60. Поскольку $\angle BDE = 50^\circ$ и $\angle CED = 30^\circ$, то $\angle BOC = \angle EOD = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$. Будем считать, что фиксированы диаметры BB' и CC' окружности, причем $\angle BOC = 100^\circ$, а точка A движется по дуге $B'C'$. Пусть D — точка пересечения BB' и AC , E — точка пересечения CC' и AB (рис. 12.6). Так как при движении точки A от B' к C' отрезок OE увеличивается, а OD уменьшается, то угол OED убывает, а угол ODE возрастает. Поэтому существует единственное положение точки A , при котором $\angle CED = \angle OED = 30^\circ$ и $\angle BDE = \angle ODE = 50^\circ$.

Докажем теперь, что треугольник ABC с углами $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ обладает требуемым свойством. Пусть $A_1 \dots A_{18}$ — правильный восемнадцатиугольник. В качестве треугольника ABC можно взять треугольник $A_2A_{14}A_9$. Диагональ A_1A_{12} проходит через точку E (см. решение задачи 12.58). Пусть F — точка пересечения прямых A_1A_{12} и A_5A_{14} ; прямая A_9A_{16} симметрична прямой A_1A_{12} относительно прямой A_5A_{14} , поэтому она проходит через точку F . В треугольнике CDF луч CE является биссектрисой угла C , а прямая FE — биссектрисой внешнего угла при вершине F . Поэтому DE — биссектриса угла ADB , т. е. $\angle ODE = (\sphericalangle A_2A_{14} + \sphericalangle A_5A_9)/4 = 50^\circ$.

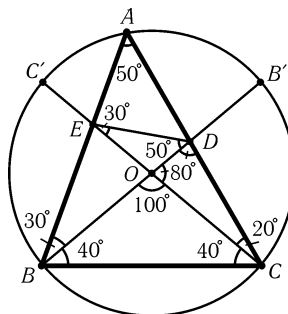


Рис. 12.6

12.61. Пусть D, E и F — точки касания окружности с BP, PQ и QC ; $\angle BOD = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \angle C = \angle COF = \alpha$, $\angle DOP = \angle POE = \beta$ и $\angle EOQ = \angle QOF = \gamma$. Тогда $180^\circ = \angle BOC = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Так как $\angle BPO = \angle DPE/2 = (180^\circ - \angle DOE)/2 = 90^\circ - \beta$ и $\angle QOC = \gamma + \alpha = 90^\circ - \beta$, то $\angle BPO = \angle COQ$. Ясно также, что $\angle PBO = \angle OCQ$. Поэтому $\triangle BPO \sim \triangle COQ$, т. е. $PB \cdot CQ = BO \cdot CO = BC^2/4$.

12.62. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Точки P и Q являются точками касания вписанной окружности со сторонами BC и CD . Поэтому достаточно проверить, что $PF + GQ = FG$. В самом деле, если $F'G'$ — отрезок, параллельный FG и касающийся вписанной окружности, то $PF' + G'Q = F'G'$, поэтому $F' = F$ и $G' = G$.

Можно считать, что сторона квадрата равна 2. Пусть $GD = x$. Так как $BF : EB = AD : GD$, то $BF = 2/x$. Поэтому $CG = 2 - x$, $GQ = x - 1$, $CF = 2 - \frac{2}{x}$, $FP = \frac{2}{x} - 1$, т. е. $PF + GQ = x + 2/x - 2$ и $FG^2 = CG^2 + CF^2 = (2 - x)^2 + 2 - \frac{2}{x} = 4 - 4x + x^2 + 4 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} = x + \frac{2}{x} - 2 = (PF + GQ)^2$.

12.63. Обозначим вершины квадратов так, как показано на рис. 12.7. Пусть O — центр окружности, H — середина данной хорды, K — середина отрезка AA_1 . Так как $\tan \angle AHB = 2 = \tan \angle A_1HD_1$, то точка H лежит на пря-

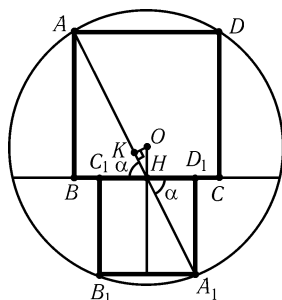


Рис. 12.7

мой AA_1 . Пусть $\alpha = \angle AHB = \angle A_1HD_1$. Тогда $AB - A_1D_1 = (AH - A_1H) \sin \alpha = 2KH \sin \alpha = 2OH \sin^2 \alpha$. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$, то $\sin^2 \alpha = 4/5$. Поэтому разность длин сторон квадратов равна $8h/5$.

12.64. Пусть медиана BM треугольника ABC пересекает вписанную окружность в точках K и L , причем $BK = KL = LM = x$. Пусть для определенности точка касания вписанной окружности со стороной AC лежит на отрезке MC . Тогда, так как при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку BM точки B и M переходят друг в друга, а вписанная окружность переходит в себя, касательная MC переходит в касательную BC . Следовательно, $BC = MC = AC/2$, т. е. $b = 2a$.

Так как $BM^2 = (2a^2 + 2c^2 - b^2)/4$ (см. задачу 12.11, а), то $9x^2 = (2a^2 + 2c^2 - 4a^2)/4 = (c^2 - a^2)/2$. Пусть точка P — точка касания вписанной окружности со стороной BC . Тогда $BP = (a + c - b)/2 = (c - a)/2$. С другой стороны, по свойству касательной $BP^2 = BK \cdot BL$, т. е. $BP^2 = 2x^2$. Поэтому $2x^2 = ((c - a)/2)^2$. Перемножая равенства $9x^2 = (c^2 - a^2)/2$ и $((c - a)/2)^2 = 2x^2$, получаем $(c + a)/(c - a) = 9/4$, т. е. $c : a = 13 : 5$. В итоге получаем, что $a : b : c = 5 : 10 : 13$.

12.65. Пусть $2a$ и $2b$ — длины сторон первого и второго квадратов. Тогда расстояние от центра окружности до вершин второго квадрата, лежащих на окружности, равно $\sqrt{(a + 2b)^2 + b^2}$. С другой стороны, это расстояние равно $\sqrt{2}a$. Следовательно, $(a + 2b)^2 + b^2 = 2a^2$, т. е. $a = 2b \pm \sqrt{4b^2 + 5b^2} = (2 \pm 3)b$. Нам подходит только решение $a = 5b$.

12.66. Пусть P и Q — середины отрезков AC и AB , R — центр окружности S_1 ; $a = AC/2$, $b = BC/2$, x — радиус окружности S_1 . Легко проверить, что $PR = a + x$, $QR = a + b - x$ и $PQ = b$. Проведем в треугольнике PQR высоту RH . Расстояние от точки R до прямой CD равно x , поэтому $PH = a - x$, а значит, $QH = |b - a + x|$. Следовательно, $(a + x)^2 - (a - x)^2 = RH^2 = (a + b - x)^2 - (b - a + x)^2$, т. е. $ax = b(a - x)$. В итоге получаем $x = ab/(a + b)$. Для радиуса окружности S_2 получаем точно такое же выражение.

12.67. Пусть x — радиус окружности S , касающейся окружностей S_1 и S_2 и луча AB , y — радиус окружности S' , касающейся окружностей S_2 и S_3 и луча BA . Положение окружности, касающейся окружностей S_1 и луча AB (соответственно S_3 и луча BA) однозначно определяется ее радиусом, поэтому достаточно проверить, что $x = y$.

Приравняв два выражения для квадрата расстояния от центра окружности S до прямой AD , получаем $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (3 + x)^2 - (5 - x)^2$, т. е. $x = 4/3$. Рассматривая окружности S_2 и S_3 , легко проверить, что $AB^2 = (3 + 4)^2 - 1^2 = 48$. С другой стороны, квадраты расстояний от центра окружности S' до прямых AD и BC равны $(y + 3)^2 - (5 - y)^2 = 16(y - 1)$ и $(4 + y)^2 - (4 - y)^2 = 16y$ соответственно. Следовательно, $4\sqrt{y - 1} + 4\sqrt{y} = \sqrt{48}$, т. е. $y = 4/3$.

12.68. Если углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, то они равны $\alpha - \gamma, \alpha, \alpha + \gamma$, где $\gamma \geq 0$. Так как сумма углов треугольника равна 180° , то $\alpha = 60^\circ$. Стороны этого треугольника равны $2R \sin(\alpha - \gamma), 2R \sin \alpha, 2R \sin(\alpha + \gamma)$. Поскольку против большего угла лежит большая сторона, то $\sin(\alpha - \gamma) \leq \sin \alpha \leq \sin(\alpha + \gamma)$.

а) Если числа $\sin(\alpha - \gamma) \leq \sin \alpha \leq \sin(\alpha + \gamma)$ образуют арифметическую прогрессию, то $\sin \alpha = (\sin(\alpha + \gamma) + \sin(\alpha - \gamma))/2 = \sin \alpha \cos \gamma$, т. е. $\cos \gamma = 1$, или $\gamma = 0$. Следовательно, все углы треугольника равны 60° .

б) Если числа $\sin(\alpha - \gamma) \leq \sin \alpha \leq \sin(\alpha + \gamma)$ образуют геометрическую прогрессию, то $\sin^2 \alpha = \sin(\alpha - \gamma) \sin(\alpha + \gamma) = \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma$. Поэтому $\cos \gamma = 1$, т. е. все углы треугольника равны 60° .

12.69. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCE$ (рис. 12.8). Пусть $BC = x$ и $AD = y$. Тогда $(b - a)h = 2S_{AED} = xy \sin 45^\circ$ и $(b - a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ = x^2 + y^2 - 2xy \sin 45^\circ$. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) = (BO^2 + CO^2) + (DO^2 + AO^2) = x^2 + y^2$. Следовательно, $(b - a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \sin 45^\circ = a^2 + b^2 - 2(b - a)h$, т. е. $h = ab/(b - a)$.

12.70. Так как $BK = (a + c - b)/2$ и $KC = (a + b - c)/2$ (см. задачу 3.2), то $BK \cdot KC = (a^2 - (b - c)^2)/4 = S \operatorname{tg}(\alpha/2)$ (см. задачу 12.12).

12.71. Так как $(b + c)/a = \cos((\beta - \gamma)/2)/\sin(\alpha/2)$ (задача 12.4), то $\cos((\beta - \gamma)/2) = \cos(\alpha/2)$, т. е. $\beta - \gamma = \pm \alpha$. Если $\beta = \gamma + \alpha$, то $\beta = 90^\circ$, а если $\beta + \alpha = \gamma$, то $\gamma = 90^\circ$.

12.72. Легко проверить, что $S_{ABC} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Аналогично $S_{A_1 B_1 C_1} = 2R^2 \sin((\beta + \gamma)/2) \sin((\alpha + \gamma)/2) \sin((\alpha + \beta)/2) = 2R^2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)$. Поэтому $S_{ABC}/S_{A_1 B_1 C_1} = 8 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = 2r/R$ (см. задачу 12.36, а).

12.73. Сумма котангенсов углов треугольника равна $(a^2 + b^2 + c^2)/4S$ (задача 12.44, а). Кроме того, $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)/4$ (задача 12.11, б) и площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC , равна $3/4$ площади треугольника ABC (задача 1.37).

12.74. Одна из точек A_i лежит внутри треугольника, образованного тремя другими точками, поэтому можно считать, что треугольник $A_1 A_2 A_3$ остроугольный (или прямоугольный). Числа λ_1, λ_2 и λ_3 легко находятся из соответствующей системы уравнений; в результате получаем $\lambda_1 = (b^2 + c^2 - a^2)/2, \lambda_2 = (a^2 + c^2 - b^2)/2$ и $\lambda_3 = (a^2 + b^2 - c^2)/2$, где $a = A_2 A_3, b = A_1 A_3$ и $c = A_1 A_2$. Согласно задаче 5.47, б) $A_1 A_4^2 = 4R^2 - a^2$, где R — радиус описанной окружности треугольника $A_1 A_2 A_3$. Поэтому $\lambda_4 = A_1 A_4^2 - \lambda_1 = 4R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/2 = A_2 A_4^2 - \lambda_2 = A_3 A_4^2 - \lambda_3$.

Проверим теперь, что $\sum 1/\lambda_i = 0$. Так как $(b^2 + c^2 - a^2)/2 = bc \cos \alpha = 2S \operatorname{ctg} \alpha$, то $1/\lambda_1 = \operatorname{tg} \alpha/2S$. Остается заметить, что $2/(a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)/2S$ (задача 12.49).

12.75. Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ и (a_3, b_3) — координаты вершин треугольника. Координаты центра его описанной окружности задаются системой уравнений

$$\begin{aligned}(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 &= (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2, \\(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 &= (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2.\end{aligned}$$

Легко проверить, что эти уравнения линейные, а значит, решение рассматриваемой системы уравнений рационально.

12.76. Возьмем на отрезках AB и CD точки K и L , делящие их в указанных отношениях. Достаточно доказать, что точка пересечения прямых AK и CL ле-

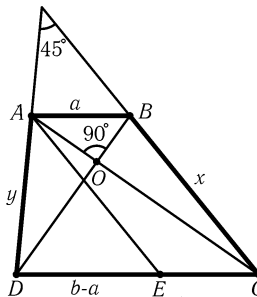


Рис. 12.8

жит на окружности S . Введем систему координат с началом в центре O окружности S и осями Ox и Oy , направленными по лучам OB и OD . Радиус окружности S можно считать равным 1. Прямые AK и CL задаются соответственно уравнениями $y = (x + 1)/3$ и $y = 2x - 1$. Поэтому их общая точка имеет координаты $x_0 = 4/5$ и $y_0 = 3/5$. Ясно, что $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

12.77. Пусть d — расстояние от центра описанной окружности до образа центра вписанной окружности при рассматриваемой гомотетии. Достаточно проверить, что $R = d + 2r$. Пусть $(0, 0)$, $(2a, 0)$ и $(0, 2b)$ — координаты вершин данного треугольника. Тогда (a, b) — координаты центра описанной окружности, (r, r) — координаты центра вписанной окружности, причем $r = a + b - R$. Следовательно, $d^2 = (2r - a)^2 + (2r - b)^2 = a^2 + b^2 - 4r(a + b - r) + 4r^2 = (R - 2r)^2$, так как $a^2 + b^2 = R^2$.

12.78. Рассмотрим систему координат с началом в центре квадрата и осью Ox , параллельной прямой l . Пусть вершины квадрата имеют следующие координаты: $A(x, y)$, $B(y, -x)$, $C(-x, -y)$ и $D(-y, x)$; прямая l задается уравнением $y = a$. Тогда точка Q имеет координаты $((x + y)/2, (y - x)/2)$, а точка P имеет координаты $(-y, a)$. Следовательно, искомое ГМТ состоит из точек $(t, -t + a/2)$, где $t = (x - y)/4$. Остается заметить, что величина $x - y$ изменяется от $-\sqrt{2(x^2 + y^2)} = -AB$ до AB .

Глава 13

Векторы

Основные сведения

1. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

- а) \vec{AB} и \mathbf{a} — векторы;
- б) AB и $|\mathbf{a}|$ — их длины; изредка длину вектора \mathbf{a} обозначают a ;
- в) (\vec{AB}, \vec{CD}) , (\mathbf{a}, \mathbf{b}) и (\vec{AB}, \mathbf{a}) — скалярные произведения векторов;
- г) (x, y) — вектор с координатами x, y ;
- д) $\vec{0}$ или $\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

2. *Ориентированным углом между ненулевыми векторами \mathbf{a} и \mathbf{b}* (обозначение: $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) будем называть угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор \mathbf{a} , чтобы он стал сонаправлен с вектором \mathbf{b} . Углы, отличающиеся на 360° , считают равными. Легко проверить следующие свойства ориентированных углов между векторами:

- а) $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\angle(\mathbf{b}, \mathbf{a})$;
- б) $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$;
- в) $\angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 180^\circ$.

3. *Скалярным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}* называют число $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (если один из этих векторов нулевой, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$). Легко проверить следующие свойства скалярного произведения:

- а) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;
- б) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$;
- в) $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b}, \mathbf{c})$;
- г) если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

4. Многие векторные неравенства доказываются с помощью следующего факта.

Пусть даны два набора векторов, причем известно, что сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Тогда сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора (см. задачу 13.39). Тем самым задача на плоскости сводится к задаче на прямой, которая обычно бывает легче.

Вводные задачи

1. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC . Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})/2$.
2. Докажите, что $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$.
3. Докажите, что если векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ перпендикулярны, то $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
4. Пусть $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ и $OA = OB = OC$. Докажите, что ABC — правильный треугольник.
5. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что $\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})/2$.

§1. Векторы сторон многоугольников

13.1. а) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.

б) Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, причем коэффициент подобия равен $3/4$.

13.2. Стороны треугольника T параллельны медианам треугольника T_1 . Докажите, что медианы треугольника T параллельны сторонам треугольника T_1 .

13.3. M_1, M_2, \dots, M_6 — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2 \dots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 .

13.4. Из точки, лежащей внутри выпуклого n -угольника, проведены лучи, перпендикулярные его сторонам и пересекающие стороны (или их продолжения). На этих лучах отложены векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, длины которых равны длинам соответствующих сторон. Докажите, что $\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$.

13.5. Сумма четырех единичных векторов равна нулю. Докажите, что их можно разбить на две пары противоположных векторов.

13.6. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE . Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

13.7*. Дано n попарно не сонаправленных векторов ($n \geq 3$), сумма которых равна нулю. Докажите, что существует выпуклый n -угольник, набор векторов сторон которого совпадает с данным набором векторов.

13.8*. Даны четыре попарно непараллельных вектора, сумма которых равна нулю. Докажите, что из них можно составить: а) невыпуклый четырехугольник; б) самопересекающуюся четырехзвенную ломаную.

13.9*. Даны четыре попарно непараллельных вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} , сумма которых равна нулю. Докажите, что

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| > |\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{a} + \mathbf{c}| + |\mathbf{a} + \mathbf{d}|.$$

13.10*. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона BC параллельна диагонали AD , $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ и $AE \parallel BD$. Докажите, что $AB \parallel CE$.

§2. Скалярное произведение. Соотношения

13.11. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, то и диагонали любого другого четырехугольника с такими же длинами сторон перпендикулярны.

13.12. а) Пусть A , B , C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

13.13. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC .

13.14. Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — векторы сторон n -угольника, $\varphi_{ij} = \angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$. Докажите, что $a_1^2 = a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2 \sum_{i>j>1} a_i a_j \cos \varphi_{ij}$, где $a_i = |\mathbf{a}_i|$.

13.15. Дан четырехугольник $ABCD$. Пусть $u = AD^2$, $v = BD^2$, $w = CD^2$, $U = BD^2 + CD^2 - BC^2$, $V = AD^2 + CD^2 - AC^2$, $W = AD^2 + BD^2 - AB^2$. Докажите, что $uU^2 + vV^2 + wW^2 = UVW + 4uvw$ (Гаусс).

13.16*. Точки A , B , C и D таковы, что для любой точки M числа $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ и $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$ различны. Докажите, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

13.17*. Докажите, что в выпуклом k -угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

13.18*. В выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от вершины до сторон одна и та же для всех вершин. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

§3. Неравенства

13.19. Даны точки A , B , C и D . Докажите, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2$, причем равенство достигается, только если $ABCD$ — параллелограмм.

13.20. Докажите, что из пяти векторов всегда можно выбрать два так, чтобы длина их суммы не превосходила длины суммы оставшихся трех векторов.

13.21. Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти из них меньше длины суммы всех десяти векторов. Докажите, что существует ось, проекция на которую каждого из десяти векторов положительна.

13.22. Точки A_1, \dots, A_n лежат на окружности с центром O , причем $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. Докажите, что для любой точки X справедливо неравенство $XA_1 + \dots + XA_n \geq nR$, где R — радиус окружности.

13.23. Дано восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h . Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$ неотрицательно.

13.24* На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n + 1$ точек P_1, \dots, P_{2n+1} , лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $|\overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}| \geq 1$.

13.25* Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — векторы, длины которых не превосходят 1. Докажите, что в сумме $\mathbf{c} = \pm \mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 \dots \pm \mathbf{a}_n$ можно выбрать знаки так, что $|\mathbf{c}| \leq \sqrt{2}$.

13.26* Из точки O выходит n векторов единичной длины, причем в любой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через точку O , содержится не менее k векторов (предполагается, что граничная прямая входит в полуплоскость). Докажите, что длина суммы этих векторов не превосходит $n - 2k$.

§4. Суммы векторов

13.27. Докажите, что точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ для некоторого t и любой точки O .

13.28. Дано несколько точек и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы \overrightarrow{AB} , причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.

13.29. Внутри треугольника ABC взята точка O . Докажите, что

$$S_{BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

13.30. Точки A и B движутся по двум фиксированным лучам с общим началом O так, что величина $\frac{p}{OA} + \frac{q}{OB}$ остается постоянной. Докажите, что прямая AB при этом проходит через фиксированную точку.

13.31. Через точку M пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что $(1/\overline{MA_1}) + (1/\overline{MB_1}) + (1/\overline{MC_1}) = 0$ (отрезки MA_1, MB_1 и MC_1 считаются ориентированными).

13.32. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 . Отрезки BB_1 и CC_1 , CC_1 и AA_1 , AA_1 и BB_1 пересекаются в точках A_2 , B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что если $\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0}$, то $AB_1 : B_1C = CA_1 : A_1B = BC_1 : C_1A$.

13.33. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD , M_a — середина отрезка AH_a ; точки M_b , M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a , M_b , M_c и M_d совпадают.

13.34*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R .

а) Пусть S_a — окружность радиуса R с центром в ортоцентре треугольника BCD ; окружности S_b , S_c и S_d определяются аналогично. Докажите, что эти четыре окружности пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC , BCD , CDA и DAB пересекаются в одной точке.

§5. Вспомогательные проекции

13.35. Точка X лежит внутри треугольника ABC , $\alpha = S_{BXC}$, $\beta = S_{CXA}$ и $\gamma = S_{AXB}$. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — проекции точек A , B и C на произвольную прямую l . Докажите, что длина вектора $\alpha \overrightarrow{AA_1} + \beta \overrightarrow{BB_1} + \gamma \overrightarrow{CC_1}$ равна $(\alpha + \beta + \gamma)d$, где d — расстояние от точки X до прямой l .

13.36*. Выпуклый $2n$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ вписан в окружность радиуса 1. Докажите, что

$$|\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}| \leq 2.$$

13.37*. Пусть a , b и c — длины сторон треугольника ABC , \mathbf{n}_a , \mathbf{n}_b и \mathbf{n}_c — векторы единичной длины, перпендикулярные соответствующим сторонам и направленные во внешнюю сторону. Докажите, что

$$a^3 \mathbf{n}_a + b^3 \mathbf{n}_b + c^3 \mathbf{n}_c = 12S \cdot \overrightarrow{MO},$$

где S — площадь, M — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности треугольника ABC .

13.38*. Пусть O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC , Z и r — центр и радиус его вписанной окружности; K — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC . Докажите, что точка Z лежит на отрезке OK , причем $OZ : ZK = 3R : r$.

§6. Метод усреднения

13.39*. Даны два набора векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$, причем сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Докажите,

что сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора.

13.40*. Докажите, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

13.41*. Сумма длин нескольких векторов на плоскости равна L . Докажите, что из этих векторов можно выбрать некоторое число векторов (может быть, только один) так, что длина их суммы будет не меньше L/π .

13.42*. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d , то его периметр меньше πd .

13.43*. На плоскости даны четыре вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} , сумма которых равна нулю. Докажите, что

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

13.44*. Внутри выпуклого n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$ взята точка O так, что $\vec{OA}_1 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}$. Пусть $d = OA_1 + \dots + OA_n$. Докажите, что периметр многоугольника не меньше $4d/n$ при n четном и не меньше $4dn/(n^2 - 1)$ при n нечетном.

13.45*. Длина проекции замкнутой выпуклой кривой на любую прямую равна 1. Докажите, что ее длина равна π .

13.46*. Дано несколько выпуклых многоугольников, причем нельзя провести прямую так, чтобы она не пересекала ни одного многоугольника и по обе стороны от нее лежал хотя бы один многоугольник. Докажите, что эти многоугольники можно заключить в многоугольник, периметр которого не превосходит суммы их периметров.

§7. Псевдоскалярное произведение

Псевдоскалярным произведением ненулевых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называют число $c = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; если хотя бы один из векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} нулевой, то $c = 0$. Число c обозначается $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$. Ясно, что $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = -\mathbf{b} \vee \mathbf{a}$.

Абсолютная величина псевдоскалярного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} равна площади параллелограмма, натянутого на эти векторы. В связи с этим *ориентированной площадью* тройки точек A , B и C называют число $S(A, B, C) = (\vec{AB} \vee \vec{AC})/2$; абсолютная величина числа $S(A, B, C)$ равна площади треугольника ABC .

13.47. Докажите, что:

- а) $(\lambda \mathbf{a}) \vee \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$;
 б) $\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{a} \vee \mathbf{c}$.

13.48. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Докажите, что $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

13.49. а) Докажите, что $S(A, B, C) = -S(B, A, C) = S(B, C, A)$.

б) Докажите, что для любых точек A , B , C и D справедливо равенство $S(A, B, C) = S(D, A, B) + S(D, B, C) + S(D, C, A)$.

13.50. Три бегуна A , B и C бегут по параллельным дорожкам с постоянными скоростями. В начальный момент площадь треугольника ABC равна 2, через 5 с равна 3. Чему может быть она равна еще через 5 с?

13.51. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

13.52. Решите с помощью псевдоскалярного произведения задачу 4.29, б.

13.53*. Точки P_1 , P_2 и P_3 , не лежащие на одной прямой, расположены внутри выпуклого $2n$ -угольника $A_1 \dots A_{2n}$. Докажите, что если сумма площадей треугольников $A_1 A_2 P_i$, $A_3 A_4 P_i, \dots, A_{2n-1} A_{2n} P_i$ равна одному и тому же числу s для $i = 1, 2, 3$, то для любой внутренней точки P сумма площадей этих треугольников равна s .

13.54*. Дан треугольник ABC и точка P . Точка Q такова, что $CQ \parallel AP$, а точка R такова, что $AR \parallel BQ$ и $CR \parallel BP$. Докажите, что $S_{ABC} = S_{PQR}$.

13.55*. Пусть H_1 , H_2 и H_3 — ортоцентры треугольников $A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_3 A_4$ и $A_1 A_2 A_4$. Докажите, что площади треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $H_1 H_2 H_3$ равны.

13.56*. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$, площадь которого равна S , площади треугольников ABC , BCD , CDE , DEA и EAB равны a , b , c , d и e . Докажите, что

$$S^2 - S(a + b + c + d + e) + ab + bc + cd + de + ea = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

13.57. Пусть M и N — середины отрезков AB и AC , P — середина отрезка MN , O — произвольная точка. Докажите, что $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OP}$.

13.58. Точки A , B и C движутся равномерно с одинаковыми угловыми скоростями по трем окружностям в одну и ту же сторону. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC при этом движется также по окружности.

13.59. Пусть A , B , C , D и E — произвольные точки. Существует ли такая точка O , что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OE}$? Найдите все такие точки.

13.60. Пусть P и Q — середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

13.61. Середины отрезков AB и CD , BC и DE соединены; середины полученных отрезков тоже соединены. Докажите, что последний отрезок параллелен отрезку AE и его длина равна $AE/4$.

13.62. Вписанная окружность касается сторон BC , CA и AB треугольника ABC в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что если $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, то треугольник ABC правильный.

13.63. Четырехугольники $ABCD$, $AEFG$, $ADFH$, $FIJE$ и $BIJC$ являются параллелограммами. Докажите, что четырехугольник $AFHG$ тоже параллелограмм.

Решения

13.1. а) Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$; AA' , BB' и CC' — медианы треугольника ABC . Тогда $\overrightarrow{AA'} = (\mathbf{c} - \mathbf{b})/2$, $\overrightarrow{BB'} = (\mathbf{a} - \mathbf{c})/2$ и $\overrightarrow{CC'} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$. Поэтому $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

б) Пусть $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AA'}$, $\mathbf{b}_1 = \overrightarrow{BB'}$ и $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{CC'}$. Тогда $(\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1)/2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{a} + \mathbf{c})/4 = -3\mathbf{a}/4$ — вектор стороны треугольника $A_2B_2C_2$.

13.2. Пусть \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — векторы сторон треугольника T . Тогда $(\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$, $(\mathbf{a} - \mathbf{c})/2$ и $(\mathbf{c} - \mathbf{b})/2$ — векторы его медиан. Можно считать, что \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — векторы, идущие из точки пересечения медиан треугольника T_1 в его вершины. Тогда $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ — векторы его сторон.

13.3. Ясно, что $2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3}$, $2\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{A_3A_5}$ и $2\overrightarrow{M_5M_6} = \overrightarrow{A_5A_1}$. Поэтому $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_5M_6} = \vec{0}$.

13.4. После поворота на 90° векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ переходят в векторы сторон n -угольника.

13.5. Из данных векторов можно составить выпуклый четырехугольник. Длины всех сторон этого четырехугольника равны 1, поэтому он — ромб; пары его противоположных сторон дают требуемое разбиение.

13.6. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AE}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{DF}$ и $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$. Тогда $2\overrightarrow{AK} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$ и $2\overrightarrow{AL} = \mathbf{a} + \mathbf{v} + 2\mathbf{b}$, поэтому $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$. Аналогично $\overrightarrow{NM} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$.

13.7. Отложим данные векторы от одной точки и, идя по часовой стрелке, занумеруем их по порядку: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Рассмотрим замкнутую ломаную $A_1 \dots A_n$, для которой $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \mathbf{a}_i$. Докажем, что $A_1 \dots A_n$ — выпуклый многоугольник. Введем систему координат, направив ось Ox по вектору \mathbf{a}_1 . Пусть векторы $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ лежат по одну сторону от оси Ox , а векторы $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ — по другую (если есть вектор, противоположно направленный с \mathbf{a}_1 , то его можно отнести в любую из этих двух групп). Проекция векторов первой группы на ось Oy имеют один знак, а проекции векторов второй группы — другой. Поэтому вторые координаты как точек A_2, A_3, \dots, A_{k+1} , так и точек A_{k+1}, \dots, A_n, A_1 изменяются монотонно: в первом случае от нуля до некоторой величины d , а во втором — от d до нуля. Так как интервалов монотонности только два, все вершины многоугольника лежат по одну сторону от прямой A_1A_2 . Для остальных прямых, проходящих через стороны многоугольника, доказательство проводится аналогично.

13.8. Согласно задаче 13.7 из данных векторов можно составить выпуклый четырехугольник. Дальнейшее ясно из рис. 13.1.

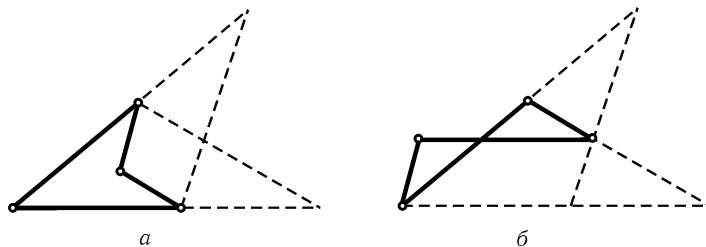


Рис. 13.1

13.9. Согласно задаче 13.8, б) из данных векторов можно составить самопересекающуюся четырехзвенную ломаную; ее можно представить как две диагонали и две противоположные стороны выпуклого четырехугольника. Возможны два случая: вектор \mathbf{a} может быть как стороной, так и диагональю этого четырехугольника. Но в обоих случаях сумма в левой части неравенства представляет собой сумму длин двух противоположных сторон и двух диагоналей четырехугольника, а в сумме в правой части входит длина суммы векторов тех же самых противоположных сторон и длины двух других противоположных сторон. Остается заметить, что сумма длин двух векторов не меньше длины их суммы, а сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы длин двух противоположных сторон (см. задачу 9.14).

13.10. Пусть диагональ BE пересекает диагонали AD и AC в точках F и G . Стороны треугольников AFE и BCD параллельны, поэтому они подобны и $AF : FE = BC : CD$. Следовательно, $AD : BE = (AF + BC) : (EF + CD) = BC : CD$. Аналогично $AE : BD = DE : AC$. Из подобия треугольников BED и EGA получаем $AE : DB = EG : BE = CD : BE$. Итак, $\frac{BC}{AD} = \frac{CD}{BE} = \frac{AE}{BD} = \frac{DE}{AC} = \lambda$. Ясно, что $\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} + \vec{AB} = \vec{0}$, $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CA} + \vec{DB} + \vec{EC} = \vec{0}$ и $\vec{BC} = \lambda\vec{AD}$, $\vec{CD} = \lambda\vec{BE}$, $\vec{DE} = \lambda\vec{CA}$, $\vec{EA} = \lambda\vec{DB}$. Следовательно, $\vec{0} = \lambda(\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CA} + \vec{DB}) + \vec{AB} = -\lambda\vec{EC} + \vec{AB}$, т. е. $\vec{AB} = \lambda\vec{EC}$. Поэтому $AB \parallel EC$.

13.11. Пусть $\mathbf{a} = \vec{AB}$, $\mathbf{b} = \vec{BC}$, $\mathbf{c} = \vec{CD}$ и $\mathbf{d} = \vec{DA}$. Достаточно проверить, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Ясно, что $d^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})]$. Поэтому условие $AC \perp BD$, т. е. $0 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = b^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, эквивалентно тому, что $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2$.

13.12. а) Выразим все входящие в указанную формулу векторы через \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{CD} , т. е. запишем $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$, $\vec{CA} = -\vec{AB} - \vec{BC}$ и $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD}$. После сокращения получим требуемое.

б) Пусть D — точка пересечения высот, проведенных из вершин A и C треугольника ABC . Тогда в доказанной в задаче а) формуле первые два слагаемых нулевые, поэтому последнее слагаемое тоже нулевое, т. е. $BD \perp AC$.

13.13. Докажем, что $AH \perp BC$. $\vec{AH} = \vec{AO} + \vec{OH} = \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OC}$ и $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = -\vec{OB} + \vec{OC}$, поэтому $(\vec{AH}, \vec{BC}) = OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0$, так как O — центр описанной окружности. Аналогично доказывается, что $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$.

13.14. Пусть $\alpha_i = \angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1)$. Рассматривая проекции на прямую, параллель-

ную \mathbf{a}_1 , и прямую, перпендикулярную \mathbf{a}_1 , получаем $a_1 = \sum_{i>1} a_i \cos \alpha_i$ и $0 = \sum_{i>1} a_i \sin \alpha_i$ соответственно. Возводя эти равенства в квадрат и складывая их, получаем $a_1^2 = \sum_{i>1} a_i^2 (\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i) + 2 \sum_{i>j>1} a_i a_j (\cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sin \alpha_i \sin \alpha_j) = a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2 \sum_{i>j>1} a_i a_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)$. Остается заметить, что $\alpha_i - \alpha_j = \angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1) - \angle(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_1) = \angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \varphi_{ij}$.

13.15. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BD}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$. Так как $BC^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 = BD^2 + CD^2 - 2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то $U = 2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$. Аналогично, $V = 2(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $W = 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Пусть $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\beta = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c})$. Домножив обе части равенства $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) + 1$ (см. задачу 12.39, б)) на $4uvw = 4|a|^2|b|^2|c|^2$, получим требуемое.

13.16. Фиксируем произвольную точку O . Пусть $\mathbf{m} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, \dots , $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$. Тогда $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = (\mathbf{a} - \mathbf{m}, \mathbf{b} - \mathbf{m}) - (\mathbf{c} - \mathbf{m}, \mathbf{d} - \mathbf{m}) = (\mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{m}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Если $\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то когда точка M пробегает всю плоскость, величина (\mathbf{v}, \mathbf{m}) принимает все действительные значения, в частности, она принимает значение $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Следовательно, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, т. е. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, а значит, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

13.17. Пусть $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ — единичные внешние нормали к сторонам, а M_1, \dots, M_k — произвольные точки на этих сторонах. Для любой точки X , лежащей внутри многоугольника, расстояние до i -й стороны равно $(\overrightarrow{XM_i}, \mathbf{n}_i)$. Поэтому суммы расстояний от внутренних точек A и B до сторон многоугольника равны тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^k (\overrightarrow{AM_i}, \mathbf{n}_i) = \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{BM_i}, \mathbf{n}_i) = \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{BA}, \mathbf{n}_i) + \sum_{i=1}^k (\overrightarrow{AM_i}, \mathbf{n}_i)$, т. е. $\overrightarrow{BA}, \sum_{i=1}^k \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$. Следовательно, сумма расстояний от любой внутренней точки многоугольника до сторон постоянна тогда и только тогда, когда $\sum \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$.

13.18. Пусть l — произвольная прямая, \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный прямой l . Если точки A и B лежат в той же полуплоскости, заданной прямой l , что и вектор \mathbf{n} , то $\rho(B, l) - \rho(A, l) = (\overrightarrow{AB}, \mathbf{n})$, где $\rho(X, l)$ — расстояние от точки X до прямой l .

Пусть $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ и \mathbf{n}_4 — единичные векторы, перпендикулярные последовательным сторонам четырехугольника $ABCD$ и направленные внутрь. Обозначим сумму расстояний от точки X до сторон четырехугольника $ABCD$ через $\sum(X)$. Тогда $0 = \sum(B) - \sum(A) = (\overrightarrow{AB}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4)$. Аналогично $(\overrightarrow{BC}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4) = 0$. Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4 = \mathbf{0}$. Остается воспользоваться результатом задачи 13.5.

13.19. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Ясно также, что $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{c}|^2 \geq 0$. Равенство достигается, только если $\mathbf{a} = -\mathbf{c}$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

13.20. Рассмотрим пять векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ и предположим, что длина суммы любых двух из них больше длины суммы трех оставшихся. Так как $|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| > |\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5|$, то $|\mathbf{a}_1|^2 + 2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + |\mathbf{a}_2|^2 > |\mathbf{a}_3|^2 + |\mathbf{a}_4|^2 + |\mathbf{a}_5|^2 + 2(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) + 2(\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) + 2(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)$. Складывая такие неравенства для всех десяти пар векторов, получаем $4(|\mathbf{a}_1|^2 + \dots) + 2((\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \dots) > 6(|\mathbf{a}_1|^2 + \dots) + 6((\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \dots)$, т. е. $|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5|^2 < 0$. Приходим к противоречию.

13.21. Обозначим данные векторы e_1, \dots, e_{10} . Пусть $\vec{AB} = e_1 + \dots + e_{10}$. Докажем, что луч AB задает искомую ось. Ясно, что $|\vec{AB} - e_i|^2 = AB^2 - 2(\vec{AB}, e_i) + |e_i|^2$, т. е. $(\vec{AB}, e_i) = (AB^2 + |e_i|^2 - |\vec{AB} - e_i|^2)/2$. По условию $AB > |\vec{AB} - e_i|$, поэтому $(\vec{AB}, e_i) > 0$, т. е. проекция вектора e_i на луч AB положительна.

13.22. Пусть $a_i = \vec{OA}_i$ и $x = \vec{OX}$. Тогда $|a_i| = R$ и $\vec{XA}_i = a_i - x$. Поэтому $\sum XA_i = \sum |a_i - x| = \sum |a_i - x| \cdot |a_i|/R \geq \sum (a_i - x, a_i)/R = \sum (a_i, a_i)/R - (x, \sum a_i)/R$. Остается заметить, что $(a_i, a_i) = R^2$ и $\sum a_i = 0$.

13.23. Рассмотрим на плоскости четыре вектора (a, b) , (c, d) , (e, f) и (g, h) . Один из углов между этими векторами не превосходит $360^\circ/4 = 90^\circ$. Если же угол между векторами не превосходит 90° , то их скалярное произведение неотрицательно.

Данные шесть чисел являются скалярными произведениями всех пар наших четырех векторов, поэтому одно из них неотрицательно.

13.24. Докажем это утверждение по индукции. Для $n = 0$ утверждение, очевидно, верно. Допустим, что утверждение доказано для $2n + 1$ векторов. Рассмотрим в системе из $2n + 3$ векторов два крайних вектора (т. е. два вектора, угол между которыми максимален). Для определенности будем считать, что это — векторы \vec{OP}_1 и \vec{OP}_{2n+3} . По предположению индукции длина вектора $\vec{OR} = \vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_{2n+2}$ не меньше 1. Вектор \vec{OR} лежит внутри угла P_1OP_{2n+3} , поэтому он образует острый угол с вектором $\vec{OS} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_{2n+3}$. Следовательно, $|\vec{OS} + \vec{OR}| \geq OR \geq 1$.

13.25. Докажем сначала, что если a , b и c — векторы, длины которых не превосходят 1, то хотя бы один из векторов $a \pm b$, $a \pm c$, $b \pm c$ имеет длину, не превосходящую 1. В самом деле, два из векторов $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ образуют угол, не превосходящий 60° , поэтому разность этих двух векторов имеет длину, не превосходящую 1 (если в треугольнике $AB \leq 1$, $BC \leq 1$ и $\angle ABC \leq 60^\circ$, то AC — не наибольшая сторона и $AC \leq 1$).

Таким образом можно спуститься до двух векторов a и b . Угол между векторами a и b или векторами a и $-b$ не превосходит 90° , поэтому либо $|a - b| \leq \sqrt{2}$, либо $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

13.26. Можно считать, что сумма a данных векторов отлична от нуля, так как иначе утверждение задачи очевидно. Введем систему координат, направив ось Oy по вектору a . Занумеруем векторы нижней полуплоскости по порядку — по часовой стрелке: e_1, e_2, \dots (рис. 13.2). По условию этих векторов не менее k . Докажем, что среди данных векторов найдутся еще такие векторы v_1, \dots, v_k , что для любого $i = 1, \dots, k$ вектор $v_i + e_i$ имеет неположительную вторую координату. Этим будет доказано требуемое утверждение. В самом деле, длина суммы всех данных векторов равна сумме вторых координат (именно так была введена система координат). Сумма векторов $e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ имеет неположительную вторую координату, а вторая координата любого из оставшихся $n - 2k$ векторов не превосходит 1. Поэтому вторая координата суммы всех данных векторов не превосходит $n - 2k$.

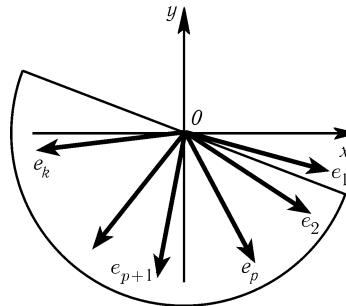


Рис. 13.2

Пусть векторы e_1, \dots, e_p лежат в четвертом квадранте. Начнем сопоставлять им векторы v_1, \dots, v_p . Будем поворачивать нижнюю полуплоскость, состоящую из точек с неположительной второй координатой, поворачивая ось Ox по часовой стрелке на угол от 0° до 90° . Если один из двух векторов, лежащих в повернутой таким образом полуплоскости, расположен в четвертом квадранте, то их сумма имеет неположительную вторую координату. Как только при повороте плоскости ось Ox перейдет за вектор e_1 , к векторам e_2, \dots, e_k , лежащим в ней, должен добавиться еще хотя бы один вектор; поэтому следующий за e_k по порядку вектор можно взять в качестве v_1 . Аналогично, когда ось Ox перейдет за вектор e_2 , получим вектор v_2 и т. д. Такие же рассуждения остаются справедливыми до тех пор, пока ось Ox остается в четвертом квадранте. Для векторов e_{p+1}, \dots, e_k , лежащих в третьем квадранте, доказательство проводится аналогично (если вектор e_{p+1} имеет нулевую первую координату, то его следует сначала выбросить из рассмотрения, а затем в качестве парного к нему взять любой из оставшихся векторов).

13.27. Точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$.

13.28. Возьмем произвольную точку O и запишем все выбранные векторы в виде $\overrightarrow{A_i A_j} = \overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i}$. В силу условия задачи каждый вектор $\overrightarrow{OA_i}$ в сумму всех выбранных векторов войдет со знаком «плюс» столько же раз, сколько и со знаком «минус».

13.29. Пусть e_1, e_2 и e_3 — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и \overrightarrow{OC} ; $\alpha = \angle BOC, \beta = \angle COA$ и $\gamma = \angle AOB$. Нужно доказать, что $e_1 \sin \alpha + e_2 \sin \beta + e_3 \sin \gamma = \vec{0}$. Рассмотрим треугольник $A_1 B_1 C_1$, стороны которого параллельны прямым OC, OA и OB . Тогда $\vec{0} = \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{C_1 A_1} = \pm 2R(e_1 \sin \alpha + e_2 \sin \beta + e_3 \sin \gamma)$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC .

13.30. Пусть a и b — единичные векторы, сонаправленные с лучами OA и OB , $\lambda = OA$ и $\mu = OB$. Прямая AB состоит из всех таких точек X , что $\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB} = t\lambda a + (1 - t)\mu b$. Требуется найти такие числа x_0 и y_0 , что $x_0/\lambda = t = 1 - (y_0/\mu)$ при всех рассматриваемых значениях λ и μ . Остается положить $x_0 = p/c$ и $y_0 = q/c$. В итоге получаем, что если $p/OA + q/OB = c$, то прямая AB проходит через такую точку X , что $\overrightarrow{OX} = (pa + qb)/c$.

13.31. Пусть $a = \overrightarrow{MA}, b = \overrightarrow{MB}$ и $c = \overrightarrow{MC}$. Тогда $e = \overrightarrow{MC_1} = pa + (1 - p)b$ и $\overrightarrow{MA_1} = qc + (1 - q)b = -qa + (1 - 2q)b$. С другой стороны, $\overrightarrow{MA_1} = \alpha e$. Аналогично $\beta e = \overrightarrow{MB_1} = -rb + (1 - 2r)a$. Требуется доказать, что $1 + (1/\alpha) + (1/\beta) = 0$. Так как $\alpha pa + \alpha(1 - p)b = \alpha e = -qa + (1 - 2q)b$, то $\alpha p = -q$ и $\alpha(1 - p) = 1 - 2q$, а значит, $1/\alpha = 1 - 3p$. Аналогично $\beta p = 1 - 2r$ и $\beta(1 - p) = -r$, а значит, $1/\beta = 3p - 2$.

13.32. Сложив равенства $\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{A_2 B_2} + \overrightarrow{B_2 C_2} + \overrightarrow{C_2 A_2} = \vec{0}$, получим $\overrightarrow{AB_2} + \overrightarrow{BC_2} + \overrightarrow{CA_2} = \vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{AB_2} = \lambda \overrightarrow{C_2 B_2}$, $\overrightarrow{BC_2} = \lambda \overrightarrow{A_2 C_2}$ и $\overrightarrow{CA_2} = \lambda \overrightarrow{B_2 A_2}$. Пусть E — такая точка прямой BC , что $A_2 E \parallel AA_1$. Тогда $\overrightarrow{BA_1} = \lambda \overrightarrow{EA_1}$ и $\overrightarrow{EC} = \lambda \overrightarrow{EA_1}$, поэтому $\overrightarrow{A_1 C} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA_1} = (\lambda - 1)\overrightarrow{EA_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{A_1 C} / \overrightarrow{BA_1} = (\lambda - 1)/\lambda$. Аналогично $\overrightarrow{AB_1} / \overrightarrow{B_1 C} = \overrightarrow{BC_1} / \overrightarrow{C_1 A} = (\lambda - 1)/\lambda$.

13.33. Пусть O — центр описанной окружности данного четырехугольника, $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}, c = \overrightarrow{OC}$ и $d = \overrightarrow{OD}$. Если H_a — ортоцентр треугольника BCD , то $\overrightarrow{OH_a} = b + c + d$ (см. задачу 13.13). Поэтому $\overrightarrow{OM_a} = (a + b + c + d)/2 = \overrightarrow{OM_b} = \overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{OM_d}$.

13.34. Пусть O — центр описанной окружности данного четырехугольника, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$. Если H_d — ортоцентр треугольника ABC , то $\overrightarrow{OH_d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (задача 13.13).

а) Возьмем точку K так, что $\overrightarrow{OK} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$. Тогда $KH_d = |\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH_d}| = |\mathbf{d}| = R$, т. е. точка K лежит на окружности S_d . Аналогично доказывается, что точка K лежит на окружностях S_a , S_b и S_c .

б) Пусть O_d — центр окружности девяти точек треугольника ABC , т. е. середина отрезка OH_d . Тогда $\overrightarrow{OO_d} = \overrightarrow{OH_d}/2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/2$. Возьмем точку X так, что $\overrightarrow{OX} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})/2$. Тогда $XO_d = |\mathbf{d}|/2 = R/2$, т. е. точка X лежит на окружности девяти точек треугольника ABC . Аналогично доказывается, что точка X лежит на окружностях девяти точек треугольников BCD , CDA и DAB .

13.35. Пусть X_1 — проекция точки X на прямую l . Вектор $\alpha\overrightarrow{AA_1} + \beta\overrightarrow{BB_1} + \gamma\overrightarrow{CC_1}$ является проекцией вектора $\alpha\overrightarrow{AX_1} + \beta\overrightarrow{BX_1} + \gamma\overrightarrow{CX_1}$ на прямую, перпендикулярную прямой l . Учитывая, что $\alpha\overrightarrow{AX_1} + \beta\overrightarrow{BX_1} + \gamma\overrightarrow{CX_1} = \alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{BX} + \gamma\overrightarrow{CX} + (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{XX_1}$ и $\alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{BX} + \gamma\overrightarrow{CX} = \mathbf{0}$ (задача 13.29), получаем требуемое.

13.36. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$, причем $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Введем систему координат, направив ось Ox вдоль вектора \mathbf{a} . Так как сумма проекций векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}, \dots, \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$ на ось Oy равна нулю, то длина вектора \mathbf{a} равна абсолютной величине разности между суммой длин положительных проекций этих векторов на ось Ox и суммой длин их отрицательных проекций; следовательно, длина вектора \mathbf{a} не превосходит либо суммы длин положительных проекций векторов, либо суммы длин их отрицательных проекций. Легко проверить, что как сумма длин положительных проекций, так и сумма длин отрицательных проекций данных векторов на любую ось не превосходит диаметра окружности, т. е. не превосходит 2.

13.37. Для доказательства равенства векторов достаточно проверить равенство их проекций (с учетом знака) на прямые BC , CA и AB . Доказательство проведем, например, для проекций на прямую BC ; положительным при этом будем считать направление луча BC . Пусть P — проекция точки A на прямую BC , N — середина отрезка BC . Тогда $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN} = (b^2 + a^2 - c^2)/2a - (a/2) = (b^2 - c^2)/2a$ (PC находится из уравнения $AB^2 - BP^2 = AC^2 - CP^2$). Так как $NM : NA = 1 : 3$, то проекция вектора \overrightarrow{MO} на прямую BC равна $\overrightarrow{PN}/3 = (b^2 - c^2)/6a$. Остается заметить, что проекция вектора $a^3\mathbf{n}_a + b^3\mathbf{n}_b + c^3\mathbf{n}_c$ на прямую BC равна

$$b^3 \sin \gamma - c^3 \sin \beta = \frac{b^3 c - c^3 b}{2R} = \frac{abc}{2R} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} = 2S \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

13.38. Пусть вписанная окружность касается сторон AB , BC и CA в точках U , V и W . Требуется доказать, что $\overrightarrow{OZ} = \frac{3R}{r}\overrightarrow{ZK}$, т. е. $\overrightarrow{OZ} = \frac{R}{r}(\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{ZV} + \overrightarrow{ZW})$. Докажем, например, что проекции (с учетом знака) этих векторов на прямую BC равны; положительным при этом будем считать направление луча BC . Пусть N — проекция точки O на прямую BC . Тогда проекция вектора \overrightarrow{OZ} на прямую BC равна $\overrightarrow{NV} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CV} = (a/2) - (a+b-c)/2 = (c-b)/2$. А проекция вектора $\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{ZV} + \overrightarrow{ZW}$ на эту прямую равна проекции вектора $\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{ZW}$, т. е. равна

$$-r \sin VZU + r \sin VZW = -r \sin B + r \sin C = r(c-b)/2R.$$

13.39. Введем систему координат Oxy . Пусть l_φ — прямая, проходящая через точку O и образующая угол φ ($0 < \varphi < \pi$) с осью Ox , т. е. если точка A лежит на l_φ и вторая координата точки A положительна, то $\angle AOx = \varphi$; $l_0 = l_\pi = Ox$.

Если вектор \mathbf{a} образует угол α с осью Ox (угол отсчитывается против часовой стрелки от оси Ox к вектору \mathbf{a}), то длина проекции вектора \mathbf{a} на прямую l_φ равна $|\mathbf{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)|$. Интеграл $\int_0^\pi |\mathbf{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)| d\varphi = 2|\mathbf{a}|$ не зависит от α .

Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ образуют с осью Ox углы $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$. Тогда по условию $|\mathbf{a}_1| \cdot |\cos(\varphi - \alpha_1)| + \dots + |\mathbf{a}_n| \cdot |\cos(\varphi - \alpha_n)| \leq |\mathbf{b}_1| \cdot |\cos(\varphi - \beta_1)| + \dots + |\mathbf{b}_m| \cdot |\cos(\varphi - \beta_m)|$ для любого угла φ . Интегрируя эти неравенства по φ от 0 до π , получаем $|\mathbf{a}_1| + \dots + |\mathbf{a}_n| \leq |\mathbf{b}_1| + \dots + |\mathbf{b}_m|$.

З а м е ч а н и е. Величину $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называют *средним значением* функции f на отрезке $[a, b]$. Равенство

$$\int_0^\pi |\mathbf{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)| d\varphi = 2|\mathbf{a}|$$

означает, что среднее значение длины проекции вектора \mathbf{a} равно $2|\mathbf{a}|/\pi$, точнее говоря, среднее значение функции $f(\varphi)$, равной длине проекции вектора \mathbf{a} на прямую l_φ , на отрезке $[0, \pi]$ равно $2|\mathbf{a}|/\pi$.

13.40. Сумма длин проекций сторон выпуклого многоугольника на любую прямую равна удвоенной длине проекции многоугольника на эту прямую. Поэтому сумма длин проекций векторов сторон на любую прямую для внутреннего многоугольника не больше, чем для внешнего. Следовательно, согласно задаче 13.39 сумма длин векторов сторон, т. е. периметр, у внутреннего многоугольника не больше, чем у внешнего.

13.41. Если сумма длин векторов равна L , то согласно замечанию к задаче 13.39 среднее значение суммы длин проекций этих векторов равно $2L/\pi$.

Функция f на отрезке $[a, b]$ не может быть всюду меньше своего среднего значения c , так как иначе

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < \frac{(b-a)c}{b-a} = c.$$

Поэтому найдется такая прямая l , что сумма длин проекций исходных векторов на нее не меньше $2L/\pi$.

Зададим на прямой l направление. Тогда либо сумма длин положительных проекций на это направление, либо сумма длин отрицательных проекций не меньше L/π . Поэтому либо длина суммы векторов, дающих положительные проекции, либо длина суммы векторов, дающих отрицательные проекции, не меньше L/π .

13.42. Обозначим проекцию многоугольника на прямую l через AB . Ясно, что точки A и B являются проекциями некоторых вершин A_1 и B_1 многоугольника. Поэтому $A_1B_1 \geq AB$, т. е. длина проекции многоугольника не больше A_1B_1 , а $A_1B_1 < d$ по условию. Так как сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2AB$, она не превосходит $2d$.

Среднее значение суммы длин проекций сторон равно $2P/\pi$, где P — периметр (см. задачу 13.39). Среднее значение не превосходит максимального, следовательно, $2P/\pi < 2d$, т. е. $P < \pi d$.

13.43. Согласно задаче 13.39 неравенство $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{c}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$ достаточно доказать для проекций векторов на прямую, т. е. можно считать, что \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} — векторы, параллельные одной прямой, т. е. просто числа, причем $a + b + c + d = 0$. Будем считать, что $d \geq 0$, так как иначе можно изменить знаки у всех чисел.

Можно считать, что $a \leq b \leq c$. Нужно разобрать три случая: 1) $a, b, c \leq 0$; 2) $a \leq 0$ и $b, c \geq 0$ и 3) $a, b \leq 0$, $c \geq 0$. Все возникающие неравенства проверяются достаточно просто. При разборе третьего случая нужно отдельно рассмотреть случаи $|d| \leq |b|$, $|b| \leq |d| \leq |a|$ и $|a| \leq |d|$ (в последнем случае нужно учесть, что $|d| = |a| + |b| - |c| \leq |a| + |b|$).

13.44. Согласно задаче 13.39 неравенство достаточно доказать для проекций векторов на любую прямую. Пусть проекции векторов $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ на прямую l равны (с учетом знака) a_1, \dots, a_n . Разобьем числа a_1, \dots, a_n на две группы: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$ и $y'_1 \leq y'_2 \leq \dots \leq y'_{n-k} \leq 0$. Пусть $y_i = -y'_i$. Тогда $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_{n-k} = a$, а значит, $x_1 \geq a/k$ и $y_1 \geq a/(n-k)$. Периметру в проекции соответствует число $2(x_1 + y_1)$. Сумме длин векторов $\overrightarrow{OA_i}$ в проекции соответствует число $x_1 + \dots + x_k + y_1 + \dots + y_{n-k} = 2a$. А так как

$$\frac{2(x_1 + y_1)}{x_1 + \dots + y_{n-k}} \geq \frac{2((a/k) + (a/(n-k)))}{2a} = \frac{n}{k(n-k)},$$

то остается заметить, что величина $k(n-k)$ максимальна при $k = n/2$ для четного n и при $k = (n \pm 1)/2$ для нечетного n .

13.45. Длина кривой — предел периметров вписанных в нее многоугольников. Рассмотрим вписанный многоугольник с периметром P и длиной проекции на прямую l , равной d_l . Пусть $1 - \epsilon < d_l < 1$ для всех прямых l . Многоугольник можно подобрать так, чтобы ϵ было сколь угодно мало. Так как многоугольник выпуклый, то сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2d_l$.

Среднее значение величины $2d_l$ равно $2P/\pi$ (см. задачу 13.39). поэтому $2 - 2\epsilon < 2P/\pi < 2$, т. е. $\pi - \pi\epsilon < P < \pi$. Устремляя ϵ к нулю, получаем, что длина кривой равна π .

13.46. Докажем, что периметр выпуклой оболочки всех вершин данных многоугольников не превосходит суммы их периметров. Для этого достаточно заметить, что по условию проекции данных многоугольников на любую прямую покрывают проекцию выпуклой оболочки.

13.47. а) Если $\lambda < 0$, то $(\lambda \mathbf{a}) \vee \mathbf{b} = -\lambda |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$. При $\lambda > 0$ доказательство очевидно.

б) Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Введем систему координат, направив ось Oy по лучу OA . Пусть $A = (0, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ и $C = (x_3, y_3)$. Тогда $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = x_2 y_1$, $\mathbf{a} \vee \mathbf{c} = x_3 y_1$ и $\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (x_2 + x_3) y_1 = \mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{a} \vee \mathbf{c}$.

13.48. Пусть \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — единичные векторы, направленные по осям Ox и Oy . Тогда $\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \vee \mathbf{e}_1 = 1$ и $\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \vee \mathbf{e}_2 = 0$. Поэтому $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) \vee (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

13.49. а) Ясно, что $\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \vee (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BA} \vee \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \vee \overrightarrow{BA}$.

б) Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \vee (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} \vee \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \vee \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \vee \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \vee \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \vee \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \vee \overrightarrow{DC}$.

13.50. Пусть в начальный момент, т. е. при $t = 0$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{w}$. Тогда в момент t получим $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{w} + t(\mathbf{c} - \mathbf{a})$, где \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} —

векторы скоростей бегунов A , B и C . Так как векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} параллельны, то $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$, а значит, $|S(A, B, C)| = |\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{AC}|/2 = |x + yt|$, где x и y — некоторые постоянные числа. Решая систему $|x| = 2$, $|x + 5y| = 3$, получаем два решения, дающие для зависимости площади треугольника ABC от времени t выражения $|2 + (t/5)|$ и $|2 - t|$. Поэтому при $t = 10$ площадь может принимать значения 4 и 8.

13.51. Пусть $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ — векторы, соединяющие первого пешехода со вторым и третьим в момент t . Ясно, что $\mathbf{v}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{w}(t) = t\mathbf{c} + \mathbf{d}$. Пешеходы находятся на одной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}(t) \parallel \mathbf{w}(t)$, т. е. $\mathbf{v}(t) \vee \mathbf{w}(t) = 0$. Функция $f(t) = \mathbf{v}(t) \vee \mathbf{w}(t) = t^2\mathbf{a} \vee \mathbf{c} + t(\mathbf{a} \vee \mathbf{d} + \mathbf{b} \vee \mathbf{c}) + \mathbf{b} \vee \mathbf{d}$ является квадратным трехчленом, причем $f(0) \neq 0$. Квадратный трехчлен, не равный тождественно нулю, имеет не более двух корней.

13.52. Пусть $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OA} = \mu\mathbf{b}$. Тогда $\pm 2S_{OPQ} = \overrightarrow{OP} \vee \overrightarrow{OQ} = ((\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})/2) \vee ((\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b})/2) = (1 - \lambda\mu)(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})/4$ и $\pm 2S_{ABCD} = \pm 2(S_{COD} - S_{AOB}) = \pm(\mathbf{a} \vee \mathbf{b} - \lambda\mathbf{a} \vee \mu\mathbf{b}) = \pm(1 - \lambda\mu)\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.

13.53. Пусть $\mathbf{a}_j = \overrightarrow{P_1A_j}$. Тогда удвоенная сумма площадей указанных треугольников для любой внутренней точки P равна

$$(\mathbf{x} + \mathbf{a}_1) \vee (\mathbf{x} + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{x} + \mathbf{a}_3) \vee (\mathbf{x} + \mathbf{a}_4) + \dots + (\mathbf{x} + \mathbf{a}_{2n-1}) \vee (\mathbf{x} + \mathbf{a}_{2n}),$$

где $\mathbf{x} = \overrightarrow{PP_1}$; от удвоенной суммы площадей этих треугольников для точки P_1 она отличается на $\mathbf{x} \vee (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 + \dots + \mathbf{a}_{2n-1} - \mathbf{a}_{2n}) = \mathbf{x} \vee \mathbf{a}$. По условию $\mathbf{x} \vee \mathbf{a} = 0$ при $\mathbf{x} = \overrightarrow{P_2P_1}$ и $\mathbf{x} = \overrightarrow{P_3P_1}$, причем эти векторы не параллельны. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x} \vee \mathbf{a} = 0$ для любого вектора \mathbf{x} .

13.54. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AP}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BQ}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{CR}$. Тогда $\overrightarrow{QC} = \alpha\mathbf{a}$, $\overrightarrow{RA} = \beta\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{PB} = \gamma\mathbf{c}$, причем $(1 + \alpha)\mathbf{a} + (1 + \beta)\mathbf{b} + (1 + \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Достаточно проверить, что $\overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PQ} \vee \overrightarrow{RP}$. Разность между этими величинами равна $(\mathbf{a} + \gamma\mathbf{c}) \vee (\mathbf{c} + \beta\mathbf{b}) - (\gamma\mathbf{c} + \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{c} + \beta\mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \gamma\mathbf{a} \vee \mathbf{c} = \mathbf{a} \vee [(1 + \gamma)\mathbf{c} + (1 + \beta)\mathbf{b}] = -\mathbf{a} \vee (1 + \alpha)\mathbf{a} = 0$.

13.55. Пусть $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{A_4A_i}$ и $\mathbf{w}_i = \overrightarrow{A_4H_i}$. Согласно задаче 13.49, б) достаточно проверить, что $\mathbf{a}_1 \vee \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \vee \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \vee \mathbf{a}_1 = \mathbf{w}_1 \vee \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2 \vee \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_3 \vee \mathbf{w}_1$. Векторы $\mathbf{a}_1 - \mathbf{w}_2$ и $\mathbf{a}_2 - \mathbf{w}_1$ перпендикулярны вектору \mathbf{a}_3 , поэтому они параллельны, т. е. $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{w}_2) \vee (\mathbf{a}_2 - \mathbf{w}_1) = 0$. Сложив это равенство с равенствами $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{w}_3) \vee (\mathbf{a}_3 - \mathbf{w}_2) = 0$ и $(\mathbf{a}_3 - \mathbf{w}_1) \vee (\mathbf{a}_1 - \mathbf{w}_3) = 0$, получим требуемое.

13.56. Пусть $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Тогда $\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{x} = x_2(\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2)$ и $\mathbf{x} \vee \mathbf{e}_2 = x_1(\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2)$, т. е.

$$\mathbf{x} = ((\mathbf{x} \vee \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{x})\mathbf{e}_2)/(\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2).$$

Домножив это выражение справа на $(\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2)\mathbf{y}$, получим

$$(\mathbf{x} \vee \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{y}) + (\mathbf{e}_1 \vee \mathbf{x})(\mathbf{e}_2 \vee \mathbf{y}) + (\mathbf{e}_2 \vee \mathbf{e}_1)(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) = 0. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{x} = \overrightarrow{AD}$ и $\mathbf{y} = \overrightarrow{AE}$. Тогда $S = \mathbf{a} \vee \mathbf{x} \vee \mathbf{e}_2 + \mathbf{d} = \mathbf{c} + \mathbf{y} \vee \mathbf{e}_2 + \mathbf{a} = \mathbf{d} + \mathbf{x} \vee \mathbf{e}_1 + \mathbf{b}$, т. е. $\mathbf{x} \vee \mathbf{e}_2 = S - \mathbf{a} - \mathbf{d}$, $\mathbf{y} \vee \mathbf{e}_2 = S - \mathbf{c} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{x} \vee \mathbf{e}_1 = S - \mathbf{d} - \mathbf{b}$. Подставив эти выражения в (1), получим требуемое.

Глава 14

Центр масс

Основные сведения

1. Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i) , где X_i — точка плоскости, а m_i — положительное число. *Центром масс* системы точек X_1, \dots, X_n с массами m_1, \dots, m_n называют точку O , для которой выполняется равенство $m_1 \overrightarrow{OX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OX_n} = \vec{0}$.

Центр масс любой системы точек существует, причем только один (задача 14.1).

2. Внимательно просмотрев решение задачи 14.1, нетрудно заметить, что положительность чисел m_i фактически не используется — важно лишь то, что их сумма отлична от нуля. Иногда бывает удобно рассматривать системы точек, в которых часть масс положительна, а часть отрицательна (но сумма масс должна быть отлична от нуля).

3. Важнейшим свойством центра масс, на котором основаны почти все его применения, является теорема о группировке масс: *центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой приписана масса, равная сумме их масс* (задача 14.2).

4. Величину $I_M = m_1 M X_1^2 + \dots + m_n M X_n^2$ называют *моментом инерции* системы точек X_1, \dots, X_n с массами m_1, \dots, m_n относительно точки M . Применения этого понятия в геометрии основаны на зависимости $I_M = I_O + t OM^2$, где O — центр масс системы, а $t = m_1 + \dots + m_n$ (задача 14.19).

§1. Основные свойства центра масс

14.1. а) Докажите, что центр масс существует и единствен для любой системы точек.

б) Докажите, что если X — произвольная точка, а O — центр масс точек X_1, \dots, X_n с массами m_1, \dots, m_n , то $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \dots + m_n} (m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n})$.

14.2. Докажите, что центр масс системы точек $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ с массами $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ совпадает с центром масс двух точек — центра масс X первой системы с массой $a_1 + \dots + a_n$ и центра масс Y второй системы с массой $b_1 + \dots + b_m$.

14.3. Докажите, что центр масс точек A и B с массами a и b лежит на отрезке AB и делит его в отношении $b : a$.

§2. Теорема о группировке масс

14.4. Докажите, что медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

14.5. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA . Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

14.6. Пусть A_1, B_1, \dots, F_1 — середины сторон AB, BC, \dots, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

14.7. Докажите теорему Чевы (задача 4.48, б)) с помощью группировки масс.

14.8*. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = \alpha$ и $BL : LC = AN : ND = \beta$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN . Докажите, что $NP : PL = \alpha$ и $KP : PM = \beta$.

14.9*. Найдите внутри треугольника ABC точку O , обладающую следующим свойством: для любой прямой, проходящей через O и пересекающей сторону AB в точке K и сторону BC в точке L , выполнено равенство $p \frac{AK}{KB} + q \frac{CL}{LB} = 1$, где p и q — данные положительные числа.

14.10*. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC , если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

14.11*. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые CC_1, AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке O . Докажите, что:

- а) $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$;
- б) $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{CO}{OC_1} = \frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} + 2 \geq 8$.

14.12*. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $BA_1/A_1C = CB_1/B_1A = AC_1/C_1B$. Докажите, что центры масс треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

14.13*. В середины сторон треугольника ABC помещены точки, массы которых равны длинам сторон. Докажите, что центр масс этой системы точек расположен в центре вписанной окружности треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC .

З а м е ч а н и е. Центр масс системы точек, рассматриваемой в задаче 14.13 совпадает с центром масс фигуры, изготовленной из трех тонких стержней одинаковой толщины. Действительно, при нахождении центра масс стержень можно заменить на точку, расположенную в середине стержня и имеющую массу, равную массе стержня. Ясно также, что масса стержня пропорциональна его длине.

14.14*. На окружности дано n точек. Через центр масс $n - 2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

14.15*. На прямых BC , CA , AB взяты точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 так, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$ и $C_1A_2 \parallel CA$. Пусть l_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2 , BB_2 и CC_1 ; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке (или параллельны).

14.16*. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 , причем отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P . Пусть l_a, l_b, l_c — прямые, соединяющие середины отрезков BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 , AB и A_1B_1 . Докажите, что прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на отрезке PM , где M — центр масс треугольника ABC .

14.17*. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 ; прямые B_1C_1 , BB_1 и CC_1 пересекают прямую AA_1 в точках M , P и Q соответственно. Докажите, что:

- $A_1M/MA = (A_1P/PA) + (A_1Q/QA)$;
- если $P = Q$, то $MC_1 : MB_1 = (BC_1/AB) : (CB_1/AC)$.

14.18*. На прямой AB взяты точки P и P_1 , а на прямой AC взяты точки Q и Q_1 . Прямая, соединяющая точку A с точкой пересечения прямых PQ и P_1Q_1 , пересекает прямую BC в точке D . Докажите, что

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{(\overline{BP}/\overline{PA}) - (\overline{BP_1}/\overline{P_1A})}{(\overline{CQ}/\overline{QA}) - (\overline{CQ_1}/\overline{Q_1A})}.$$

§3. Момент инерции

Величину $I_M = m_1MX_1^2 + \dots + m_nMX_n^2$ называют *моментом инерции* системы точек X_1, \dots, X_n с массами m_1, \dots, m_n относительно точки M .

14.19. Пусть O — центр масс системы точек, суммарная масса которой равна m . Докажите, что моменты инерции этой системы относительно точки O и произвольной точки X связаны соотношением $I_X = I_O + mXO^2$.

14.20. а) Докажите, что момент инерции относительно центра масс си-

стемы точек с единичными массами равен $\frac{1}{n} \sum_{i < j} a_{ij}^2$, где n — число точек, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j .

б) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с массами m_1, \dots, m_n , равен $\frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$, где $m = m_1 + \dots + m_n$, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j .

14.21. а) Треугольник ABC правильный. Найдите геометрическое место таких точек X , что $AX^2 = BX^2 + CX^2$.

б) Докажите, что для точек указанного ГМТ подерный треугольник относительно треугольника ABC прямоугольный.

14.22. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , H — точка пересечения высот. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - OH^2$.

14.23. Хорды AA_1 , BB_1 и CC_1 окружности с центром O пересекаются в точке X . Докажите, что $(AX/XA_1) + (BX/XB_1) + (CX/XC_1) = 3$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на окружности с диаметром OM , где M — центр масс треугольника ABC .

14.24*. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты такие точки A_1 и B_2 , B_1 и C_2 , C_1 и A_2 , что отрезки A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 параллельны сторонам треугольника и пересекаются в точке P . Докажите, что $PA_1 \cdot PA_2 + PB_1 \cdot PB_2 + PC_1 \cdot PC_2 = R^2 - OP^2$, где O — центр описанной окружности.

14.25*. Внутри окружности радиуса R расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не превосходит $n^2 R^2$.

14.26*. Внутри треугольника ABC взята точка P . Пусть d_a , d_b и d_c — расстояния от точки P до сторон треугольника, R_a , R_b и R_c — расстояния от нее до вершин. Докажите, что

$$3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \geq (R_a \sin A)^2 + (R_b \sin B)^2 + (R_c \sin C)^2.$$

14.27*. Точки A_1, \dots, A_n лежат на одной окружности, а M — их центр масс. Прямые MA_1, \dots, MA_n пересекают эту окружность в точках B_1, \dots, B_n (отличных от A_1, \dots, A_n). Докажите, что $MA_1 + \dots + MA_n \leq MB_1 + \dots + MB_n$.

§4. Разные задачи

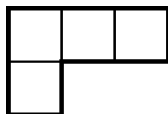


Рис. 14.1

14.28. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

14.29. Централно симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n «уголков» и k прямоугольников размером 1×4 , изображенных на рис. 14.1. Докажите, что n четно.

14.30*. Решите задачу 13.44, используя свойства центра масс.

14.31*. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что центр масс треугольника AKL лежит на диагонали BD .

§5. Барицентрические координаты

Пусть на плоскости задан треугольник $A_1A_2A_3$. Если точка X является центром масс вершин этого треугольника с массами m_1 , m_2 и m_3 , то числа $(m_1 : m_2 : m_3)$ называют *барицентрическими координатами* точки X относительно треугольника $A_1A_2A_3$.

14.32. Пусть задан треугольник $A_1A_2A_3$. Докажите, что:

а) любая точка X имеет некоторые барицентрические координаты относительно него;

б) при условии $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ барицентрические координаты точки X определены однозначно.

14.33. Докажите, что барицентрические координаты точки X , лежащей внутри треугольника ABC , равны $(S_{BCX} : S_{CA X} : S_{AB X})$.

14.34. Точка X лежит внутри треугольника ABC . Прямые, проходящие через точку X параллельно AC и BC , пересекают сторону AB в точках K и L соответственно. Докажите, что барицентрические координаты точки X равны $(BL : AK : LK)$.

14.35. Найдите барицентрические координаты а) центра описанной окружности; б) центра вписанной окружности; в) ортоцентра треугольника.

14.36. Относительно треугольника ABC точка X имеет барицентрические координаты $(\alpha : \beta : \gamma)$, причем $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Докажите, что $\overrightarrow{XA} = \beta \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{CA}$.

14.37. Пусть $(\alpha : \beta : \gamma)$ — барицентрические координаты точки X , причем $\alpha + \beta + \gamma = 1$; M — центр масс треугольника ABC . Докажите, что $3\overrightarrow{XM} = (\alpha - \beta)\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma)\overrightarrow{BC} + (\gamma - \alpha)\overrightarrow{CA}$.

14.38*. Пусть M — центр масс треугольника ABC , X — произвольная точка. На прямых BC , CA и AB взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что $A_1X \parallel AM$, $B_1X \parallel BM$ и $C_1X \parallel CM$. Докажите, что центр масс M_1 треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с серединой отрезка MX .

14.39*. Найдите уравнение описанной окружности треугольника $A_1A_2A_3$ в барицентрических координатах.

14.40*. а) Докажите, что точки с барицентрическими координатами $(\alpha : \beta : \gamma)$ и $(\alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1})$ изотомически сопряжены относительно треугольника ABC .

б) Длины сторон треугольника ABC равны a , b и c . Докажите, что точки с барицентрическими координатами $(\alpha : \beta : \gamma)$ и $(a^2/\alpha : b^2/\beta : c^2/\gamma)$ изогонально сопряжены относительно треугольника ABC .

14.41*. На прямых AB , BC , CA даны точки C_1 и C_2 , A_1 и A_2 , B_1 и B_2 . Точки C_1 и C_2 определяют числа γ_1 и γ_2 , для которых $(1 + \gamma_1)\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}$ и $(1 + \gamma_2)\overrightarrow{C_2B} = \overrightarrow{AB}$; числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ определяются аналогично. Докажите, что прямые A_2B_1 , B_2C_1 и C_2A_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 1.$$

З а м е ч а н и е. При $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ точки A_2, B_2, C_2 совпадают с B, C, A ; в этом случае получаем теорему Чевы. При $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2 = 1$ совпадают точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 . (Действительно, совпадение точек A_1 и A_2 эквивалентно тому, что $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = 1$; это равенство эквивалентно равенству $\alpha_1\alpha_2 = 1$.) Прямые A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда они совпадают. В этом случае получаем теорему Менелая.

§6. Трилинейные координаты

Трилинейные координаты тесно связаны с барицентрическими координатами. А именно, если $(\alpha : \beta : \gamma)$ — барицентрические координаты точки X относительно треугольника ABC , то $(x : y : z) = \frac{\alpha}{a} : \frac{\beta}{b} : \frac{\gamma}{c}$ — ее *трилинейные координаты*. Трилинейные координаты, как и барицентрические, определены с точностью до пропорциональности.

Для точки X , лежащей внутри треугольника ABC , в качестве барицентрических координат можно взять площади треугольников $(S_{BCX} : S_{CAx} : S_{ABx})$. Это означает, что в качестве трилинейных координат можно взять расстояния от точки X до сторон треугольника. Если точка X лежит вне треугольника, то расстояния до сторон нужно взять с учетом знака. Например, если точки X и A лежат по одну сторону от прямой BC , то $x > 0$, а если по разные, то $x < 0$.

В трилинейных координатах изогональное сопряжение задается формулой $(x : y : z) \mapsto (x^{-1} : y^{-1} : z^{-1})$. В связи с этим трилинейные координаты часто бывают удобны при работе с изогональным сопряжением.

14.42*. Продолжения сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q . Докажите, что точки пересечения биссектрис внешних углов при вершинах A и C, B и D, P и Q лежат на одной прямой.

14.43*. На сторонах AD и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $\angle ABP = \angle CBQ$. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке E . Докажите, что $\angle ABE = \angle CBD$.

14.44*. Найдите трилинейные координаты точек Брокара.

14.45*. Найдите уравнения в трилинейных координатах для: а) описанной окружности; б) вписанной окружности; в) невписанной окружности.

14.46*. Найдите уравнение окружности девяти точек в трилинейных координатах.

14.47*. а) Докажите, что в трилинейных координатах любая окружность задается уравнением вида

$$(px + qy + rz)(x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma) = yz \sin \alpha + xz \sin \beta + xy \sin \gamma.$$

б) Докажите, что радикальная ось двух окружностей, заданных уравнениями такого вида, задается уравнением

$$p_1x + q_1y + r_1z = p_2x + q_2y + r_2z.$$

14.48*. Докажите, что касательная к вписанной окружности в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$ задается уравнением

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} \cos \frac{\beta}{2} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} \cos \frac{\gamma}{2} = 0.$$

14.49*. Докажите, что вписанная окружность касается окружности девяти точек (Фейербах). Найдите трилинейные координаты точки касания.

14.50*. а) Найдите трилинейные координаты вершин треугольника Брокера.

б) Найдите трилинейные координаты точки Штейнера (см. задачу 19.58).

Решения

14.1. Пусть X и O — произвольные точки. Тогда $m_1 \overrightarrow{OX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OX_n} = (m_1 + \dots + m_n) \overrightarrow{OX} + m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n}$, поэтому точка O является центром масс данной системы точек тогда и только тогда, когда

$$(m_1 + \dots + m_n) \overrightarrow{OX} + m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n} = \vec{0},$$

т. е. $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \dots + m_n} (m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n})$. Из этого рассуждения вытекают решения обеих задач.

14.2. Пусть Z — произвольная точка, $a = a_1 + \dots + a_n$, $b = b_1 + \dots + b_m$. Тогда $\overrightarrow{ZX} = (a_1 \overrightarrow{ZX_1} + \dots + a_n \overrightarrow{ZX_n})/a$ и $\overrightarrow{ZY} = (b_1 \overrightarrow{ZY_1} + \dots + b_m \overrightarrow{ZY_m})/b$. Если O — центр масс точки X с массой a и точки Y с массой b , то $\overrightarrow{ZO} = (a \overrightarrow{ZX} + b \overrightarrow{ZY})/(a + b) = (a_1 \overrightarrow{ZX_1} + \dots + a_n \overrightarrow{ZX_n} + b_1 \overrightarrow{ZY_1} + \dots + b_m \overrightarrow{ZY_m})/(a + b)$, т. е. O — центр масс системы точек $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ с массами $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$.

14.3. Пусть O — центр масс данной системы. Тогда $a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} = \vec{0}$, поэтому точка O лежит на отрезке AB и $aOA = bOB$, т. е. $AO : OB = b : a$.

14.4. Поместим в точки A, B и C единичные массы. Пусть O — центр масс этой системы точек. Точка O является также центром масс точки A с массой 1 и точки A_1 с массой 2, где A_1 — центр масс точек B и C с единичными массами, т. е. A_1 — середина отрезка BC . Поэтому точка O лежит на медиане AA_1 и делит ее в отношении $AO : OA_1 = 2 : 1$. Аналогично доказывается, что остальные медианы проходят через точку O и делятся ею в отношении $2 : 1$.

14.5. Поместим в вершины четырехугольника $ABCD$ единичные массы. Пусть O — центр масс этой системы точек. Достаточно доказать, что точка O

является серединой отрезков KM и LN и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей. Ясно, что K — центр масс точек A и B , M — центр масс точек C и D . Поэтому точка O является центром масс точек K и M с массами 2, т. е. O — середина отрезка KM . Аналогично O — середина отрезка LN . Рассматривая центры масс пар точек (A, C) и (B, D) (т. е. середины диагоналей), получаем, что точка O является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

14.6. Поместим в вершины шестиугольника единичные массы; пусть O — центр масс полученной системы точек. Так как точки A_1, C_1 и E_1 являются центрами масс пар точек (A, B) , (C, D) и (E, F) , то точка O является центром масс системы точек A_1, C_1 и E_1 с массами 2, т. е. O — точка пересечения медиан треугольника $A_1C_1E_1$ (см. решение задачи 14.4). Аналогично доказывается, что O — точка пересечения медиан треугольника $B_1D_1F_1$.

14.7. Пусть прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O ; $AC_1 : C_1B = p$ и $BA_1 : A_1C = q$. Нужно доказать, что прямая BB_1 проходит через точку O тогда и только тогда, когда $CB_1 : B_1A = 1 : pq$.

Поместим в точки A, B и C массы 1, p и pq соответственно. Тогда точка C_1 является центром масс точек A и B , а точка A_1 — центром масс точек B и C . Поэтому центр масс точек A, B и C с данными массами является точкой O пересечения прямых CC_1 и AA_1 . С другой стороны, точка O лежит на отрезке, соединяющем точку B с центром масс точек A и C . Если B_1 — центр масс точек A и C с массами 1 и pq , то $AB_1 : B_1C = pq : 1$. Остается заметить, что на отрезке AC существует единственная точка, делящая его в данном отношении $AB_1 : B_1C$.

14.8. Поместим в точки A, B, C и D массы 1, $\alpha, \alpha\beta$ и β соответственно. Тогда точки K, L, M и N являются центрами масс пар точек (A, B) , (B, C) , (C, D) и (D, A) соответственно. Пусть O — центр масс точек A, B, C и D с указанными массами. Тогда O лежит на отрезке NL и $NO : OL = (\alpha\beta + \alpha) : (1 + \beta) = \alpha$. Точка O лежит на отрезке KM и $KO : OM = (\beta + \alpha\beta) : (1 + \alpha) = \beta$. Поэтому O — точка пересечения отрезков KM и LN , т. е. $O = P$ и $NP : PL = NO : OL = \alpha$, $KP : PM = \beta$.

14.9. Поместим в вершины A, B и C массы $p, 1$ и q соответственно. Пусть O — центр масс этой системы точек. Будем рассматривать точку с массой 1 как две совпадающие точки с массами x_a и x_c , где $x_a + x_c = 1$. Пусть K — центр масс точек A и B с массами p и x_a , а L — центр масс точек C и B с массами q и x_c . Тогда $AK : KB = x_a : p$, $CL : LB = x_c : q$, а точка O , являющаяся центром масс точек K и L с массами $p + x_a$ и $q + x_c$, лежит на прямой KL . Изменяя x_a от 0 до 1, мы получим все прямые, проходящие через точку O и пересекающие стороны AB и BC . Поэтому для всех этих прямых выполняется равенство $\frac{pAK}{KB} + \frac{qCL}{LB} = x_a + x_c = 1$.

14.10. Обозначим центр масс мух через O . Пусть одна муха находится в вершине A , а A_1 — центр масс двух других мух. Ясно, что точка A_1 лежит внутри треугольника ABC , а точка O лежит на отрезке AA_1 и делит его в отношении $AO : OA_1 = 2 : 1$. Поэтому точка O лежит внутри треугольника, полученного из треугольника ABC гомотетией с коэффициентом $2/3$ и центром A . Рассматривая такие треугольники для всех трех вершин, получаем, что единственной их общей точкой является точка пересечения медиан треугольника ABC . Так как одна муха побывала во всех трех вершинах, а точка O при этом оставалась на месте, точка O должна принадлежать всем трем этим треугольникам, т. е. O совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC .

14.11. а) Пусть $AB_1 : B_1C = 1 : p$ и $BA_1 : A_1C = 1 : q$. Поместим в точки A, B, C массы $p, q, 1$ соответственно. Тогда точки A_1 и B_1 являются центрами масс пар точек (B, C) и (A, C) . Поэтому центр масс системы точек A, B и C лежит как на отрезке AA_1 , так и на отрезке BB_1 , т. е. совпадает с точкой O . Следовательно, точка C_1 является центром масс точек A и B . Поэтому $CO/OC_1 = p + q = (CB_1/B_1A) + (CA_1/A_1B)$.

б) Согласно задаче а) $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{CO}{OC_1} = \frac{1+q}{p} \cdot \frac{1+p}{q} \cdot \frac{p+q}{1} = p + q + (p/q) + (q/p) + (1/p) + (1/q) + 2 = \frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} + 2$. Ясно также, что $p + (1/p) \geq 2$, $q + (1/q) \geq 2$ и $(p/q) + (q/p) \geq 2$.

14.12. Пусть M — центр масс треугольника ABC . Тогда $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Кроме того, $\vec{AB_1} + \vec{BC_1} + \vec{CA_1} = k(\vec{AC} + \vec{BA} + \vec{CB}) = \vec{0}$. Сложив эти равенства, получим $\vec{MB_1} + \vec{MC_1} + \vec{MA_1} = \vec{0}$, т. е. M — центр масс треугольника $A_1B_1C_1$.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение точно так же доказывается для произвольного n -угольника.

14.13. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB . Центр масс точек B_1 и C_1 находится в точке K , для которой $B_1K : KC_1 = c : b = B_1A_1 : A_1C_1$. Поэтому A_1K — биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

14.14. Пусть M_1 — центр масс $n - 2$ точек, K — середина хорды, соединяющей две оставшиеся точки, O — центр окружности, M — центр масс всех данных точек. Если прямая OM пересекает прямую, проведенную через точку M_1 в точке P , то $\frac{OM}{MP} = \frac{KM}{MM_1} = (n - 2)/2$, а значит, положение точки P однозначно определяется положением точек O и M (если $M = O$, то $P = O$).

14.15. Параллельность прямых A_1B_2 и AB означает, что если B_2 — центр масс точек A и C с массами 1 и γ , то A_1 — центр масс точек B и C с массами 1 и γ . Определим числа α и β аналогично.

Прямые BB_1 и CC_2 пересекаются в центре масс точек A, B и C с массами $\alpha, 1$ и 1 . Прямые BB_2 и CC_1 пересекаются в центре масс точек A, B и C с массами $1, \beta$ и γ . Поэтому прямая l_a проходит через центр масс точек A, B и C с массами $1 + \alpha, 1 + \beta$ и $1 + \gamma$. Аналогично доказывается, что через эту точку проходят и прямые l_b и l_c . Если сумма масс равна нулю, то центр масс — бесконечно удаленная точка; в этом случае прямые l_a, l_b и l_c параллельны.

14.16. Пусть P — центр масс точек A, B и C с массами a, b и c , M — центр масс точек A, B и C с массой $a + b + c$ в каждой точке, Q — центр масс объединения этих двух систем точек. Середина отрезка AB является центром масс точек A, B и C с массами $a + b + c - (ab/c), a + b + c - (ab/c)$ и 0 , а середина отрезка A_1B_1 является центром масс точек A, B и C с массами $a(b + c)/c, b(a + c)/c$ и $(b + c) + (a + c)$. Центр масс объединения этих систем точек является точкой Q .

14.17. а) Поместим в точки B, C и A такие массы β, γ и $b + c$, что $CA_1 : BA_1 = \beta : \gamma, BC_1 : AC_1 = b : \beta$ и $AB_1 : CB_1 = \gamma : c$. Тогда M — центр масс этой системы, а значит, $A_1M/AM = (b + c)/(\beta + \gamma)$. Точка P является центром масс точек A, B и C с массами c, β и γ , поэтому $A_1P/PA = c/(\beta + \gamma)$. Аналогично $A_1Q/AQ = b/(\beta + \gamma)$.

б) Как и в задаче а), получаем $MC_1/MB_1 = (c + \gamma)/(b + \beta), BC_1/AB = b/(b + \beta)$ и $AC/CB_1 = (c + \gamma)/c$. Кроме того, $b = c$, так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (см. задачу 14.7).

14.18. Точка пересечения прямых PQ и P_1Q_1 является центром масс точек A, B и C с массами a, b и c ; при этом P — центр масс точек A и B с массами $a - x$

и b , а Q — центр масс точек A и C с массами x и c . Пусть $p = \overline{BP}/\overline{PA} = (a-x)/b$ и $q = \overline{CQ}/\overline{QA} = x/c$. Тогда $pb + qc = a$. Аналогично $p_1b + q_1c = a$. Следовательно, $\overline{BD}/\overline{CD} = -c/b = (p-p_1)/(q-q_1)$.

14.19. Занумеруем точки данной системы. Пусть \mathbf{x}_i — вектор с началом в точке O и концом в точке с номером i , причем этой точке приписана масса m_i . Тогда $\sum m_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Пусть, далее, $\mathbf{a} = X\vec{O}$. Тогда $I_O = \sum m_i \mathbf{x}_i^2$, $I_M = \sum m_i (\mathbf{x}_i + \mathbf{a})^2 = \sum m_i \mathbf{x}_i^2 + 2(\sum m_i \mathbf{x}_i, \mathbf{a}) + \sum m_i \mathbf{a}^2 = I_O + m\mathbf{a}^2$.

14.20. а) Пусть \mathbf{x}_i — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i . Тогда $\sum_{i,j} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = \sum_{i,j} (\mathbf{x}_i^2 + \mathbf{x}_j^2) - 2 \sum_{i,j} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, где суммирование ведется по всем возможным парам номеров точек. Ясно, что $\sum_{i,j} (\mathbf{x}_i^2 + \mathbf{x}_j^2) = 2n \sum_i \mathbf{x}_i^2 = 2nI_O$ и $\sum_{i,j} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum_i (\mathbf{x}_i, \sum_j \mathbf{x}_j) = 0$. Поэтому $2nI_O = \sum_{i,j} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = 2 \sum_{i < j} a_{ij}^2$.

б) Пусть \mathbf{x}_i — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i . Тогда $\sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = \sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{x}_i^2 + \mathbf{x}_j^2) - 2 \sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Ясно, что $\sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{x}_i^2 + \mathbf{x}_j^2) = \sum_i m_i \sum_j (m_j \mathbf{x}_i^2 + m_j \mathbf{x}_j^2) = \sum_i m_i (m \mathbf{x}_i^2 + I_O) = 2mI_O$ и $\sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum_i m_i (\mathbf{x}_i, \sum_j m_j \mathbf{x}_j) = 0$. Поэтому $2mI_O = \sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = 2 \sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$.

14.21. а) Пусть M — точка, симметричная точке A относительно прямой BC . Тогда M — центр масс точек A , B и C с массами -1 , 1 и 1 , а значит, $-AX^2 + BX^2 + CX^2 = I_X = I_M + (-1+1+1)MX^2 = (-3+1+1)a^2 + MX^2$, где a — сторона треугольника ABC . В итоге получаем, что искомое ГМТ является окружностью радиуса a с центром M .

б) Пусть A' , B' и C' — проекции точки X на прямые BC , CA и AB . Точки B' и C' лежат на окружности с диаметром AX , поэтому $B'C' = AX \sin B'AC' = \sqrt{3}AX/2$. Аналогично $C'A' = \sqrt{3}BX/2$ и $A'B' = \sqrt{3}CX/2$. Следовательно, если $AX^2 = BX^2 + CX^2$, то $\angle B'A'C' = 90^\circ$.

14.22. Пусть M — центр масс вершин треугольника ABC с единичными массами. Тогда $I_O = I_M + 3MO^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3 + 3MO^2$ (см. задачи 14.19 и 14.20, а)). А так как $OA = OB = OC = R$, то $I_O = 3R^2$. Остается заметить, что $OH = 3OM$ (задача 5.116).

14.23. Ясно, что $AX/XA_1 = AX^2/AX \cdot XA_1 = AX^2/(R^2 - OX^2)$. Поэтому нужно проверить, что $AX^2 + BX^2 + CX^2 = 3(R^2 - OX^2)$ тогда и только тогда, когда $OM^2 = OX^2 + MX^2$. Для этого достаточно заметить, что $AX^2 + BX^2 + CX^2 = I_X = I_M + 3MX^2 = I_O - 3MO^2 + 3MX^2 = 3(R^2 - MO^2 + MX^2)$.

14.24. Пусть P — центр масс точек A , B и C с массами α , β и γ ; можно считать, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Если K — точка пересечения прямых CP и AB , то

$$\frac{BC}{PA_1} = \frac{CK}{PK} = \frac{CP + PK}{PK} = 1 + \frac{CP}{PK} = 1 + \frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что рассматриваемая величина равна $\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2 = I_P$ (см. задачу 14.20, б)). А так как $I_O = \alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 = R^2$, то $I_P = I_O - OP^2 = R^2 - OP^2$.

14.25. Поместим в данные точки единичные массы. Как следует из результата задачи 14.20, а), сумма квадратов попарных расстояний между этими точками равна nI , где I — момент инерции системы точек относительно центра масс. Рассмотрим теперь момент инерции системы относительно центра O окружности.

С одной стороны, $I \leq I_O$ (см. задачу 14.19). С другой стороны, так как расстояние от точки O до любой из данных точек не превосходит R , то $I_O \leq nR^2$. Поэтому $nI \leq n^2R^2$, причем равенство достигается, только если $I = I_O$ (т. е. центр масс совпадает с центром окружности) и $I_O = nR^2$ (т. е. все точки расположены на данной окружности).

14.26. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки P на стороны BC, CA и AB ; M — центр масс треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда $3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = 3I_P \geq 3I_M = A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 = (R_c \sin C)^2 + (R_a \sin A)^2 + (R_b \sin B)^2$, так как, например, отрезок A_1B_1 является хордой окружности с диаметром CP .

14.27. Пусть O — центр данной окружности. Если хорда AB проходит через точку M , то $AM \cdot BM = R^2 - d^2$, где $d = MO$. Обозначим через I_X момент инерции системы точек A_1, \dots, A_n относительно точки X . Тогда $I_O = I_M + nd^2$ (см. задачу 14.19). С другой стороны, так как $OA_i = R$, то $I_O = nR^2$. Поэтому $A_iM \cdot B_iM = R^2 - d^2 = \frac{1}{n}(A_1M^2 + \dots + A_nM^2)$. Таким образом, если ввести обозначение $a_i = A_iM$, то требуемое неравенство переписется в виде $a_1 + \dots + a_n \leq \frac{1}{n}(a_1^2 + \dots + a_n^2) \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$. Для доказательства этого неравенства следует воспользоваться неравенством $x + y \leq (x^2/y) + (y^2/x)$ (последнее неравенство получается из неравенства $xy \leq x^2 - xy + y^2$ умножением обеих частей на $\frac{x+y}{xy}$).

14.28. Поместим в вершины многоугольника единичные массы. При симметрии относительно оси симметрии эта система точек переходит в себя, поэтому ее центр масс тоже переходит в себя. Следовательно, все оси симметрии проходят через центр масс вершин с единичными массами.

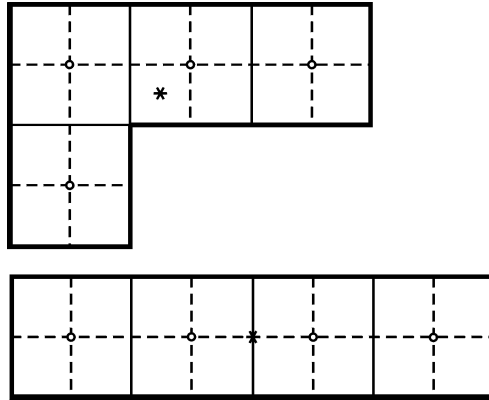


Рис. 14.2

14.29. Поместим в центры клеток, из которых состоят «уголки» и прямоугольники, единичные массы. Разобьем каждую исходную клетку бумаги на четыре клетки, получив тем самым новую клетчатую бумагу. Легко проверить, что теперь центр масс уголка лежит в центре новой клетки, а центр масс прямоугольника — в вершине клетки (рис. 14.2). Ясно, что центр масс фигуры совпадает с ее центром симметрии, а центр симметрии фигуры, состоящей из исходных клеток, может находиться только в вершине новой клетки. Так как массы уголков и плиток равны, сумма векторов с началом в центре масс фигуры и с концами

в центрах масс всех уголков и плиток равна нулю. Если бы число уголков было нечетно, то сумма векторов имела бы полуцелые координаты и была бы отлична от нуля. Следовательно, число уголков четно.

14.30. Поместим в вершины многоугольника $A_1 \dots A_n$ единичные массы. Тогда O — центр масс данной системы точек. Поэтому $\overrightarrow{A_i O} = (\overrightarrow{A_i A_1} + \dots + \overrightarrow{A_i A_n})/n$ и $A_i O \leq (A_i A_1 + \dots + A_i A_n)/n$. Следовательно, $d = A_1 O + \dots + A_n O \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n A_i A_j$.

Число n можно записать либо в виде $n = 2m$, либо в виде $n = 2m + 1$. Пусть P — периметр многоугольника. Ясно, что $A_1 A_2 + \dots + A_n A_1 = P$, $A_1 A_3 + A_2 A_4 + \dots + A_n A_2 \leq 2P, \dots, A_1 A_{m+1} + A_2 A_{m+2} + \dots + A_n A_m \leq mP$, причем в левых частях этих неравенств встречаются все стороны и диагонали. Так как в сумму $\sum_{i,j=1}^n A_i A_j$ все они входят дважды, то

$$d \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n A_i A_j \leq \frac{2}{n} (P + 2P + \dots + mP) = \frac{m(m+1)}{n} P.$$

При n четном это неравенство можно усилить за счет того, что в этом случае в сумму $A_1 A_{m+1} + \dots + A_n A_{m+n}$ каждая диагональ входит дважды, т. е. вместо mP можно взять $mP/2$. Значит, при n четном

$$d \leq \frac{2}{n} P + 2P + \dots + (m-1)P + \frac{m}{2} P = \frac{m^2}{n} P.$$

Таким образом, при n четном $d \leq \frac{m^2}{n} P = \frac{n}{4} P$, а при n нечетном $d \leq \frac{m(m+1)}{n} P = \frac{n^2-1}{4n} P$.

14.31. Пусть $k = BK/BC = 1 - (DL/DC)$. При проекции на прямую, перпендикулярную диагонали BD , точки A, B, K и L переходят в такие точки A', B', K' и L' , что $B'K' + B'L' = kA'B' + (1-k)A'B' = A'B'$. Следовательно, центр масс точек A', K' и L' совпадает с точкой B' . Остается заметить, что при проекции центр масс переходит в центр масс.

14.32. Введем следующие обозначения: $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{A_3 A_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{A_3 A_2}$ и $\mathbf{x} = \overrightarrow{X A_3}$. Точка X является центром масс вершин треугольника $A_1 A_2 A_3$ с массами m_1, m_2, m_3 тогда и только тогда, когда $m_1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + m_2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + m_3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т. е. $m\mathbf{x} = -(m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2)$, где $m = m_1 + m_2 + m_3$. Будем считать, что $m = 1$. Любой вектор \mathbf{x} на плоскости можно представить в виде $\mathbf{x} = -m_1 \mathbf{e}_1 - m_2 \mathbf{e}_2$, причем числа m_1 и m_2 определены однозначно. Число m_3 находится по формуле $m_3 = 1 - m_1 - m_2$.

14.33. Эта задача является переформулировкой задачи 13.29.

З а м е ч а н и е. Если площади треугольников BCX, CAX и ABX считать ориентированными, то утверждение задачи останется верным и для точек, лежащих вне треугольника.

14.34. При проекции на прямую AB параллельно прямой BC вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{LK}$ переходит в вектор $\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{LK}$. Последний вектор нулевой, так как $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KA}$. Рассмотрев проекцию на прямую AB параллельно прямой AC , получим, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

14.35. Используя результат задачи 14.33, легко проверить, что ответ следующий: а) $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$; б) $(a : b : c)$, в) $(\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma)$.

Если потребовать, чтобы сумма барицентрических координат была равна 1, то ответ следующий: а) $\frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma} : \dots$; в) $(\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma : \dots)$.

14.36. Прибавив к обеим частям равенства $\alpha \overrightarrow{XA} + \beta \overrightarrow{XB} + \gamma \overrightarrow{XC} = \vec{0}$ вектор $(\beta + \gamma) \overrightarrow{XA}$ получим $\overrightarrow{XA} = (\beta + \gamma) \overrightarrow{XA} + \beta \overrightarrow{BX} + \gamma \overrightarrow{CX} = \beta \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{CA}$.

14.37. Согласно задаче 14.1, б) $3 \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$. Кроме того, $\overrightarrow{XA} = \beta \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{XB} = \alpha \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{XC} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{BC}$ (см. задачу 14.36).

14.38. Пусть прямые, проходящие через точку X параллельно AC и BC , пересекают прямую AB в точках K и L соответственно. Если $(\alpha : \beta : \gamma)$ — барицентрические координаты точки X , причем $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то $2 \overrightarrow{XC}_1 = \overrightarrow{XK} + \overrightarrow{XL} = \gamma \overrightarrow{CA} + \gamma \overrightarrow{CB}$ (см. решение задачи 14.34). Поэтому $3 \overrightarrow{XM}_1 = \overrightarrow{XA}_1 + \overrightarrow{XB}_1 + \overrightarrow{XC}_1 = (\alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \beta(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \gamma(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}))/2 = 3 \overrightarrow{XM}/2$ (см. задачу 14.37).

14.39. Пусть X — произвольная точка, O — центр описанной окружности данного треугольника, $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OA}_i$ и $\mathbf{a} = \overrightarrow{XO}$. Если точка X имеет барицентрические координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, то $\sum x_i(\mathbf{a} + \mathbf{e}_i) = \sum x_i \overrightarrow{XA}_i = \mathbf{0}$, так как X — центр масс точек A_1, A_2, A_3 с массами x_1, x_2, x_3 . Поэтому $(\sum x_i) \mathbf{a} = -\sum x_i \mathbf{e}_i$. Точка X принадлежит описанной окружности треугольника тогда и только тогда, когда $|\mathbf{a}| = XO = R$, где R — радиус этой окружности. Таким образом, описанная окружность треугольника задается в барицентрических координатах уравнением $R^2 (\sum x_i)^2 = (\sum x_i \mathbf{e}_i)^2$, т. е. $R^2 \sum x_i^2 + 2R^2 \sum_{i < j} x_i x_j = R^2 \sum x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, так как $|\mathbf{e}_i| = R$. Это уравнение переписывается в виде $\sum_{i < j} x_i x_j (R^2 - (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = 0$.

Заметим теперь, что $2(R^2 - (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = a_{ij}^2$, где a_{ij} — длина стороны $A_i A_j$. В самом деле, $a_{ij}^2 = |\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j|^2 = |\mathbf{e}_i|^2 + |\mathbf{e}_j|^2 - 2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 2(R^2 - (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$. В итоге получаем, что описанная окружность треугольника $A_1 A_2 A_3$ задается в барицентрических координатах уравнением $\sum_{i < j} x_i x_j a_{ij}^2 = 0$, где a_{ij} — длина стороны $A_i A_j$.

14.40. а) Пусть X и Y — точки с барицентрическими координатами $(\alpha : \beta : \gamma)$ и $(\alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1})$; прямые CX и CY пересекают прямую AB в точках X_1 и Y_1 . Тогда $\overrightarrow{AX}_1 : \overrightarrow{BX}_1 = \beta : \alpha = \alpha^{-1} : \beta^{-1} = \overrightarrow{BY}_1 : \overrightarrow{AY}_1$. Аналогичные рассуждения для прямых AX и BX показывают, что точки X и Y изотомически сопряжены относительно треугольника ABC .

б) Пусть X — точка с барицентрическими координатами $(\alpha : \beta : \gamma)$. Можно считать, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Тогда согласно задаче 14.36 $\overrightarrow{AX} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = \beta c(\overrightarrow{AB}/c) + \gamma b(\overrightarrow{AC}/b)$. Пусть Y — точка, симметричная точке X относительно биссектрисы угла A ; $(\alpha' : \beta' : \gamma')$ — барицентрические координаты точки Y . Достаточно проверить, что $\beta' : \gamma' = (b^2/\beta) : (c^2/\gamma)$. При симметрии относительно биссектрисы угла A единичные векторы \overrightarrow{AB}/c и \overrightarrow{AC}/b переходят друг в друга, поэтому $\overrightarrow{AY} = \beta c(\overrightarrow{AC}/b) + \gamma b(\overrightarrow{AB}/c)$. Следовательно, $\beta' : \gamma' = (\gamma b/c) : (\beta c/b) = (b^2/\beta) : (c^2/\gamma)$.

14.41. Точки A_2 и B_1 имеют барицентрические координаты $(0 : 1 : \alpha_2)$ и $(1 : 0 : \beta_1)$, поэтому в барицентрических координатах $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямая $A_2 B_1$ задается уравнением $\alpha \beta_1 + \beta \alpha_2 = \gamma$. Прямые $B_2 C_1$ и $C_2 A_1$ задаются уравнениями $\beta \gamma_1 + \gamma \beta_2 = \alpha$ и $\gamma \alpha_1 + \alpha \gamma_2 = \beta$. Эти прямые пересекаются в одной точке тогда и

только тогда, когда

$$\begin{array}{ccc} \beta_1 & \alpha_2 & -1 \\ -1 & \gamma_1 & \beta_2 \\ \gamma_2 & -1 & \alpha_1 \end{array}$$

14.42. Рассмотрим прямые $l_1 = AB$, $l_2 = BC$, $l_3 = CD$ и $l_4 = AD$. Пусть x_i — расстояние от точки X до прямой l_i с учетом знака (если точка X и четырехугольник $ABCD$ лежат по одну сторону от прямой l_i , то знак положителен). Таким образом, $(x_1 : x_2 : x_3)$ — трилинейные координаты точки X относительно треугольника, образованного прямыми l_1, l_2, l_3 .

Биссектрисы внешних углов при вершинах A и C задаются уравнениями $x_1 + x_4 = 0$ и $x_2 + x_3 = 0$; при вершинах B и D — уравнениями $x_1 + x_2 = 0$ и $x_3 + x_4 = 0$; при вершинах P и Q — уравнениями $x_1 + x_3 = 0$ и $x_2 + x_4 = 0$. Поэтому остается лишь проверить, что уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ задает прямую.

Если в прямоугольной системе координат прямая l_i задается уравнением $x \cos \varphi + y \sin \varphi = d$, то $x_i = \pm(x \cos \varphi + y \sin \varphi - d)$. Поэтому x_1, x_2, x_3, x_4 линейно выражаются через x и y .

14.43. Пусть $(x : y : z)$ — трилинейные координаты относительно треугольника ABC . Из равенства $\angle ABP = \angle CBQ$ следует, что точки P и Q имеют трилинейные координаты вида $(p : u : q)$ и $(q : v : p)$. Прямые AP и CQ задаются уравнениями $y : z = u : q$ и $x : y = q : v$, поэтому их точка пересечения D имеет трилинейные координаты $\frac{1}{v} : \frac{1}{q} : \frac{1}{u}$. Прямые AQ и CP задаются уравнениями $y : z = v : p$ и $x : y = p : u$, поэтому их точка пересечения E имеет трилинейные координаты $\frac{1}{u} : \frac{1}{p} : \frac{1}{v}$. Из вида трилинейных координат точек D и E следует, что $\angle CBD = \angle ABE$.

14.44. Пусть $(x : y : z)$ — трилинейные координаты первой точки Брокара P . Тогда $x : y : z = CP : AP : BP$. Кроме того, $AP / \sin \varphi = AB / \sin \alpha = 2Rc/a$ (здесь φ — угол Брокара). Аналогично $BP = 2R \sin \varphi a/b$ и $CP = 2R \sin \varphi b/c$. Таким образом, первая точка Брокара имеет трилинейные координаты $\frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}$.

Вторая точка Брокара имеет трилинейные координаты $\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$.

14.45. а) Описанная окружность задается уравнением $ayz + bxz + cxy = 0$, т. е. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ (здесь a, b, c — длины сторон треугольника). Одно доказательство этого утверждения содержится в решении задачи 5.11; другое — в решении задачи 14.39. Еще одно доказательство можно получить, воспользовавшись тем, что описанная окружность изогонально сопряжена бесконечно удаленной прямой, которая задается уравнением $ax + by + cz = 0$.

б) Вписанная окружность задается уравнением $\cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{x} + \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{y} + \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{z} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\alpha}{2} x^2 + \cos^4 \frac{\beta}{2} y^2 + \cos^4 \frac{\gamma}{2} z^2 = \\ = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} yz + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} xy + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} xz \end{aligned}$$

Чтобы получить это уравнение, можно воспользоваться тем, что вписанная окружность треугольника ABC является описанной окружностью треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1 , B_1 и C_1 — точки касания. Пусть $(x_1 : y_1 : z_1)$ — трилинейные координаты точки описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда

$$\sin \frac{\beta + \gamma}{2} y_1 z_1 + \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} x_1 z_1 + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} x_1 y_1 = 0,$$

поскольку углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2}$. Согласно задаче 2.59, б) $xy = z^2$. Кроме того, $\sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$.

в) Вневыписанная окружность, касающаяся стороны BC , задается уравнением $\cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{-x} + \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{y} + \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{z} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\alpha}{2} x^2 + \cos^4 \frac{\beta}{2} y^2 + \cos^4 \frac{\gamma}{2} z^2 = \\ = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} yz - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} xy - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} xz \end{aligned}$$

Это доказывается точно так же, как и для вписанной окружности.

14.46. Окружность девяти точек задается в трилинейных координатах уравнением

$$x^2 \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin \beta \cos \beta + z^2 \sin \gamma \cos \gamma = yz \sin \alpha + xz \sin \beta + xy \sin \gamma.$$

Чтобы доказать это, достаточно проверить, что кривая, заданная этим уравнением, пересекает каждую сторону треугольника в середине стороны и в основании высоты. (Кривая второй степени задается пятью точками, а у нас получается целых шесть точек.) Середина стороны BC имеет трилинейные координаты $(0 : \sin \gamma : \sin \beta)$, а основание высоты, опущенной на эту сторону, имеет трилинейные координаты $(0 : \cos \gamma : \cos \beta)$. Легко проверить, что обе эти точки лежат на данной кривой.

14.47. Уравнение $yz \sin \alpha + xz \sin \beta + xy \sin \gamma = 0$ задает описанную окружность треугольника. В декартовых координатах уравнение любой окружности можно получить, вычтя из уравнения фиксированной окружности некоторую линейную функцию. В трилинейных координатах для сохранения однородности «линейную функцию» $px + qy + rz$ нужно домножить на «постоянную величину» $x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma$ (эта величина будет постоянной, если x , y , z — расстояния до сторон треугольника, а не числа, пропорциональные этим расстояниям).

б) Согласно задаче 3.53 в декартовых координатах степень точки (x_0, y_0) относительно окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ равна $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2$. Поэтому радикальная ось окружностей, заданных (в декартовых координатах) уравнениями $x^2 + y^2 + P_1x + Q_1y + R_1 = 0$ и $x^2 + y^2 + P_2x + Q_2y + R_2 = 0$, задается уравнением $P_1x + Q_1y + R_1 = P_2x + Q_2y + R_2$. То же самое верно и для линейных функций, добавленных к фиксированному уравнению окружности.

14.48. Пусть точки $(x_0 : y_0 : z_0)$ и $(x_1 : y_1 : z_1)$ лежат на вписанной окружности. Тогда прямая, проходящая через эти точки, задается уравнением

$$x(\sqrt{y_0 z_1} + \sqrt{y_1 z_0}) \cos \frac{\alpha}{2} + y(\sqrt{x_0 z_1} + \sqrt{x_1 z_0}) \cos \frac{\beta}{2} + z(\sqrt{x_0 y_1} + \sqrt{x_1 y_0}) \cos \frac{\gamma}{2} = 0.$$

Проверим, например, что точка $(x_0 : y_0 : z_0)$ лежит на этой прямой. Для этого воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} x(\sqrt{y_0 z_1} + \sqrt{y_1 z_0}) \cos \frac{\alpha}{2} + \dots &= \\ &= (\sqrt{x_0 y_0 z_1} + \sqrt{x_0 y_1 z_0} + \sqrt{x_1 y_0 z_0})(\sqrt{x_0} \cos \frac{\alpha}{2} + \dots) - \sqrt{x_0 y_0 z_1}(\sqrt{x_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \dots). \end{aligned}$$

Точки $(x_0 : y_0 : z_0)$ и $(x_1 : y_1 : z_1)$ лежат на вписанной окружности, поэтому согласно задаче 14.45, б) $\sqrt{x_0} \cos \frac{\alpha}{2} + \dots = 0$ и $\sqrt{x_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \dots = 0$.

Чтобы получить уравнение касательной в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$, нужно положить $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$. После деления на $2\sqrt{x_0 y_0 z_0}$ уравнение примет требуемый вид.

14.49. Уравнение вписанной окружности можно записать в виде

$$\left(x \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + \dots \right) (x \sin \alpha + \dots) = \frac{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} (yz \sin \alpha + \dots),$$

а уравнение окружности девяти точек можно записать в виде $(x \cos \alpha + \dots) \times (x \sin \alpha + \dots) = 2(yz \sin \alpha + \dots)$. Поэтому согласно задаче 14.47, б) их радикальная ось задается уравнением

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} (x \cos \alpha + \dots) = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left(x \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + \dots \right).$$

Сократим обе части на $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$. Учитывая, что

$$2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

полученное уравнение можно записать в виде

$$\frac{x \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} + \frac{y \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}} + \frac{z \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = 0.$$

Согласно задаче 14.48 это уравнение является уравнением касательной к вписанной окружности в точке $(\sin^2 \frac{\beta - \gamma}{2} : \sin^2 \frac{\alpha - \gamma}{2} : \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2})$ (Легко проверить, что эта точка действительно лежит на вписанной окружности.) Если радикальная ось двух окружностей касается одной из них в некоторой точке, то окружности касаются в той же самой точке.

14.50. а) Из решения задачи 19.56 следует, что вершина A_1 треугольника Брокера является точкой пересечения прямых CP и BQ , где P и Q — первая и вторая точки Брокера. Поэтому точка A_1 имеет трилинейные координаты

$$1 : \frac{c^2}{ab} : \frac{b^2}{ac} = (abc : c^3 : b^3).$$

Барицентрические координаты этой точки имеют вид $(a^2 : c^2 : b^2)$.

б) Вычисления удобнее провести в барицентрических координатах. В барицентрических координатах $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямая B_1C_1 задается уравнением

$$0 = \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & c^2 \end{array} = \alpha(b^2c^2 - a^4) + \beta(a^2b^2 - c^4) + \gamma(a^2c^2 - b^4).$$

Кроме того, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Поэтому прямая, проходящая через точку A параллельно прямой B_1C_1 , задается уравнением

$$\beta(a^2b^2 - c^4 + a^4 - b^2c^2) + \gamma(a^2c^2 - b^4 + a^4 - b^2c^2) = 0,$$

т. е. $(a^2 + b^2 + c^2)\beta(a^2 - c^2) + \gamma(a^2 - b^2) = 0$. Поэтому $\beta : \gamma = \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2}$. Таким образом, точка Штейнера имеет барицентрические координаты $\frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2}$. Трилинейные координаты точки Штейнера имеют вид

$$\frac{1}{a(b^2 - c^2)} : \frac{1}{b(c^2 - a^2)} : \frac{1}{c(a^2 - b^2)} .$$

Глава 15

Параллельный перенос

Основные сведения

1. *Параллельным переносом* на вектор \overrightarrow{AB} называют преобразование, переводящее точку X в такую точку X' , что $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$.
2. Композиция (т. е. последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом.

Вводные задачи

1. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.
2. Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A , на другой — точка B , причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.
3. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N . Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN . Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.
4. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M . Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC , стороны которого равны AM , BM , CM , DM .

§1. Перенос помогает решить задачу

15.1. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B , чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

15.2. Дан треугольник ABC . Точка M , расположенная внутри треугольника, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA , затем параллельно AB до пересечения с BC , затем параллельно AC до пересечения с AB и т. д. Докажите, что через некоторое число шагов траектория движения точки замкнется.

15.3. Пусть K , L , M и N — середины сторон AB , BC , CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$.

а) Докажите, что $KM \leq (BC + AD)/2$, причем равенство достигается, только если $BC \parallel AD$.

б) При фиксированных длинах сторон четырехугольника $ABCD$ найдите максимальные значения длин отрезков KM и LN .

15.4. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, M — точка пересечения биссектрис углов A и B , N — точка пересечения биссектрис углов C и D . Докажите, что $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.

15.5* Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH . Известно, что $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH .

15.6* Внутри каждой стороны параллелограмма выбрано по точке. Выбранные точки сторон, имеющих общую вершину, соединены. Докажите, что центры описанных окружностей четырех получившихся треугольников являются вершинами некоторого параллелограмма.

15.7* В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: а) 0,34; б) 0,287.

§2. Построения и геометрические места точек

15.8. Дан угол ABC и прямая l . Постройте прямую, параллельную прямой l , на которой стороны угла ABC отсекают отрезок данной длины a .

15.9. Даны две окружности S_1 , S_2 и прямая l . Проведите прямую l_1 , параллельную прямой l , так, чтобы:

а) расстояние между точками пересечения l_1 с окружностями S_1 и S_2 имело заданную величину a ;

б) S_1 и S_2 отсекали на l_1 равные хорды;

в) S_1 и S_2 отсекали на l_1 хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a .

15.10. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности. Постройте точку X окружности так, чтобы хорды AX и BX отсекали на хорде CD отрезок EF , имеющий данную длину a .

15.11. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и длинам сторон $AB = a$ и $CD = b$.

15.12. Даны окружности S_1 , S_2 и точка A . Проведите через точку A прямую l так, чтобы S_1 и S_2 высекали на ней равные хорды.

15.13. а) Даны окружности S_1 и S_2 , пересекающиеся в точках A и B . Проведите через точку A прямую l так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри окружностей S_1 и S_2 , имел данную длину.

б) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, равный данному треугольнику PQR .

15.14*. Постройте четырехугольник по углам и диагоналям.

* * *

15.15*. Найдите геометрическое место точек: а) сумма; б) разность расстояний от которых до двух данных прямых имеет данную величину.

15.16*. Угол, изготовленный из прозрачного материала, двигают так, что две непересекающиеся окружности касаются его сторон внутренним образом. Докажите, что на нем можно отметить точку, которая описывает дугу окружности.

Задачи для самостоятельного решения

15.17. Даны две пары параллельных прямых и точка P . Проведите через точку P прямую так, чтобы обе пары параллельных прямых отсекали на ней равные отрезки.

15.18. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.

15.19. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что:

а) прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины сторон AC и BD ;

б) прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины диагоналей BC и AD .

15.20. Среди всех четырехугольников с данными длинами диагоналей и величиной угла между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.

15.21. Постройте параллелограмм, две смежные вершины которого даны, а две другие лежат на данной окружности.

Решения

15.1. Пусть A' — образ точки A при параллельном переносе на вектор \overrightarrow{MN} . Тогда $A'N = AM$, поэтому длина пути $AMNB$ равна $A'N + NB + MN$. Так как длина отрезка MN постоянна, то нужно найти точку N , для которой сумма $A'N + NB$ минимальна. Ясно, что она минимальна, когда точка N лежит на отрезке $A'B$, т. е. точка N является точкой пересечения берега, ближайшего к точке B , и отрезка $A'B$.

15.2. Обозначим последовательные точки траектории на сторонах треугольника через $A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, \dots$ (рис. 15.1). Так как $A_1B_1 \parallel AB_2, B_1B_2 \parallel CA_1$ и $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, то треугольник AB_2C_2 получается из треугольника $A_1B_1C_1$ параллельным переносом. Аналогично треугольник $A_3B_3C_3$ получен параллельным переносом из треугольника AB_2C_2 , а треугольник $A_4B_4C_4$ — из треугольника $A_3B_3C_3$. Но треугольник $A_1B_1C_1$ тоже получен из треугольника $A_3B_3C_3$ параллельным переносом. Поэтому $A_1 = A_4$, т. е. после семи шагов траектория замкнется (возможно, что она замкнется и раньше).

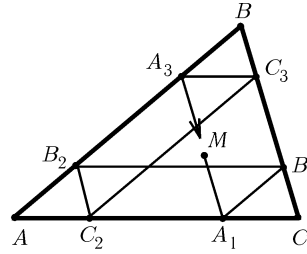


Рис. 15.1

15.3. а) Достроим треугольник CBD до параллелограмма $CBDE$. Тогда $2KM = AE \leq AD + DE = AD + BC$, причем равенство достигается, только если $AD \parallel BC$.

б) Пусть $a = AB, b = BC, c = CD$ и $d = DA$. Если $|a - c| = |b - d| \neq 0$, то согласно задаче а) максимум достигается в вырожденном случае, когда все точки A, B, C и D окажутся на одной прямой. Предположим теперь, например, что $|a - c| < |b - d|$. Достроим треугольники ABL и LCD до параллелограммов $ABLP$ и $LCDQ$. Тогда $PQ \geq |b - d|$, а значит, $LN^2 = (2LP^2 + 2LQ^2 - PQ^2)/4 \leq (2(a^2 + c^2) - (b - d)^2)/4$. Кроме того, согласно задаче а) $KM \leq (b + d)/2$. Оба равенства достигаются, когда $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC .

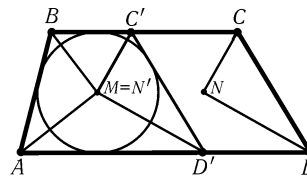


Рис. 15.2

Построим окружность S , касающуюся стороны AB и лучей BC и AD , и перенесем треугольник CND параллельно (в направлении оснований BC и AD) так, чтобы точка N' совпала с точкой M , т. е. сторона $C'D'$ касалась окружности S (рис. 15.2).

15.4. Для описанной трапеции $ABC'D'$ равенство $2MN' = |AB + C'D' - BC' - AD'|$ очевидно, так как $N' = M$. При переходе от трапеции $ABC'D'$ к трапеции $ABCD$ к левой части этого равенства добавляется $2N'N$, а к правой добавляется $CC' + DD' = 2NN'$, поэтому равенство сохраняется.

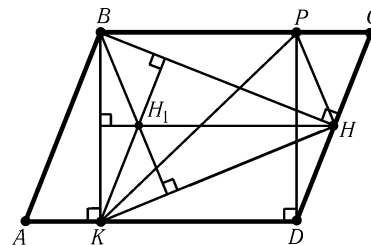


Рис. 15.3

15.5. Обозначим точку пересечения высот треугольника BKH через H_1 . Так как $HH_1 \perp BK$ и $KH_1 \perp BH$, то $HH_1 \parallel AD$ и $KH_1 \parallel DC$, т. е. H_1HDK — параллелограмм. Поэтому при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{H_1H}$ точка K переходит в точку D , а точка B переходит в некоторую точку P (рис. 15.3). Так как $PD \parallel BK$, то $BPKD$ — прямоугольник и $PK = BD = b$. А так как $BH_1 \perp KH$, то $PH \perp KH$. Ясно также, что $PH = BH_1$.

В прямоугольном треугольнике PKH известны гипотенуза $KP = b$ и катет $KH = a$, поэтому $BH_1 = PH = \sqrt{b^2 - a^2}$.

15.6. Обозначим серединные перпендикуляры к сторонам треугольников так, как показано на рис. 15.4. Все прямые l_{ij} параллельны и расстояние между

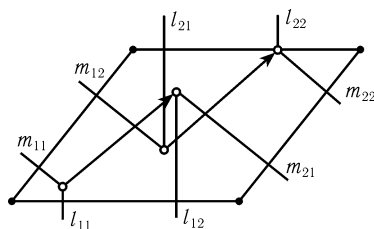


Рис. 15.4

пересечения прямых l_{22} и m_{22} .

15.7. а) Фигуру, лежащую внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1, обозначим через F , а ее площадь — через S . Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$, где точка A_1 лежит на стороне AD и $AA_1 = 0,001$, а точка A_2 лежит внутри угла BAD , $\angle A_2AA_1 = 60^\circ$ и $AA_2 = 0,001$ (рис. 15.5).

Пусть F_1 и F_2 — образы F при параллельных переносах на векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$. Фигуры F , F_1 и F_2 не имеют общих точек и лежат внутри квадрата со стороной 1,001. Поэтому $3S < 1,001^2$, т. е. $S < 0,335 < 0,34$.

б) Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AA_3} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_2}$. Повернем вектор $\overrightarrow{AA_3}$ вокруг точки A (против часовой стрелки на острый угол) так, чтобы точка A_3 перешла в точку A_4 , для которой $A_3A_4 = 0,001$. Рассмотрим также векторы $\overrightarrow{AA_5}$ и $\overrightarrow{AA_6}$ длиной 0,001, образующие с вектором $\overrightarrow{AA_4}$ углы 30° и лежащие по разные стороны от него (рис. 15.5).

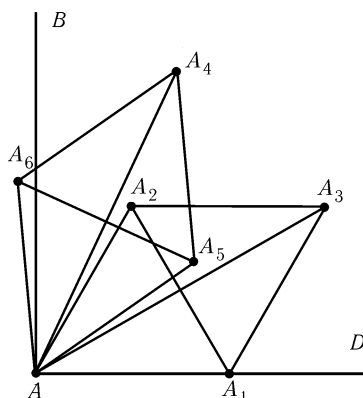


Рис. 15.5

прямыми l_{11} и l_{12} равно расстоянию между прямыми l_{21} и l_{22} (оно равно половине длины стороны параллелограмма). Поэтому параллельный перенос, переводящий l_{11} в l_{12} , переводит l_{21} в l_{22} , а параллельный перенос, переводящий l_{11} в l_{21} , переводит l_{12} в l_{22} . Следовательно, параллельный перенос, переводящий точку пересечения прямых l_{11} и m_{11} в точку пересечения прямых l_{12} и m_{21} , переводит точку пересечения прямых l_{21} и m_{12} в точку пересечения прямых l_{22} и m_{22} .

Обозначим образ фигуры F при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_i}$ через F_i . Для определенности будем считать, что $S(F_4 \cap F) \leq S(F_3 \cap F)$. Тогда $S(F_4 \cap F) \leq S/2$, поэтому $S(F_4 \cup F) \geq 3S/2$. Фигуры F_5 и F_6 не пересекаются ни друг с другом, ни с фигурами F и F_4 , поэтому $S(F \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6) \geq 7S/2$. (Если бы оказалось, что $S(F_3 \cap F) \leq S(F_4 \cap F)$, то вместо фигур F_5 и F_6 нужно было бы взять F_1 и F_2 .) Так как длины векторов $\overrightarrow{AA_i}$ не превосходят $0,001\sqrt{3}$, все рассматриваемые фигуры лежат внутри квадрата со стороной $1 + 0,002\sqrt{3}$. Поэтому $7S/2 \leq (1 + 0,002\sqrt{3})^2$ и $S < 0,287$.

Примечание. $S(A \cup B)$ — площадь объединения фигур A и B , $S(A \cap B)$ — площадь их пересечения.

15.8. Имеются два вектора $\pm \mathbf{a}$, параллельных прямой l и имеющих заданную длину a . Рассмотрим образы луча BC при параллельных переносах на эти векторы. Точка их пересечения с лучом BA лежит на искомой прямой (если они не пересекаются, то задача решений не имеет).

15.9. а) Пусть S'_1 — образ окружности S_1 при параллельном переносе на вектор длиной a , параллельный прямой l (таких векторов два). Искомая прямая проходит через точку пересечения окружностей S'_1 и S_2 .

б) Пусть O_1 и O_2 — проекции центров окружностей S_1 и S_2 на прямую l ;

S'_1 — образ окружности S_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$. Искомая прямая проходит через точку пересечения окружностей S'_1 и S_2 .

в) Пусть S'_1 — образ окружности S_1 при параллельном переносе на некоторый вектор, параллельный прямой l . Тогда длины хорд, отсекаемых прямой l_1 на окружностях S_1 и S'_1 , равны. А если расстояние между проекциями центров окружностей S'_1 и S_2 на прямую l равно $a/2$, то сумма или разность длин хорд, отсекаемых прямой, параллельной прямой l и проходящей через точку пересечения окружностей S'_1 и S_2 , равна a . Требуемая окружность S'_1 легко строится.

15.10. Предположим, что точка X построена. Перенесем точку A на вектор \overrightarrow{EF} , т. е. построим точку A' , для которой $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AA'}$. Это построение можно сделать, так как вектор \overrightarrow{EF} известен: его длина равна a и он параллелен CD .

Поскольку $AX \parallel A'F$, то $\angle A'FB = \angle AXB$, поэтому угол $A'FB$ известен. Таким образом, точка F лежит на пересечении двух фигур: отрезка CD и дуги окружности, из которой отрезок $A'B$ виден под углом AXB (рис. 15.6).

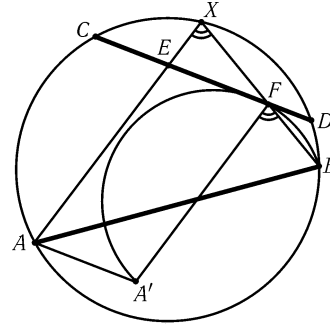


Рис. 15.6

15.11. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Обозначим образ точки D при параллельном переносе на вектор \overrightarrow{CB} через D_1 . В треугольнике ABD_1 известны AB , BD_1 и $\angle ABD_1$. Из этого вытекает следующее построение.

Строим произвольно луч BC' , затем проводим лучи BD'_1 и BA' так, что $\angle D'_1BC' = 180^\circ - \angle C$, $\angle A'BC' = \angle B$ и эти углы откладываются от луча BC' в одной полуплоскости. На лучах BA' и BD'_1 отложим отрезки $BA = a$ и $BD_1 = b$ соответственно. Проведем луч AD' так, что $\angle BAD' = \angle A$ и лучи BC' , AD' лежат по одну сторону от прямой AB . Вершина D является точкой пересечения луча AD' и луча, проведенного из точки D_1 параллельно лучу BC' . Вершина C является точкой пересечения луча BC' и луча, проведенного из точки D параллельно лучу D_1B .

15.12. Предположим, что точки M и N , в которых прямая l пересекает окружность S_2 , построены. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 ; O'_1 — образ точки O_1 при таком параллельном переносе вдоль прямой l , что $O'_1O_2 \perp MN$, S'_1 — образ окружности S_1 при этом переносе. Проведем касательные AP и AQ к окружностям S'_1 и S_2 . Тогда $AQ^2 = AM \cdot AN = AP^2$, а значит, $O'_1A^2 = AP^2 + R^2$, где R — радиус окружности S'_1 . Так как отрезок AP можно построить, то можно построить и отрезок AO'_1 . Остается заметить, что точка O'_1 лежит на окружности радиуса AO'_1 с центром A и на окружности с диаметром O_1O_2 .

15.13. а) Проведем через точку A прямую PQ (P лежит на окружности S_1 , Q — на окружности S_2). Опустим из центров O_1 и O_2 окружностей S_1 и S_2 перпендикуляры O_1M и O_2N на прямую PQ . Перенесем отрезок MN параллельно на вектор $\overrightarrow{MO_1}$. Пусть C — образ точки N при этом переносе.

Треугольник O_1CO_2 прямоугольный и $O_1C = MN = PQ/2$. Следовательно, чтобы построить прямую PQ , для которой $PQ = a$, нужно построить треугольник O_1CO_2 с заданной гипотенузой O_1O_2 и катетом $O_1C = a/2$, а затем провести через точку A прямую, параллельную O_1C .

б) Достаточно решить обратную задачу: описать вокруг данного треугольника PQR треугольник, равный данному треугольнику ABC . Предположим, что мы

построили треугольник ABC , стороны которого проходят через данные точки P , Q и R . Построим дуги окружностей, из которых отрезки RP и QP видны под углами A и B соответственно. Точки A и B лежат на этих дугах, причем длина отрезка AB известна. Согласно задаче а) можно построить прямую AP , проходящую через точку P , отрезок которой, заключенный внутри окружностей S_1 и S_2 , имеет данную длину. Проводя прямые AR и BQ , получаем треугольник ABC , равный данному треугольнику, так как у этих треугольников по построению равны сторона и прилегающие к ней углы.

15.14. Предположим, что искомым четырехугольник $ABCD$ построен. Пусть D_1 и D_2 — образы точки D при переносах на векторы \vec{AC} и \vec{CA} соответственно. Опишем вокруг треугольников DCD_1 и DAD_2 окружности S_1 и S_2 . Обозначим точки пересечения прямых BC и BA с окружностями S_1 и S_2 через M и N (рис. 15.7). Ясно, что $\angle DCD_1 = \angle DAD_2 = \angle D$, $\angle DCM = 180^\circ - \angle C$ и $\angle DAN = 180^\circ - \angle A$.

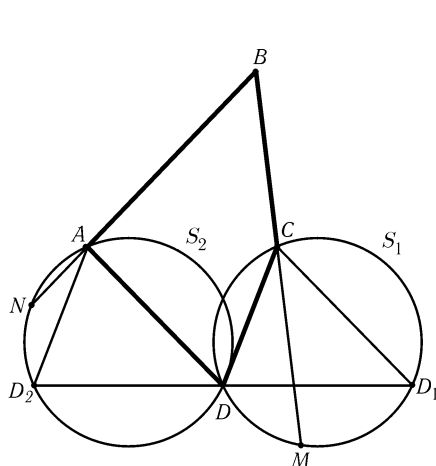


Рис. 15.7

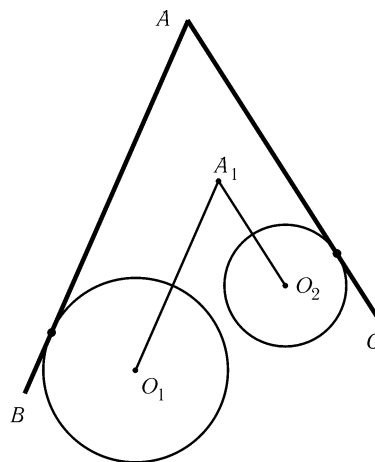


Рис. 15.8

Из этого вытекает следующее построение. На произвольной прямой l берем точку D и строим на l точки D_1 и D_2 так, что $DD_1 = DD_2 = AC$. Фиксируем одну из полуплоскостей Π , заданных прямой l , и будем считать, что точка B лежит в этой полуплоскости. Построим окружность S_1 , из точек которой, лежащих в Π , отрезок DD_1 виден под углом D . Аналогично строим окружность S_2 . Построим точку M на S_1 так, чтобы из всех точек части окружности, лежащей в Π , отрезок DM был виден под углом $180^\circ - \angle C$. Аналогично строим точку N . Отрезок MN виден из точки B под углом B , т. е. B является точкой пересечения окружности с центром D радиуса DB и дуги окружности, из которой отрезок MN виден под углом B (и она лежит в полуплоскости Π). Точки C и A являются точками пересечения прямых BM и BN с окружностями S_1 и S_2 .

15.15. Опустим из точки X перпендикуляры XA_1 и XA_2 на данные прямые l_1 и l_2 . Возьмем на луче A_1X точку B так, что $A_1B = a$. Тогда в случаях $XA_1 \pm XA_2 = a$ получим $XB = XA_2$. Пусть l'_1 — образ прямой l_1 при параллельном переносе на вектор $\vec{A_1B}$, M — точка пересечения прямых l'_1 и l_2 . Тогда в указанных случаях луч MX будет биссектрисой угла A_2MB . В итоге получаем

следующий ответ. Пусть точки пересечения прямых l_1 и l_2 с прямыми, параллельными прямым l_1 и l_2 и удаленными от них на расстояние a , образуют прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$. Искомое ГМТ в задаче а) — стороны этого прямоугольника, а в задаче б) — продолжения сторон.

15.16. Пусть сторона AB угла BAC касается окружности радиуса r_1 с центром O_1 , сторона AC касается окружности радиуса r_2 с центром O_2 . Перенесем прямую AB параллельно внутрь угла BAC на расстояние r_1 , прямую AC — на расстояние r_2 . Пусть A_1 — точка пересечения перенесенных прямых (рис. 15.8). Тогда $\angle O_1A_1O_2 = \angle BAC$. Постоянный угол $O_1A_1O_2$ опирается на неподвижный отрезок O_1O_2 , поэтому точка A_1 описывает дугу окружности.

Глава 16

Центральная симметрия

Основные сведения

1. Симметрией относительно точки A называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что A — середина отрезка XX' . Другие названия этого преобразования — *центральная симметрия с центром A* или просто *симметрия с центром A* .

Заметим, что симметрия с центром A представляет собой частный случай двух других преобразований — она является поворотом на 180° с центром A , а также гомотетией с центром A и коэффициентом -1 .

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно точки A , то A называют *центром симметрии* этой фигуры.

3. В главе используются следующие обозначения для преобразований:

S_A — симметрия с центром A ;

T_a — перенос на вектор a .

4. Композиции любых симметрий относительно точек A и B мы будем обозначать $S_B \circ S_A$; при этом сначала выполняется симметрия S_A , затем симметрия S_B . Кажущаяся неестественность такой последовательности операций оправдывается тождеством $(S_B \circ S_A)(X) = S_B(S_A(X))$.

Композиции любых отображений обладают свойством ассоциативности: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$. Поэтому порядок, в каком берется композиция, не существен, и можно просто писать $F \circ G \circ H$.

5. Композиции двух центральных симметрий или симметрии и переноса вычисляются по следующим формулам (см. задачу 16.9):

а) $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$;

б) $T_a \circ S_A = S_B$ и $S_B \circ T_a = S_A$, где $a = 2\overrightarrow{AB}$.

Вводные задачи

1. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

2. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.
3. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что он имеет центр симметрии.
4. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, равны.

§1. Симметрия помогает решить задачу

- 16.1. Докажите, что если в треугольнике медиана и биссектриса совпадают, то треугольник равнобедренный.
- 16.2. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок всегда может выиграть.
- 16.3. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведенные через точки A_1, B_1 и C_1 , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведенные через A_2, B_2 и C_2 , тоже пересекаются в одной точке.
- 16.4. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
- 16.5. Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.
- 16.6. Окружности S_1 и S_2 радиуса 1 касаются в точке A ; центр O окружности S радиуса 2 принадлежит S_1 . Окружность S_1 касается S в точке B . Докажите, что прямая AB проходит через точку пересечения окружностей S_2 и S .
- 16.7*. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE . Докажите, что если $\angle BAF = \angle BCE = 30^\circ$, то треугольник ABC правильный.
- 16.8*. Даны выпуклый n -угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри его. Докажите, что через точку O нельзя провести более n прямых, каждая из которых делит площадь n -угольника пополам.

§2. Свойства симметрии

16.9. а) Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

б) Докажите, что композиция параллельного переноса и центральной симметрии (в обоих порядках) является центральной симметрией.

16.10. Докажите, что если точку отразить симметрично относительно точек O_1 , O_2 и O_3 , а затем еще раз отразить симметрично относительно этих же точек, то она вернется на место.

16.11. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

в) Пусть M — конечное множество точек на плоскости. Точку O назовем «почти центром симметрии» множества M , если из M можно выбросить одну точку так, что O будет центром симметрии оставшегося множества. Сколько «почти центров симметрии» может иметь M ?

16.12. На отрезке AB дано n пар точек, симметричных относительно его середины; n точек окрашено в синий цвет, остальные — в красный. Докажите, что сумма расстояний от A до синих точек равна сумме расстояний от B до красных точек.

§3. Симметрия помогает решить задачу. Построения

16.13. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

16.14. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

16.15. Даны угол ABC и точка D внутри его. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D .

16.16. Даны угол и внутри его точки A и B . Постройте параллелограмм, для которого точки A и B — противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

16.17. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка O , не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром O и вершинами, лежащими на данных прямых, — по одной на каждой.

16.18. Даны две концентрические окружности S_1 и S_2 . Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

16.19*. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности и точка J на хорде CD . Постройте на окружности точку X так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF , делящийся точкой J пополам.

16.20*. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую l так, чтобы разность длин хорд, высекаемых на l окружностями S_1 и S_2 имела заданную величину a .

16.21*. Даны $m = 2n + 1$ точек — середины сторон m -угольника. Постройте его вершины.

Задачи для самостоятельного решения

16.22. Постройте треугольник по медианам m_a , m_b и углу C .

16.23. а) Дана точка внутри параллелограмма, не лежащая на отрезках, соединяющих середины противоположных сторон. Сколько существует отрезков с концами на сторонах параллелограмма, делящихся этой точкой пополам?

б) Дана точка, лежащая внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Сколько существует отрезков с концами на сторонах данного треугольника, делящихся этой точкой пополам?

16.24. а) Найдите множество вершин выпуклых четырехугольников, середины сторон которых являются вершинами данного квадрата.

б) На плоскости даны три точки. Найдите множество вершин выпуклых четырехугольников, середины трех сторон каждого из которых лежат в данных точках.

16.25. На прямой даны точки A , B , C , D , расположенные в указанном порядке, причем $AB = CD$. Докажите, что для любой точки P на плоскости $AP + DP \geq BP + CP$.

Решения

16.1. Пусть в треугольнике ABC медиана BD является биссектрисой. Рассмотрим точку B_1 , симметричную B относительно точки D . Так как D — середина отрезка AC , то четырехугольник $ABCB_1$ — параллелограмм. А так как $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle AB_1B$, то треугольник B_1AB равнобедренный и $AB = AB_1 = BC$.

16.2. Первый игрок кладет пятак в центр стола, а затем кладет пятаки симметрично пятакам второго игрока относительно центра стола. При такой стратегии первый игрок всегда имеет возможность сделать очередной ход. Ясно также, что игра завершится за конечное число ходов.

16.3. Пусть перпендикуляры к сторонам, проведенные через точки A_1 , B_1 и C_1 пересекаются в точке M . Обозначим центр окружности через O . Перпендикуляр к стороне BC , проведенный через точку A_1 , симметричен относительно точки O перпендикуляру к стороне BC , проведенному через точку A_2 . Поэтому

перпендикуляры к сторонам, проведенные через точки A_2 , B_2 и C_2 , пересекаются в точке, симметричной M относительно точки O .

16.4. Пусть P , Q , R и S — середины сторон AB , BC , CD и DA ; M — точка пересечения отрезков PR и QS (т. е. середина обоих этих отрезков: см. задачу 14.5); O — центр описанной окружности, а точка O' симметрична O относительно точки M . Докажем, что прямые, о которых идет речь в условии задачи, проходят через точку O' . В самом деле, $O'POR$ — параллелограмм, поэтому $O'P \parallel OR$, а так как R — середина хорды CD , то $OR \perp CD$, т. е. $O'P \perp CD$. Для прямых $O'Q$, $O'R$ и $O'S$ доказательство проводится аналогично.

16.5. Пусть точка D' симметрична D относительно точки P . Если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то она равна сумме площадей треугольников PBC и PAD , т. е. сумме площадей треугольников PBC и PBD' . Так как P — середина отрезка DD' , то $S_{PCD'} = S_{PCD} = S_{PBC} + S_{PBD'}$, поэтому точка B лежит на отрезке $D'C$. Остается заметить, что $D'B \parallel AD$.

16.6. Окружности S_1 и S_2 симметричны относительно точки A . Так как OB — диаметр окружности S_1 , то $\angle BAO = 90^\circ$, поэтому при симметрии относительно A точка B снова попадает на окружность S . Следовательно, при симметрии относительно A точка B переходит в точку пересечения окружностей S_2 и S .

16.7. Так как $\angle EAF = \angle ECF = 30^\circ$, точки A , E , F и C лежат на одной окружности S , причем если O — ее центр, то $\angle EOF = 60^\circ$. Точка B симметрична A относительно точки E , поэтому она лежит на окружности S_1 , симметричной окружности S относительно точки E . Аналогично точка B лежит на окружности S_2 , симметричной окружности S относительно точки F . Так как треугольник EOF правильный, центры окружностей S , S_1 и S_2 образуют правильный треугольник со стороной $2R$, где R — радиус этих окружностей. Поэтому окружности S_1 и S_2 имеют единственную общую точку B , причем треугольник BEF правильный. Следовательно, треугольник ABC тоже правильный.

16.8. Рассмотрим многоугольник, симметричный исходному относительно точки O . Так как стороны многоугольника попарно непараллельны, контуры этих многоугольников не могут иметь общих отрезков, а могут иметь только общие точки. А так как многоугольники выпуклые, на каждой стороне лежит не более двух точек пересечения; поэтому имеется не более $2n$ точек пересечения контуров (точнее, n пар симметричных относительно O точек).

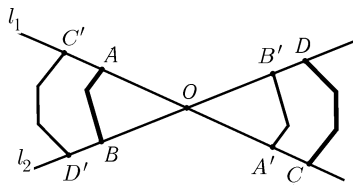


Рис. 16.1

Пусть l_1 и l_2 — прямые, проходящие через точку O и делящие площадь исходного многоугольника пополам. Докажем, что внутри каждой из четырех частей, на которые эти прямые делят плоскость, есть точка пересечения контуров. Предположим, что в одной из частей между прямыми l_1 и l_2 нет таких точек. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2 со сторонами многоугольника так, как показано на рис. 16.1. Пусть точки A' , B' , C' и D' симметричны относительно точки O точкам A , B , C и D соответственно. Для определенности будем считать, что точка A лежит ближе к точке O , чем точка C' . Так как отрезки AB и $C'D'$ не пересекаются, точка B лежит ближе к точке O , чем точка D' . Поэтому $S_{ABO} < S_{C'D'O} = S_{CDO}$, где ABO — выпуклая фигура, ограниченная отрезками AO и BO и частью границы n -угольника, заключенной между точками A и B .

С другой стороны, $S_{ABO} = S_{CDO}$, так как прямые l_1 и l_2 делят площадь многоугольника пополам. Получено противоречие. Поэтому между каждой парой прямых, делящих площадь пополам, лежит пара симметричных точек пересечения контуров, т. е. таких прямых не более n .

16.9. а) Пусть точка A при центральной симметрии относительно точки O_1 переходит в точку A_1 , точка A_1 переходит при симметрии относительно O_2 в точку A_2 . Тогда O_1O_2 — средняя линия треугольника AA_1A_2 поэтому $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

б) Пусть O_2 — образ точки O_1 при переносе на вектор $\mathbf{a}/2$. Согласно задаче а) $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{\mathbf{a}}$. Умножая это равенство на S_{O_1} справа или на S_{O_2} слева и учитывая, что $S_X \circ S_X$ — тождественное преобразование, получаем $S_{O_1} = S_{O_2} \circ T_{\mathbf{a}}$ и $S_{O_2} = T_{\mathbf{a}} \circ S_{O_1}$.

16.10. Согласно предыдущей задаче $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$. Поэтому $S_{O_3} \circ S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_3} \circ S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{2(\overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2})}$ — тождественное преобразование.

16.11. а) Предположим, что ограниченная фигура имеет два центра симметрии O_1 и O_2 . Введем систему координат с осью абсцисс, направленной по лучу O_1O_2 . Так как $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$, фигура переходит в себя при переносе на вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$. Ограниченная фигура не может обладать этим свойством, так как образ точки с наибольшей абсциссой не принадлежит фигуре.

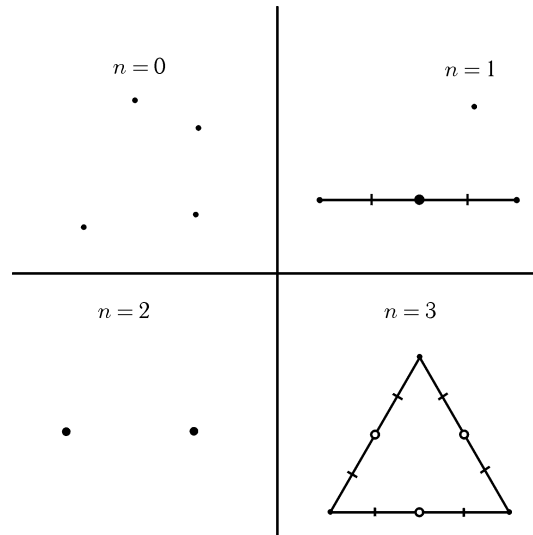


Рис. 16.2

б) Пусть $O_3 = S_{O_2}(O_1)$. Легко проверить, что $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$. Поэтому если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то и O_3 — центр симметрии, причем $O_3 \neq O_1$ и $O_3 \neq O_2$.

в) Покажем, что конечное множество может иметь только 0, 1, 2 или 3 «почти центров симметрии». Соответствующие примеры приведены на рис. 16.2. Остается доказать, что конечное множество не может иметь больше трех «почти центров симметрии».

Почти центров симметрии конечное число, так как они являются серединами отрезков, соединяющих точки множества. Поэтому можно выбрать прямую,

проекции почти центров симметрии на которую не сливаются. Следовательно, доказательство достаточно провести для точек, лежащих на одной прямой.

Пусть на прямой задано n точек с координатами $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$. Если мы выбрасываем точку x_1 , то центром симметрии оставшегося множества может быть только точка $(x_2 + x_n)/2$; если выбрасываем x_n — то только точка $(x_1 + x_{n-1})/2$; если же выбрасываем любую другую точку — то только точка $(x_1 + x_n)/2$. Поэтому почти центров симметрии не больше трех.

16.12. Если пара симметричных точек окрашена в разные цвета, то ее можно просто выбросить из рассмотрения; выбросим все такие пары. В оставшемся наборе точек число синих пар равно числу красных пар. Кроме того, сумма расстояний как от точки A , так и от точки B до любой пары симметричных точек равна длине отрезка AB .

16.13. Рассмотрим окружность S'_1 , симметричную окружности S_1 относительно точки A . Искомая прямая проходит через точки пересечения S'_1 и S_2 .

16.14. Пусть l' — образ прямой l при симметрии относительно точки A . Искомая прямая проходит через точку A и точку пересечения прямой l' с окружностью S .

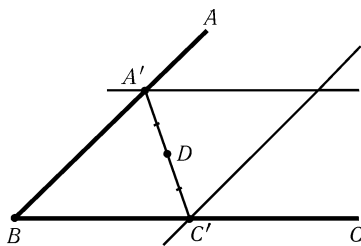


Рис. 16.3

16.15. Построим точки A' и C' пересечения прямых, симметричных прямым BC и AB относительно точки D , с прямыми AB и BC (рис. 16.3). Ясно, что точка D является серединой построенного отрезка $A'C'$, так как точки A' и C' симметричны относительно D .

16.16. Пусть O — середина отрезка AB . Нужно построить точки C и D , лежащие на сторонах угла, для которых точка O является серединой отрезка CD . Это построение описано в решении предыдущей задачи.

16.17. Предварительно разобьем прямые на пары. Это можно сделать тремя способами. Пусть противоположные вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной паре прямых, B и D — на другой. Рассматривая угол, образованный первой парой прямых, строим точки A и C , как это описано в решении задачи 16.15. Аналогично строим точки B и D .

16.18. Возьмем на меньшей окружности S_1 произвольную точку X . Пусть S'_1 — образ окружности S_1 при симметрии относительно точки X , Y — точка пересечения окружностей S'_1 и S_2 . Тогда XY — искомая прямая.

16.19. Предположим, что точка X построена. Обозначим образы точек A , B и X при симметрии относительно точки J через A' , B' и X' соответственно (рис. 16.4). Угол $\angle A'FB = 180^\circ - \angle AXB$ известен, поэтому точка F является точкой пересечения отрезка CD с дугой окружности, из которой отрезок BA' виден под углом $180^\circ - \angle AXB$. Точка X является точкой пересечения прямой BF с данной окружностью.

16.20. Предположим, что прямая l построена. Рассмотрим окружность S'_1 , симметричную окружности S_1 относительно точки A . Пусть O_1 , O'_1 и O_2 — центры окружностей S_1 , S'_1 и S_2 (рис. 16.5). Проведем через точки O'_1 и O_2 прямые l'_1 и l_2 , перпендикулярные прямой l . Расстояние между прямыми l'_1 и l_2 равно половине разности длин хорд, высекаемых прямой l на окружностях S_1 и S_2 . Поэтому для построения прямой l нужно построить окружность радиуса $a/2$ с центром O'_1 ; прямая l_2 будет касательной к этой окружности. Построив прямую l_2 , опускаем на нее перпендикуляр из точки A и получаем прямую l .

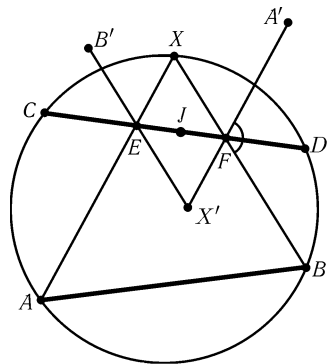


Рис. 16.4

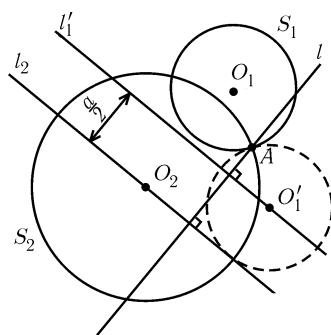


Рис. 16.5

16.21. Пусть B_1, B_2, \dots, B_m — середины сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_mA_1$ многоугольника $A_1A_2 \dots A_m$. Тогда $S_{B_1}(A_1) = A_2, S_{B_2}(A_2) = A_3, \dots, S_{B_m}(A_m) = A_1$. Поэтому $S_{B_m} \circ \dots \circ S_{B_1}(A_1) = A_1$, т. е. A_1 — неподвижная точка композиции симметрий $S_{B_m} \circ S_{B_{m-1}} \circ \dots \circ S_{B_1}$. Согласно задаче 16.9 композиция нечетного числа центральных симметрий является центральной симметрией, т. е. имеет единственную неподвижную точку. Эту точку можно построить как середину отрезка, соединяющего точки X и $S_{B_m} \circ S_{B_{m-1}} \circ \dots \circ S_{B_1}(X)$, где X — произвольная точка.

Глава 17

Осевая симметрия

Основные сведения

1. *Симметрией относительно прямой l* (обозначение: S_l) называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX' . Это преобразование называют также *осевой симметрией*, а l — осью симметрии.

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно прямой l , то l называют *осью симметрии* этой фигуры.

3. Композиция двух осевых симметрий является параллельным переносом, если их оси параллельны, и поворотом, если они не параллельны (см. задачу 17.22).

Осевые симметрии являются как бы кирпичиками, из которых построены все другие движения плоскости: любое движение является композицией не более чем трех осевых симметрий (задача 17.35). Поэтому композиции осевых симметрий дают гораздо более мощный метод решения задач, чем композиции центральных симметрий. Кроме того, поворот часто бывает удобно разложить в композицию двух симметрий, причем за одну из осей можно взять любую прямую, проходящую через центр поворота.

Вводные задачи

1. Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.

2. Четырехугольник имеет ось симметрии. Докажите, что этот четырехугольник либо является равнобедренной трапецией, либо симметричен относительно диагонали.

3. Ось симметрии многоугольника пересекает его стороны в точках A и B . Докажите, что точка A является либо вершиной многоугольника, либо серединой стороны, перпендикулярной оси симметрии.

4. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

§1. Симметрия помогает решить задачу

17.1. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45° . Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M .

17.2. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2 . Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2 . Эти отрезки пересекают S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2 . Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

17.3. Через точку M основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его боковые стороны CA и CB (или их продолжения) в точках A_1 и B_1 . Докажите, что $A_1A : A_1M = B_1B : B_1M$.

§2. Построения

17.4. Постройте четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A , зная длины его сторон.

17.5. Постройте четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, зная длины двух соседних сторон AB и AD и углы при вершинах B и D .

17.6. Постройте треугольник ABC по a , b и разности углов A и B .

17.7. Постройте треугольник ABC по стороне c , высоте h_c и разности углов A и B .

17.8. Постройте треугольник ABC по: а) c , $a - b$ ($a > b$) и углу C ; б) c , $a + b$ и углу C .

17.9. Дана прямая l и точки A и B , лежащие по одну сторону от нее. Постройте такую точку X прямой l , что $AX + XB = a$, где a — данная величина.

17.10. Дан острый угол MON и точки A и B внутри его. Найдите на стороне OM точку X так, чтобы треугольник XYZ , где Y и Z — точки пересечения прямых XA и XB с ON , был равнобедренным: $XY = XZ$.

17.11. Дана прямая MN и две точки A и B по одну сторону от нее. Постройте на прямой MN точку X так, что $\angle AXM = 2\angle BXN$.

* * *

17.12. Даны три прямые l_1, l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке, и точка A_1 на прямой l_1 . Постройте треугольник ABC так, чтобы точка A_1 была серединой его стороны BC , а прямые l_1, l_2 и l_3 были серединными перпендикулярами к сторонам.

17.13. Постройте треугольник ABC , если даны точки A, B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C .

17.14. Даны три прямые l_1, l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке, и точка A на прямой l_1 . Постройте треугольник ABC так, чтобы точка A была его вершиной, а биссектрисы треугольника лежали на прямых l_1, l_2 и l_3 .

17.15. Постройте треугольник по данным серединам двух сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

§3. Неравенства и экстремумы

17.16. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M , отличная от C . Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.

17.17. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Докажите, что $2AM \geq (b + c) \cos(\alpha/2)$.

17.18. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и BC в точках B_1 и A_1 . Докажите, что если $AC > BC$, то $AA_1 > BB_1$.

17.19. Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

17.20. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l точку X так, чтобы длина ломаной AXB была минимальна.

17.21*. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.

§4. Композиции симметрий

17.22. а) Прямые l_1 и l_2 параллельны. Докажите, что $S_{l_1} \circ S_{l_2} = T_{2a}$, где T_a — параллельный перенос, переводящий l_1 в l_2 , причем $a \perp l_1$.

б) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O . Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{2\alpha}$, где R_O^α — поворот, переводящий l_1 в l_2 .

17.23. На плоскости даны три прямые a, b, c . Пусть $T = S_a \circ S_b \circ S_c$. Докажите, что $T \circ T$ — параллельный перенос (или тождественное отображение).

17.24. Пусть $l_3 = S_{l_1}(l_2)$. Докажите, что $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

17.25. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 ; точки A_2, B_2 и C_2 симметричны этим точкам относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что $A_2B_2 \parallel AB$ и прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

17.26*. Две прямые пересекаются под углом γ . Кузнечик прыгает с одной прямой на другую; длина каждого прыжка равна 1 м, и кузнечик не прыгает обратно, если только это возможно. Докажите, что последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда γ/π — рациональное число.

17.27*. а) Впишите в данную окружность n -угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.

б) Через центр O окружности проведено n прямых. Постройте описанный около окружности n -угольник, вершины которого лежат на этих прямых.

17.28*. Дано n прямых. Постройте n -угольник, для которого эти прямые являются: а) серединными перпендикулярами к сторонам; б) биссектрисами внешних или внутренних углов при вершинах.

17.29*. Впишите в данную окружность n -угольник, одна из сторон которого проходит через данную точку, а остальные стороны параллельны данным прямым.

§5. Свойства симметрий и осей симметрии

17.30. Точка A расположена на расстоянии 50 см от центра круга радиусом 1 см. Разрешается отразить точку симметрично относительно любой прямой, пересекающей круг. Докажите, что: а) за 25 отражений точку A можно «загнать» внутрь данного круга; б) за 24 отражения этого сделать нельзя.

17.31. На окружности с центром O даны точки A_1, \dots, A_n , делящие ее на равные дуги, и точка X . Докажите, что точки, симметричные X относительно прямых OA_1, \dots, OA_n , образуют правильный многоугольник.

17.32. Докажите, что если плоская фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

17.33*. Докажите, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

17.34*. Докажите, что если многоугольник имеет четное число осей симметрии, то он имеет центр симметрии.

§6. Теорема Шалля

Движением называют преобразование, сохраняющее расстояния между точками, т. е. если A' и B' — образы точек A и B , то $A'B' = AB$. Движение плоскости, оставляющее неподвижными три точки, не лежащие на одной прямой, оставляет неподвижными и все остальные точки.

17.35*. Докажите, что любое движение плоскости является композицией не более чем трех симметрий относительно прямых.

Движение, являющееся композицией четного числа симметрий относительно прямых, называют *движением первого рода* или *движением, сохраняющим ориентацию плоскости*. Движение, являющееся композицией нечетного числа симметрий относительно прямых, называют *движением второго рода* или *движением, изменяющим ориентацию плоскости*.

Мы не будем доказывать, что композицию четного числа симметрий относительно прямых нельзя представить в виде композиции нечетного числа симметрий относительно прямых.

17.36*. Докажите, что любое движение первого рода является поворотом или параллельным переносом.

Скольльзящей симметрией называют композицию симметрии относительно некоторой прямой l и переноса на вектор, параллельный l (этот вектор может быть нулевым).

17.37*. Докажите, что любое движение второго рода является скольльзящей симметрией.

Задачи для самостоятельного решения

17.38. Дан невыпуклый четырехугольник периметра P . Докажите, что найдется выпуклый четырехугольник того же периметра, но большей площади.

17.39. Может ли ограниченная фигура иметь центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

17.40. Точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые, симметричные прямым AM , BM и CM относительно биссектрис углов A , B и C , параллельны.

17.41. Вершины выпуклого четырехугольника лежат на различных сторонах квадрата. Докажите, что периметр этого четырехугольника не меньше $2\sqrt{2}a$, где a — длина стороны квадрата.

17.42. На прямоугольном бильярдном столе лежит шар. Постройте траекторию, при движении по которой шар, отразившись от каждой стенки по одному разу, вернется на исходное место.

Решения

17.1. Обозначим точки, симметричные точкам C и D относительно прямой AB , через C' и D' соответственно. $\angle C'MD = 90^\circ$, поэтому $CM^2 + MD^2 = C'M^2 + MD^2 = C'D^2$. Поскольку $\angle C'CD = 45^\circ$, хорда $C'D$ имеет постоянную длину.

17.2. Проведем диаметр окружности S , являющийся осью симметрии окружностей S_1 и S_2 . Пусть точки C' и B'_2 симметричны точкам C и B_2 относительно этого диаметра (рис. 17.1).

Окружности S_1 и S гомотетичны с центром гомотетии в точке A_1 , причем при этой гомотетии прямая $B_1B'_2$ переходит в прямую CC' , поэтому эти прямые параллельны. Ясно также, что $B_2B'_2 \parallel CC'$. Поэтому точки B_1 , B'_2 и B_2 лежат на одной прямой, причем эта прямая параллельна прямой CC' .

17.3. Пусть прямая, симметричная прямой A_1B_1 относительно прямой AB , пересекает стороны CA и CB (или их продолжения) в точках A_2 и B_2 . Так как $\angle A_1AM = \angle B_2BM$ и $\angle A_1MA = \angle B_2MB$, то $\triangle A_1AM \sim \triangle B_2BM$, т. е. $A_1A : A_1M = B_2B : B_2M$. Кроме того, так как MB — биссектриса треугольника B_1MB_2 , то $B_2B : B_2M = B_1B : B_1M$.

17.4. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Пусть для определенности $AD > AB$. Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно диагонали AC . Точка B' лежит на стороне AD , причем $B'D = AD - AB$.

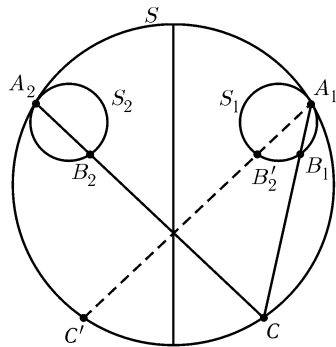


Рис. 17.1

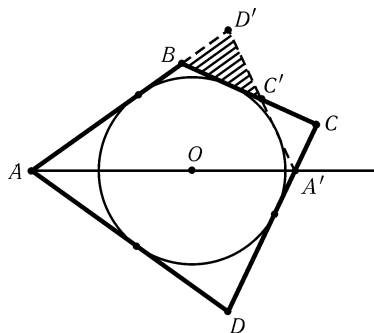


Рис. 17.2

В треугольнике $B'CD$ известны длины всех сторон: $B'D = AD - AB$ и $B'C = BC$. Построив треугольник $B'CD$, на продолжении стороны $B'D$ за точку B' построим точку A . Дальнейшее построение очевидно.

17.5. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Для определенности будем считать, что $AD > AB$. Пусть O — центр вписанной окружности; точка D' симметрична D относительно прямой AO ; A' — точка пересечения прямых AO и DC , C' — точка пересечения прямых BC и $A'D'$ (рис. 17.2).

В треугольнике $BC'D'$ известны сторона BD' и прилегающие к ней углы $\angle D'BC' = 180^\circ - \angle B$ и $\angle BD'C' = \angle D$. Построим треугольник $BC'D'$ по этим элементам. Так как $AD' = AD$, то можно построить точку A . Затем строим точку O пересечения биссектрис углов ABC' и $BD'C'$. Зная положение точки O , можно построить точку D и вписанную окружность. Точка C является точкой пересечения прямой BC' и касательной к окружности, проведенной из точки D .

17.6. Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB . В треугольнике ACC' известны $AC = b$, $AC' = a$ и $\angle CAC' = \angle A - \angle B$. Поэтому его можно построить. Точка B симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку CC' .

17.7. Предположим, что треугольник ABC построен. Обозначим через C' точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB , через B' — точку, симметричную B относительно прямой CC' . Для определенности будем считать, что $AC < BC$. Тогда $\angle ACB' = \angle ACC' + \angle C'CB = 180^\circ - \angle A + \angle C'CB = 180^\circ - (\angle A - \angle B)$, т. е. угол ACB' известен.

Треугольник ABB' можно построить, так как $AB = c$, $BB' = 2h_c$ и $\angle ABB' = 90^\circ$. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB' и дуги окружности, из которой отрезок AB' виден под углом $180^\circ - (\angle A - \angle B)$.

17.8. а) Предположим, что треугольник ABC построен. Пусть C' — точка, симметричная точке A относительно биссектрисы угла C . Тогда $\angle BC'A = 180^\circ - \angle AC'C = 180^\circ - (180^\circ - \angle C)/2 = 90^\circ + \angle C/2$ и $BC' = a - b$.

В треугольнике ABC известны $AB = c$, $BC' = a - b$ и $\angle C' = 90^\circ + \angle C/2$. Так как $\angle C' > 90^\circ$, треугольник ABC' строится по этим элементам однозначно. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC' и прямой BC' .

б) Решение аналогично решению задачи а). В качестве C' нужно взять точку,

симметричную точке A относительно биссектрисы внешнего угла C треугольника ABC . Так как $\angle AC'B = \angle C/2 < 90^\circ$, задача может иметь два решения.

17.9. Пусть S — окружность радиуса a с центром B , S' — окружность радиуса AX с центром X , A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l . Тогда окружность S' касается окружности S , а точка A' лежит на окружности S' . Остается провести через данные точки A и A' окружность S' , касающуюся данной окружности S , и найти ее центр X (см. задачу 8.56, б).

17.10. Пусть проекция точки A на прямую ON лежит ближе к точке O , чем проекция точки B . Предположим, что равнобедренный треугольник XYZ построен.

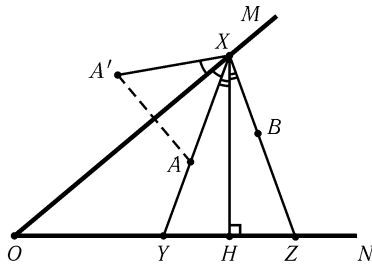


Рис. 17.3

Рассмотрим точку A' , симметричную точке A относительно прямой OM . Опустим из точки X перпендикуляр XH на прямую ON (рис. 17.3). Так как $\angle A'XB = \angle A'XO + \angle OXA + \angle YXH + \angle HXZ = 2\angle OXY + 2\angle YXH = 2\angle OXH = 180^\circ - 2\angle MON$, то угол $A'XB$ известен. Точка X является точкой пересечения прямой OM и дуги, из которой отрезок $A'B$ виден под углом $180^\circ - 2\angle MON$. При этом проекция точки X на прямую ON должна лежать между проекциями точек A и B .

Обратно, если $\angle A'XB = 180^\circ - \angle MON$ и проекция точки X на прямую ON лежит между проекциями точек A и B , то треугольник XYZ равнобедренный.

17.11. Предположим, что точка X построена. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно прямой MN ; окружность радиуса AB' с центром B' пересекает прямую MN в точке A' . Тогда луч $B'X$ является биссектрисой угла $AB'A'$. Следовательно, X — точка пересечения прямых $B'O$ и MN , где O — середина отрезка AA' .

17.12. Проведем через точку A_1 прямую BC , перпендикулярную прямой l_1 . Вершина A искомого треугольника ABC является точкой пересечения прямых, симметричных прямой BC относительно прямых l_2 и l_3 .

17.13. Пусть точка A' симметрична точке A относительно биссектрисы угла C . Тогда C — точка пересечения прямой $A'B$ и прямой, на которой лежит биссектриса угла C .

17.14. Пусть A_2 и A_3 — точки, симметричные точке A относительно прямых l_2 и l_3 . Тогда точки A_2 и A_3 лежат на прямой BC . Поэтому точки B и C являются точками пересечения прямой A_2A_3 с прямыми l_2 и l_3 .

17.15. Предположим, что треугольник ABC построен, причем N — середина AC , M — середина BC и биссектриса угла A лежит на данной прямой l . Построим точку N' , симметричную N относительно прямой l . Прямая BA проходит через точку N' и параллельна прямой MN . Таким образом мы находим вершину A и прямую BA . Проведем прямую AN , получим прямую AC . Остается построить отрезок, концы которого лежат на сторонах угла BAC и M — его середина (см. решение задачи 16.15).

17.16. Пусть точки A' и B' симметричны A и B относительно прямой CM . Тогда $AM + MB = A'M + MB > A'B = A'C + CB = AC + CB$.

17.17. Пусть точки B' , C' и M' симметричны точкам B , C и M относительно биссектрисы внешнего угла при вершине A . Тогда $AM + AM' \geq MM' =$

$$= (BB' + CC')/2 = (b + c) \sin(90^\circ - (\alpha/2)) = (b + c) \cos(\alpha/2).$$

17.18. Пусть точка B' симметрична B относительно биссектрисы угла ACB . Тогда $B'A_1 = BB_1$, т. е. требуется проверить, что $B'A_1 < AA_1$. Для этого достаточно заметить, что $\angle AB'A_1 > \angle AB'B > 90^\circ$.

17.19. Пусть D' — точка, симметричная точке D относительно среднего перпендикуляра к отрезку AC . Тогда $S_{ABCD} = S_{ABCD'} = S_{BAD'} + S_{BCD'} \leq AB \cdot AD'/2 + BC \cdot CD'/2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$.

17.20. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой l . Пусть X — точка на прямой l . Тогда $AX + XB = A'X + XB \geq A'B$, причем равенство достигается, только если точка X лежит на отрезке $A'B$. Поэтому искомая точка является точкой пересечения прямой l и отрезка $A'B$.

17.21. Пусть PQR — треугольник, образованный основаниями высот треугольника ABC , $P'Q'R'$ — любой другой треугольник, вписанный в треугольник ABC . Пусть, далее, точки P_1 и P_2 (соответственно, P'_1 и P'_2) симметричны точке P (соответственно P') относительно прямых AB и AC (рис. 17.4). Точки Q и R лежат на отрезке P_1P_2 (см. задачу 1.58), поэтому периметр треугольника PQR равен длине отрезка P_1P_2 . А периметр треугольника $P'Q'R'$ равен длине ломаной $P'_1R'Q'P'_2$, т. е. он не меньше длины отрезка $P'_1P'_2$. Остается заметить, что $(P'_1P'_2)^2 = P_1P_2^2 + 4d^2$, где d — расстояние от точки P'_1 до прямой P_1P_2 .

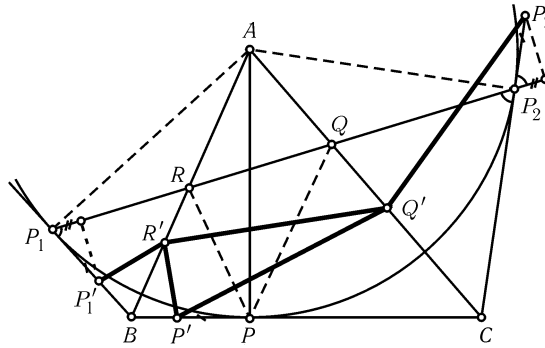


Рис. 17.4

17.22. Пусть X — произвольная точка, $X_1 = S_{l_1}(X)$ и $X_2 = S_{l_2}(X_1)$.

а) Выберем на прямой l_1 произвольную точку O и рассмотрим систему координат с началом O и осью абсцисс, направленной по прямой l_1 . Прямая l_2 задается в этой системе координат уравнением $y = a$. Пусть y , y_1 и y_2 — ординаты точек X , X_1 и X_2 . Ясно, что $y_1 = -y$ и $y_2 = (a - y_1) + a = y + 2a$. Так как точки X , X_1 и X_2 имеют одинаковые абсциссы, то $X_2 = T_{2a}(X)$, где T_a — перенос, переводящий l_1 в l_2 , причем $a \perp l_1$.

б) Рассмотрим систему координат с началом O и осью абсцисс, направленной по прямой l_1 . Пусть угол поворота от прямой l_1 к l_2 в этой системе координат равен α , углы поворотов от оси абсцисс до лучей OX , OX_1 и OX_2 равны φ , φ_1 и φ_2 . Ясно, что $\varphi_1 = -\varphi$ и $\varphi_2 = (\alpha - \varphi_1) + \alpha = \varphi + 2\alpha$. Так как $OX = OX_1 = OX_2$, то $X_2 = R_O^{2\alpha}(X)$, где R_O^α — поворот, переводящий l_1 в l_2 .

17.23. Представим $T \circ T$ в виде композиции трех преобразований:

$$T \circ T = (S_a \circ S_b \circ S_c) \circ (S_a \circ S_b \circ S_c) = (S_a \circ S_b) \circ (S_c \circ S_a) \circ (S_b \circ S_c).$$

При этом $S_a \circ S_b$, $S_c \circ S_a$ и $S_b \circ S_c$ — повороты на углы $2\angle(b, a)$, $2\angle(a, c)$ и $2\angle(c, b)$ соответственно. Сумма углов поворотов равна $2(\angle(b, a) + \angle(a, c) + \angle(c, b)) = 2\angle(b, b) = 0^\circ$, причем эта величина определена с точностью до $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Следовательно, эта композиция поворотов является параллельным переносом (см. задачу 18.35).

17.24. Если точки X и Y симметричны относительно прямой l_3 , то точки $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_1}(Y)$ симметричны относительно прямой l_2 , т. е. $S_{l_1}(X) = S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y)$. Поэтому $S_{l_1} \circ S_{l_3} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ и $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

17.25. Пусть O — центр вписанной окружности; a и b — прямые OA и OB . Тогда $S_a \circ S_b(C_1) = S_a(A_1) = A_2$ и $S_b \circ S_a(C_1) = S_b(B_1) = B_2$. Точки A_2 и B_2 получаются из точки C_1 поворотами с центром O на противоположные углы, поэтому $A_2B_2 \parallel AB$. Аналогичные рассуждения показывают, что стороны треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ параллельны, а значит, эти треугольники гомотетичны. Прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 проходят через центр гомотетии, переводящей треугольник ABC в $A_2B_2C_2$. Заметим, что при этой гомотетии описанная окружность треугольника ABC переходит в его вписанную окружность, т. е. центр гомотетии лежит на прямой, соединяющей центры этих окружностей.

17.26. Для каждого вектора прыжка имеется ровно два положения кузнечика, для которых прыжок задается этим вектором. Поэтому последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда имеется лишь конечное число различных векторов прыжков.

Пусть \mathbf{a}_1 — вектор прыжка кузнечика с прямой l_2 на прямую l_1 ; $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots$ — векторы последующих прыжков. Тогда $\mathbf{a}_2 = S_{l_2}(\mathbf{a}_1)$, $\mathbf{a}_3 = S_{l_1}(\mathbf{a}_2)$, $\mathbf{a}_4 = S_{l_2}(\mathbf{a}_3), \dots$. Так как композиция $S_{l_1} \circ S_{l_2}$ является поворотом на угол 2γ (или на угол $2\pi - 2\gamma$), векторы $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7, \dots$ получаются из вектора \mathbf{a}_1 поворотами на $2\gamma, 4\gamma, 6\gamma, \dots$ (или на $2(\pi - \gamma), 4(\pi - \gamma), 6(\pi - \gamma), \dots$). Поэтому набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \dots$ содержит конечное число различных векторов тогда и только тогда, когда γ/π — рациональное число. Набор $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6, \dots$ рассматривается аналогично.

17.27. а) Предположим, что многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ построен. Проведем через центр O окружности серединные перпендикуляры l_1, l_2, \dots, l_n к хордам $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ соответственно. Прямые l_1, \dots, l_n известны, так как они проходят через точку O и перпендикулярны данным прямым. Кроме того, $A_2 = S_{l_1}(A_1)$, $A_3 = S_{l_2}(A_2), \dots, A_1 = S_{l_n}(A_n)$, т. е. точка A_1 является неподвижной точкой композиции симметрий $S_{l_n} \circ \dots \circ S_{l_1}$. При нечетном n на окружности неподвижных точек ровно две; при четном n либо неподвижных точек нет, либо все точки неподвижны.

б) Предположим, что искомый многоугольник $A_1 \dots A_n$ построен. Рассмотрим многоугольник $B_1 \dots B_n$, образованный точками касания описанного многоугольника с окружностью. Стороны многоугольника $B_1 \dots B_n$ перпендикулярны данным прямым, т. е. имеют заданные направления, поэтому его можно построить (см. задачу а)); остается провести касательные к окружности в точках B_1, \dots, B_n .

17.28. Рассмотрим композицию последовательных симметрий относительно данных прямых l_1, \dots, l_n . В задаче а) в качестве вершины A_1 искомого n -угольника нужно взять неподвижную точку этой композиции, а в задаче б) в качестве прямой A_1A_n нужно взять неподвижную прямую.

17.29. При последовательных симметриях относительно прямых l_1, \dots, l_{n-1} , перпендикулярных данным прямым и проходящих через центр окружности, вершина A_1 искомого многоугольника переходит в вершину A_n . Если n нечетно, то композиция этих симметрий — поворот на известный угол, поэтому через

точку M нужно провести хорду A_1A_n известной длины. Если n чётно, то рассматриваемая композиция является симметрией относительно некоторой прямой, поэтому из точки M нужно опустить перпендикуляр на эту прямую.

17.30. Пусть O — центр данного круга, D_R — круг радиуса R с центром O . Докажем, что множеством образов точек D_R при симметриях относительно прямых, проходящих через D_1 , является круг D_{R+2} . В самом деле, образы точки O при указанных симметриях заполняют круг D_2 , а круги радиуса R с центрами в D_2 заполняют круг D_{R+2} . Поэтому за n отражений из точек D_1 можно получить любую точку из D_{2n+1} и только эти точки. Остается заметить, что точку A можно «загнать» внутрь D_R за n отражений тогда и только тогда, когда за n отражений можно перевести некоторую точку из D_R в A .

17.31. Обозначим симметрии относительно прямых OA_1, \dots, OA_n через S_1, \dots, S_n . Пусть $X_k = S_k(X)$ при $k = 1, \dots, n$. Нужно доказать, что при некотором повороте относительно точки O система точек X_1, \dots, X_n переходит в себя. Ясно, что $S_{k+1} \circ S_k(X_k) = S_{k+1} \circ S_k \circ S_k(X) = X_{k+1}$. Преобразования $S_{k+1} \circ S_k$ являются поворотами относительно точки O на угол $4\pi/n$ (см. задачу 17.22, б)).

З а м е ч а н и е. При чётном n получается $n/2$ -угольник.

17.32. Пусть прямые l_1 и l_2 являются осями симметрии плоской фигуры. Это означает, что если точка X принадлежит фигуре, то точки $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_2}(X)$ принадлежат фигуре. Рассмотрим прямую $l_3 = S_{l_1}(l_2)$. Согласно задаче 17.24 $S_{l_3}(X) = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}(X)$, поэтому l_3 также является осью симметрии.

Если у фигуры ровно две оси симметрии, то $l_3 = l_1$ или $l_3 = l_2$. Ясно, что $l_3 \neq l_1$, поэтому $l_3 = l_2$, т. е. прямая l_2 перпендикулярна прямой l_1 .

17.33. Предположим, что многоугольник имеет три оси симметрии, которые не пересекаются в одной точке, т. е. они образуют треугольник. Пусть X — точка многоугольника, наиболее удаленная от некоторой внутренней точки M этого треугольника. Точки X и M лежат по одну сторону от одной из рассматриваемых осей симметрии l . Если X' — точка, симметричная X относительно прямой l , то $MX' > MX$ и точка X' более удалена от точки M , чем точка X . Получено противоречие, поэтому все оси симметрии многоугольника пересекаются в одной точке.

17.34. Все оси симметрии проходят через одну точку O (задача 17.33). Если l_1 и l_2 — оси симметрии, то $l_3 = S_{l_1}(l_2)$ — тоже ось симметрии (см. задачу 17.24). Выберем одну из осей симметрии l нашего многоугольника. Остальные оси разбиваются на пары прямых, симметричных относительно l . Если прямая l_1 , перпендикулярная l и проходящая через точку O , не является осью симметрии, то число осей симметрии нечётно. Поэтому прямая l_1 является осью симметрии. Ясно, что $S_{l_1} \circ S_l = R_O^{180^\circ}$ — центральная симметрия, т. е. O — центр симметрии.

17.35. Пусть F — движение, переводящее точку A в A' , причем точки A и A' не совпадают; S симметрия относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AA' . Тогда $S \circ F(A) = A$, т. е. A — неподвижная точка преобразования $S \circ F$. Кроме того, если X — неподвижная точка преобразования F , то $AX = A'X$, т. е. точка X лежит на прямой l , а значит, X — неподвижная точка преобразования $S \circ F$. Таким образом, точка A и все неподвижные точки преобразования F являются неподвижными точками преобразования $S \circ F$.

Возьмем точки A, B и C , не лежащие на одной прямой, и рассмотрим их образы при данном движении G . Можно построить такие преобразования S_1, S_2 и S_3 , являющиеся симметриями относительно прямых или тождественными преобразованиями, что преобразование $S_3 \circ S_2 \circ S_1 \circ G$ оставляет неподвижными точки A, B и C , т. е. оно является тождественным преобразованием E . Домножая

равенство $S_3 \circ S_2 \circ S_1 \circ G = E$ слева последовательно на S_3 , S_2 и S_1 и учитывая, что $S_i \circ S_i = E$, получаем $G = S_1 \circ S_2 \circ S_3$.

17.36. Согласно задаче 17.35 любое движение первого рода является композицией двух симметрий относительно прямых. Остается воспользоваться результатом задачи 17.22.

17.37. Согласно задаче 17.35 любое движение второго рода можно представить в виде $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, где S_1 , S_2 и S_3 — симметрии относительно прямых l_1 , l_2 и l_3 . Предположим сначала, что прямые l_2 и l_3 не параллельны. Тогда при повороте прямых l_2 и l_3 относительно точки их пересечения на любой угол композиция $S_3 \circ S_2$ не изменяется (см. задачу 17.22. б)), поэтому можно считать, что $l_2 \perp l_1$. Остается повернуть прямые l_1 и l_2 относительно точки их пересечения так, чтобы прямая l_2 стала параллельна прямой l_3 .

Предположим теперь, что $l_2 \parallel l_3$. Если прямая l_1 не параллельна этим прямым, то прямые l_1 и l_2 можно повернуть относительно точки их пересечения так, что прямые l_2 и l_3 станут не параллельны. А если $l_1 \parallel l_2$, то прямые l_1 и l_2 можно перенести параллельно так, что прямые l_2 и l_3 совпадут.

Глава 18

Поворот

Основные сведения

1. Мы не будем давать строгого определения поворота. Для решения задач достаточно иметь следующее представление о повороте: *поворот с центром O* (или *относительно точки O*) на угол φ — это преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' что:

а) $OX' = OX$;

б) угол поворота от вектора \overrightarrow{OX} к вектору $\overrightarrow{OX'}$ равен φ .

2. В главе используются следующие обозначения для преобразований и их композиций:

T_a — перенос на вектор a ;

S_O — симметрия относительно точки O ;

S_l — симметрия относительно прямой l ;

R_O^φ — поворот с центром O на угол φ ;

$F \circ G$ — композиция преобразований F и G , причем $(F \circ G)(X) = F(G(X))$.

3. Задачи, решаемые с помощью поворотов, можно разделить на два больших класса: задачи, не использующие свойств композиции поворотов, и задачи, использующие эти свойства. Для решения задач, использующих свойства композиции поворотов, нужно усвоить результат задачи 18.35: $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_C^\gamma$, где $\gamma = \alpha + \beta$ и $\angle BAC = \alpha/2$, $\angle ABC = \beta/2$.

Вводные задачи

1. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

2. Докажите, что выпуклый n -угольник является правильным тогда и только тогда, когда он переходит в себя при повороте на угол $360^\circ/n$ относительно некоторой точки.

3. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C .

4. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника образуют правильный многоугольник.

5. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

§1. Поворот на 90°

18.1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

18.2. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH . Прямые, проведенные через произвольную точку P плоскости перпендикулярно CA , CM и CB , пересекают прямую CH в точках A_1 , M_1 и B_1 . Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.

18.3. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B . Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

18.4. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 — на A_3P , из A_3 — на A_4P , из A_4 — на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

18.5. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK .

18.6. На плоскости даны три (одинаково ориентированных) квадрата: $ABCD$, $AB_1C_1D_1$ и $A_2B_2CD_2$; первый квадрат имеет с двумя другими общие вершины A и C . Докажите, что медиана BM треугольника BB_1B_2 перпендикулярна отрезку D_1D_2 .

18.7*. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

18.8*. Вокруг квадрата описан параллелограмм. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют квадрат.

§2. Поворот на 60°

18.9. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

18.10. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE ; M и P — середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

18.11. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

18.12. Рассмотрим всевозможные равносторонние треугольники PKM , вершина P которых фиксирована, а вершина K лежит в данном квадрате. Найдите геометрическое место вершин M .

18.13. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BSP и CDQ . Докажите, что треугольник APQ правильный.

18.14. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности правильного треугольника ABC . Докажите, что $MC = MA + MB$.

18.15. Найдите геометрическое место точек M , лежащих внутри правильного треугольника ABC , для которых $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

18.16. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK правильный.

18.17. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$, P — точка пересечения отрезков AM и BN .

а) Найдите величину угла между прямыми AM и BN .

б) Докажите, что $S_{ABP} = S_{MDNP}$.

18.18. На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$, E — середина отрезка AN , D — центр треугольника BMN . Найдите величины углов треугольника CDE .

18.19. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 . Докажите, что треугольник APQ правильный.

18.20. На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC' и $AB'C$. Точка M делит сторону BC в отношении $BM : MC = 3 : 1$; K и L — середины сторон AC' и $B'C$. Докажите, что углы треугольника KLM равны 30° , 60° и 90° .

18.21. Правильные треугольники ABC , CDE , EHK (вершины обходятся в направлении против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\vec{AD} = \vec{DK}$. Докажите, что треугольник BHD тоже правильный.

18.22*. а) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

б) Внутри треугольника ABC , все углы которого меньше 120° , взята точка O , из которой его стороны видны под углом 120° . Докажите, что сумма расстояний от точки O до вершин равна $(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}S$.

18.23*. Даны точка X и правильный треугольник ABC . Докажите, что из отрезков XA , XB и XC можно составить треугольник, причем этот треугольник вырожденный тогда и только тогда, когда точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC (Помпею).

18.24*. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R , причем $AB = CD = EF = R$. Докажите, что середины сторон BC , DE и FA образуют правильный треугольник.

18.25*. На сторонах выпуклого центрально симметричного шестиугольника $ABCDEF$ внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников, образуют правильный шестиугольник.

§3. Повороты на произвольные углы

18.26. Даны точки A и B и окружность S . Постройте на окружности S такие точки C и D , что $AC \parallel BD$ и дуга CD имеет данную величину α .

18.27. Поворот с центром O переводит прямую l_1 в прямую l_2 , а точку A_1 , лежащую на прямой l_1 , — в точку A_2 . Докажите, что точка пересечения прямых l_1 и l_2 лежит на описанной окружности треугольника A_1OA_2 .

18.28. На плоскости лежат две одинаковые буквы Г. Концы коротких палочек этих букв обозначим A и A' . Длинные палочки разбиты на n равных частей точками $A_1, \dots, A_{n-1}; A'_1, \dots, A'_{n-1}$ (точки деления нумеруются от концов длинных палочек). Прямые AA_i и $A'A'_i$ пересекаются в точке X_i . Докажите, что точки X_1, \dots, X_{n-1} образуют выпуклый многоугольник.

18.29. По двум прямым, пересекающимся в точке P , равномерно с одинаковой скоростью движутся две точки: по одной прямой — точка A , по другой — точка B . Через точку P они проходят не одновременно. Докажите, что в любой момент времени описанная окружность треугольника ABP проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от P .

18.30. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC поворотом на угол α ($\alpha < 180^\circ$) вокруг центра его описанной окружности. Докажите, что точки пересечения сторон AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 (или их продолжений) являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC .

18.31*. Дан треугольник ABC . Постройте прямую, делящую пополам его площадь и периметр.

18.32*. На векторах $\overrightarrow{A_iB_i}$, где $i = 1, \dots, k$, построены правильные одинаково ориентированные n -угольники $A_iB_iC_iD_i \dots$ ($n \geq 4$). Докажите, что k -угольники $C_1 \dots C_k$ и $D_1 \dots D_k$ правильные одинаково ориентированные тогда и только тогда, когда k -угольники $A_1 \dots A_k$ и $B_1 \dots B_k$ правильные одинаково ориентированные.

18.33*. Докажите, что три прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

18.34*. По арене цирка, являющейся кругом радиуса 10 м, бегают лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов его поворотов не меньше 2998 радиан.

§4. Композиции поворотов

18.35. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360° , является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360° .

* * *

18.36. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и перпендикулярны.

18.37. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

18.38. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами P , Q и R . На сторонах треугольника PQR внутренним образом построены квадраты. Докажите, что их центры являются серединами сторон треугольника ABC .

18.39. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABO_1 , BCO_2 , CDO_3 и DAO_4 . Докажите, что если $O_1 = O_3$, то $O_2 = O_4$.

* * *

18.40*. а) На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для треугольников, построенных внутренним образом.

в) Докажите, что разность площадей правильных треугольников, полученных в задачах а) и б), равна площади исходного треугольника.

18.41*. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$ и $B'AC$ внешним образом, $C'AB$ — внутренним, M — центр треугольника $C'AB$. Докажите, что $A'B'M$ — равнобедренный треугольник, причем $\angle A'MB' = 120^\circ$.

18.42*. Пусть углы α , β , γ таковы, что $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Докажите, что если композиция поворотов $R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$ является тождественным преобразованием, то углы треугольника ABC равны α , β , γ .

18.43*. Постройте n -угольник, если известны n точек, являющихся вершинами равнобедренных треугольников, построенных на сторонах этого n -угольника и имеющих при вершинах углы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

18.44*. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равнобедренные треугольники $A'BC$, $AB'C$ и ABC' с вершинами A' , B' и C' и углами α , β и γ при этих вершинах, причем $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Докажите, что углы треугольника $A'B'C'$ равны $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$.

18.45*. Пусть AKL и AMN — подобные равнобедренные треугольники с вершиной A и углом α при вершине; GNK и $G'LM$ — подобные равнобедренные треугольники с углом $\pi - \alpha$ при вершине. Докажите, что $G = G'$. (Треугольники ориентированные.)

18.46*. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки P , Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR , BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC .

Задачи для самостоятельного решения

18.47. На плоскости проведена окружность радиуса 1 с центром O . Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

18.48. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ABM , CDP во внешнюю сторону, а BCN , ADK — во внутреннюю. Докажите, что $MN = AC$.

18.49. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами M , N , P , Q . Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$ образуют квадрат.

18.50. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O . Известно, что $\angle AOB = 113^\circ$, $\angle BOC = 123^\circ$. Найдите углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA , OB , OC .

18.51. На плоскости проведено n прямых ($n > 2$), причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что можно повернуть плоскость вокруг некоторой точки O на некоторый угол α ($\alpha < 180^\circ$) так, что каждая из проведенных прямых совместится с какой-нибудь другой проведенной прямой. Укажите все n , для которых это возможно.

18.52. По кругу расположены 10 шестеренок различных размеров. Первая шестеренка сцеплена со второй, вторая с третьей и т. д. Десятая сцеплена с первой. Всегда ли такая система может вращаться? Может ли вращаться такая же система, состоящая из 11 шестеренок?

18.53. а) Постройте равносторонний треугольник, высоты которого пересекаются в данной точке, а две вершины лежат на данной окружности.

б) Постройте квадрат, две вершины которого лежат на данной окружности, а диагонали пересекаются в данной точке.

Решения

18.1. Повернем квадрат $ABCD$ относительно точки A на 90° так, чтобы точка B перешла в точку D . При этом повороте точка M переходит в точку M' , а точка K — в точку K' . Ясно, что $\angle BMA = \angle DM'A$. Так как $\angle MAK = \angle MAB = \angle M'AD$, то $\angle MAD = \angle M'AK$. Поэтому $\angle M'AK = \angle MAD = \angle BMA = \angle DM'A$, а значит, $AK = KM' = KD + DM' = KD + BM$.

18.2. При повороте на 90° относительно точки P прямые PA_1 , PB_1 , PM_1 и CH переходят в прямые, параллельные CA , CB , CM и AB соответственно. Следовательно, при таком повороте треугольника PA_1B_1 отрезок PM_1 переходит в медиану (повернутого) треугольника.

18.3. Рассмотрим поворот на 90° относительно точки B , переводящий вершину K в вершину N , а вершину C — в A . При этом повороте точка A переходит в некоторую точку A' точка E — в E' . Так как E' и B — середины сторон $A'N$ и $A'C$ треугольника $A'NC$, то $BE' \parallel NC$. Но $\angle EBE' = 90^\circ$, поэтому $BE \perp NC$.

18.4. При повороте относительно центра квадрата на 90° , переводящем точку A_1 в точку A_2 , перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , переходят в прямые A_2P , A_3P , A_4P и A_1P соответственно. Поэтому точкой их пересечения является образ точки P при обратном повороте.

18.5. Повернем данный квадрат вокруг точки A на 90° так, чтобы вершина B перешла в D . Пусть M' — образ точки M при этом повороте. Так как по условию $MK + MC + CK = (BM + MC) + (KD + CK)$, то $MK = BM + KD = DM' + KD = KM'$. Кроме того, $AM = AM'$, поэтому $\triangle AMK = \triangle AM'K$, а значит, $\angle MAK = \angle M'AK = \angle MAM' / 2 = 45^\circ$.

18.6. Пусть R — поворот на 90° , переводящий вектор \overrightarrow{BC} в \overrightarrow{BA} . Пусть, далее, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB_2} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{AB_1} = \mathbf{c}$. Тогда $\overrightarrow{BA} = R\mathbf{a}$, $\overrightarrow{D_2C} = R\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{AD_1} = R\mathbf{c}$. Поэтому $\overrightarrow{D_2D_1} = R\mathbf{b} - \mathbf{a} + R\mathbf{a} + R\mathbf{c}$ и $2\overrightarrow{BM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + R\mathbf{a} + \mathbf{c}$. Следовательно, $R(2\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{D_2D_1}$, так как $R(R\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$.

18.7. Введем следующие обозначения: $\mathbf{a} = \overrightarrow{BM}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$; $R\mathbf{a}$ и $R\mathbf{b}$ — векторы, полученные из векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} поворотом на 90° : $R\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$, $R\mathbf{b} = \overrightarrow{BQ}$; O_1 , O_2 , O_3 и O_4 — середины отрезков AM , MQ , QC и CA соответственно. Тогда $\overrightarrow{BO_1} = (\mathbf{a} + R\mathbf{a})/2$, $\overrightarrow{BO_2} = (\mathbf{a} + R\mathbf{b})/2$, $\overrightarrow{BO_3} = (\mathbf{b} + R\mathbf{b})/2$, $\overrightarrow{BO_4} = (\mathbf{b} + R\mathbf{a})/2$. Поэтому $\overrightarrow{O_1O_2} = (R\mathbf{b} - R\mathbf{a})/2 = -\overrightarrow{O_3O_4}$ и $\overrightarrow{O_2O_3} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2 = -\overrightarrow{O_4O_1}$. Кроме того, $\overrightarrow{O_1O_2} = R(\overrightarrow{O_2O_3})$.

18.8. Вокруг квадрата $ABCD$ описан параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (точка A лежит на стороне A_1B_1 , B — на B_1C_1 и т. д.). Опустим из вершин A_1 , B_1 , C_1 и D_1 перпендикуляры l_1 , l_2 , l_3 и l_4 на стороны квадрата. Чтобы доказать, что эти прямые образуют квадрат, достаточно проверить, что при повороте на 90° относительно центра O квадрата $ABCD$ прямые l_1 , l_2 , l_3 и l_4 переходят друг в друга. При повороте относительно точки O на 90° точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 переходят в точки A_2 , B_2 , C_2 и D_2 (рис. 18.1).

Так как $AA_2 \perp B_1B$ и $BA_2 \perp B_1A$, то $B_1A_2 \perp AB$. Это означает, что прямая l_1 переходит при повороте на 90° относительно точки O в прямую l_2 . Для остальных прямых доказательство аналогично.

18.9. При повороте вокруг точки C на 60° точка A переходит в B_1 , а точка A_1 — в B . Поэтому отрезок AA_1 переходит в отрезок B_1B .

18.10. Рассмотрим поворот на 60° относительно точки C , переводящий точку E в D . При этом точка B переходит в A , т. е. отрезок BE переходит в отрезок

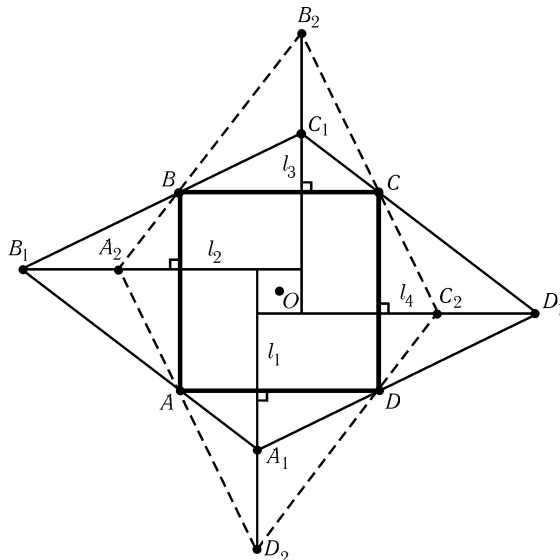


Рис. 18.1

AD . Поэтому середина P отрезка BE переходит в середину M отрезка AD , т. е. треугольник CPM равносторонний.

18.11. Предположим, что мы построили треугольник ABC так, что его вершины A , B и C лежат на прямых l_1 , l_2 и l_3 соответственно. При повороте на 60° с центром A точка B переходит в точку C , поэтому C — точка пересечения прямой l_3 и образа прямой l_2 при повороте на 60° с центром A .

18.12. Искомое ГМТ состоит из двух квадратов, полученных из данного квадрата поворотами на $\pm 60^\circ$ с центром P .

18.13. При повороте на 60° векторы \vec{QC} и \vec{CP} переходят в \vec{QD} и $\vec{CB} = \vec{DA}$. Следовательно, при этом повороте вектор $\vec{QP} = \vec{QC} + \vec{CP}$ переходит в вектор $\vec{QD} + \vec{DA} = \vec{QA}$.

18.14. Пусть M' — образ точки M при повороте на 60° относительно точки B , переводящем A в C . Тогда $\angle CM'B = \angle AMB = 120^\circ$. Треугольник $MM'B$ равносторонний, поэтому $\angle BM'M = 60^\circ$. Так как $\angle CM'B + \angle BM'M = 180^\circ$, точка M' лежит на отрезке MC . Поэтому $MC = MM' + M'C = MB + MA$.

18.15. При повороте на 60° с центром A , переводящем B в C , точка M переходит в некоторую точку M' , а точка C — в точку D . Равенство $MA^2 = MB^2 + MC^2$ эквивалентно равенству $M'M^2 = M'C^2 + MC^2$, т. е. тому, что $\angle MCM' = 90^\circ$, а значит, $\angle MCB + \angle MBC = \angle MCB + \angle M'CD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, т. е. $\angle BMC = 150^\circ$. Искомое ГМТ — дуга окружности, лежащая внутри треугольника, из которой отрезок BC виден под углом 150° .

18.16. Пусть O — центр шестиугольника. Рассмотрим поворот с центром A на 60° , переводящий точку B в O . При этом повороте отрезок OC переходит в отрезок FE . Точка K является серединой диагонали BD параллелограмма $BCDO$, поэтому она является серединой диагонали CO . Следовательно, точка K при нашем повороте переходит в точку M , т. е. треугольник AMK правильный.

18.17. При повороте на 60° относительно центра данного шестиугольника,

переводящем вершину A в B , отрезок CD переходит в DE , поэтому точка M переходит в N . Таким образом, при этом повороте отрезок AM переходит в BN , т. е. угол между этими отрезками равен 60° . Кроме того, при этом повороте пятиугольник $AMDEF$ переходит в $BNEFA$, т. е. их площади равны. Вырезая из этих равновеликих пятиугольников их общую часть, пятиугольник $APNEF$, получаем две равновеликие фигуры: треугольник ABP и четырехугольник $MDNP$.

18.18. Рассмотрим поворот на 60° с центром C , переводящий точку B в A . При этом точки M , N и D переходят в M' , N' и D' . Так как $AMNN'$ — параллелограмм, середина E диагонали AN является его центром симметрии. Поэтому при симметрии относительно точки E треугольник BMN переходит в $M'AN'$, а значит, точка D переходит в D' , т. е. E — середина отрезка DD' . А так как треугольник CDD' правильный, то углы треугольника CDE равны 30° , 60° и 90° .

18.19. Рассмотрим поворот с центром A , переводящий точку C_1 в точку B . При этом повороте правильный треугольник A_1BC переходит в треугольник A_2FB_1 , а отрезок A_1C_1 переходит в отрезок A_2B . Остается заметить, что $BA_1A_2B_1$ — параллелограмм, т. е. середина отрезка A_2B совпадает с серединой отрезка A_1B_1 .

18.20. Пусть $\vec{AB} = 4\mathbf{a}$, $\vec{CA} = 4\mathbf{b}$. Пусть, далее, R — поворот, переводящий вектор \vec{AB} в \vec{AC}' (а значит, вектор \vec{CA} — в \vec{CB}'). Тогда $\vec{LM} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - 2R\mathbf{b}$ и $\vec{LK} = -2R\mathbf{b} + 4\mathbf{b} + 2R\mathbf{a}$. Легко проверить, что $\mathbf{b} + R^2\mathbf{b} = R\mathbf{b}$. Поэтому $2R(\vec{LM}) = \vec{LK}$, а из этого соотношения вытекает требуемое.

18.21. При повороте относительно точки C на 60° против часовой стрелки точка A переходит в точку B , точка D — в точку E , а значит, вектор $\vec{DK} = \vec{AD}$ переходит в вектор \vec{BE} . Так как при повороте относительно точки H на 60° против часовой стрелки точка K переходит в точку E и вектор \vec{DK} переходит в вектор \vec{BE} , то точка D при этом повороте переходит в точку B , т. е. треугольник BHD равносторонний.

18.22. а) Пусть O — точка внутри треугольника ABC . При повороте на 60° относительно точки A точки B , C и O переходят в некоторые точки B' , C' и O' (рис. 18.2). Так как $AO = OO'$ и $OC = O'C'$, то $BO + AO + CO = BO + OO' + O'C'$. Длина ломаной $BOO'C'$ минимальна тогда, когда эта ломаная является отрезком, т. е. $\angle AOB = \angle AO'C' = \angle AOC = 120^\circ$. Для построения искомой точки можно воспользоваться результатом задачи 2.8.

б) Сумма расстояний от точки O до вершин равна длине отрезка BC' , полученного при решении задачи а). Ясно также, что $(BC')^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + bc\sqrt{3} \sin \alpha = (a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}S$.

18.23. Пусть O — центр правильного треугольника ABC , $\mathbf{x} = \vec{XO}$ и $\mathbf{a} = \vec{OA}$. Тогда $\vec{OB} = R^\alpha \mathbf{a}$ и $\vec{OC} = R^{2\alpha} \mathbf{a}$, где $\alpha = 120^\circ$. Поэтому

$$\begin{aligned} \vec{XA} + R^\alpha(\vec{XB}) + R^{2\alpha}(\vec{XC}) &= (\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (R^\alpha \mathbf{x} + R^{2\alpha} \mathbf{a}) + (R^{2\alpha} \mathbf{x} + R^\alpha \mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{x} + R^\alpha \mathbf{x} + R^{2\alpha} \mathbf{x}) + (\mathbf{a} + R^\alpha \mathbf{a} + R^{2\alpha} \mathbf{a}) = 0. \end{aligned}$$

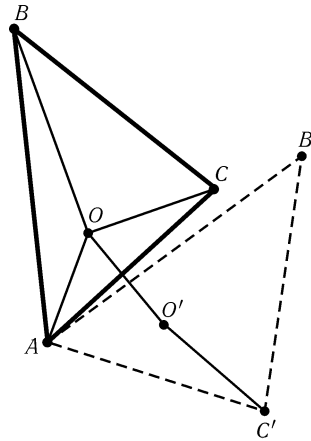


Рис. 18.2

Это означает, что векторы \overrightarrow{XA} , $R^\alpha(\overrightarrow{XB})$ и $R^{2\alpha}(\overrightarrow{XC})$ являются векторами сторон некоторого треугольника. Вырожденность треугольника эквивалентна сонаправленности двух из этих векторов. Если, например, векторы \overrightarrow{XA} и $R^\alpha(\overrightarrow{XB})$, то $\angle(AX, XB) = \angle(AC, CB)$, поэтому точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC . Вырожденность треугольника в том случае, когда точка X лежит на описанной окружности, доказана в задаче 18.14.

18.24. Пусть P , Q и R — середины сторон BC , DE и FA , O — центр описанной окружности. Предположим, что треугольник PQR правильный. Докажем, что тогда середины сторон BC , DE' и $F'A$ шестиугольника $ABCDE'F'$, в котором вершины E' и F' получены из точек E и F поворотом на некоторый угол относительно точки O , тоже образуют правильный треугольник. Этим будет все доказано, так как для правильного шестиугольника середины сторон BC , DE и FA образуют правильный треугольник, а любой из рассматриваемых нами шестиугольников может быть получен из правильного поворотами треугольников OCD и OEF .

Пусть Q' и R' — середины сторон DE' и AF' (рис. 18.3). При повороте на 60° вектор $\overrightarrow{EE'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{FF'}$. Так как $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{EE'}/2$ и $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{FF'}/2$, то вектор $\overrightarrow{QQ'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{RR'}$ при этом повороте. По предположению треугольник PQR правильный, т. е. вектор \overrightarrow{PQ} переходит в вектор \overrightarrow{PR} при повороте на 60° . Поэтому вектор $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RR'}$ при повороте на 60° , т. е. треугольник $PQ'R'$ правильный.

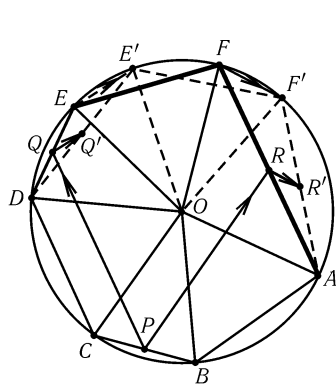


Рис. 18.3

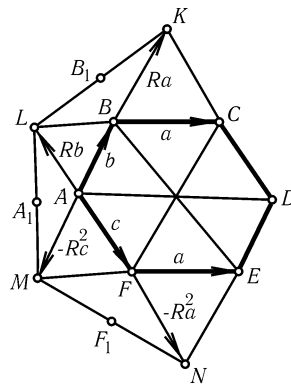


Рис. 18.4

18.25. Пусть K , L , M и N — вершины правильных треугольников, построенных на сторонах BC , AB , AF и FE ; B_1 , A_1 и F_1 — середины отрезков KL , LM и MN (рис. 18.4). Пусть, далее, $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FK}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AF}$; R — поворот на 60° , переводящий вектор \overrightarrow{BC} в \overrightarrow{BK} . Тогда $\overrightarrow{AM} = -R^2\mathbf{c}$ и $\overrightarrow{FN} = -R^2\mathbf{a}$. Поэтому $2\overrightarrow{A_1B_1} = R^2\mathbf{c} + R\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $2\overrightarrow{F_1A_1} = R^2\mathbf{a} - \mathbf{c} + R\mathbf{b}$, т. е. $\overrightarrow{F_1A_1} = R(\overrightarrow{A_1B_1})$.

18.26. Пусть при повороте на угол α с центром в центре окружности S , переводящем точку C в точку D , точка A переходит в некоторую точку A' . Тогда $\angle(BD, DA') = \alpha$, т. е. точка D лежит на окружности, из точек которой отрезок $A'B$ виден под ориентированным углом α .

18.27. Пусть P — точка пересечения прямых l_1 и l_2 . Тогда $\angle(OA_1, A_1P) = \angle(OA_1, l_1) = \angle(OA_2, l_2) = \angle(OA_2, A_2P)$. Поэтому точки O , A_1 , A_2 и P лежат

на одной окружности.

18.28. Одинаковые буквы Γ можно совместить поворотом с некоторым центром O (если они совмещаются параллельным переносом, то $AA_i \parallel A'A'_i$). Согласно задаче 18.27 точка X_i лежит на описанной окружности треугольника $A'OA$. Ясно, что точки, лежащие на одной окружности, образуют выпуклый многоугольник.

18.29. Пусть O — центр поворота R , переводящего отрезок $A(t_1)A(t_2)$ в отрезок $B(t_1)B(t_2)$, где t_1 и t_2 — некоторые моменты времени. Тогда этот поворот переводит $A(t)$ в $B(t)$ в любой момент времени t . Поэтому, согласно задаче 18.27, точка O лежит на описанной окружности треугольника APB .

18.30. Пусть A и B — точки окружности с центром O , A_1 и B_1 — образы этих точек при повороте на угол α относительно центра O ; P и P_1 — середины отрезков AB и A_1B_1 ; M — точка пересечения прямых AB и A_1B_1 . Прямоугольные треугольники POM и P_1OM имеют общую гипотенузу и равные катеты $PO = P_1O$, поэтому эти треугольники равны и $\angle MOP = \angle MOP_1 = \alpha/2$. Точка M получается из точки P поворотом на угол $\alpha/2$ и последующей гомотетией с коэффициентом $1/\cos(\alpha/2)$ и центром O .

Точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , AC и A_1C_1 , BC и B_1C_1 являются вершинами треугольника, гомотетичного с коэффициентом $1/\cos(\alpha/2)$ треугольнику, образованному серединами сторон треугольника ABC . Ясно, что треугольник, образованный серединами сторон треугольника ABC , подобен треугольнику ABC .

18.31. Согласно задаче 5.52 прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр его вписанной окружности. Ясно также, что если прямая проходит через центр вписанной окружности треугольника и делит его периметр пополам, то она делит пополам и его площадь. Поэтому нужно провести прямую, проходящую через центр вписанной окружности треугольника и делящую его периметр пополам.

Предположим, что мы построили точки M и N на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что прямая MN проходит через центр O вписанной окружности и делит периметр треугольника пополам. Построим на луче AC точку D так, что $AD = p$, где p — полупериметр треугольника ABC . Тогда $AM = ND$. Пусть Q — центр поворота R , переводящего отрезок AM в отрезок DN (точку A — в D , точку M — в N). Так как угол между прямыми AM и CN известен, точку Q можно построить: она является вершиной равнобедренного треугольника AQD , причем $\angle AQD = 180^\circ - \angle A$ и точки B и Q лежат по одну сторону от прямой AD . При повороте R отрезок OM переходит в отрезок $O'N$. Точку O' мы можем построить. Ясно, что $\angle ONO' = \angle A$, поскольку угол между прямыми OM и $O'N$ равен $\angle A$. Поэтому точка N является точкой пересечения прямой AC и дуги окружности, из которой отрезок OO' виден под углом $\angle A$. Построив точку N , проводим прямую ON и находим точку M .

Легко проверить, что если построенные точки M и N лежат на сторонах AB и AC , то MN — искомая прямая. Основной момент в доказательстве — доказательство того, что при повороте относительно точки Q на $180^\circ - \angle A$ точка M переходит в точку N . Для доказательства этого факта надо воспользоваться тем, что $\angle ONO' = \angle A$, т. е. при этом повороте прямая OM переходит в прямую $O'N$.

18.32. Предположим, что k -угольники $C_1 \dots C_k$ и $D_1 \dots D_k$ правильные одинаково ориентированные. Пусть C и D — центры этих k -угольников, $\mathbf{c}_i = \overrightarrow{CC_i}$ и $\mathbf{d}_i = \overrightarrow{DD_i}$. Тогда $\overrightarrow{C_iD_i} = \overrightarrow{C_iC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_i} = -\mathbf{c}_i + \overrightarrow{CD} + \mathbf{d}_i$. Вектор $\overrightarrow{C_iD_i}$ пе-

Если $a \parallel b$, то $S_a \circ S_b = T_{2a}$, где T_a — параллельный перенос, переводящий a в b , причем $a \perp b$. А если прямые a и b не параллельны и O — точка их пересечения, то $S_a \circ S_b$ — поворот на угол $\alpha + \beta$ с центром O . Ясно также, что $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда $(\alpha/2) + (\beta/2) = k\pi$, т. е. $\alpha + \beta = 2k\pi$.

18.36. Пусть P, Q, R и S — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно. Построим на отрезках QR и SP внутренним образом равнобедренные прямоугольные треугольники с вершинами O_1 и O_2 . Тогда $D = R_R^{90^\circ} \circ R_Q^{90^\circ}(B) = R_{O_1}^{180^\circ}(B)$ и $B = R_P^{90^\circ} \circ R_S^{90^\circ}(D) = R_{O_2}^{180^\circ}(D)$, т. е. $O_1 = O_2$ — середина отрезка BD .

При повороте на 90° относительно точки $O = O_1 = O_2$, переводящем точку Q в R , точка S переходит в P , т. е. отрезок QS переходит в RP , а значит, эти отрезки равны и перпендикулярны.

18.37. Пусть P, Q, R и S — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Согласно предыдущей задаче $PR = QS$ и $PR \perp QS$. Кроме того, центр симметрии параллелограмма $ABCD$ является центром симметрии четырехугольника $PQRS$, т. е. $PQRS$ — параллелограмм с равными и перпендикулярными диагоналями, а значит, он квадрат.

18.38. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC и CA . Рассмотрим поворот на 90° с центром R , переводящий C в A . При повороте на 90° в том же направлении с центром P точка A переходит в B . Композиция этих двух поворотов является поворотом на 180° , поэтому центр этого поворота — середина отрезка BC . С другой стороны, центр этого поворота является вершиной равнобедренного прямоугольного треугольника с основанием PR , т. е. является центром квадрата, построенного на PR . Этот квадрат построен на стороне треугольника PQR именно внутренним образом.

18.39. Если $O_1 = O_3$, то $R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ} \circ R_A^{90^\circ} = R_{O_3}^{180^\circ} \circ R_{O_1}^{180^\circ} = E$. Поэтому $E = R_A^{90^\circ} \circ E \circ R_A^{-90^\circ} = R_A^{90^\circ} \circ R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ} = R_{O_4}^{180^\circ} \circ R_{O_2}^{180^\circ}$, т. е. $O_4 = O_2$. (E — тождественное преобразование.)

18.40. а) См. решение более общей задачи 18.44 (достаточно положить $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$). В случае б) доказательство аналогично.

в) Пусть Q и R_1 (соответственно Q_1 и R_1) — центры правильных треугольников, построенных внешним (соответственно внутренним) образом на сторонах AC и AB . Так как $AQ = b/\sqrt{3}$, $AR = c/\sqrt{3}$ и $\angle QAR = 60^\circ + \alpha$, то $3QR^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)$. Аналогично $3Q_1R_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha - 60^\circ)$. Поэтому разность площадей полученных правильных треугольников равна $(QR^2 - Q_1R_1^2)\sqrt{3}/4 = bc \sin \alpha \sin 60^\circ / \sqrt{3} = S_{ABC}$.

18.41. Композиция поворота на 60° относительно точки A' , переводящего B в C , поворота на 60° относительно точки B' , переводящего C в A , и поворота на 120° относительно точки M , переводящего A в B , имеет неподвижную точку B . Так как первые два поворота производятся в направлении, противоположном направлению последнего поворота, то композиция этих поворотов является параллельным переносом, имеющим неподвижную точку, т. е. является тождественным преобразованием: $R_M^{-120^\circ} \circ R_{B'}^{60^\circ} \circ R_{A'}^{60^\circ} = E$. Поэтому $R_{B'}^{60^\circ} \circ R_{A'}^{60^\circ} = R_M^{120^\circ}$, т. е. точка M является центром поворота $R_{B'}^{60^\circ} \circ R_{A'}^{60^\circ}$. Следовательно, $\angle MA'B' = \angle MB'A' = 30^\circ$, т. е. $A'B'M$ — равнобедренный треугольник, причем $\angle A'MB' = 120^\circ$.

18.42. Из условия задачи следует, что $R_C^{-2\gamma} = R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$, т. е. точка C является центром композиции поворотов $R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$. Это означает, что $\angle BAC = \alpha$

и $\angle ABC = \beta$ (см. задачу 18.35). Поэтому $\angle ACB = \pi - \alpha - \beta = \gamma$.

18.43. Обозначим данные точки через M_1, \dots, M_n . Предположим, что мы построили многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$ так, что треугольники $A_1 M_1 A_2, A_2 M_2 A_3, \dots, A_n M_n A_1$ равнобедренные, причем $\angle A_i M_i A_{i+1} = \alpha_i$ и стороны многоугольника являются основаниями этих равнобедренных треугольников. Ясно, что $R_{M_n}^{\alpha_n} \circ \dots \circ R_{M_1}^{\alpha_1}(A_1) = A_1$. Если $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq k \cdot 360^\circ$, то точка A_1 является центром поворота $R_{M_n}^{\alpha_n} \circ \dots \circ R_{M_1}^{\alpha_1}$. Центр композиции поворотов мы можем построить. Построение остальных вершин многоугольника производится очевидным образом. Если $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \cdot 360^\circ$, то задача неопределенная: либо любая точка A_1 задает многоугольник, обладающий требуемым свойством, либо задача не имеет решений.

18.44. Так как $R_{C'}^\gamma \circ R_{B'}^\beta \circ R_{A'}^\alpha(B) = R_{C'}^\gamma \circ R_{B'}^\beta(C) = R_{C'}^\gamma(A) = B$, то B — неподвижная точка композиции поворотов $R_{C'}^\gamma \circ R_{B'}^\beta \circ R_{A'}^\alpha$. А так как $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то эта композиция является параллельным переносом, имеющим неподвижную точку, т. е. тождественным преобразованием. Остается воспользоваться результатом задачи 18.42.

18.45. Так как $R_{G'}^{\pi-\alpha} \circ R_A^\alpha(N) = L$ и $R_G^{\pi-\alpha} \circ R_A^\alpha(L) = N$, то преобразования $R_{G'}^{\pi-\alpha} \circ R_A^\alpha$ и $R_G^{\pi-\alpha} \circ R_A^\alpha$ являются центральными симметриями относительно середины отрезка LN , т. е. $R_{G'}^{\pi-\alpha} \circ R_A^\alpha = R_G^{\pi-\alpha} \circ R_A^\alpha$. Следовательно, $R_{G'}^{\pi-\alpha} = R_G^{\pi-\alpha}$ и $G' = G$.

18.46. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR . При последовательных поворотах с центрами A_1, B_1 и C_1 на углы $2\alpha, 2\beta$ и 2γ точка R переходит сначала в P , затем в Q , а потом возвращается на место. Так как $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, то композиция указанных поворотов — тождественное преобразование. Следовательно, углы треугольника $A_1 B_1 C_1$ равны α, β и γ (см. задачу 18.42).

Глава 19

Гомотетия и поворотная гомотетия

Основные сведения

1. *Гомотетией* называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' , обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точку O называют *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k .

2. Две фигуры называют *гомотетичными*, если одна из них переходит в другую при некоторой гомотетии.

3. *Поворотной гомотетией* называют композицию гомотетии и поворота, имеющих общий центр. Порядок, в каком берется композиция, несуществен, так как $R_O^\varphi \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\varphi$.

Коэффициент поворотной гомотетии можно считать положительным, так как $R_O^{180^\circ} \circ H_O^k = H_O^{-k}$.

4. Композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2 , где $k_1 k_2 \neq 1$, является гомотетией с коэффициентом $k_1 k_2$, причем ее центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий (см. задачу 19.24).

5. Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок CD , является точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и BDP , где P — точка пересечения прямых AB и CD (см. задачу 19.42).

Вводные задачи

1. Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.
2. Две окружности касаются в точке K . Прямая, проходящая через точку K , пересекает эти окружности в точках A и B . Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B , параллельны.

3. Две окружности касаются в точке K . Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B , вторую — в точках C и D . Докажите, что $AB \parallel CD$.

4. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

5. На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l ?

§1. Гомотетичные многоугольники

19.1. Четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что их точки пересечения медиан образуют параллелограмм.

19.2. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K , а ее диагонали — в точке L . Докажите, что точки K , L , M и N , где M и N — середины оснований BC и AD , лежат на одной прямой.

19.3. В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

19.4. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M ; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1 ; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что:

- прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке Q ;
- точка M лежит на отрезке PQ , причем $PM : MQ = 1 : 2$.

19.5. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K , а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной окружности треугольника ABC .

19.6*. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что этот многоугольник описанный.

19.7*. Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника. Докажите, что $R \geq 2r$, причем равенство достигается лишь для равностороннего треугольника.

19.8*. Пусть M — центр масс n -угольника $A_1 \dots A_n$; M_1, \dots, M_n — центры масс $(n-1)$ -угольников, полученных из этого n -угольника выбрасыванием вершин A_1, \dots, A_n соответственно. Докажите, что многоугольники $A_1 \dots A_n$ и $M_1 \dots M_n$ гомотетичны.

19.9*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник Φ содержит два непересекающихся многоугольника Φ_1 и Φ_2 , подобных Φ с коэффициентом $1/2$.

См. также задачу 5.97.

§2. Гомотетичные окружности

19.10. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC .

19.11*. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D , DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $AK = DC$.

б) В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD . Из точки M , лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H , а также прямые MC и MD , пересекающие прямую AB в точках F и K . Докажите, что $EF = KH$.

19.12*. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC , D — точка касания ее со стороной AC , B_1 — середина стороны AC . Докажите, что прямая B_1O делит отрезок BD пополам.

19.13*. Окружности α , β и γ имеют одинаковые радиусы и касаются сторон углов A , B и C треугольника ABC соответственно. Окружность δ касается внешним образом всех трех окружностей α , β и γ . Докажите, что центр окружности δ лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

19.14*. Дан треугольник ABC . Построены четыре окружности равного радиуса ρ так, что одна из них касается трех других, а каждая из этих трех касается двух сторон треугольника. Найдите ρ , если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника равны r и R соответственно.

19.15*. В каждый угол треугольника ABC вписана окружность, касающаяся описанной окружности. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

§3. Построения и геометрические места точек

19.16. Даны угол ABC и точка M внутри его. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M .

19.17. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

19.18. Дан остроугольный треугольник ABC . Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что а) $AH = XY = YC$; б) $BX = XY = YC$.

19.19. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC и биссектрисе AD .

19.20. Решите задачу 16.18 с помощью гомотетии.

19.21. Постройте на стороне BC данного треугольника ABC такую точку, что прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны AB и AC , параллельна BC .

* * *

19.22*. Прямоугольный треугольник ABC изменяется таким образом, что вершина A прямого угла треугольника не изменяет своего положения, а вершины B и C скользят по фиксированным окружностям S_1 и S_2 , касающимся внешним образом в точке A . Найдите геометрическое место оснований D высот AD треугольников ABC .

См. также задачи 7.26–7.29, 8.15, 8.16, 8.70.

§4. Композиции гомотетий

19.23. Преобразование f обладает следующим свойством: если A' и B' — образы точек A и B , то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, где k — постоянное число. Докажите, что:

- а) если $k = 1$, то преобразование f является параллельным переносом;
- б) если $k \neq 1$, то преобразование f является гомотетией.

19.24. Докажите, что композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2 , где $k_1 k_2 \neq 1$, является гомотетией с коэффициентом $k_1 k_2$, причем ее центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий. Исследуйте случай $k_1 k_2 = 1$.

19.25. Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2 , S_2 и S_3 , S_3 и S_1 пересекаются в точках A , B и C соответственно. Докажите, что точки A , B и C лежат на одной прямой.

19.26. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD , причем длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых:

- а) AB и CD , AP и DQ , BP и CQ ;
- б) AB и CD , AQ и DP , BQ и CP .

§5. Поворотная гомотетия

19.27. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Прямые p и q , проходящие через точку A , пересекают окружность S_1 в точках P_1 и Q_1 ,

а окружность S_2 — в точках P_2 и Q_2 . Докажите, что угол между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2 равен углу между окружностями S_1 и S_2 .

19.28. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . При поворотной гомотетии P с центром A , переводящей S_1 в S_2 , точка M_1 окружности S_1 переходит в M_2 . Докажите, что прямая M_1M_2 проходит через точку B .

19.29. Окружности S_1, \dots, S_n проходят через точку O . Кузнечик из точки X_i окружности S_i прыгает в точку X_{i+1} окружности S_{i+1} так, что прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей S_i и S_{i+1} , отличную от точки O . Докажите, что после n прыжков (с окружности S_1 на S_2 , с S_2 на S_3, \dots , с S_n на S_1) кузнечик вернется в исходную точку.

19.30. Две окружности пересекаются в точках A и B , а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$ и отрезки BN и MC разделены точками P и Q в равных отношениях. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

19.31. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2 . Докажите, что существуют ровно две поворотные гомотетии с углом поворота 90° , переводящие S_1 в S_2 .

* * *

19.32. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC , причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC . Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.

19.33. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные треугольники: $\triangle A_1BC \sim \triangle B_1CA \sim \triangle C_1AB$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

19.34. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1 , а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1 .

19.35. Треугольник ABC при поворотной гомотетии переходит в треугольник $A_1B_1C_1$; O — произвольная точка. Пусть A_2 — вершина параллелограмма OAA_1A_2 ; точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$.

19.36*. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

19.37*. Поворотные гомотетии P_1 и P_2 с центрами A_1 и A_2 имеют один и тот же угол поворота, а произведение их коэффициентов равно 1. Докажите, что композиция $P_2 \circ P_1$ является поворотом, причем его центр совпадает с центром другого поворота, переводящего A_1 в A_2 и имеющего угол поворота $2\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MN})$, где M — произвольная точка и $N = P_1(M)$.

19.38*. Треугольники MAB и MCD подобны, но имеют противоположные ориентации. Пусть O_1 — центр поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM})$, переводящего A в C , а O_2 — центр поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, переводящего B в D . Докажите, что $O_1 = O_2$.

* * *

19.39*. Дана полуокружность с диаметром AB . Для каждой точки X этой полуокружности на луче XA откладывается точка Y так, что $XY = kXB$. Найдите ГМТ Y .

19.40*. На стороне AB треугольника ABC дана точка P . Впишите в треугольник ABC треугольник PXY , подобный данному треугольнику LMN .

19.41*. Постройте четырехугольник $ABCD$ по $\angle B + \angle D$, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ и $d = DA$.

См. также задачу 5.133.

§6. Центр поворотной гомотетии

19.42. а) Пусть P — точка пересечения прямых AB и A_1B_1 . Докажите, что если среди точек A, B, A_1, B_1 и P нет совпадающих, то общая точка описанных окружностей треугольников $PA A_1$ и $PB B_1$ является центром поворотной гомотетии, переводящей точку A в A_1 , а точку B в B_1 , причем такая поворотная гомотетия единственна.

б) Докажите, что центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок BC , является точка пересечения окружности, проходящей через точку A и касающейся прямой BC в точке B , и окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой AB в точке B .

19.43. По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями движутся точки A и B . Докажите, что существует такая точка P , что в любой момент времени $AP : BP = k$, где k — отношение скоростей.

19.44. Постройте центр O поворотной гомотетии с данным коэффициентом $k \neq 1$, переводящей прямую l_1 в прямую l_2 , а точку A_1 лежащую на l_1 , — в точку A_2 .

19.45. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 , совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1 .

19.46*. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют одну общую точку.

19.47*. Параллелограмм $ABCD$ отличен от ромба. Прямые, симметричные прямым AB и CD относительно диагоналей AC и DB соответственно,

пересекаются в точке Q . Докажите, что Q — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AO в отрезок OD , где O — центр параллелограмма.

19.48*. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

19.49*. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Пары отрезков BB_1 и CC_1 , CC_1 и AA_1 , AA_1 и BB_1 пересекаются в точках A_2 , B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC_2 , BCA_2 , CAB_2 , $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$ и $C_1A_1B_2$ пересекаются в одной точке.

§7. Окружность подобия трех фигур

Пусть F_1 , F_2 и F_3 — три подобные фигуры, O_1 — центр поворотной гомотетии, переводящей F_2 в F_3 , точки O_2 и O_3 определяются аналогично. Если точки O_1 , O_2 и O_3 не лежат на одной прямой, то треугольник $O_1O_2O_3$ называют *треугольником подобия* фигур F_1 , F_2 и F_3 , а его описанную окружность называют *окружностью подобия* этих фигур. В случае, когда точки O_1 , O_2 и O_3 совпадают, окружность подобия вырождается в *центр подобия*, а в случае, когда эти точки не совпадают, но лежат на одной прямой, окружность подобия вырождается в *ось подобия*. В задачах этого параграфа предполагается, что окружность подобия рассматриваемых фигур не вырождена.

19.50*. Прямые A_2B_2 и A_3B_3 , A_3B_3 и A_1B_1 , A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точках P_1 , P_2 , P_3 соответственно.

а) Докажите, что описанные окружности треугольников $A_1A_2P_3$, $A_1A_3P_2$ и $A_2A_3P_1$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности подобия отрезков A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 .

б) Пусть O_1 — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок A_2B_2 в отрезок A_3B_3 ; точки O_2 и O_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые P_1O_1 , P_2O_2 и P_3O_3 пересекаются в одной точке, лежащей на окружности подобия отрезков A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 .

Точки A_1 и A_2 называют *соответственными* точками подобных фигур F_1 и F_2 , если при поворотной гомотетии, переводящей F_1 в F_2 , точка A_1 переходит в A_2 . Аналогично определяются соответственные прямые и отрезки.

19.51*. Пусть A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 , а также A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 — соответственные отрезки подобных фигур F_1 , F_2 и F_3 . Докажите, что треугольник, образованный прямыми A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 , подобен треугольнику, образованному прямыми A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 , причем центр поворотной гомотетии, переводящей один из этих треугольников в другой, лежит на окружности подобия фигур F_1 , F_2 и F_3 .

19.52*. Пусть l_1 , l_2 и l_3 — соответственные прямые подобных фигур F_1 , F_2 и F_3 , пересекающиеся в точке W .

а) Докажите, что точка W лежит на окружности подобия фигур F_1 , F_2 и F_3 .

б) Пусть J_1 , J_2 и J_3 — точки пересечения прямых l_1 , l_2 и l_3 с окружностью подобия, отличные от точки W . Докажите, что эти точки зависят только от фигур F_1 , F_2 и F_3 и не зависят от выбора прямых l_1 , l_2 и l_3 .

Точки J_1 , J_2 и J_3 называют *постоянными точками* подобных фигур F_1 , F_2 и F_3 , а треугольник $J_1J_2J_3$ называют *постоянным треугольником*.

19.53*. Докажите, что постоянный треугольник трех подобных фигур подобен треугольнику, образованному их соответственными прямыми, причем эти треугольники противоположно ориентированы.

19.54*. Докажите, что постоянные точки трех подобных фигур являются их соответственными точками.

Окружностью подобия треугольника ABC называют окружность подобия отрезка AB , отрезка BC и отрезка CA (или любых трех подобных треугольников, построенных на этих отрезках). *Постоянными точками треугольника* называют постоянные точки трех рассматриваемых фигур.

19.55*. Докажите, что окружностью подобия треугольника ABC является окружность с диаметром KO , где K — точка Лемуана, O — центр описанной окружности.

19.56*. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , K — точка Лемуана, P и Q — точки Брокара, φ — угол Брокара. Докажите, что точки P и Q лежат на окружности с диаметром KO , причем $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\varphi$.

Треугольник с вершинами в постоянных точках треугольника часто называют *треугольником Брокара*, а описанную окружность этого треугольника (т. е. окружность подобия треугольника) — *окружностью Брокара*. Диаметр KO этой окружности называют *диаметром Брокара*.

19.57*. Докажите, что вершинами треугольника Брокара $A_1B_1C_1$ являются точки пересечения окружности Брокара с прямыми, проходящими через точку Лемуана параллельно сторонам треугольника ABC .

19.58*. а) Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника ABC параллельно сторонам треугольника Брокара $A_1B_1C_1$ (через A проходит прямая, параллельная B_1C_1 , и т. п.), пересекаются в одной точке S (*точка Штейнера*), причем эта точка лежит на описанной окружности треугольника ABC .

б) Докажите, что прямая Симсона точки Штейнера параллельна диаметру Брокара.

Задачи для самостоятельного решения

19.59. Впишите в данный треугольник ABC треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника KLM .

19.60. На плоскости даны точки A и E . Постройте ромб $ABCD$ с данной высотой, для которого E — середина стороны BC .

19.61. Дан четырехугольник. Впишите в него ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника.

19.62. Даны острый угол AOB и внутри его точка C . Найдите на стороне OB точку M , равноудаленную от стороны OA и от точки C .

19.63. Дан остроугольный треугольник ABC , O — точка пересечения его высот, ω — окружность с центром O , лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности ω и вписанный в треугольник ABC .

19.64. Даны три прямые a, b, c и три точки A, B, C , расположенные соответственно на прямых a, b, c . Постройте точки X, Y, Z на прямых a, b, c так, чтобы $BY : AX = 2$, $CZ : AX = 3$ и точки X, Y, Z лежали на одной прямой.

Решения

19.1. При гомотетии с центром в точке пересечения диагоналей четырехугольника и коэффициентом $3/2$ точки пересечения медиан указанных треугольников переходят в середины сторон четырехугольника. Остается воспользоваться результатом задачи 1.2.

19.2. При гомотетии с центром K , переводящей $\triangle KBC$ в $\triangle KAD$, точка M переходит в N , поэтому точка K лежит на прямой MN . При гомотетии с центром L , переводящей $\triangle LBC$ в $\triangle LDA$, точка M переходит в N . Поэтому точка L лежит на прямой MN .

19.3. Пусть продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке K , а диагонали трапеции пересекаются в точке L . Согласно предыдущей задаче прямая KL проходит через середину отрезка AD , а по условию задачи эта же прямая делит пополам угол AKD . Поэтому треугольник AKD равнобедренный (см. задачу 16.1), а значит, трапеция $ABCD$ тоже равнобедренная.

19.4. При гомотетии с центром M и коэффициентом -2 прямые PA_1, PB_1 и PC_1 переходят в прямые l_a, l_b и l_c , а значит, искомая точка Q является образом точки P при этой гомотетии.

19.5. Рассмотрим гомотетию H_B^k с центром B , переводящую отрезок AC в отрезок $A'C'$, касающийся описанной окружности треугольника ABC . Обозначим середины отрезков PK и $A'C'$ через O_1 и D , центр окружности S — через O .

Окружность S является вписанной окружностью треугольника $A'BC'$, поэтому достаточно доказать, что при гомотетии H_B^k точка O_1 переходит в O . Для этого достаточно проверить, что $BO_1 : BO = BA : BA'$. Это равенство следует из того, что PO_1 и DA — высоты подобных прямоугольных треугольников BPO и BDA' .

19.6. Пусть k — коэффициент подобия многоугольников, причем $k < 1$. Сдвигая стороны исходного многоугольника внутрь последовательно на k, k^2, k^3, \dots , получаем стягивающуюся систему вложенных выпуклых многоугольников, подобных исходному с коэффициентами k, k^2, k^3, \dots . Единственная общая точка этих многоугольников является центром вписанной окружности исходного многоугольника.

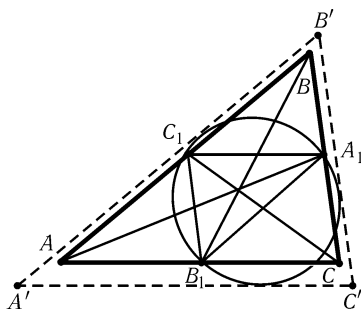


Рис. 19.1

19.7. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-1/2$ описанная окружность S треугольника ABC переходит в описанную окружность S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как окружность S_1 пересекает все стороны треугольника ABC , то можно построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC , для которого S_1 будет вписанной окружностью (рис. 19.1). Пусть r и r' — радиусы вписанных окружностей треугольников

ABC и $A'B'C'$; R и R_1 — радиусы окружностей S и S_1 . Ясно, что $r \leq r' = R_1 = R/2$. Равенство достигается, если треугольники $A'B'C'$ и ABC совпадают, т. е. S_1 — вписанная окружность треугольника ABC . В этом случае $AB_1 = AC_1$, поэтому $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$.

19.8. Так как $\overrightarrow{MM_i} = (\overrightarrow{MA_1} + \dots + \overrightarrow{MA_n} - \overrightarrow{MA_i}) / (n-1) = -\overrightarrow{MA_i} / (n-1)$, то точка A_i переходит в точку M_i при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/(n-1)$.

19.9. Пусть A и B — пара наиболее удаленных друг от друга точек многоугольника Φ . Тогда $\Phi_1 = H_A^{1/2}(\Phi)$ и $\Phi_2 = H_B^{1/2}(\Phi)$ — искомые фигуры. В самом деле, Φ_1 и Φ_2 не пересекаются, так как лежат по разные стороны от серединного перпендикуляра к отрезку AB . Кроме того, Φ_i содержится в Φ , так как Φ — выпуклый многоугольник.

19.10. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — середина отрезка AB . Ясно, что $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}$, поэтому точки M заполняют окружность, полученную из исходной окружности гомотетией с коэффициентом $1/3$ и центром O .

19.11. а) При гомотетии с центром B , переводящей вписанную окружность во вневписанную окружность, касающуюся стороны AC , точка M переходит в некоторую точку M' . Точка M' является концом диаметра, перпендикулярного прямой AC , поэтому M' является точкой касания вписанной окружности со стороной AC , а значит, и точкой пересечения прямой BM со стороной AC . Поэтому $K = M'$ и точка K является точкой касания вневписанной окружности со стороной AC . Теперь легко вычислить, что $AK = (a + b - c)/2 = CD$, где a , b и c — длины сторон треугольника ABC .

б) Рассмотрим гомотетию с центром M , переводящую прямую EH в прямую, касающуюся данной окружности. При этой гомотетии точки E , F , K и H переходят в точки E' , F' , K' и H' . Согласно задаче а) $E'F' = K'H'$, поэтому $EF = KH$.

19.12. Воспользуемся решением и обозначениями задачи 19.11, а). Так как $AK = DC$, то $B_1K = B_1D$, а значит, B_1O — средняя линия треугольника MKD .

19.13. Пусть O_α , O_β , O_γ и O_δ — центры окружностей α , β , γ и δ ; O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Треугольник $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ переходит в треугольник ABC при гомотетии с центром O_1 . При этой гомотетии точка O_2 переходит в центр описанной окружности треугольника $O_\alpha O_\beta O_\gamma$, совпадающий с точкой O_δ . Поэтому точки O_1 , O_2 и O_δ лежат на одной прямой.

19.14. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, касающихся сторон треугольника, O — центр окружности, касающейся этих окружностей, O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами треугольника ABC , поэтому они пересекаются в точке O_1 . Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC при гомотетии с центром O_1 , причем коэффициент гомотетии равен отношению расстояний от точки O_1 до сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. равен $(r - \rho)/r$. При этой гомотетии описанная окружность треугольника ABC переходит в описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $OA_1 = OB_1 = OC_1 = 2\rho$, радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ равен 2ρ . Следовательно, $R(r - \rho)/r = 2\rho$, т. е. $\rho = rR/(2r + R)$.

19.15. Пусть X — центр гомотетии (с положительным коэффициентом), переводящей вписанную окружность треугольника ABC в описанную окружность. Прямая AH пересекает вписанную окружность в точках A' и A'' , одна из которых (для определенности A'') при указанной гомотетии переходит в точку A , а другая — в некоторую точку A_2 , лежащую на описанной окружности.

Рассмотрим гомотетию с центром A , переводящую A' в A_2 . При этой гомотетии центр вписанной окружности переходит в точку, лежащую на отрезке OA_2 . Это означает, что вписанная окружность переходит в окружность, касающуюся описанной окружности в точке A_2 . Следовательно, $A_2 = A_1$. Поэтому прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку X .

19.16. Возьмем на биссектрисе угла ABC произвольную точку O и построим окружность S с центром O , касающуюся сторон угла. Прямая BM пересекает окружность S в точках M_1 и M_2 . Задача имеет два решения: при гомотетии с центром B , переводящей M_1 в M , и при гомотетии с центром B , переводящей M_2 в M , окружность S переходит в окружности, проходящие через точку M и касающиеся сторон угла.

19.17. Ясно, что обе окружности касаются одной из сторон треугольника. Покажем, как построить окружности, касающиеся стороны AB . Возьмем прямую c' параллельную прямой AB . Построим окружности S'_1 и S'_2 одного радиуса, касающиеся друг друга и прямой c' . Построим касательные a' и b' к этим окружностям, параллельные прямым BC и AC соответственно. Треугольник $A'B'C'$, образованный прямыми a', b' и c' , имеет стороны, параллельные сторонам треугольника ABC . Поэтому существует гомотетия, переводящая треугольник $A'B'C'$ в треугольник ABC . Искомые окружности являются образами окружностей S'_1 и S'_2 при этой гомотетии.

19.18. а) Отложим на сторонах AB и BC треугольника ABC отрезки AX_1 и CY_1 равной длины a . Проведем через точку Y_1 прямую l , параллельную стороне AC . Пусть Y_2 — точка пересечения прямой l и окружности радиуса a с центром X_1 , лежащая внутри треугольника. Тогда искомая точка Y является точкой пересечения прямой AY_2 со стороной BC , X — такая точка луча AB , что $AX = CY$.

б) Возьмем на стороне AB произвольную точку $X_1 \neq B$. Окружность радиуса BX_1 с центром X_1 пересекает луч BC в точках B и Y_1 . На прямой BC построим такую точку C_1 , что $Y_1C_1 = BX_1$ и точка Y_1 лежит между B и C_1 . При гомотетии с центром B , переводящей точку C_1 в C , точки X_1 и Y_1 переходят в искомые точки X и Y .

19.19. Возьмем отрезок AD и проведем окружности S_1 и S_2 с центром A и радиусами AB и AC соответственно. Вершина B является точкой пересечения окружности S_1 с образом окружности S_2 при гомотетии с центром D и коэффи-

центром $-DB/DC = -AB/AC$.

19.20. Возьмем на большей окружности S_2 произвольную точку X . Пусть S'_2 — образ окружности S_2 при гомотетии с центром X и коэффициентом $1/3$, Y — точка пересечения окружностей S'_2 и S_1 . Тогда XY — искомая прямая.

19.21. Восставим из точек B и C перпендикуляры к прямым AB и AC ; пусть P — точка их пересечения. Тогда точка пересечения прямых AP и BC — искомая.

19.22. Проведем к окружностям S_1 и S_2 общие внешние касательные l_1 и l_2 . Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке K , которая является центром гомотетии H , переводящей окружность S_1 в окружность S_2 . Пусть $A_1 = H(A)$. Точки A и K лежат на прямой, соединяющей центры окружностей, поэтому AA_1 — диаметр окружности S_2 , т. е. $\angle ACA_1 = 90^\circ$ и $A_1C \parallel AB$. Следовательно, отрезок AB при гомотетии H переходит в A_1C . Поэтому прямая BC проходит через точку K и $\angle ADK = 90^\circ$. Точка D лежит на окружности S с диаметром AK . Ясно также, что точка D лежит внутри угла, образованного прямыми l_1 и l_2 . Таким образом, геометрическим местом точек D является дуга окружности S , высекаемая прямыми l_1 и l_2 .

19.23. Из условия задачи следует, что отображение f взаимно однозначно.

а) Пусть точка A переходит при отображении f в точку A' , а B — в точку B' . Тогда $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'}$, т. е. преобразование f является параллельным переносом.

б) Рассмотрим три точки A, B и C , не лежащие на одной прямой. Пусть A', B' и C' — их образы при отображении f . Прямые AB, BC и CA не могут совпасть с прямыми $A'B', B'C'$ и $C'A'$ соответственно, так как в этом случае $A = A', B = B'$ и $C = C'$. Пусть $AB \neq A'B'$. Прямые AA' и BB' не параллельны, поскольку иначе четырехугольник $ABB'A'$ был бы параллелограммом и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Пусть O — точка пересечения прямых AA' и BB' . Треугольники AOB и $A'O'B'$ подобны с коэффициентом подобия k , поэтому $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, т. е. O — неподвижная точка преобразования f . Следовательно, $\overrightarrow{Of(X)} = f(O)f(X) = k\overrightarrow{OX}$ для любой точки X , а это означает, что преобразование f является гомотетией с коэффициентом k и центром O .

19.24. Пусть $H = H_2 \circ H_1$, где H_1 и H_2 — гомотетии с центрами O_1 и O_2 и коэффициентами k_1 и k_2 . Введем обозначения $A' = H_1(A)$, $B' = H_1(B)$, $A'' = H_2(A')$, $B'' = H_2(B')$. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = k_1\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A''B''} = k_2\overrightarrow{A'B'}$, т. е. $\overrightarrow{A''B''} = k_1k_2\overrightarrow{AB}$. Из этого с помощью предыдущей задачи получаем, что преобразование H при $k_1k_2 \neq 1$ является гомотетией с коэффициентом k_1k_2 , а при $k_1k_2 = 1$ — параллельным переносом.

Остается проверить, что неподвижная точка преобразования H лежит на прямой, соединяющей центры гомотетий H_1 и H_2 . Так как $\overrightarrow{O_1A'} = k_1\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2A''} = k_2\overrightarrow{O_2A'}$, то $\overrightarrow{O_2A''} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A'}) = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1A}) = k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2A}$. Для неподвижной точки X получаем уравнение $\overrightarrow{O_2X} = (k_1k_2 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2X}$, поэтому $\overrightarrow{O_2X} = \lambda\overrightarrow{O_1O_2}$, где $\lambda = (k_1k_2 - k_2)/(1 - k_1k_2)$.

19.25. Точка A является центром гомотетии, переводящей S_1 в S_2 , точка B — центром гомотетии, переводящей S_2 в S_3 . Композиция этих гомотетий переводит S_1 в S_3 , причем ее центр лежит на прямой AB . С другой стороны, центром гомотетии, переводящей S_1 в S_3 , является точка C . В самом деле, точке пересечения внешних касательных соответствует гомотетия с положительным коэффи-

циентом, а композиция гомотетий с положительными коэффициентами является гомотетией с положительным коэффициентом.

19.26. а) Пусть K, L, M — точки пересечения прямых AB и CD , AP и DQ , BP и CQ . Эти точки являются центрами гомотетий H_K, H_L и H_M с положительными коэффициентами, переводящих соответственно отрезок BC в AD , AD в PQ и BC в PQ . Ясно, что $H_L \circ H_K = H_M$. Поэтому точки K, L и M лежат на одной прямой.

б) Пусть K, L, M — точки пересечения прямых AB и CD , AQ и DP , BQ и CP . Эти точки являются центрами гомотетий H_K, H_L и H_M , переводящих соответственно отрезок BC в AD , AD в QP , BC в QP , коэффициент первой гомотетии положительный, а двух последних — отрицательный. Ясно, что $H_L \circ H_K = H_M$. Поэтому точки K, L и M лежат на одной прямой.

19.27. Так как $\angle(P_1A, AB) = \angle(P_2A, AB)$, то ориентированные угловые величины дуг BP_1 и BP_2 равны. Поэтому при поворотной гомотетии с центром B , переводящей S_1 в S_2 , точка P_1 переходит в P_2 , а прямая P_1Q_1 переходит в прямую P_2Q_2 .

19.28. Так как ориентированные угловые величины дуг AM_1 и AM_2 равны, то $\angle(M_1B, BA) = \angle(M_2B, BA)$, а значит, точки M_1, M_2 и B лежат на одной прямой.

19.29. Пусть P_i — поворотная гомотетия с центром O , переводящая окружность S_i в S_{i+1} . Тогда $X_{i+1} = P_i(X_i)$ (см. задачу 19.28). Остается отметить, что композиция $P_n \circ \dots \circ P_2 \circ P_1$ является поворотной гомотетией с центром O , переводящей S_1 в S_1 , т. е. она является тождественным преобразованием.

19.30. Так как $\angle AMB = \angle NAB$ и $\angle BAM = \angle BNA$, то $\triangle AMB \sim \triangle NAB$, а значит, $AN : AB = MA : MB = CN : MB$. Кроме того, $\angle ABM = 180^\circ - \angle MAN = \angle ANC$. Следовательно, $\triangle AMB \sim \triangle ACN$, т. е. поворотная гомотетия с центром A , переводящая M в B , переводит C в N , а значит, она переводит Q в P .

19.31. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы. Коэффициент k поворотной гомотетии, переводящей S_1 в S_2 , равен r_1/r_2 , а ее центр O лежит на окружности с диаметром O_1O_2 , и, кроме того, $OO_1 : OO_2 = k = r_1/r_2$. Остается проверить, что окружность с диаметром O_1O_2 и ГМТ O таких, что $OO_1 : OO_2 = k$, имеют ровно две общие точки. При $k = 1$ это очевидно, а при $k \neq 1$ последнее ГМТ описано в решении задачи 7.14: оно является окружностью, причем одна из ее точек пересечения с прямой O_1O_2 лежит внутри отрезка O_1O_2 , а другая — вне его.

19.32. Рассмотрим преобразование, переводящее треугольник BHC в треугольник PHB , т. е. композицию поворота на 90° относительно точки H и гомотетии с коэффициентом $BP : CB$ и центром H . Поскольку при этом преобразовании вершины квадрата переходят в вершины квадрата, а точки C и B переходят в точки B и P , то точка D переходит в точку Q , т. е. $\angle DHQ = 90^\circ$.

19.33. Пусть P — поворотная гомотетия, переводящая вектор \vec{CB} в вектор $\vec{CA_1}$. Тогда $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{AC} + P(\vec{CB}) + \vec{CB} + P(\vec{BA}) + \vec{BA} + P(\vec{AC}) = \vec{0}$. Значит, если M — центр масс треугольника ABC , то $\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1} = (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) + (\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}) = \vec{0}$.

19.34. Пусть M — общая середина сторон BC и B_1C_1 , $\mathbf{x} = \vec{MB}$ и $\mathbf{y} = \vec{MB_1}$. Пусть, далее, P — поворотная гомотетия с центром M , углом поворота 90° и коэффициентом $\sqrt{3}$, переводящая точку B в A , а B_1 — в A_1 . Тогда $\vec{BB_1} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ и $\vec{AA_1} = P(\mathbf{y}) - P(\mathbf{x}) = P(\vec{BB_1})$. Поэтому угол между векторами $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$

равен 90° и $AA_1 : BB_1 = \sqrt{3}$.

19.35. Пусть P — поворотная гомотетия, переводящая треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB} + P(\overrightarrow{AB})$. Аналогично и остальные векторы сторон треугольника ABC переводятся в векторы сторон треугольника $A_2B_2C_2$ преобразованием $f(a) = -a + P(a)$.

19.36. Исходная карта является прямоугольником K_0 на плоскости, меньшая карта — прямоугольником K_1 , содержащимся в K_0 . Рассмотрим поворотную гомотетию f , отображающую прямоугольник K_0 на K_1 . Пусть $K_{i+1} = f(K_i)$. Так как последовательность K_i является стягивающейся последовательностью вложенных многоугольников, существует единственная точка X , принадлежащая всем прямоугольникам K_i . Докажем, что X — искомая точка, т. е. $f(X) = X$. В самом деле, так как точка X принадлежит K_i , то точка $f(X)$ принадлежит K_{i+1} , т. е. точка $f(X)$ также принадлежит всем прямоугольникам K_i . Поскольку имеется только одна точка, принадлежащая всем прямоугольникам, то $f(X) = X$.

19.37. Так как произведение коэффициентов поворотных гомотетий P_1 и P_2 равно 1, их композиция является поворотом (см. задачу 17.36). Пусть O — центр поворота $P_2 \circ P_1$; $R = P_1(O)$. Так как $P_2 \circ P_1(O) = O$, то $P_2(R) = O$. Следовательно, по условию $A_1O : A_1R = A_2O : A_2R$ и $\angle OA_1R = \angle OA_2R$, т. е. $\triangle OA_1R \sim \triangle OA_2R$. Кроме того, OR — общая сторона этих подобных треугольников, значит, $\triangle OA_1R = \triangle OA_2R$. Следовательно, $OA_1 = OA_2$ и $\angle(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = 2\angle(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OR}) = 2\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MN})$, т. е. O — центр поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MN})$, переводящего A_1 в A_2 .

19.38. Пусть P_1 — поворотная гомотетия с центром B , переводящая A в M , а P_2 — поворотная гомотетия с центром D , переводящая M в C . Так как произведение коэффициентов этих поворотных гомотетий равно $(BM : BA) \cdot (DC : DM) = 1$, то их композиция $P_2 \circ P_1$ является поворотом (переводящим A в C) на угол $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM}) + \angle(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC}) = 2\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM})$.

С другой стороны, центр поворота $P_2 \circ P_1$ совпадает с центром поворота на угол $2\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, переводящего B в D (см. задачу 19.37).

19.39. Легко проверить, что $\operatorname{tg} XBY = k$ и $BY : BX = \sqrt{k^2 + 1}$, т. е. точка Y получается из X поворотной гомотетией с центром B , углом поворота $\operatorname{arctg} k$ и коэффициентом $\sqrt{k^2 + 1}$. Искомое ГМТ — образ данной полуокружности при этой поворотной гомотетии.

19.40. Предположим, что треугольник PXY построен, причем точки X и Y лежат на сторонах AC и CB соответственно. Нам известно преобразование, переводящее X в Y , а именно — поворотная гомотетия с центром P , углом поворота $\varphi = \angle XPY = \angle MLN$ и коэффициентом гомотетии $k = PY : PX = LN \cdot LM$. Искомая точка Y является точкой пересечения отрезка BC и образа отрезка AC при этом преобразовании.

19.41. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром A , переводящую B в D . Пусть C' — образ точки C при этой гомотетии. Тогда $\angle CDC' = \angle B + \angle D$ и $DC' = (BC \cdot AD)/AB = bd/a$.

Треугольник CDC' можно построить по CD , DC' и $\angle CDC'$. Точка A является точкой пересечения окружности радиуса d с центром D и геометрического места точек X , для которых $C'X : CX = d : a$ (это ГМТ — окружность; см. задачу 7.14). Дальнейшее построение очевидно.

19.42. а) Если O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 , то

$$\angle(PA, AO) = \angle(PA_1, A_1O) \text{ и } \angle(PB, BO) = \angle(PB_1, B_1O), \quad (1)$$

а значит, точка O является точкой пересечения описанных окружностей треугольников PA_1A_1 и PB_1B_1 . Случай, когда эти окружности имеют единственную общую точку P , очевиден: отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1 при гомотетии с центром P . Если P и O — две точки пересечения рассматриваемых окружностей, то из равенств (1) следует, что $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$, а значит, O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 .

б) Достаточно заметить, что точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок BC , тогда и только тогда, когда $\angle(BA, AO) = \angle(CB, BO)$ и $\angle(AB, BO) = \angle(BC, CO)$.

19.43. Пусть A_1 и B_1 — положения точек в один момент, A_2 и B_2 — положения точек в другой момент. Тогда в качестве точки P можно взять центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок A_1A_2 в отрезок B_1B_2 .

19.44. Пусть P — точка пересечения прямых l_1 и l_2 . Согласно задаче 19.42 точка O лежит на описанной окружности S_1 треугольника A_1A_2P . С другой стороны, $OA_2 : OA_1 = k$. Геометрическим местом точек X , для которых $XA_2 : XA_1 = k$, является окружность S_2 (задача 7.14). Точка O является точкой пересечения окружностей S_1 и S_2 (таких точек две).

19.45. Пусть O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 . Тогда $\triangle ABO \sim \triangle A_1B_1O$, т. е. $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ и $AO : BO = A_1O : B_1O$. Следовательно, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ и $AO : A_1O = BO : B_1O$, т. е. $\triangle AA_1O \sim \triangle BB_1O$.

Поэтому точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1 .

19.46. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке C , а прямые BD и AE — в точке F . Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок ED , является точка пересечения описанных окружностей треугольников AEC и BDC , отличная от точки C (см. задачу 19.42), а центром поворотной гомотетии, переводящей AE в BD , — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABF и EDF . Согласно задаче 19.45 центры этих поворотных гомотетий совпадают, т. е. все четыре описанные окружности имеют общую точку.

19.47. Центр O параллелограмма $ABCD$ равноудален от следующих пар прямых: AQ и AB , AB и CD , CD и DQ , поэтому QO — биссектриса угла AQD . Пусть $\alpha = \angle BAO$, $\beta = \angle CDO$ и $\varphi = \angle AQO = \angle DQO$. Тогда $\alpha + \beta = \angle AOD = 360^\circ - \alpha - \beta - 2\varphi$, т. е. $\alpha + \beta + \varphi = 180^\circ$, а значит, $\triangle QAO = \triangle QOD$.

19.48. Решим задачу в несколько более общем виде. Пусть на окружности S взята точка O , H — поворотная гомотетия с центром O . Докажем, что тогда все прямые XX' , где X — точка окружности S и $X' = H(X)$, пересекаются в одной точке.

Пусть P — точка пересечения прямых $X_1X'_1$ и $X_2X'_2$. Согласно задаче 19.42 точки O , P , X_1 и X_2 лежат на одной окружности и точки O , P , X'_1 и X'_2 тоже лежат на одной окружности. Следовательно, P — точка пересечения окружностей S и $H(S)$, т. е. все прямые XX' проходят через точку пересечения окружностей S и $H(S)$, отличную от точки O .

19.49. Пусть O — центр поворотной гомотетии, переводящей треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник ABC . Докажем, например, что описанные окружности

треугольников ABC_2 и $A_1B_1C_2$ проходят через точку O . При рассматриваемой гомотетии отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1 , поэтому точка O совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1 (см. задачу 19.45). Согласно задаче 19.42 центр последней гомотетии является второй точкой пересечения описанных окружностей треугольников ABC_2 и $A_1B_1C_2$ (или точкой их касания).

19.50. Точки A_1, A_2 и A_3 лежат на прямых P_2P_3, P_3P_1 и P_1P_2 (рис. 19.2), поэтому описанные окружности треугольников $A_1A_2P_3, A_1A_3P_2$ и $A_2A_3P_1$ имеют общую точку V (см. задачу 2.81, а), причем точки O_3, O_2 и O_1 лежат на этих окружностях (см. задачу 19.42). Аналогично описанные окружности треугольников $B_1B_2P_3, B_1B_3P_2$ и $B_2B_3P_1$ имеют общую точку V' . Пусть U — точка пересечения прямых P_2O_2 и P_3O_3 . Докажем, что точка V лежит на описанной окружности треугольника O_2O_3U . В самом деле, $\angle(O_2V, VO_3) = \angle(VO_2, O_2P_2) + \angle(O_2P_2, P_3O_3) + \angle(P_3O_3, O_3V) = \angle(VA_1, A_1P_2) + \angle(O_2U, UO_3) + \angle(P_3A_1, A_1V) = \angle(O_2U, UO_3)$. Аналогичные рассуждения показывают, что точка V' лежит на описанной окружности треугольника O_2O_3U . В частности, точки O_2, O_3, V и V' лежат на одной окружности. Аналогично точки O_1, O_2, V и V' лежат на одной окружности, а значит, точки V и V' лежат на описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$; точка U тоже лежит на этой окружности. Аналогично доказывается, что прямые P_1O_1 и P_2O_2 пересекаются в точке, лежащей на окружности подобия. Прямая P_2O_2 пересекает окружность подобия в точках U и O_2 , поэтому прямая P_1O_1 проходит через точку U .

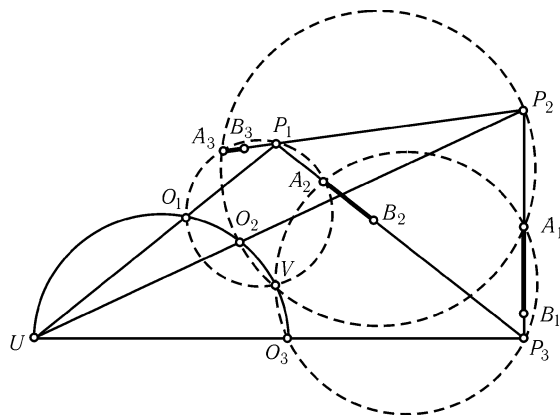


Рис. 19.2

19.51. Пусть P_1 — точка пересечения прямых A_2B_2 и A_3B_3 , P'_1 — точка пересечения прямых A_2C_2 и A_3C_3 ; точки P_2, P_3, P'_2 и P'_3 определяются аналогично. При поворотной гомотетии, переводящей F_1 в F_2 , прямые A_1B_1 и A_1C_1 переходят в A_2B_2 и A_2C_2 , поэтому $\angle(A_1B_1, A_2B_2) = \angle(A_1C_1, A_2C_2)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\triangle P_1P_2P_3 \sim \triangle P'_1P'_2P'_3$.

Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок P_2P_3 в $P'_2P'_3$, лежит на описанной окружности треугольника $A_1P_3P'_3$ (см. задачу 19.42). А так как $\angle(P_3A_1, A_1P'_3) = \angle(A_1B_1, A_1C_1) = \angle(A_2B_2, A_2C_2) = \angle(P_3A_2, A_2P'_3)$, то описанная окружность треугольника $A_1P_3P'_3$ совпадает с описанной окружностью треугольника $A_1A_2P_3$. Аналогичные рассуждения показывают, что центр рассматриваемой

мой поворотной гомотетии является точкой пересечения описанных окружностей треугольников $A_1A_2P_3$, $A_1A_3P_2$ и $A_2A_3P_1$; эта точка лежит на окружности подобия фигур F_1 , F_2 и F_3 (задача 19.50, а)).

19.52. а) Пусть l'_1 , l'_2 и l'_3 — соответственные прямые фигур F_1 , F_2 и F_3 , причем $l'_i \parallel l_i$; эти прямые образуют треугольник $P_1P_2P_3$. При поворотной гомотетии с центром O_3 , переводящей F_1 в F_2 , прямые l_1 и l'_1 переходят в l_2 и l'_2 , поэтому при гомотетии с центром O_3 , переводящей прямую l_1 в l'_1 , прямая l_2 переходит в l'_2 . Следовательно, прямая P_3O_3 проходит через точку W . Аналогично прямые P_1O_1 и P_2O_2 проходят через точку W , а значит, точка W лежит на окружности подобия фигур F_1 , F_2 и F_3 (см. задачу 19.50, б)).

б) Отношение расстояний от точки O_1 до прямых l'_2 и l'_3 равно коэффициенту поворотной гомотетии, переводящей F_2 в F_3 , а угол P_1 треугольника $P_1P_2P_3$ равен углу ее поворота. Поэтому $\angle(O_1P_1, P_1P_2)$ зависит лишь от фигур F_2 и F_3 . А так как $\angle(O_1W, WJ_3) = \angle(O_1P_1, P_1P_2)$, то дуга O_1J_3 фиксирована (рис. 19.3), а значит, точка J_3 фиксирована. Аналогично доказывается, что точки J_1 и J_2 фиксированы.

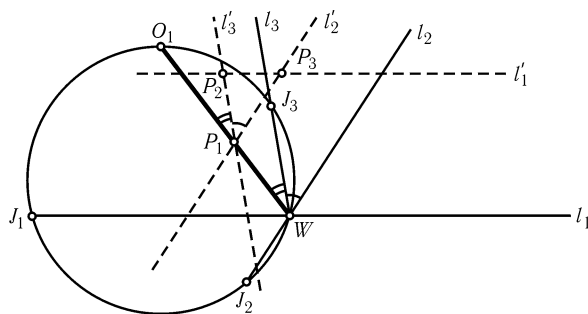


Рис. 19.3

19.53. Воспользуемся обозначениями задачи 19.52. Ясно, что $\angle(J_1J_2, J_2J_3) = \angle(J_1W, WJ_3) = \angle(P_3P_2, P_2P_1)$. Для других углов треугольников доказательство аналогично.

19.54. Докажем, например, что при поворотной гомотетии с центром O_1 , переводящей F_2 в F_3 , точка J_2 переходит в J_3 . В самом деле, $\angle(J_2O_1, O_1J_3) = \angle(J_2W, WJ_3)$. Кроме того, прямые J_2W и J_3W являются соответственными прямыми фигур F_2 и F_3 , поэтому отношение расстояний от них до точки O_1 равно коэффициенту подобия k_1 , а значит, $O_1J_2/O_1J_3 = k_1$.

19.55. Пусть O_a — точка пересечения окружности, проходящей через точку B и касающейся прямой AC в точке A , и окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой AB в точке A . Согласно задаче 19.42, б) точка O_a является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок BA в отрезок AC . Определив аналогично точки O_b и O_c и воспользовавшись результатом задачи 19.50, б), получим, что прямые AO_a , BO_b и CO_c пересекаются в точке, лежащей на окружности подобия S . С другой стороны, эти прямые пересекаются в точке Лемуана K (см. задачу 5.142).

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника являются соответственными прямыми рассматриваемых подобных фигур. Они пересекаются в точке O , поэтому точка O лежит на окружности подобия S (см. задачу 19.52, а)); кроме того, эти прямые пересекают окружность S в постоянных точках A_1 , B_1

и C_1 треугольника ABC (см. задачу 19.52, б)). С другой стороны, прямые, проходящие через точку K параллельно BC , CA и AB , тоже являются соответственными прямыми рассматриваемых фигур (см. решение задачи 5.146), поэтому они тоже пересекают окружность S в точках A_1 , B_1 и C_1 . Следовательно, $OA_1 \perp A_1K$, т. е. OK — диаметр окружности S .

19.56. Если P — первая точка Брокара треугольника ABC , то CP , AP и BP — соответственные прямые для подобных фигур, построенных на отрезках BC , CA и AB . Поэтому точка P лежит на окружности подобия S (см. задачу 19.52, а)). Аналогично точка Q лежит на окружности S . Кроме того, прямые CP , AP и BP пересекают окружность S в постоянных точках A_1 , B_1 и C_1 треугольника ABC (см. задачу 19.52, б)). А так как $KA_1 \parallel BC$ (см. решение задачи 19.55), то $\angle(PA_1, A_1K) = \angle(PC, CB) = \varphi$, т. е. $\sphericalangle PK = 2\varphi$. Аналогично $\sphericalangle KQ = 2\varphi$. Поэтому $PQ \perp KO$, а значит, $OP = OQ$ и $\angle(POQ) = (\sphericalangle PQ)/2 = 2\varphi$.

19.57. Точка Лемуана имеет трилинейные координаты $(a : b : c)$, поэтому прямые, проходящие через точку Лемуана параллельно сторонам треугольника, являются соответственными прямыми фигур, построенных на сторонах треугольника ABC . (Имеется в виду, что коэффициент подобия фигур равен отношению сторон.)

19.58. а) Оба утверждения непосредственно следуют из задачи 5.105, а). Действительно, точка Лемуана K лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $KA_1 \parallel BC$ и т. д.

б) Это следует из задачи 5.105, б).

Глава 20

Принцип крайнего

Основные сведения

1. Для решения многих задач бывает полезно рассмотреть какой-либо «крайний», «граничный» элемент, т. е. элемент, на котором некоторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение, например, наибольшую или наименьшую сторону треугольника, наибольший или наименьший угол и т. д. Этот метод решения задач иногда называют *принципом (правилом) крайнего*; название это, правда, не общепринятое.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника. Его вершины можно обозначить так, что $CO \leq AO$ и $BO \leq DO$. Тогда при симметрии относительно точки O треугольник BOC попадает внутрь треугольника AOD , т. е. в некотором смысле треугольник BOC наименьший, а треугольник AOD наибольший (см. § 4).

3. Вершины выпуклой оболочки и опорные прямые тоже являются в некотором смысле крайними элементами; эти понятия используются в § 5, там приведены их определения и свойства.

§1. Наименьший или наибольший угол

20.1. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/4$.

20.2. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник.

20.3. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолетов.

20.4. Внутри круга радиуса 1 лежат восемь точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.

20.5. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.

20.6*. Внутри остроугольного треугольника взята точка P . Докажите, что наибольшее из расстояний от точки P до вершин этого треугольника меньше удвоенного наименьшего из расстояний от P до его сторон.

20.7*. Длины биссектрис треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $1/\sqrt{3}$.

§2. Наименьшее или наибольшее расстояние

20.8. На плоскости дано $n \geq 3$ точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

20.9. На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?

20.10. Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

20.11*. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

20.12*. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом k , где $0 < k < 1$.

20.13*. На плоскости дано конечное число точек, причем любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой (Сильвестр).

20.14*. На плоскости дано конечное число попарно непараллельных прямых, причем через точку пересечения любых двух из них проходит еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

20.15*. На плоскости дано n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что различных отмеченных точек не менее $2n - 3$.

См. также задачи 9.17, 9.19.

§3. Наименьшая или наибольшая площадь

20.16*. На плоскости расположено n точек, причем площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

20.17*. Многоугольник M' гомотетичен многоугольнику M с коэффициентом гомотетии $-1/2$. Докажите, что существует параллельный перенос, переводящий многоугольник M' внутрь многоугольника M .

§4. Наибольший треугольник

20.18*. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если периметры треугольников ABO , BCO , CDO и DAO равны, то $ABCD$ — ромб.

20.19*. Докажите, что если центр вписанной окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей, то четырехугольник — ромб.

20.20*. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если радиусы вписанных окружностей треугольников ABO , BCO , CDO и DAO равны, то $ABCD$ — ромб.

§5. Выпуклая оболочка и опорные прямые

При решении задач этого параграфа рассматриваются выпуклые оболочки систем точек и опорные прямые выпуклых многоугольников.

Выпуклой оболочкой конечного набора точек называют наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все эти точки (слово «наименьший» означает, что он не содержится ни в каком другом таком многоугольнике). У любой конечной системы точек существует единственная выпуклая оболочка (рис. 20.1).

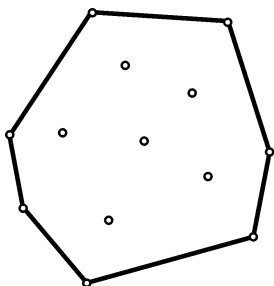


Рис. 20.1

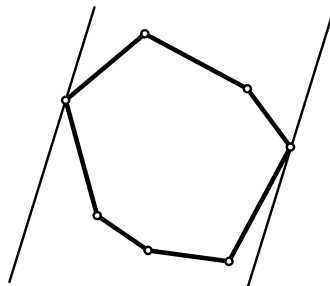


Рис. 20.2

Опорной прямой выпуклого многоугольника называют прямую, проходящую через его вершину и обладающую тем свойством, что многоугольник лежит по одну сторону от нее. Легко проверить, что для любого выпуклого многоугольника существуют ровно две опорные прямые, параллельные данной прямой (рис. 20.2).

20.21. Решите задачу 20.8, воспользовавшись понятием выпуклой оболочки.

20.22*. На плоскости даны $2n + 3$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что n из

оставшихся точек лежат внутри окружности, проведенной через выбранные точки, а n — вне ее.

20.23*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2.

20.24*. На плоскости дано конечное число точек. Докажите, что из них всегда можно выбрать точку, для которой ближайшими к ней являются не более трех данных точек.

20.25*. На столе расположено n картонных и n пластмассовых квадратов, причем никакие два картонных и никакие два пластмассовых квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

20.26*. На плоскости дано $n \geq 4$ точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что если для любых трех из них найдется четвертая (тоже из данных), с которой они образуют вершины параллелограмма, то $n = 4$.

§6. Разные задачи

20.27. На плоскости дано конечное множество многоугольников (не обязательно выпуклых), каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.

20.28. Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

20.29. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что хотя бы один из треугольников с вершинами в этих точках не является остроугольным.

20.30. На плоскости дано бесконечное множество прямоугольников, вершины каждого из которых расположены в точках с координатами $(0, 0)$, $(0, m)$, $(n, 0)$, (n, m) , где n и m — целые положительные числа (свои для каждого прямоугольника). Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать два так, чтобы один содержался в другом.

20.31*. Дан выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$. Докажите, что описанная окружность некоторого треугольника $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ содержит весь многоугольник.

Решения

20.1. Пусть α — наименьший угол треугольника. Тогда $\alpha \leq 60^\circ$. Поэтому $S = (bc \sin \alpha)/2 \leq (\sin 60^\circ)/2 = \sqrt{3}/4$.

20.2. Пусть X — произвольная точка, лежащая внутри выпуклого четырехугольника. Так как $\angle AXB + \angle BXC + \angle CXD + \angle AXD = 360^\circ$, то наибольший из этих углов не меньше 90° . Пусть для определенности $\angle AXB \geq 90^\circ$. Тогда точка X лежит внутри окружности с диаметром AB .

20.3. Если самолеты из точек A и B прилетели в точку O , то AB — наибольшая сторона треугольника AOB , т. е. $\angle AOB > 60^\circ$. Предположим, что в точку O прилетели самолеты из точек A_1, \dots, A_n . Тогда один из углов A_iOA_j не превосходит $360^\circ/n$. Поэтому $360^\circ/n > 60^\circ$, т. е. $n < 6$.

20.4. По крайней мере семь точек отличны от центра O окружности. Поэтому наименьший из углов A_iOA_j , где A_i и A_j — данные точки, не превосходит $360^\circ/7 < 60^\circ$. Если A и B — точки, соответствующие наименьшему углу, то $AB < 1$, так как $AO \leq 1$, $BO \leq 1$ и угол AOB не может быть наибольшим углом треугольника AOB .

20.5. Один из углов между шестью отрезками, соединяющими точку O с центрами кругов, не превосходит $360^\circ/6 = 60^\circ$. Пусть $\angle O_1OO_2 \leq 60^\circ$, где O_1 и O_2 — центры кругов радиуса r_1 и r_2 соответственно. Так как $\angle O_1OO_2 \leq 60^\circ$, этот угол не является наибольшим углом треугольника O_1OO_2 поэтому либо $O_1O_2 \leq O_1O$, либо $O_1O_2 \leq O_2O$. Пусть для определенности $O_1O_2 \leq O_1O$. Так как точка O лежит внутри кругов, то $O_1O < r_1$. Поэтому $O_1O_2 \leq O_1O < r_1$, т. е. точка O_2 лежит внутри круга радиуса r_1 с центром O_1 .

20.6. Опустим из точки P перпендикуляры PA_1 , PB_1 и PC_1 на стороны BC , CA и AB и выберем наибольший из углов, образованных этими перпендикулярами и лучами PA , PB и PC . Пусть для определенности это будет угол APC_1 . Тогда $\angle APC_1 \geq 60^\circ$, поэтому $PC_1 : AP = \cos APC_1 \leq \cos 60^\circ = 1/2$, т. е. $AP \geq 2PC_1$. Ясно, что неравенство сохранится, если AP заменить на наибольшее из чисел AP , BP и CP , а PC_1 — на наименьшее из чисел PA_1 , PB_1 и PC_1 .

20.7. Пусть для определенности α — наименьший угол треугольника ABC ; AD — биссектриса. Одна из сторон AB и AC не превосходит $AD/\cos(\alpha/2)$, так как иначе отрезок BC не проходит через точку D . Пусть для определенности $AB \leq AD/\cos(\alpha/2) \leq AD/\cos 30^\circ \leq 2/\sqrt{3}$. Тогда $S_{ABC} = h_c AB/2 \leq l_c AB/2 \leq 1/\sqrt{3}$.

20.8. Пусть A и B — те из данных точек, расстояние между которыми минимально. Тогда внутри окружности с диаметром AB нет данных точек. Пусть C — та из оставшихся точек, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Тогда внутри окружности, проходящей через точки A , B и C , нет данных точек.

20.9. Предположим, что получилась замкнутая ломаная. Пусть AB — наибольшее звено этой ломаной, а AC и BD — соседние с ним звенья. Тогда $AC < AB$, т. е. B — не ближайшая к A точка, и $BD < AB$, т. е. A — не ближайшая к B точка. Поэтому точки A и B не могут быть соединены. Получено противоречие.

20.10. Пусть O — данная точка. Проведем прямые, содержащие стороны многоугольника, и выберем среди них ту, которая наименее удалена от точки O . Пусть на этой прямой лежит сторона AB . Докажем, что основание перпендикуляра, опущенного из точки O на сторону AB , лежит на самой стороне. Предположим, что основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB , является точка P , лежащая вне отрезка AB . Так как точка O лежит внутри выпуклого многоугольника, отрезок OP пересекает некоторую сторону CD в точке Q . Ясно, что $OQ < OP$, а расстояние от точки O до прямой CD меньше OQ . Поэтому прямая CD менее удалена от точки O , чем прямая AB , что противоречит выбору прямой AB .

20.11. Пусть BE — наибольшая диагональ пятиугольника $ABCDE$. Докажем, что тогда из отрезков BE , EC и BD можно составить треугольник. Для этого достаточно проверить, что $BE < EC + BD$. Пусть O — точка пересечения диагоналей BD и EC . Тогда $BE < BO + OE < BD + EC$.

20.12. Пусть O_1 и O_2 — центры гомотетий с коэффициентом k , переводящих многоугольник M в многоугольники M_1 и M_2 . Тогда точка многоугольника M , наиболее удаленная от прямой O_1O_2 не покрыта многоугольниками M_1 и M_2 .

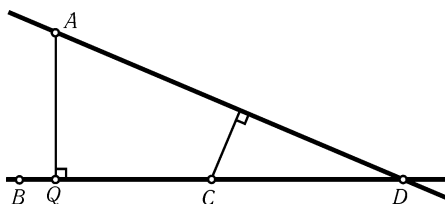


Рис. 20.3

перпендикуляр AQ на прямую BC . Две из точек B , C и D лежат по одну сторону от точки Q , например C и D . Пусть для определенности $CQ < DQ$ (рис. 20.3). Тогда расстояние от точки C до прямой AD меньше, чем расстояние от точки A до прямой BC , что противоречит выбору A и прямой BC .

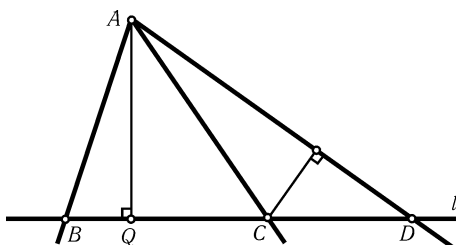


Рис. 20.4

одну сторону от точки Q , например C и D . Пусть для определенности $CQ < DQ$ (рис. 20.4). Тогда расстояние от точки C до прямой AD меньше, чем расстояние от точки A до прямой l , что противоречит выбору A и l .

20.15. Пусть A и B — наиболее удаленные друг от друга данные точки. Середины отрезков, соединяющих точку A (соответственно точку B) с остальными точками, все различны и лежат внутри окружности радиуса $AB/2$ с центром A (соответственно B). Полученные два круга имеют лишь одну общую точку, поэтому различных отмеченных точек не менее $2(n-1) - 1 = 2n - 3$.

20.16. Выберем среди всех треугольников с вершинами в данных точках треугольник наибольшей площади. Пусть это будет треугольник ABC . Проведем через вершину C прямую $l_c \parallel AB$. Если точки X и A лежат по разные стороны от прямой l_c , то $S_{ABX} > S_{ABC}$. Поэтому все данные точки лежат по одну сторону от прямой l_c . Аналогично, проводя через точки B и A прямые $l_b \parallel AC$ и $l_a \parallel BC$, получаем, что все данные точки находятся внутри (или на границе) треугольника, образованного прямыми l_a , l_b и l_c . Площадь этого треугольника ровно в 4 раза больше площади треугольника ABC , поэтому она не превосходит 4.

20.13. Предположим, что не все данные точки лежат на одной прямой. Проведем через каждую пару данных точек прямую (этих прямых конечное число) и выберем наименьшее ненулевое расстояние от данных точек до этих прямых. Пусть наименьшим будет расстояние от точки A до прямой BC , где точки B и C данные. На прямой BC лежит еще одна из данных точек — некоторая точка D . Опустим из точки A

20.14. Предположим, что не все прямые проходят через одну точку. Рассмотрим точки пересечения прямых и выберем наименьшее ненулевое расстояние от этих точек до данных прямых. Пусть наименьшим будет расстояние от точки A до прямой l . Через точку A проходят по крайней мере три данные прямые. Пусть они пересекают прямую l в точках B , C и D . Опустим из точки A перпендикуляр AQ на прямую l . Две из точек B , C и D лежат по

20.17. Пусть ABC — треугольник наибольшей площади с вершинами в вершинах многоугольника M . Тогда многоугольник M содержится внутри треугольника $A_1B_1C_1$, серединами сторон которого являются точки A , B и C . При гомотетии с центром в центре масс треугольника ABC и коэффициентом $-1/2$ треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC , поэтому многоугольник M переходит внутрь треугольника ABC .

20.18. Для определенности можно считать, что $AO \geq CO$ и $DO \geq BO$. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O (рис. 20.5). Так как треугольник B_1OC_1 лежит внутри треугольника AOD , то $P_{AOD} \geq P_{B_1OC_1} = P_{BOC}$, причем равенство достигается, только если $B_1 = D$ и $C_1 = A$ (см. задачу 9.27, б)). Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому $AB - BC = P_{ABO} - P_{BCO} = 0$, т. е. $ABCD$ — ромб.

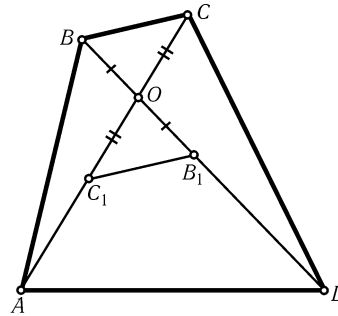


Рис. 20.5

20.19. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Для определенности можно считать, что $AO \geq CO$ и $DO \geq BO$. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O . Так как точка O является центром вписанной окружности четырехугольника, то отрезок B_1C_1 касается этой окружности. Поэтому отрезок AD может касаться этой окружности, только если $B_1 = D$ и $C_1 = A$, т. е. если $ABCD$ — параллелограмм. В этот параллелограмм можно вписать окружность, поэтому он — ромб.

20.20. Для определенности можно считать, что $AO \geq CO$ и $DO \geq BO$. Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O . Тогда треугольник C_1OB_1 содержится внутри треугольника AOD , поэтому вписанная окружность S треугольника C_1OB_1 содержится внутри треугольника AOD . Предположим, что отрезок AD не совпадает с отрезком C_1B_1 . Тогда окружность S переходит во вписанную окружность треугольника AOD при гомотетии с центром O и коэффициентом больше 1, т. е. $r_{AOD} > r_{C_1OB_1} = r_{COB}$. Получено противоречие, поэтому $A = C_1$ и $D = B_1$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

В параллелограмме $ABCD$ площади треугольников AOB и BOC равны, поэтому если у них равны радиусы вписанных окружностей, то равны и периметры, так как $S = pr$. Следовательно, $AB = BC$, т. е. $ABCD$ — ромб.

20.21. Пусть AB — сторона выпуклой оболочки данных точек, B_1 — ближайшая к A из всех данных точек, лежащих на AB . Выберем ту из оставшихся точек, из которой отрезок AB_1 виден под наибольшим углом. Пусть это будет точка C . Тогда описанная окружность треугольника AB_1C будет искомой.

20.22. Пусть AB — одна из сторон выпуклой оболочки данных точек. Занумеруем оставшиеся точки в порядке возрастания углов, под которыми виден из них отрезок AB , т. е. обозначим их через $C_1, C_2, \dots, C_{2n+1}$, так, что $\angle AC_1B < \angle AC_2B < \dots < \angle AC_{2n+1}B$. Тогда точки C_1, \dots, C_n лежат вне описанной окружности треугольника ABC_{n+1} , а точки C_{n+2}, \dots, C_{2n+1} — внутри ее, т. е. это и есть искомая окружность.

20.23. Пусть AB — наибольшая диагональ (или сторона) многоугольника. Проведем через точки A и B прямые a и b , перпендикулярные прямой AB . Если X — вершина многоугольника, то $AX \leq AB$ и $XB \leq AB$, поэтому

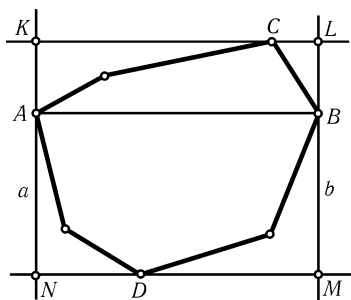


Рис. 20.6

многоугольник находится внутри полосы, образованной прямыми a и b . Проведем опорные прямые многоугольника, параллельные AB . Пусть эти прямые проходят через вершины C и D и вместе с прямыми a и b образуют прямоугольник $KLMN$ (рис. 20.6). Тогда $S_{KLMN} = 2S_{ABC} + 2S_{ABD} = 2S_{ACBD}$. Так как четырехугольник $ACBD$ содержится в исходном многоугольнике, площадь которого равна 1, то $S_{KLMN} \leq 2$.

20.24. Выберем наименьшее из всех попарных расстояний между данными точками и рассмотрим точки, у которых есть соседи на таком расстоянии.

Достаточно доказать требуемое утверждение для этих точек. Пусть P — вершина их выпуклой оболочки. Если A_i и A_j — ближайшие к P точки, то $A_i A_j \geq A_i P$ и $A_i A_j \geq A_j P$, поэтому $\angle A_i P A_j \geq 60^\circ$. Следовательно, у точки P не может быть четырех ближайших соседей, так как иначе один из углов $A_i P A_j$ был бы меньше $180^\circ/3 = 60^\circ$. Поэтому P — искомая точка.

20.25. Предположим, что есть картонные квадраты, не совпадающие с пластмассовыми. Выбросим из рассмотрения все совпадающие квадраты и рассмотрим выпуклую оболочку вершин оставшихся квадратов. Пусть A — вершина этой выпуклой оболочки. Тогда A является вершиной двух разных квадратов — картонного и пластмассового. Легко проверить, что одна из вершин меньшего из этих квадратов лежит внутри большего (рис. 20.7). Пусть для определенности вершина B картонного квадрата лежит внутри пластмассового. Тогда точка B лежит внутри пластмассового квадрата и является вершиной другого пластмассового квадрата, чего не может быть. Получено противоречие, поэтому каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым.

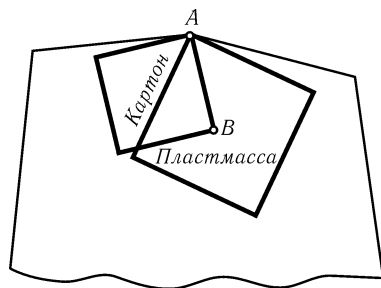


Рис. 20.7

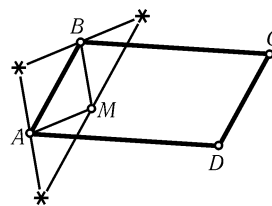


Рис. 20.8

20.26. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек. Возможны два случая.

1. Выпуклая оболочка является параллелограммом $ABCD$. Если точка M лежит внутри параллелограмма $ABCD$, то вершины всех трех параллелограммов с вершинами A, B и M лежат вне $ABCD$ (рис. 20.8). Значит, в этом случае, кроме точек A, B, C и D , никаких других точек быть не может.

2. Выпуклая оболочка не является параллелограммом. Пусть AB и BC — стороны выпуклой оболочки. Проведем опорные прямые, параллельные AB и BC . Пусть эти опорные прямые проходят через вершины P и Q . Тогда вершины всех трех параллелограммов с вершинами B, P и Q лежат вне выпуклой оболочки

(рис. 20.9). Они даже лежат вне параллелограмма, образованного опорными прямыми, кроме того случая, когда P и Q являются вершинами этого параллелограмма. В этом случае его четвертая вершина не принадлежит выпуклой оболочке, так как та не является параллелограммом.

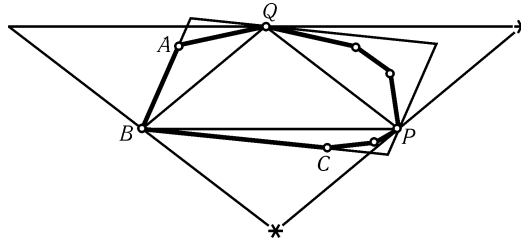


Рис. 20.9

20.27. Возьмем на плоскости произвольную прямую l и спроецируем на нее все многоугольники. При этом мы получим несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Рассмотрим левые концы этих отрезков и выберем из них самый правый (чтобы стало ясно, что значит «правый» и «левый», на прямой нужно задать направление). Полученная точка принадлежит всем отрезкам, поэтому проведенный через нее перпендикуляр к прямой l пересекает все данные многоугольники.

20.28. Пусть на плоскости расположено 1000 отрезков. Возьмем произвольную прямую l , не перпендикулярную ни одному из них, и спроецируем концы всех этих отрезков на прямую l . Ясно, что конец отрезка, проецирующийся в самую левую из полученных точек, не может упираться строго внутрь другого отрезка.

20.29. Возможны два варианта расположения четырех точек.

1. Точки являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. Выберем наибольший из углов при его вершинах. Пусть это будет угол ABC . Тогда $\angle ABC \geq 90^\circ$, т. е. треугольник ABC не остроугольный.

2. Точка D лежит внутри треугольника ABC . Выберем наибольший из углов ADB , BDC и ADC . Пусть это будет угол ADB . Тогда $\angle ADB \geq 120^\circ$, т. е. треугольник ADB тупоугольный.

Доказать, что других вариантов расположения четырех точек нет, можно следующим образом. Прямые, проходящие через три из данных точек, делят плоскость на семь частей (рис. 20.10). Если четвертая данная точка лежит во второй, четвертой или шестой частях, то имеет место первая ситуация, а если в первой, третьей, пятой или седьмой, то вторая.

20.30. У прямоугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, t)$, $(n, 0)$ и (n, t) горизонтальная сторона равна n , а вертикальная равна t . Выберем из данного множества прямоугольник с наименьшей горизонтальной стороной. Пусть его вертикальная сторона равна t_1 . Рассмотрим любые t_1 из оставшихся прямоугольников. Возможны два случая.

1. Вертикальные стороны двух из этих t_1 прямоугольников равны. Тогда

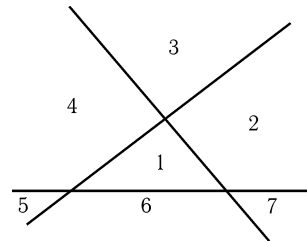


Рис. 20.10

один из них содержится в другом.

2. Вертикальные стороны всех этих прямоугольников различны. Тогда вертикальная сторона одного из них больше m_1 , поэтому он содержит прямоугольник с наименьшей горизонтальной стороной.

20.31. Рассмотрим все окружности, проходящие через две соседние вершины A_i и A_{i+1} и такую вершину A_j , что $\angle A_i A_j A_{i+1} < 90^\circ$. Хотя бы одна такая окружность есть. В самом деле, один из углов $A_i A_{i+2} A_{i+1}$ и $A_{i+1} A_i A_{i+2}$ меньше 90° ; в первом случае положим $A_j = A_{i+2}$, а во втором $A_j = A_i$. Выберем среди всех таких окружностей (для всех i и j) окружность S наибольшего радиуса; пусть для определенности она проходит через точки A_1 , A_2 и A_k .

Предположим, что вершина A_p лежит вне окружности S . Тогда точки A_p и A_k лежат по одну сторону от прямой $A_1 A_2$ и $\angle A_1 A_p A_2 < \angle A_1 A_k A_2 < 90^\circ$. Из теоремы синусов следует, что радиус описанной окружности у треугольника $A_1 A_p A_2$ больше, чем у треугольника $A_1 A_k A_2$. Получено противоречие, поэтому окружность S содержит весь многоугольник $A_1 \dots A_n$.

Пусть для определенности $\angle A_2 A_1 A_k \leq \angle A_1 A_2 A_k$. Докажем, что тогда A_2 и A_k — соседние вершины. Если $A_k \neq A_3$, то $180^\circ - \angle A_2 A_3 A_k \leq \angle A_2 A_1 A_k < 90^\circ$, поэтому радиус описанной окружности у треугольника $A_2 A_3 A_k$ больше, чем у треугольника $A_1 A_2 A_k$. Получено противоречие, поэтому окружность S проходит через соседние вершины A_1 , A_2 и A_3 .

Глава 21

Принцип Дирихле

Основные сведения

1. Самая популярная формулировка принципа Дирихле такова: «Если в n клетках сидит m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца». На первый взгляд даже непонятно, почему это совершенно очевидное замечание является весьма эффективным методом решения задач. Дело в том, что в каждой конкретной задаче нелегко бывает понять, что же здесь «зайцы» и «клетки» и почему зайцев больше, чем клеток. Выбор зайцев и клеток часто неочевиден; далеко не всегда по виду задачи можно определить, что следует воспользоваться принципом Дирихле. А главное, этот метод дает неконструктивное доказательство (мы, естественно, не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть), а попытка дать конструктивное доказательство, т. е. доказательство путем явного построения или указания требуемого объекта, может привести к гораздо большим трудностям.

2. Некоторые задачи решаются также методами, в какой-то мере аналогичными принципу Дирихле. Сформулируем соответствующие утверждения (все они легко доказываются методом от противного).

а) Если на отрезке длиной 1 расположено несколько отрезков, сумма длин которых больше 1, то по крайней мере два из них имеют общую точку.

б) Если на окружности радиуса 1 расположено несколько дуг, сумма длин которых больше 2π , то по крайней мере две из них имеют общую точку.

в) Если внутри фигуры площадью 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то по крайней мере две из них имеют общую точку.

§1. Конечное число точек, прямых и т. д.

21.1. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

21.2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено пять точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них

меньше 0,5.

21.3. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

21.4. На шахматной доске 8×8 отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

21.5. На плоскости дано 25 точек, причем среди любых трех из них найдутся две на расстоянии меньше 1. Докажите, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 13 из этих точек.

21.6* В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $1/7$.

21.7* Каждый из двух дисков разделен на 1985 равных секторов и на каждом окрашено произвольным образом (одним цветом) по 200 секторов. Диски наложили друг на друга и один стали поворачивать на углы, кратные $360^\circ/1985$. Докажите, что существует по крайней мере 80 положений, при которых совпадает не более 20 окрашенных секторов.

21.8* Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

21.9* В парке растет 10 000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

21.10* Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого n -угольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах n -угольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?

21.11* Внутри выпуклого $2n$ -угольника взята точка P . Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих внутренних точек.

21.12* Докажите, что в любом выпуклом $2n$ -угольнике найдется диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

21.13* Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в три цвета. Докажите, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

§2. Углы и длины

21.14. На плоскости дано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между некоторыми двумя из них не больше $180^\circ/n$.

21.15. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk .

21.16. На плоскости отмечена точка O . Можно ли расположить на плоскости: а) пять кругов; б) четыре круга, не покрывающих точку O , так, чтобы любой луч с началом в точке O пересекал не менее двух кругов? («Пересекает» — имеет общую точку.)

21.17*. Внутри окружности радиуса n расположено $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной прямой l и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.

21.18*. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

21.19*. На отрезке длиной 1 закрашено несколько отрезков, причем расстояние между любыми двумя закрашенными точками не равно 0,1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 0,5.

21.20*. Даны две окружности, длина каждой из которых равна 100 см. На одной из них отмечено 100 точек, а на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше 1 см. Докажите, что эти окружности можно совместить так, чтобы ни одна отмеченная точка не попала на отмеченную дугу.

21.21*. Даны две одинаковые окружности. На каждой из них отмечено по k дуг, угловые величины каждой из которых меньше $\frac{1}{k^2 - k + 1} \cdot 180^\circ$, причем окружности можно совместить так, чтобы отмеченные дуги одной окружности совпали с отмеченными дугами другой. Докажите, что эти окружности можно совместить так, чтобы все отмеченные дуги оказались на неотмеченных местах.

§3. Площадь

21.22. В квадрате со стороной 15 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно разместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.

21.23*. Дана бесконечная клетчатая бумага и фигура, площадь которой меньше площади клетки. Докажите, что эту фигуру можно положить на бумагу, не накрыв ни одной вершины клетки.

21.24*. Назовем крестом фигуру, образованную диагоналями квадрата со стороной 1 (рис. 21.1). Докажите, что в круге радиуса 100 можно разместить лишь конечное число непересекающихся крестов.

21.25*. Парные расстояния между точками A_1, \dots, A_n больше 2. Докажите, что любую фигуру, площадь которой меньше π , можно сдвинуть на вектор длиной не более 1 так, что она не будет содержать точек A_1, \dots, A_n .

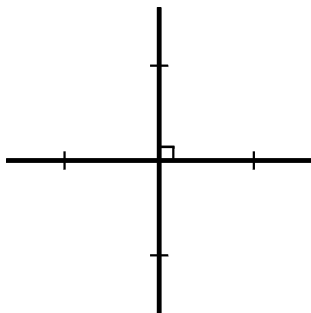


Рис. 21.1

21.26*. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

21.27*. На плоскости дано n фигур. Пусть $S_{i_1 \dots i_k}$ — площадь пересечения фигур с номерами i_1, \dots, i_k , а S — площадь части плоскости, покрытой данными фигурами; M_k — сумма всех $S_{i_1 \dots i_k}$. Докажите, что:

а) $S = M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{n+1} M_n$;

б) $S \geq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m$ при m четном и $S \leq M_1 - M_2 + M_3 - \dots + (-1)^{m+1} M_m$

при m нечетном.

21.28*. а) В квадрате площадью 6 расположены три многоугольника площадью 3. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1.

б) В квадрате площадью 5 расположено девять многоугольников площадью 1. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше $1/9$.

21.29*. На кафтане площадью 1 имеется пять заплат, причем площадь каждой из них не меньше 0,5. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше 0,2.

21.30*. На отрезке длиной 1 расположены попарно не пересекающиеся отрезки, сумма длин которых равна p . Обозначим эту систему отрезков A . Пусть B — дополнительная система отрезков (отрезки систем A и B не имеют общих внутренних точек и полностью покрывают данный отрезок). Докажите, что существует параллельный перенос T , для которого пересечение B и $T(A)$ состоит из отрезков, сумма длин которых не меньше $p(1-p)/2$.

Решения

21.1. Возьмем три вертикальные прямые и девять горизонтальных. Будем рассматривать только точки пересечения этих прямых. Так как имеется лишь $2^3 = 8$ вариантов раскраски трех точек в два цвета, то найдутся две горизонтальные прямые, на которых лежат одинаково раскрашенные тройки точек. Среди трех точек, раскрашенных в два цвета, найдутся две одинаково раскрашенные точки. Вертикальные прямые, проходящие через эти точки, вместе с ранее выбранными двумя горизонтальными являются искомыми.

21.2. Средние линии правильного треугольника со стороной 1 разбивают его на четыре правильных треугольника со стороной 0,5. Поэтому в одном из них лежат по крайней мере две данные точки, причем эти точки не могут попасть в вершины треугольника. Расстояние между этими точками меньше 0,5.

21.3. Разрежем прямоугольник на пять фигур, как показано на рис. 21.2. В одну из них попадут по крайней мере две точки, а расстояние между любыми

двумя точками каждой из этих фигур не превосходит $\sqrt{5}$.

21.4. К краю шахматной доски 8×8 прилегает 28 полей. Проведем 28 отрезков, соединяющих центры соседних крайних полей. Каждая прямая может пересекать не более двух таких отрезков, поэтому 13 прямых могут пересекать не более 26 отрезков, т. е. найдутся по крайней мере 2 отрезка, не пересекающихся ни с одной из 13 проведенных прямых. Поэтому тринадцатью прямыми нельзя разбить шахматную доску так, чтобы в каждой части лежало не более одной отмеченной точки, поскольку оба конца отрезка, не пересекающегося с прямыми, лежат в одной части.

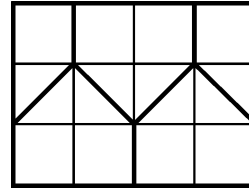


Рис. 21.2

21.5. Пусть A — одна из данных точек. Если все остальные точки лежат в круге S_1 радиуса 1 с центром A , то доказывать больше нечего. Пусть теперь B — данная точка, лежащая вне круга S_1 , т. е. $AB > 1$. Рассмотрим круг S_2 радиуса 1 с центром B . Среди точек A, B и C , где C — любая из данных точек, найдутся две на расстоянии меньше 1, причем это не могут быть точки A и B . Поэтому круги S_1 и S_2 содержат все данные точки, т. е. один из них содержит не менее 13 точек.

21.6. Разрежем данный квадрат на 25 одинаковых квадратиков со стороной 0,2. В один из них попадает не меньше трех точек. Радиус описанной окружности квадрата со стороной 0,2 равен $1/5\sqrt{2} < 1/7$, поэтому его можно накрыть кругом радиуса $1/7$.

21.7. Возьмем 1985 дисков, раскрашенных так же, как второй из наших дисков, и положим их на первый диск так, чтобы они занимали все возможные положения. Тогда над каждым окрашенным сектором первого диска расположено 200 окрашенных секторов, т. е. всего имеется 200^2 пар совпадающих окрашенных секторов. Пусть имеется n положений второго диска, при которых совпадает не менее 21 пары окрашенных секторов. Тогда число совпадений окрашенных секторов не меньше $21n$. Поэтому $21n \leq 200^2$, т. е. $n \leq 1904,8$. Так как n — целое число, то $n \leq 1904$. Следовательно, по крайней мере при $1985 - 1904 = 81$ положениях совпадает не более 20 пар окрашенных секторов.

21.8. Данные прямые не могут пересекать соседние стороны квадрата $ABCD$, так как иначе образуются не два четырехугольника, а треугольник и пятиугольник. Пусть прямая пересекает стороны BC и AD в точках M и N . Трапеции $ABMN$ и $CDNM$ имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как средние линии, т. е. MN делит отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD , в отношении $2 : 3$. Точек, делящих средние линии квадрата в отношении $2 : 3$, имеется ровно четыре. Так как данные девять прямых проходят через эти четыре точки, то через одну из точек проходят по крайней мере три прямые.

21.9. Разобьем деревья на 2500 четверок, как показано на рис. 21.3. В каждой такой четверке нельзя срубить более одного дерева. С другой стороны, можно срубить все деревья, растущие в левых верхних углах квадратов, образованных нашими четверками деревьев. Поэтому наибольшее число деревьев, которые можно срубить, равно 2500.

21.10. Так как диагонали, выходящие из одной вершины, делят n -угольник на $n - 2$ треугольника, $n - 2$ точки необходимы.

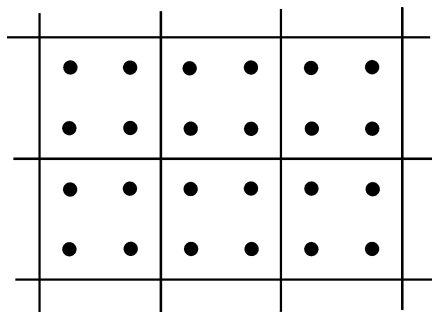


Рис. 21.3

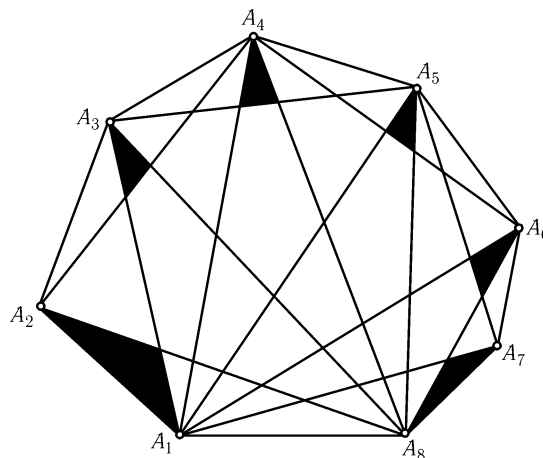


Рис. 21.4

Из рис. 21.4 можно понять, как обойтись $n - 2$ точками: достаточно отметить по одной точке в каждом зачерненном треугольнике. В самом деле, внутри треугольника $A_p A_q A_r$, где $p < q < r$, всегда содержится зачерненный треугольник, прилегающий к вершине A_q .

21.11. Возможны два случая:

1. Точка P лежит на некоторой диагонали AB . Тогда прямые PA и PB совпадают и не пересекают сторон. Остаются $2n - 2$ прямые; они пересекают не более $2n - 2$ сторон.

2. Точка P не лежит на диагонали многоугольника $A_1 A_2 \dots A_{2n}$. Проведем диагональ $A_1 A_{n+1}$. По обе стороны от нее лежит по n сторон. Пусть для определенности точка P лежит внутри многоугольника $A_1 \dots A_{n+1}$ (рис. 21.5). Тогда прямые $PA_{n+1}, PA_{n+2}, \dots, PA_{2n}, PA_1$ (число этих прямых равно $n + 1$) не могут пересекать стороны $A_{n+1} A_{n+2}, A_{n+2} A_{n+3}, \dots, A_{2n} A_1$. Поэтому оставшиеся прямые могут пересекать не более чем $n - 1$ из этих n сторон.

21.12. Количество диагоналей $2n$ -угольника равно $2n(2n - 3)/2 = n(2n - 3)$. Легко проверить, что диагоналей, параллельных данной стороне, не более $n - 2$. Поэтому всего диагоналей, параллельных сторонам, не более $2n(n - 2)$. А так как $2n(n - 2) < n(2n - 3)$, то найдется диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

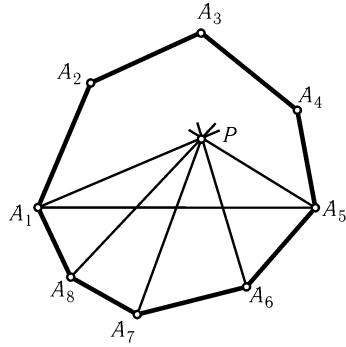


Рис. 21.5

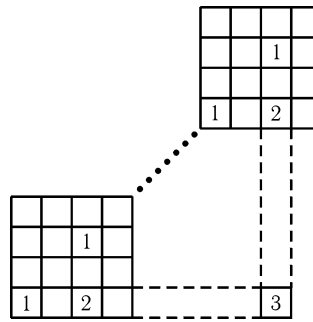


Рис. 21.6

21.13. Предположим, что нет равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, параллельными сторонами клеток, и вершинами одного цвета. Для удобства можно считать, что раскрашены не узлы, а клетки. Разобьем лист на квадраты со стороной 4; тогда на диагонали каждого такого квадрата найдутся две клетки одного цвета. Пусть число n больше количества различных раскрасок квадрата со стороной 4. Рассмотрим квадрат, состоящий из n^2 квадратов со стороной 4. На его диагонали найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4. Возьмем, наконец, квадрат K , на диагонали которого найдутся два одинаково раскрашенных квадрата со стороной $4n$.

Рассмотрев квадрат со стороной $4n$ и в нем два одинаково раскрашенных квадрата со стороной 4, получим четыре клетки первого цвета, две клетки второго цвета и одну клетку третьего цвета (см. рис. 21.6). Аналогично, рассмотрев квадрат K , получим клетку, которая не может быть ни первого, ни второго, ни третьего цвета.

21.14. Возьмем на плоскости произвольную точку и проведем через нее прямые, параллельные данным. Они разделят плоскость на $2n$ углов, в сумме дающих 360° . Поэтому один из этих углов не превосходит $180^\circ/n$.

21.15. Предположим, что сумма длин хорд не меньше πk , и докажем, что тогда найдется диаметр, пересекающий по крайней мере $k+1$ хорду. Так как длина дуги, стягиваемой хордой, больше длины этой хорды, то сумма длин дуг, стягиваемых данными хордами, больше πk . Если мы к этим дугам добавим еще и дуги, симметричные им относительно центра окружности, то сумма длин всех рассматриваемых дуг будет больше $2\pi k$. Поэтому найдется точка, которую покрывает по крайней мере $k+1$ из этих дуг. Диаметр, проведенный через эту точку, пересекает по крайней мере $k+1$ хорду.

21.16. а) Можно. Пусть O — центр правильного пятиугольника $ABCDE$. Тогда круги, вписанные в углы AOC , BOD , COE , DOA и EOB , обладают требуемым свойством.

б) Нельзя. Рассмотрим для каждого из четырех кругов угол, образованный касательными к нему, проходящими через точку O . Так как каждый из этих четырех углов меньше 180° , в сумме они дают меньше $2 \cdot 360^\circ$. Поэтому найдется точка плоскости, покрытая не более чем одним из этих углов. Луч, проведенный через эту точку, пересекает не более одного круга.

21.17. Пусть l_1 — произвольная прямая, перпендикулярная l . Обозначим длины проекций i -го отрезка на прямые l и l_1 через a_i и b_i соответственно. Так

как длина каждого отрезка равна 1, то $a_i + b_i \geq 1$. Поэтому $(a_1 + \dots + a_{4n}) + (b_1 + \dots + b_{4n}) \geq 4n$. Пусть для определенности $a_1 + \dots + a_{4n} \geq b_1 + \dots + b_{4n}$. Тогда $a_1 + \dots + a_{4n} \geq 2n$. Все данные отрезки проектируются на отрезок длиной $2n$, так как они лежат внутри окружности радиуса n . Если бы проекции данных отрезков на прямую l не имели общих точек, то выполнялось бы неравенство $a_1 + \dots + a_{4n} < 2n$. Поэтому на l есть точка, в которую проектируются точки по крайней мере двух данных отрезков. Перпендикуляр к l , проведенный через эту точку, пересекает по крайней мере два данных отрезка.

21.18. Спроецируем все данные окружности на сторону AB квадрата $ABCD$. Проекцией окружности длиной l является отрезок длиной l/π . Поэтому сумма длин проекций всех данных окружностей равна $10/\pi$. Так как $10/\pi > 3 = 3AB$, то на отрезке AB есть точка, принадлежащая проекциям по крайней мере четырех окружностей. Перпендикуляр к AB , проведенный через эту точку, пересекает по крайней мере четыре окружности.

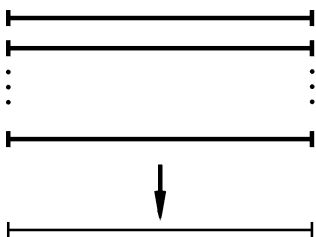


Рис. 21.7

21.19. Разрежем отрезок на десять отрезков длиной 0,1, сложим их стопочкой и спроецируем на такой же отрезок (рис. 21.7). Так как расстояние между любыми двумя окрашенными точками не равно 0,1, то окрашенные точки соседних отрезков не могут проектироваться в одну точку. Поэтому ни в одну точку не могут проектироваться окрашенные точки более чем пяти отрезков. Следовательно, сумма длин проекций окрашенных отрезков (равная сумме их длин) не превосходит $5 \cdot 0,1 = 0,5$.

21.20. Совместим данные окружности и посадим в фиксированную точку одной из них маляра. Будем вращать эту окружность и поручим маляру красить ту точку окружности, мимо которой он проезжает, всякий раз, когда какая-либо отмеченная точка лежит на отмеченной дуге. Нужно доказать, что после полного оборота часть окружности останется неокрашенной. Конечный результат работы маляра будет такой же, как если бы ему поручили на i -м обороте красить окружность, когда i -я отмеченная точка лежит на одной из отмеченных дуг, и сделали бы 100 оборотов. Так как в этом случае при каждом обороте окрашивается меньше 1 см, после 100 оборотов будет окрашено меньше 100 см. Поэтому часть окружности останется неокрашенной.

21.21. Совместим данные окружности и посадим в фиксированную точку одной из них маляра. Будем вращать эту окружность и поручим маляру красить ту точку окружности, мимо которой он проезжает, всякий раз, когда пересекаются какие-либо отмеченные дуги. Нужно доказать, что после полного оборота часть окружности останется неокрашенной. Конечный результат работы маляра будет такой же, как если бы ему поручили на i -м обороте красить окружность, когда i -я отмеченная дуга окружности, на которой сидит маляр, пересекается с какой-либо отмеченной дугой другой окружности, и сделали бы k оборотов.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — угловые величины отмеченных дуг. По условию $\varphi_1 < \alpha, \dots, \varphi_n < \alpha$, где $\alpha = 180^\circ / (k^2 - k + 1)$. За то время, пока пересекаются отмеченные дуги с номерами i и j , маляр окрашивает дугу величиной $\varphi_i + \varphi_j$. Поэтому сумма угловых величин дуг, окрашенных маляром на i -м обороте, не превосходит $k\varphi_i + (\varphi_1 + \dots + \varphi_k)$, а сумма угловых величин дуг, окрашенных за все k оборотов, не превосходит $2k(\varphi_1 + \dots + \varphi_k)$. Заметим, что при этом пересечение дуг с одинаковыми номерами мы учли фактически k раз. В частности,

точка A , мимо которой проезжает маляр в тот момент, когда совпадают отмеченные дуги, заведомо покрашена k раз. Поэтому целесообразно выбросить из рассмотрения те дуги окружности, которые маляр красит в моменты пересечения каких-либо отмеченных дуг с одинаковыми номерами. Так как все эти дуги содержат точку A , то фактически мы выбросили только одну дугу, причем угловая величина этой дуги не превосходит 2α . Сумма угловых величин оставшейся части дуг, окрашенных на i -м обороте, не превосходит $(k-1)\varphi_1 + (\varphi_1 + \dots + \varphi_k - \varphi_i)$, а сумма угловых величин оставшейся части дуг, окрашенных за все k оборотов, не превосходит $(2k-2)(\varphi_1 + \dots + \varphi_k) < (2k^2 - 2k)\alpha$. Часть окружности останется неокрашенной, если выполняется неравенство $(2k^2 - 2k)\alpha \leq 360^\circ - 2\alpha$, т. е. $\alpha \leq 180^\circ / (k^2 - k + 1)$.

21.22. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, удаленных от квадрата со стороной 1 на расстояние не больше 1 (рис. 21.8). Ясно, что круг радиуса 1, центр которого расположен вне этой фигуры, не пересекается с квадратиком. Площадь такой фигуры равна $\pi + 5$. Центр нужного круга должен также находиться на расстоянии больше 1 от сторон большого квадрата, т. е. внутри квадрата со стороной 13. Ясно, что 20 фигур площадью $\pi + 5$ не могут покрыть квадрат со стороной 13, так как $20(\pi + 5) < 13^2$. Круг с центром в непокрытой точке обладает требуемым свойством.

21.23. Приклеим фигуру к клетчатой бумаге произвольным образом, разрежем бумагу по клеткам и сложим их в стопку, перенося их параллельно и не переворачивая. Спроецируем эту стопку на клетку. Проекция частей фигуры не могут покрыть всю клетку, так как их площадь меньше. Вспомним теперь, как была расположена фигура на клетчатой бумаге, и сдвинем клетчатую бумагу параллельно, чтобы ее вершины попали в точки, проецирующиеся в какую-либо непокрытую точку. В результате получим искомое расположение фигуры.

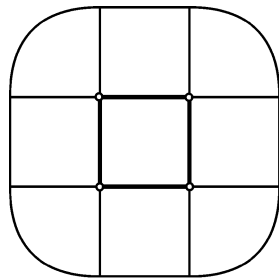


Рис. 21.8

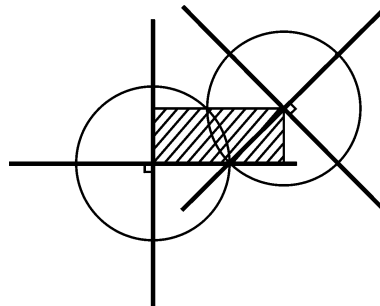


Рис. 21.9

21.24. Для каждого креста рассмотрим круг радиусом $1/2\sqrt{2}$ с центром в центре креста. Докажем, что если пересекаются два таких круга, то пересекаются и сами кресты. Расстояние между центрами пересекающихся равных кругов не превосходит их удвоенного радиуса, поэтому расстояние между центрами соответствующих им крестов не превосходит $1/\sqrt{2}$. Рассмотрим прямоугольник, заданный перекладинами первого креста и центром второго (рис. 21.9). Одна из перекладин второго креста проходит через этот прямоугольник, поэтому она пересекает первый крест, так как длина перекладины равна $1/\sqrt{2}$, а длина диагонали прямоугольника не превосходит $1/\sqrt{2}$. В круге конечного радиуса можно разместить лишь конечное число непесекающихся кругов радиуса $1/2\sqrt{2}$.

21.25. Пусть Φ — данная фигура, S_1, \dots, S_n — круги радиуса 1 с центрами в точках A_1, \dots, A_n . Так как круги S_1, \dots, S_n попарно не пересекаются, то фигуры $V_i = \Phi \cap S_i$ попарно не пересекаются, а значит, сумма их площадей не превосходит площади фигуры Φ , т. е. она меньше π . Пусть O — произвольная точка и W_i — образ фигуры V_i при переносе на вектор $\vec{A_i O}$. Фигуры W_i лежат внутри круга S радиуса 1 с центром O и сумма их площадей меньше площади этого круга. Поэтому некоторая точка B круга S не принадлежит ни одной из фигур W_i . Ясно, что перенос на вектор \vec{BO} искомым.

21.26. Заметим сначала, что точка X принадлежит кольцу с центром O тогда и только тогда, когда точка O принадлежит такому же кольцу с центром X . Поэтому достаточно доказать, что если построить кольца с центрами в данных точках, то одну из точек рассматриваемого круга покроет не менее 10 колец. Рассматриваемые кольца лежат внутри круга радиуса $16 + 3 = 19$, площадь которого равна 361π . Остается заметить, что $9 \cdot 361\pi = 3249\pi$, а суммарная площадь колец равна $650 \cdot 5\pi = 3250\pi$.

21.27. а) Пусть C_n^k — число способов выбрать k элементов из n . Можно проверить, что $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$ (бином Ньютона).

Обозначим через W_m площадь части плоскости, покрытой ровно m фигурами. Эта часть состоит из кусков, каждый из которых покрыт какими-то определенными m фигурами. Площадь каждого такого куска при вычислении M_k учитывается C_m^k раз, так как из m фигур можно образовать C_m^k пересечений k фигур. Поэтому $M_k = C_k^k W_k + C_{k+1}^k W_{k+1} + \dots + C_n^k W_n$. Следовательно, $M_1 - M_2 + M_3 - \dots = C_1^1 W_1 + (C_2^1 - C_2^2) W_2 + \dots + (C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \dots) W_n = W_1 + \dots + W_n$, так как $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots - (-1)^m C_m^m = (-1 + C_m^1 - C_m^2 + \dots) + 1 = -(1 - 1)^m + 1 = 1$. Остается заметить, что $S = W_1 + \dots + W_n$.

б) Согласно задаче а)

$$S - (M_1 - M_2 + \dots + (-1)^{m+1} M_m) = (-1)^{m+2} M_{m+1} + (-1)^{m+3} M_{m+2} + \dots \\ \dots + (-1)^{n+1} M_n = \sum_{i=1}^n ((-1)^{m+2} C_i^{m+1} + \dots + (-1)^{n+1} C_i^n) W_i$$

(считается, что если $k > i$, то $C_i^k = 0$). Поэтому достаточно проверить, что $C_i^{m+1} - C_i^{m+2} + C_i^{m+3} - \dots + (-1)^{m+n+1} C_i^n \geq 0$ при $i \leq n$. Из тождества $(x + y)^i = (x + y)^{i-1} (x + y)$ следует равенство $C_i^j = C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^j$. Поэтому $C_i^{m+1} - C_i^{m+2} + \dots + (-1)^{m+n+1} C_i^n = C_{i-1}^m \pm C_{i-1}^n$. Остается заметить, что $C_{i-1}^n = 0$ при $i \leq n$.

21.28. а) Согласно задаче 21.27, а) $6 = 9 - (S_{12} + S_{23} + S_{13}) + S_{123}$, т. е. $S_{12} + S_{23} + S_{13} = 3 + S_{123} \geq 3$. Поэтому одно из чисел S_{12}, S_{23}, S_{13} не меньше 1.

б) Согласно задаче 21.27, б) $5 \geq 9 - M_2$, т. е. $M_2 \geq 4$. Так как из девяти многоугольников можно образовать $9 \cdot 8/2 = 36$ пар, площадь общей части одной из этих пар не меньше $M_2/36 \geq 1/9$.

21.29. Пусть площадь кафтана равна M , площадь пересечения заплат с номерами i_1, \dots, i_k равна $S_{i_1 \dots i_k}$, а $M_k = \sum S_{i_1 \dots i_k}$. Согласно задаче 21.27, а) $M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 \geq 0$, так как $M \geq S$. Аналогичные неравенства можно написать не только для всего кафтана, но и для каждой заплаты: если мы рассмотрим заплату S_1 как кафтан с заплатами $S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}$, то получим $S_1 - \sum S_{1i} + \sum S_{1ij} - \sum S_{1ijk} + S_{12345} \geq 0$. Сложив такие неравенства для всех пяти заплат, получаем $M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geq 0$ (слагаемое $S_{i_1 \dots i_k}$ входит в неравенства для заплат i_1, \dots, i_k , поэтому в сумму всех неравенств оно входит с коэффициентом

том k). Складывая неравенства $3(M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5) \geq 0$ и $M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geq 0$, получаем неравенство $3M - 2M_1 + M_2 - M_4 + 2M_5 \geq 0$. Прибавив к нему неравенство $M_4 - 2M_5 \geq 0$ (оно следует из того, что S_{12345} входит во все $S_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, т. е. $M_4 \geq 5M_5 \geq 2M_5$), получаем $3M - 2M_1 + M_2 \geq 0$, т. е. $M_2 \geq 2M_1 - 3M \geq 5 - 3 = 2$.

Так как из пяти заплат можно образовать десять пар, площадь пересечения одной из этих пар не меньше $M_2/10 \geq 0,2$.

21.30. Пусть $-1 \leq c \leq 1$. Сдвинем данный отрезок на c вдоль себя, а затем сдвинем его на c в ортогональном направлении. Заштрихованная на рис. 21.10 область соответствует пересечению отрезков A_i и B_j . Ее площадь равна произведению длин этих отрезков. Если рассмотреть все пары отрезков систем A и B , то заштрихованная область будет иметь площадь $p(1-p)$. Поэтому некоторое горизонтальное сечение заштрихованных областей имеет длину не меньше $p(1-p)/2$.

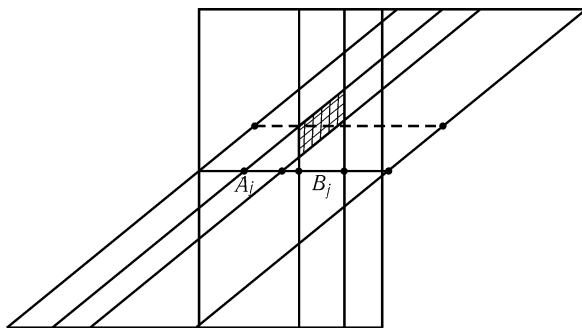


Рис. 21.10

З а м е ч а н и е. Если вместо отрезка рассматривать окружность (и вместо параллельного переноса поворот), то $p(1-p)/2$ можно заменить на $p(1-p)$.

Глава 22

Выпуклые и невыпуклые многоугольники

Основные сведения

1. Есть несколько разных (но эквивалентных) определений выпуклого многоугольника. Приведем наиболее известные и часто встречающиеся из них. Многоугольник называют *выпуклым*, если выполнено одно из следующих условий:

а) он лежит по одну сторону от любой из своих сторон (т. е. продолжения сторон многоугольника не пересекают других его сторон);

б) он является пересечением (т. е. общей частью) нескольких полуплоскостей;

в) любой отрезок с концами в точках, принадлежащих многоугольнику, целиком ему принадлежит.

2. Фигуру называют *выпуклой*, если любой отрезок с концами в точках фигуры целиком принадлежит ей.

3. При решении некоторых задач этой главы используются понятия выпуклой оболочки и опорной прямой.

§1. Выпуклые многоугольники

22.1. На плоскости дано n точек, причем любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого n -угольника.

22.2. На плоскости дано пять точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого четырехугольника.

22.3. На плоскости дано несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

22.4. Среди всех таких чисел n , что любой выпуклый 100 -угольник можно представить в виде пересечения (т. е. общей части) n треугольников,

найдите наименьшее.

22.5. Назовем выпуклый семиугольник *особым*, если три его диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что, слегка пошевелив одну из вершин особого семиугольника, можно получить неособый семиугольник.

22.6*. На плоскости расположены два выпуклых многоугольника F и G . Обозначим через H множество середин отрезков, один конец каждого из которых принадлежит F , а другой G . Докажите, что H — выпуклый многоугольник.

а) Сколько сторон может иметь H , если F и G имеют n_1 и n_2 сторон соответственно?

б) Каков может быть периметр H , если периметры F и G равны P_1 и P_2 соответственно?

22.7*. Докажите, что существует такое число N , что среди любых N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 100 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника.

22.8*. Выпуклый n -угольник разрезан на треугольники непересекающимися диагоналями. Рассмотрим преобразование такого разбиения, при котором треугольники ABC и ACD заменяются на треугольники ABD и BCD . Пусть $P(n)$ — наименьшее число преобразований, за которое любое разбиение можно перевести в любое другое. Докажите, что: а) $P(n) \geq n - 3$; б) $P(n) \leq 2n - 7$; в) $P(n) \leq 2n - 10$ при $n \geq 13$.

* * *

22.9*. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник.

22.10*. Дан выпуклый n -угольник, никакие две стороны которого не параллельны. Докажите, что различных треугольников, о которых идет речь в задаче 22.9, не менее $n - 2$.

22.11*. Точка O лежит внутри выпуклого n -угольника $A_1 \dots A_n$. Докажите, что среди углов $A_i O A_j$ не менее $n - 1$ не острых.

22.12*. В окружность вписан выпуклый n -угольник $A_1 \dots A_n$, причем среди его вершин нет диаметрально противоположных точек. Докажите, что если среди треугольников $A_p A_q A_r$ есть хотя бы один остроугольный, то таких остроугольных треугольников не менее $n - 2$.

§2. Теорема Хелли

22.13*. а) На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.

б) На плоскости дано n выпуклых фигур, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку (*теорема Хелли*).

22.14*. На плоскости дано n точек, причем любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что тогда все n точек можно накрыть кругом радиуса 1.

22.15*. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

22.16*. Дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

§3. Невыпуклые многоугольники

22.17. Верно ли, что любой пятиугольник лежит по одну сторону от не менее чем двух своих сторон?

22.18. а) Нарисуйте многоугольник и точку O внутри его так, чтобы ни одна сторона не была видна из нее полностью.

б) Нарисуйте многоугольник и точку O вне его так, чтобы ни одна сторона не была видна из нее полностью.

22.19. Докажите, что если многоугольник таков, что из некоторой точки O виден весь его контур, то из любой точки плоскости полностью видна хотя бы одна его сторона.

22.20. Докажите, что сумма внешних углов любого многоугольника, прилегающих к меньшим 180° внутренним углам, не меньше 360° .

22.21*. а) Докажите, что у любого n -угольника ($n \geq 4$) есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри его.

б) Выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n -угольник.

22.22*. Чему равно наибольшее число вершин невыпуклого n -угольника, из которых нельзя провести диагональ?

22.23*. Докажите, что любой n -угольник можно разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями.

22.24*. Докажите, что сумма внутренних углов любого n -угольника равна $(n - 2)180^\circ$.

22.25*. Докажите, что количество треугольников, на которые непересекающиеся диагонали разбивают n -угольник, равно $n - 2$.

22.26*. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что по крайней мере две из этих диагоналей отсекают от него треугольники.

22.27*. Докажите, что для любого тринадцатигульника найдется прямая, содержащая ровно одну его сторону, однако при любом $n > 13$ существует n -угольник, для которого это неверно.

22.28*. Чему равно наибольшее число острых углов в невыпуклом n -угольнике?

22.29*. С невыпуклым несамопересекающимся многоугольником производятся следующие операции. Если он лежит по одну сторону от прямой AB , где A и B — несмежные вершины, то одна из частей, на которые контур многоугольника делится точками A и B , отражается относительно середины отрезка AB . Докажите, что после нескольких таких операций многоугольник станет выпуклым.

22.30*. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, сумма которых равна $(n-2)\pi$, удовлетворяют неравенствам $0 < \alpha_i < 2\pi$. Докажите, что существует n -угольник $A_1 \dots A_n$ с углами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ при вершинах A_1, \dots, A_n .

Решения

22.1. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек. Она является выпуклым многоугольником. Нужно доказать, что все данные точки — его вершины. Предположим, что одна из данных точек (точка A) не является вершиной, т. е. лежит внутри или на стороне этого многоугольника. Диагоналями, выходящими из одной вершины, выпуклую оболочку можно разрезать на треугольники; точка A принадлежит одному из них. Вершины этого треугольника и точка A могут быть вершинами выпуклого четырехугольника. Получено противоречие.

22.2. Рассмотрим выпуклую оболочку данных точек. Если она является четырех- или пятиугольником, то все ясно. Допустим теперь, что выпуклая оболочка является треугольником ABC , а точки D и E лежат внутри его. Точка E лежит внутри одного из треугольников ABD , BCD , CAD ; пусть для определенности она лежит внутри треугольника ABD . Обозначим точку пересечения прямых CD и AB через H . Точка E лежит внутри одного из треугольников ADH и BDH . Если, например, E лежит внутри треугольника ADH , то $AEDC$ — выпуклый четырехугольник (рис. 22.1).

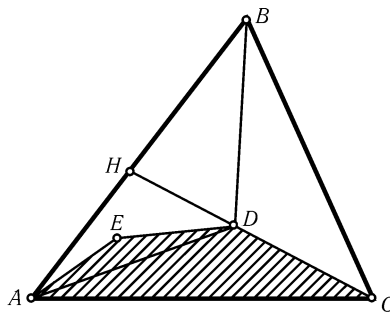


Рис. 22.1

22.3. Пусть выпуклая оболочка вершин данных n -угольников является m -угольником и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — его углы. Так как к каждому углу выпуклой оболочки прилегает угол правильного n -угольника, то $\varphi_i \geq (1 - (2/n))\pi$ (справа стоит величина угла правильного n -угольника). Поэтому $\varphi_1 + \dots + \varphi_m \geq m(1 - (2/n))\pi = (m - (2m/n))\pi$. С другой стороны, $\varphi_1 + \dots + \varphi_m = (m - 2)\pi$. Следовательно, $(m - 2)\pi \geq (m - (2m/n))\pi$, т. е. $m \geq n$.

22.4. Заметим сначала, что 50 треугольников достаточно. В самом деле, пусть Δ_k — треугольник, стороны которого лежат на лучах $A_k A_{k-1}$ и $A_k A_{k+1}$

и который содержит выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_{100}$. Тогда этот многоугольник является пересечением треугольников $\Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_{100}$. С другой стороны, 100-угольник, изображенный на рис. 22.2, нельзя представить в виде пере-

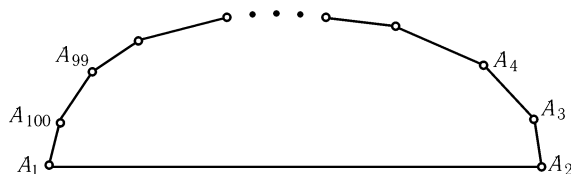


Рис. 22.2

сечения менее чем 50 треугольников. В самом деле, если три его стороны лежат на сторонах одного треугольника, то одна из этих сторон — сторона A_1A_2 . Все стороны этого многоугольника лежат на сторонах n треугольников, поэтому $2n + 1 \geq 100$, т. е. $n \geq 50$.

22.5. Пусть P — точка пересечения диагоналей A_1A_4 и A_2A_5 выпуклого семиугольника $A_1 \dots A_7$. Одна из диагоналей A_3A_7 и A_3A_6 , для определенности диагональ A_3A_6 , не проходит через точку P . Точек пересечения диагоналей шестиугольника $A_1 \dots A_6$ конечное число, поэтому вблизи точки A_7 можно выбрать такую точку A'_7 , что прямые $A_1A'_7, \dots, A_6A'_7$ не проходят через эти точки, т. е. семиугольник $A_1 \dots A'_7$ неособый.

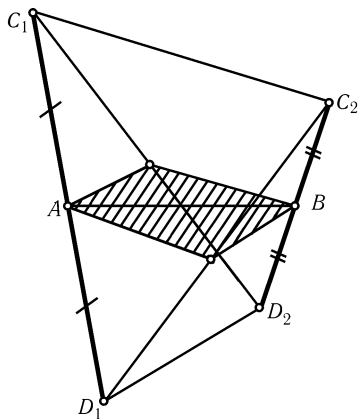


Рис. 22.3

22.6. Докажем сначала, что H — выпуклая фигура. Пусть точки A и B принадлежат H , т. е. A и B — середины отрезков C_1D_1 и C_2D_2 , где C_1 и C_2 принадлежат F , а D_1 и D_2 принадлежат G . Нужно доказать, что весь отрезок AB принадлежит H . Ясно, что отрезки C_1C_2 и D_1D_2 принадлежат F и G соответственно. Геометрическим местом середин отрезков с концами на отрезках C_1C_2 и D_1D_2 является параллелограмм с диагональю AB (рис. 22.3); это следует из того, что геометрическим местом середин отрезков CD , где точка C фиксирована, а точка D перемещается по отрезку D_1D_2 , является средняя линия треугольника CD_1D_2 .

Возьмем на плоскости произвольную ось координат Ox . Опорным множеством многоугольника, соответствующим оси Ox , назовем

множество его точек, проекции которых на эту ось имеют наибольшее значение (рис. 22.4). Выпуклый многоугольник задается своими опорными множествами для всех возможных осей Ox . Если опорными множествами F и G относительно некоторой оси являются отрезки длиной a и b , то опорным множеством H относительно той же оси будет отрезок длиной $(a + b)/2$ (здесь считается, что точка — отрезок с нулевой длиной). Поэтому периметр H равен $(P_1 + P_2)/2$, а число сторон H может принимать любое значение от наибольшего из чисел n_1 и n_2 до $n_1 + n_2$ в зависимости от того, для скольких осей оба опорных множества F и G одновременно являются сторонами, а не вершинами.

22.7. Мы докажем более общее утверждение. Пусть p, q и r — натуральные числа, причем $p, q \geq r$. Тогда существует число $N = N(p, q, r)$, обладающее следующим свойством: если все r -элементные подмножества N -элементного множества S произвольным образом разбиты на два непересекающихся семейства α и β , то либо существует p -элементное подмножество множества S , все r -элементные подмножества которого содержатся в α , либо существует q -элементное подмножество, все r -элементные подмножества которого содержатся в β (теорема Рамсея).

Требуемое утверждение легко следует из теоремы Рамсея. В самом деле, пусть $N = N(n, 5, 4)$ и семейство α состоит из тех четырехэлементных подмножеств N -элементного множества точек, выпуклые оболочки которых — четырехугольники. Тогда существует n -элементное подмножество данного множества точек, выпуклые оболочки любых четырехэлементных подмножеств которого — четырехугольники, так как пятиэлементного подмножества, выпуклые оболочки любых четырехэлементных подмножеств которого — треугольники, не существует (см. задачу 22.2). Остается воспользоваться результатом задачи 22.1.

Докажем теперь теорему Рамсея. Легко проверить, что в качестве $N(p, q, 1)$, $N(r, q, r)$ и $N(p, r, r)$ можно взять числа $p + q - 1$, q и p соответственно. Докажем теперь, что если $p > r$ и $q > r$, то в качестве $N(p, q, r)$ можно взять число $N(p_1, q_1, r-1) + 1$, где $p_1 = N(p-1, q, r)$ и $q_1 = N(p, q-1, r)$. В самом деле, выбросим из $N(p, q, r)$ -элементного множества S один элемент и разобьем $(r-1)$ -элементные подмножества оставшегося множества S' на два семейства: семейство α' (соответственно β') состоит из тех подмножеств, объединения которых с выброшенным элементом входят в семейство α (соответственно β). Тогда либо существует p_1 -элементное подмножество множества S' , все $(r-1)$ -элементные подмножества которого содержатся в семействе α' , либо существует q_1 -элементное подмножество, все $(r-1)$ -элементные подмножества которого содержатся в семействе β' . Рассмотрим первый случай. Так как $p_1 = N(p-1, q, r)$, то либо существует q -элементное подмножество множества S' , все r -элементные подмножества которого лежат в β (тогда эти q элементов искомые), либо существует $(p-1)$ -элементное подмножество множества S' , все r -элементные подмножества которого содержатся в α (тогда эти $p-1$ элементов вместе с выброшенным элементом искомые). Второй случай рассматривается аналогично.

Итак, доказательство теоремы Рамсея можно провести индукцией по r , причем при доказательстве шага индукции используется индукция по $p + q$.

22.8. а) Пусть A и B — соседние вершины n -угольника. Рассмотрим разбиение n -угольника диагоналями, выходящими из вершины A , и разбиение диагоналями, выходящими из вершины B . У этих разбиений нет общих диагоналей, а каждое преобразование изменяет только одну диагональ.

б) Индукцией по n легко доказать, что любое разбиение можно перевести в разбиение диагоналями, выходящими из данной вершины A , не более чем за $n-3$ преобразования. Действительно, при $n=4$ это очевидно. При $n > 4$ всегда можно сделать одно преобразование так, чтобы появилась диагональ, выходящая из вершины A (если такой диагонали не было). Эта диагональ разбивает n -угольник

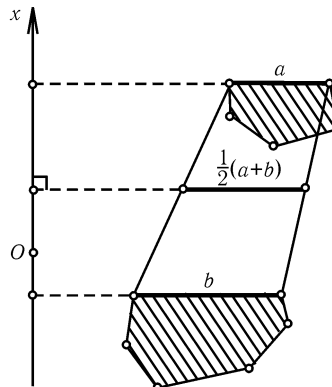


Рис. 22.4

на k -угольник и l -угольник, где $k + l = n + 2$. Остается заметить, что $(k - 3) + (l - 3) + 1 = n - 3$.

Ясно также, что если m диагоналей разбиения уже выходят из вершины A , то нужно не более $n - 3 - m$ преобразований, т. е. m преобразований можно сэкономить.

Если заданы два разбиения, то их можно перевести в разбиение диагоналями, выходящими из вершины A , за $2(n - 3)$ преобразований. Одно преобразование можно сэкономить, выбрав в качестве A вершину, из которой выходит одна из диагоналей одного из разбиений. Поэтому от любого разбиения можно перейти к любому другому не более чем за $2n - 7$ преобразований (пройдя через разбиение диагоналями, выходящими из вершины A).

в) Два разбиения содержат $2(n - 3)$ диагоналей, поэтому в среднем из каждой вершины выходит $\frac{4(n - 3)}{n} = 4 - \frac{12}{n}$ диагоналей двух данных разбиений. При $n \geq 13$ это число больше 3, поэтому найдется вершины, из которой выходят по крайней мере 4 диагонали данных разбиений. Выбрав ее, можно сэкономить не одно, а четыре преобразования.

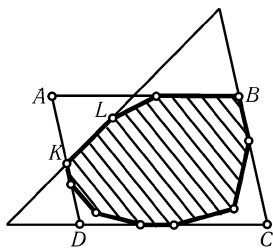


Рис. 22.5

22.9. Если многоугольник не треугольник и не параллелограмм, то у него найдутся две непараллельные несоседние стороны. Продолжив их до пересечения, получим новый многоугольник, содержащий исходный и имеющий меньшее число сторон. После нескольких таких операций получим треугольник или параллелограмм. Если получится треугольник, то все доказано; поэтому будем считать, что получился параллелограмм $ABCD$. На каждой его стороне лежит сторона исходного многоугольника, и одна из его вершин, например A , не принадлежит исходному многоугольнику (рис. 22.5).

Пусть K — ближайшая к A вершина многоугольника, лежащая на AD , а KL — сторона, не лежащая на AD . Тогда многоугольник заключен внутри треугольника, образованного прямыми KL , BC и CD .

22.10. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 3$ утверждение очевидно. Согласно задаче 22.9 существуют прямые a , b и c , являющиеся продолжениями сторон данного n -угольника и образующие треугольник T , который содержит данный n -угольник. Пусть прямая l является продолжением какой-либо другой стороны данного n -угольника. Продолжения всех сторон n -угольника, кроме стороны, лежащей на прямой l , образуют выпуклый $(n - 1)$ -угольник, лежащий внутри треугольника T . По предположению индукции для этого $(n - 1)$ -угольника найдется $n - 3$ нужных треугольника. Кроме того, прямая l и две из прямых a , b и c тоже образуют нужный треугольник.

З а м е ч а н и е. Если точки A_2, \dots, A_n лежат на окружности с центром A_1 , причем $\angle A_2 A_1 A_n < 90^\circ$ и n -угольник $A_1 \dots A_n$ выпуклый, то для этого n -угольника существует ровно $n - 2$ нужных треугольника.

22.11. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 3$ доказательство очевидно. Рассмотрим теперь n -угольник $A_1 \dots A_n$, где $n \geq 4$. Точка O лежит внутри некоторого треугольника $A_p A_q A_r$. Пусть A_k — вершина данного n -угольника, отличная от точек A_p , A_q и A_r . Выбросив вершину A_k , из n -угольника $A_1 \dots A_n$ получим $(n - 1)$ -угольник, к которому можно применить предположение индукции. Кроме того, углы $A_k O A_p$, $A_k O A_q$ и $A_k O A_r$ не могут быть все острыми, так как сумма некоторых двух из этих углов больше 180° .

22.12. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 3$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 4$. Фиксируем один остроугольный треугольник $A_p A_q A_r$ и выбросим вершину A_k , отличную от вершин этого треугольника. К полученному $(n - 1)$ -угольнику можно применить предположение индукции. Кроме того, если, например, точка A_k лежит на дуге $A_p A_q$ и $\angle A_k A_p A_r \leq \angle A_k A_q A_r$, то треугольник $A_k A_p A_r$ остроугольный. В самом деле, $\angle A_p A_k A_r = \angle A_p A_q A_r$, $\angle A_p A_r A_k < \angle A_p A_r A_q$ и $\angle A_k A_p A_r \leq 90^\circ$, а значит, $\angle A_k A_p A_r < 90^\circ$.

22.13. а) Обозначим данные фигуры через M_1, M_2, M_3 и M_4 . Пусть A_i — точка пересечения всех фигур, кроме M_i . Возможны два варианта расположения точек A_i .

1. Одна из точек, например A_4 , лежит внутри треугольника, образованного остальными точками. Так как точки A_1, A_2, A_3 принадлежат выпуклой фигуре M_4 , то и все точки треугольника $A_1 A_2 A_3$ принадлежат M_4 . Поэтому точка A_4 принадлежит M_4 , а остальным фигурам она принадлежит по своему определению.

2. $A_1 A_2 A_3 A_4$ — выпуклый четырехугольник. Пусть C — точка пересечения диагоналей $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$. Докажем, что точка C принадлежит всем данным фигурам. Обе точки A_1 и A_3 принадлежат фигурам M_2 и M_4 , поэтому отрезок $A_1 A_3$ принадлежит этим фигурам. Аналогично отрезок $A_2 A_4$ принадлежит фигурам M_1 и M_3 . Следовательно, точка пересечения отрезков $A_1 A_3$ и $A_2 A_4$ принадлежит всем данным фигурам.

б) Доказательство проведем индукцией по числу фигур. Для $n = 4$ утверждение доказано в предыдущей задаче. Докажем, что если утверждение верно для $n \geq 4$ фигур, то оно верно и для $n + 1$ фигуры. Пусть даны выпуклые фигуры $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$, каждые три из которых имеют общую точку. Рассмотрим вместо них фигуры $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi'_n$, где Φ'_n является пересечением Φ_n и Φ_{n+1} . Ясно, что фигура Φ'_n тоже выпукла. Докажем, что любые три из новых фигур имеют общую точку. Сомнение в этом может возникнуть только для тройки фигур, содержащей Φ'_n , но из предыдущей задачи следует, что фигуры Φ_i, Φ_j, Φ_n и Φ_{n+1} всегда имеют общую точку. Следовательно, по предположению индукции $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi'_n$ имеют общую точку, т. е. $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ имеют общую точку.

22.14. Круг радиуса 1 с центром O покрывает некоторые точки тогда и только тогда, когда круги радиуса 1 с центрами в этих точках содержат точку O . Поэтому наша задача допускает следующую переформулировку: «На плоскости дано n точек, причем любые три круга радиуса 1 с центрами в этих точках имеют общую точку. Докажите, что все эти круги имеют общую точку». Это утверждение очевидным образом следует из теоремы Хелли.

22.15. Рассмотрим пятиугольники, остающиеся при выбрасывании пар соседних вершин семиугольника. Достаточно проверить, что любые три из них имеют общую точку. Для трех пятиугольников выбрасывается не более шести различных вершин, т. е. одна вершина остается. Если вершина A не выброшена, то заштрихованный на рис. 22.6 треугольник принадлежит всем трем пятиугольникам.

22.16. Введем систему координат с осью Oy , параллельной данным отрезкам. Для каждого отрезка рассмотрим множество всех таких точек (a, b) , что прямая $y = ax + b$ его пересекает. Достаточно проверить, что эти множества выпуклые, и применить к ним теорему Хелли. Для отрезка с концами (x_0, y_1) и (x_0, y_2) рассматриваемое множество является полосой, заключенной между параллельными прямыми $ax_0 + b = y_1$ и $ax_0 + b = y_2$.

22.17. Нет, не верно. Пример приведен на рис. 22.7.

22.18. Требуемые многоугольники и точки изображены на рис. 22.8.

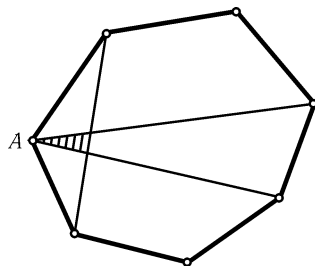


Рис. 22.6

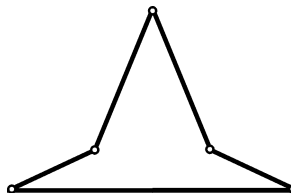


Рис. 22.7

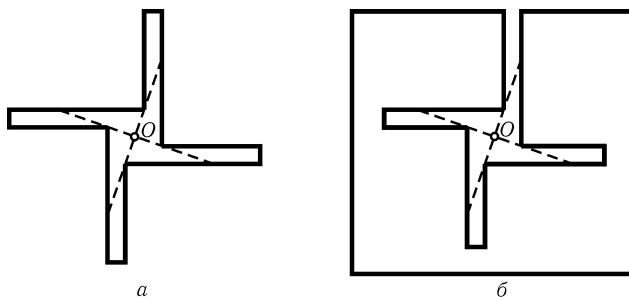


Рис. 22.8

22.19. Пусть из точки O виден весь контур многоугольника $A_1 \dots A_n$. Тогда угол $A_i O A_{i+1}$ не содержит других сторон многоугольника, кроме $A_i A_{i+1}$, и поэтому точка O лежит внутри многоугольника (рис. 22.9). Любая точка X плоскости принадлежит одному из углов $A_i O A_{i+1}$, поэтому из нее видна сторона $A_i A_{i+1}$.

22.20. Так как у выпуклого n -угольника все внутренние углы меньше 180° и их сумма равна $(n-2) \cdot 180^\circ$, то сумма внешних углов равна 360° , т. е. в случае выпуклого многоугольника достигается равенство.

Пусть теперь M — выпуклая оболочка многоугольника N . Каждый угол M содержит меньший 180° угол N , причем угол M может быть только больше угла N , т. е. внешний угол N не меньше внешнего угла M (рис. 22.10). Поэтому, даже ограничившись только углами N , примыкающими к углам M , мы уже получим не меньше 360° .

22.21. а) Если многоугольник выпуклый, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что внутренний угол многоугольника при вершине A больше 180° . Видимая часть стороны видна из точки A под углом меньше 180° , поэтому из точки A видны части по крайней мере двух сторон. Следовательно, существуют лучи, выходящие из точки A , на которых происходит смена (частей) сторон, видимых из точки A (на рис. 22.11 изображены все такие лучи). Каждый из этих лучей задает диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

б) Из рис. 22.12 видно, как построить n -угольник, у которого ровно $n-3$ диагонали лежат внутри его. Остается доказать, что у любого n -угольника есть по крайней мере $n-3$ диагонали. При $n=3$ это утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для всех k -угольников, где $k < n$, и докажем его для n -угольника. Согласно задаче а) n -угольник можно разрезать диагональю на

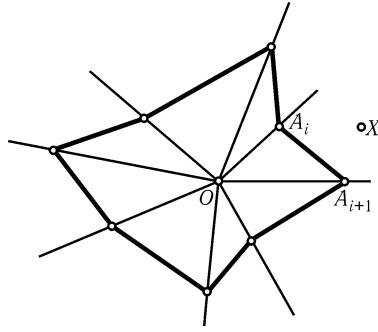


Рис. 22.9

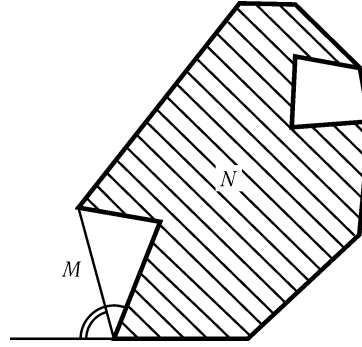


Рис. 22.10

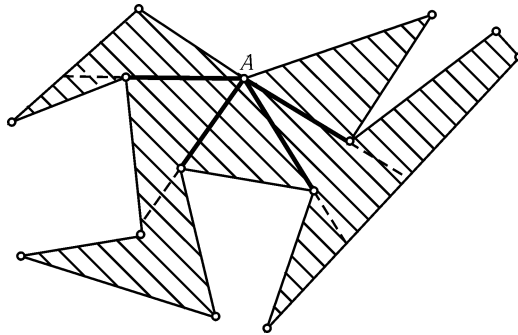


Рис. 22.11

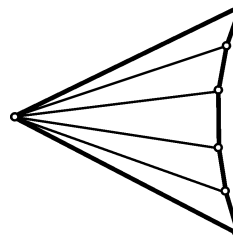


Рис. 22.12

два многоугольника: $(k+1)$ -угольник и $(n-k+1)$ -угольник, причем $k+1 < n$ и $n-k+1 < n$. У них имеется соответственно по крайней мере $(k+1)-3$ и $(n-k+1)-3$ диагоналей, лежащих внутри. Поэтому у n -угольника имеется по крайней мере $1+(k-2)+(n-k-2) = n-3$ диагоналей, лежащих внутри.

22.22. Докажем сначала, что если A и B — соседние вершины n -угольника, то из A или из B можно провести диагональ. Случай, когда внутренний угол многоугольника при вершине A больше 180° , разобран в решении задачи 22.21, а). Предположим теперь, что угол при вершине A меньше 180° . Пусть B и C — вершины, соседние с A . Если внутри треугольника ABC нет других вершин многоугольника, то BC — диагональ, а если P — ближайшая к A вершина многоугольника, лежащая внутри треугольника ABC , то AP — диагональ. Следовательно, число вершин, из которых нельзя провести диагональ, не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$ (т. е. целой части числа $n/2$). С другой стороны, существуют n -угольники, для которых эта оценка достигается (рис. 22.13).

22.23. Докажем это утверждение индукцией по n . При $n=3$ оно очевидно. Предположим, что утверждение доказано для всех k -угольников, где $k < n$, и докажем его для любого n -угольника. Любой n -угольник можно разрезать диагональю на два многоугольника (см. задачу 22.21, а)), причем число вершин у каждого из них строго меньше n , т. е. их можно разрезать на треугольники по предположению индукции.

22.24. Докажем это утверждение по индукции. При $n=3$ оно очевидно. Пред-

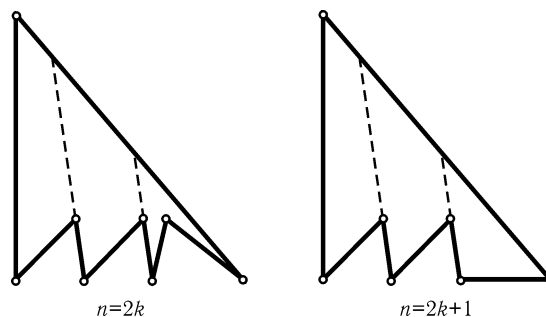


Рис. 22.13

положим, что оно доказано для всех k -угольников, где $k < n$, и докажем его для любого n -угольника. Любой n -угольник можно разрезать диагональю на два многоугольника (см. задачу 22.21, а)). Если число сторон одного из них равно $k + 1$, то число сторон второго равно $n - k + 1$, причем оба числа меньше n . Поэтому суммы углов этих многоугольников равны $(k - 1) \cdot 180^\circ$ и $(n - k - 1) \cdot 180^\circ$ соответственно. Ясно также, что сумма углов n -угольника равна сумме углов этих многоугольников, т. е. она равна $(k - 1 + n - k - 1) \cdot 180^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

22.25. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов многоугольника, т. е. она равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$ (см. задачу 22.24). Поэтому количество треугольников равно $n - 2$.

22.26. Пусть k_i — количество треугольников данного разбиения, у которых ровно i сторон является сторонами многоугольника. Требуется доказать, что $k_2 \geq 2$. Число сторон n -угольника равно n , а число треугольников разбиения равно $n - 2$ (см. задачу 22.25), поэтому $2k_2 + k_1 = n$ и $k_2 + k_1 + k_0 = n - 2$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $k_2 = k_0 + 2 \geq 2$.

22.27. Предположим, что существует тринадцатиугольник, у которого на любой прямой, содержащей сторону, есть еще хотя бы одна сторона. Проведем через все стороны этого тринадцатиугольника прямые. Так как у него тринадцать сторон, то на одной из них лежит нечетное число сторон, т. е. на одной прямой лежат по крайней мере три стороны. У них есть 6 вершин и через каждую вершину проходит прямая, на которой лежат по крайней мере две стороны. Поэтому всего у этого тринадцатиугольника не менее $3 + 2 \cdot 6 = 15$ сторон, чего не может быть.

Для четного $n \geq 10$ требуемый пример — контур «звезды» (рис. 22.14, а); идея построения примера для нечетного n показана на рис. 22.14, б).

22.28. Пусть k — число острых углов n -угольника. Тогда сумма его углов меньше $k \cdot 90^\circ + (n - k) \cdot 360^\circ$. С другой стороны, сумма углов n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$ (см. задачу 22.24), поэтому $k \cdot 90^\circ + (n - k) \cdot 360^\circ > (n - 2) \cdot 180^\circ$, т. е. $3k < 2n + 4$. Следовательно, $k \leq [2n/3] + 1$, где через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x .

Примеры n -угольников, имеющих $[2n/3] + 1$ острых углов, приведены на рис. 22.15.

22.29. При этих операциях векторы сторон многоугольника остаются теми же самыми; изменяется только их порядок (рис. 22.16). Поэтому имеется лишь конечное число многоугольников, которые могут получиться. Кроме того, после каждой операции площадь многоугольника строго возрастает. Следовательно,

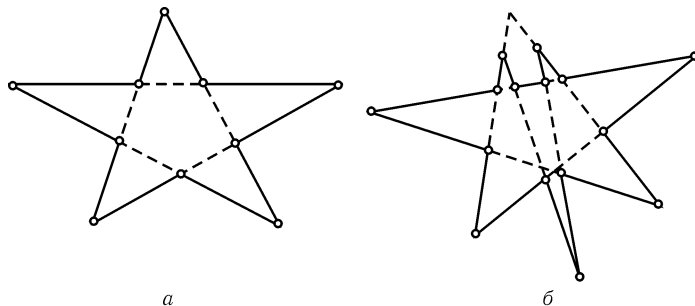


Рис. 22.14

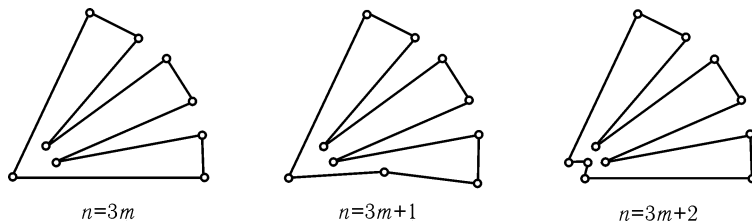


Рис. 22.15

процесс конечен.

22.30. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 3$ утверждение очевидно. Если одно из чисел α_i , равно π , то шаг индукции очевиден, поэтому можно считать, что все числа α_i отличны от π . Если $n \geq 4$, то $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_{i+1}) = 2(n-2)\pi/n \geq \pi$, причем равенство достигается только для четырехугольника. Значит, в любом случае, кроме параллелограмма ($\alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \alpha_3 = \pi - \alpha_4$), найдутся два соседних числа, сумма которых больше π . Более того, найдутся такие числа α_i и α_{i+1} , что $\pi < \alpha_i + \alpha_{i+1} < 3\pi$. В самом деле, если все данные числа меньше π , то можно взять вышеуказанную пару чисел; если же $\alpha_j > \pi$, то можно взять такие числа α_i и α_{i+1} , что $\alpha_i < \pi$ и $\alpha_{i+1} > \pi$. Пусть $\alpha_i^* = \alpha_i + \alpha_{i+1} - \pi$. Тогда $0 < \alpha_i^* < 2\pi$, поэтому по предположению индукции существует $(n-1)$ -угольник M с углами $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i^*, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n$.

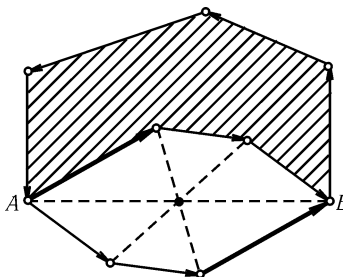


Рис. 22.16

Возможны три случая: 1) $\alpha_i^* < \pi$, 2) $\alpha_i^* = \pi$, 3) $\pi < \alpha_i^* < 2\pi$. В первом случае $\alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\pi$, поэтому одно из этих чисел, например α_i , меньше π . Если $\alpha_{i+1} < \pi$, то отрезем от M треугольник с углами $\pi - \alpha_i, \pi - \alpha_{i+1}, \alpha_i^*$ (рис. 22.17, а), если $\alpha_{i+1} > \pi$, то приставим к M треугольник с углами $\alpha_i, \alpha_{i+1} - \pi, \pi - \alpha_i^*$ (рис. 22.17, б). Во втором случае отрезем от M трапецию с основанием, лежащим на стороне $A_{i-1}A_i^*A_{i+2}$ (рис. 22.17, в). В третьем случае $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$, поэтому одно из этих чисел, например α_i , больше π . Если $\alpha_{i+1} > \pi$, то приставим к M треугольник с углами $\alpha_i - \pi, \alpha_{i+1} - \pi, 2\pi - \alpha_i^*$ (рис. 22.17, г), если $\alpha_{i+1} < \pi$, то

отрежем от M треугольник с углами $2\pi - \alpha_i$, $\pi - \alpha_{i+1}$ и $\alpha_i^* - \pi$ (рис. 22.17, d).

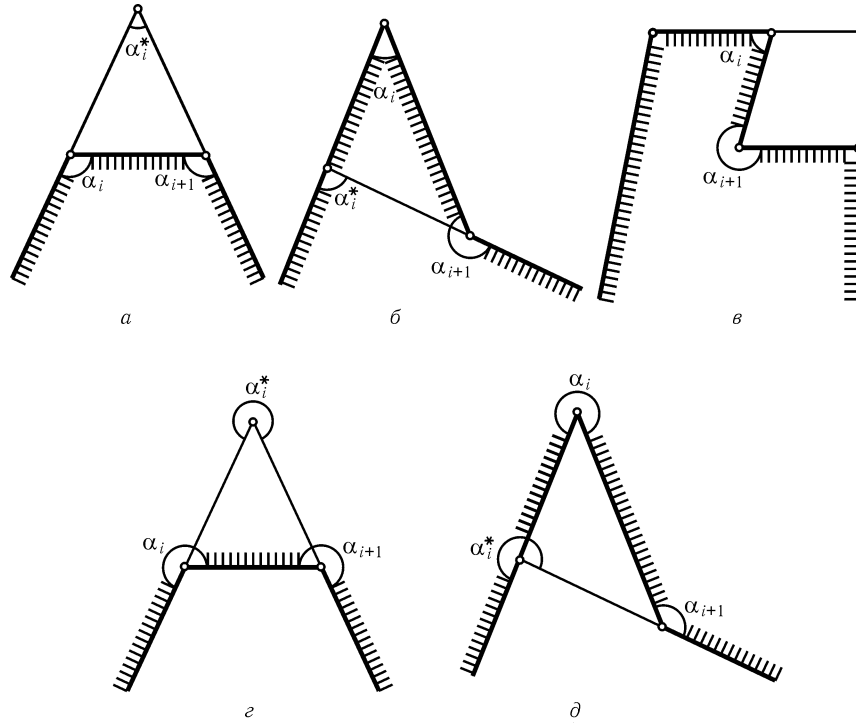


Рис. 22.17

Глава 23

Делимость, инварианты, раскраски

Основные сведения

1. В ряде задач встречается следующая ситуация. Некоторая система последовательно изменяет свое состояние, и требуется выяснить нечто о ее конечном состоянии. Полностью проследить за всеми переходами может оказаться делом сложным, но иногда ответить на требуемый вопрос помогает вычисление некоторой величины, характеризующей состояние системы и сохраняющейся при всех переходах (такую величину называют *инвариантом* для рассматриваемой системы). Ясно, что тогда в конечном состоянии значение инварианта будет то же самое, что и в начальном, т. е. система не может оказаться в состоянии с другим значением инварианта.

2. На практике этот метод сводится к тому, что некоторая величина вычисляется двумя способами: сначала она просто вычисляется в начальном и конечном состояниях, а затем прослеживается ее изменение при последовательных мелких переходах.

3. Наиболее простым и часто встречающимся инвариантом является четность числа; инвариантом может быть также и остаток от деления не только на 2, но и на какое-нибудь другое число.

Для построения инвариантов иногда бывают полезны вспомогательные раскраски, т. е. разбиения рассматриваемых объектов на несколько групп (каждая группа состоит из объектов одного цвета).

§1. Чет и нечет

23.1. Может ли прямая пересекать (во внутренних точках) все стороны невыпуклого: а) $(2n + 1)$ -угольника; б) $2n$ -угольника?

23.2. На плоскости дана замкнутая ломаная с конечным числом звеньев. Прямая l пересекает ее в 1985 точках. Докажите, что существует прямая,

пересекающая эту ломаную более чем в 1985 точках.

23.3. На плоскости лежат три шайбы A , B и C . Хоккеист бьет по одной из шайб так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Могут ли все шайбы вернуться на свои места после 25 ударов?

23.4. Можно ли окрасить на клетчатой бумаге 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число окрашенных соседей? (Соседними клетками считаем те, у которых есть общая сторона.)

23.5* Окружность разбита точками на $3k$ дуг: по k дуг длиной 1, 2 и 3. Докажите, что найдутся две диаметрально противоположные точки деления.

23.6* На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев ломаной *особой*, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особых пар четно.

23.7* Вершины треугольника помечены цифрами 0, 1 и 2. Этот треугольник разбит на несколько треугольников таким образом, что никакая вершина одного треугольника не лежит на стороне другого. Вершинам исходного треугольника оставлены старые пометки, а дополнительные вершины получают номера 0, 1, 2, причем любая вершина на стороне исходного треугольника должна быть помечена одной из пометок вершин этой стороны (рис. 23.1). Докажите, что существует треугольник разбиения, помеченный цифрами 0, 1, 2 (*лемма Шпернера*).

23.8* Вершины правильного $2n$ -угольника $A_1 \dots A_{2n}$ разбиты на n пар. Докажите, что если $n = 4m + 2$ или $n = 4m + 3$, то две пары вершин являются концами равных отрезков.

§2. Делимость

23.9* На рис. 23.2 изображен шестиугольник, разбитый на черные и белые треугольники так, что любые два треугольника имеют либо общую сторону (и тогда они окрашены в разные цвета), либо общую вершину, либо не имеют общих точек, а каждая сторона шестиугольника является стороной одного из черных треугольников. Докажите, что десятиугольник разбить таким образом нельзя.

23.10* Квадратный лист клетчатой бумаги разбит на меньшие квадраты отрезками, идущими по сторонам клеток. Докажите, что сумма длин этих отрезков делится на 4. (Длина стороны клетки равна 1.)

§3. Инварианты

23.11. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли

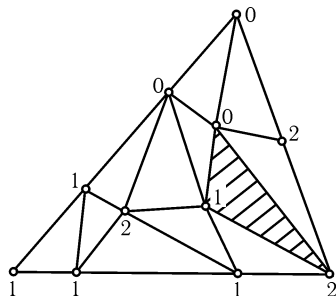


Рис. 23.1

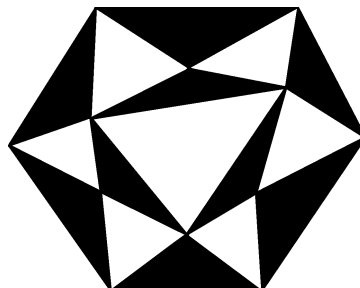


Рис. 23.2

при этом получится доска, у которой ровно одна черная клетка?

23.12. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2 . Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

23.13*. Дан выпуклый $2m$ -угольник $A_1 \dots A_{2m}$. Внутри его взята точка P , не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что точка P принадлежит четному числу треугольников с вершинами в точках A_1, \dots, A_{2m} .

23.14*. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

23.15*. Многоугольник разрезан на несколько многоугольников, причем ни на сторонах исходного многоугольника, ни на сторонах полученных многоугольников не лежат вершины полученных многоугольников. Пусть p — количество полученных многоугольников, q — количество отрезков, являющихся их сторонами, r — количество точек, являющихся их вершинами. Докажите, что $p - q + r = 1$ (формула Эйлера).

23.16*. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у которых не менее двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

23.17*. Докажите, что существуют равновеликие многоугольники, которые нельзя разбить на многоугольники (возможно, невыпуклые), переводящиеся друг в друга параллельным переносом.

23.18*. Докажите, что выпуклый многоугольник нельзя разрезать на конечное число невыпуклых четырехугольников.

23.19*. Даны точки A_1, \dots, A_n . Рассмотрим окружность радиуса R , содержащую некоторые из них. Построим затем окружность радиуса R с центром в центре масс точек, лежащих внутри первой окружности, и т. д. Докажите, что этот процесс остановится, т. е. окружности начнут совпадать.

§4. Вспомогательные раскраски в шахматном порядке

23.20. В каждой клетке доски 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

23.21. Можно ли замостить костями домино размером 1×2 шахматную доску размером 8×8 , из которой вырезаны два противоположных угловых поля?

23.22. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на фигурки в форме буквы T , состоящие из четырех клеток.

23.23*. Детали полотна игрушечной железной дороги имеют форму четверти окружности радиуса R . Докажите, что последовательно присоединяя их концами так, чтобы они плавно переходили друг в друга, нельзя составить путь, у которого начало совпадает с концом, а первое и последнее звенья образуют тупик, изображенный на рис. 23.3.

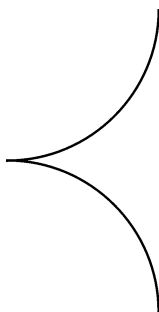


Рис. 23.3

23.24*. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика, играющие в чехарду. При этом если кузнечик A прыгает через кузнечика B , то после прыжка он оказывается на том же расстоянии от него, но, естественно, по другую сторону и на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину квадрата?

23.25*. Дан квадратный лист клетчатой бумаги размером 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами обязательно выходят на границу. Докажите, что кроме вершин квадрата найдется еще узел (внутри квадрата или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

§5. Другие вспомогательные раскраски

23.26. Правильный треугольник разбит на n^2 одинаковых правильных треугольников (рис. 23.4). Часть из них занумерована числами $1, 2, \dots, m$, причем треугольники с последовательными номерами имеют смежные стороны. Докажите, что $m \leq n^2 - n + 1$.

23.27. Дно прямоугольной коробки выложено плитками размером 2×2 и 1×4 . Плитки высыпали из коробки и потеряли одну плитку 2×2 . Вместо нее достали плитку 1×4 . Докажите, что выложить дно коробки плитками теперь не удастся.

23.28. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезано 99 квадратиков размером 2×2 клетки. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.

23.29. Выпуклый n -угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причем в каждой его вершине сходится нечетное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.

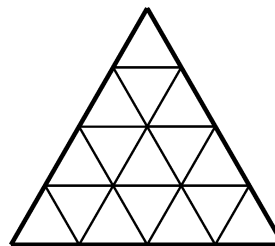


Рис. 23.4

* * *

23.30. Можно ли шашечную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4 ?

23.31. На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что из них можно выбрать не менее $n/4$ клеток, не имеющих общих точек.

23.32*. Докажите, что если вершины выпуклого n -угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leq 4$.

23.33*. Из 16 плиток размером 1×3 и одной плитки 1×1 сложили квадрат со стороной 7. Докажите, что плитка 1×1 лежит в центре квадрата или примыкает к его границе.

23.34*. Картинная галерея представляет собой невыпуклый n -угольник. Докажите, что для обзора всей галереи достаточно $\lceil n/3 \rceil$ сторожей.

§6. Задачи о раскрасках

23.35. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

23.36*. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

23.37*. Плоскость раскрашена в семь цветов. Обязательно ли найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1?

23.38*. Точки сторон правильного треугольника раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

* * *

23.39*. *Триангуляцией* многоугольника называют его разбиение на треугольники, обладающее тем свойством, что эти треугольники либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек (т. е. вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого). Докажите, что треугольники триангуляции можно раскрасить в три цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.

23.40*. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, что все вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета.

23.41*. Несколько кругов одного радиуса положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что круги можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся круга будут разного цвета.

Решения

23.1. а) Пусть прямая пересекает все стороны многоугольника. Рассмотрим все вершины, лежащие по одну сторону от нее. Каждой из этих вершин можно поставить в соответствие пару сторон, из нее выходящих. При этом получим разбиение всех сторон многоугольника на пары. Поэтому если прямая пересекает все стороны m -угольника, то m четно.

б) Из рис. 23.5 видно, как построить $2n$ -угольник и прямую, пересекающую все его стороны, при любом n .

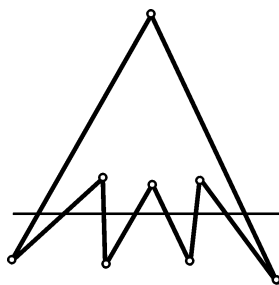


Рис. 23.5

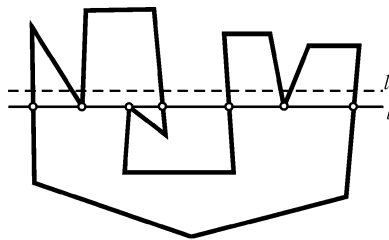


Рис. 23.6

23.2. Прямая l задает две полуплоскости; одну из них будем называть верхней, а другую нижней. Пусть n_1 (соответственно n_2) — число вершин ломаной, лежащих на прямой l , для которых оба выходящих из них звена лежат в верхней (соответственно в нижней) полуплоскости, а m — число всех остальных точек пересечения прямой l и ломаной. Совершим обход ломаной, выйдя из некоторой точки, не лежащей на прямой l , и вернувшись в ту же точку. При этом мы переходим из одной полуплоскости в другую, только проходя через любую из m точек пересечения. Так как мы вернемся в ту же точку, из которой начали обход, то m четно. По условию $n_1 + n_2 + m = 1985$, поэтому число $n_1 + n_2$ нечетно, т. е. $n_1 \neq n_2$. Пусть для определенности $n_1 > n_2$. Проведем тогда в верхней полуплоскости прямую l_1 , параллельную l и удаленную от нее на расстояние меньшее, чем любое ненулевое расстояние от l до вершин ломаной (рис. 23.6). Число точек пересечения ломаной с прямой l_1 равно $2n_1 + m > n_1 + n_2 + m = 1985$, т. е. l_1 — искомая прямая.

23.3. Нет, не могут. После каждого удара изменяется ориентация (т. е. направление обхода) треугольника ABC .

23.4. Пусть на клетчатой бумаге окрашено несколько клеток и n_k — число окрашенных клеток, имеющих ровно k окрашенных соседей. Пусть N — число

общих сторон окрашенных клеток. Так как каждая из них принадлежит ровно двум окрашенным клеткам, то $N = (n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4)/2 = (n_1 + n_3)/2 + n_2 + n_3 + 2n_4$. Поскольку N — целое число, то число $n_1 + n_3$ четно.

Мы доказали, что число окрашенных клеток, имеющих нечетное число окрашенных соседей, всегда четно. Поэтому нельзя окрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число окрашенных соседей.

23.5. Предположим, что окружность разбита на дуги указанным образом, причем диаметрально противоположных точек деления нет. Тогда против концов любой дуги длиной 1 не лежат точки разбиения, поэтому против нее лежит дуга длиной 3. Выбросим одну из дуг длиной 1 и противоположащую ей дугу длиной 3. При этом окружность разбивается на две дуги. Если на одной из них лежит m дуг длиной 1 и n дуг длиной 3, то на другой лежит m дуг длиной 1 и n дуг длиной 3. Общее количество дуг длиной 1 и 3, лежащих на этих двух «больших» дугах, равно $2(k-1)$, поэтому $n+m = k-1$. Так как, кроме дуг длиной 1 и 3, есть дуги только с четной длиной, то четность длины каждой из двух рассматриваемых дуг совпадает с четностью числа $k-1$. С другой стороны, длина каждой из них равна $(6k-1-3)/2 = 3k-2$. Получено противоречие, так как числа $k-1$ и $3k-2$ имеют разную четность.

23.6. Возьмем соседние звенья AB и BC и назовем *уголком* угол, симметричный углу ABC относительно точки B (на рис. 23.7 уголок заштрихован). Такие же уголки можно рассмотреть для всех вершин ломаной. Ясно, что число особых пар равно числу точек пересечения звеньев с уголком. Остается заметить, что число звеньев ломаной, пересекающихся с одним уголком, четно, так как по пути от A к C ломаная входит в уголок столько же раз, сколько выходит из него.

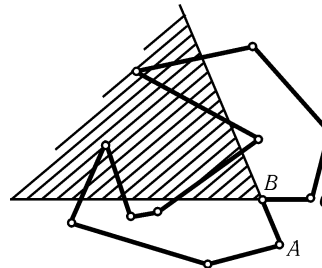


Рис. 23.7

23.7. Рассмотрим отрезки, на которые разбита сторона 01 . Пусть a — число отрезков вида 00 , b — число отрезков вида 01 . Для каждого отрезка рассмотрим число нулей, стоящих на его концах, и сложим все эти числа. В итоге получим $2a+b$. С другой стороны, все «внутренние» нули входят в эту сумму дважды, а есть еще один нуль, стоящий в вершине исходного треугольника. Поэтому число $2a+b$ нечетно, т. е. b нечетно.

Перейдем теперь к разбиению треугольника. Пусть a_1 — общее количество треугольников вида 001 и 011 , а b_1 — число треугольников вида 012 . Для каждого треугольника рассмотрим число его сторон вида 01 и сложим все эти числа. В итоге получим $2a_1 + b_1$. С другой стороны, все «внутренние» стороны входят в эту сумму дважды, а все «граничные» лежат на стороне 01 исходного треугольника и число их нечетно по предыдущему рассуждению. Поэтому число $2a_1 + b_1$ нечетно, в частности, $b_1 \neq 0$.

23.8. Предположим, что все пары вершин задают отрезки разной длины. Отрезку $A_p A_q$ поставим в соответствие наименьшее из чисел $|p-q|$ и $2n-|p-q|$. В результате для данных n пар вершин получим числа $1, 2, \dots, n$; пусть среди этих чисел k четных и $n-k$ нечетных. Нечетным числам соответствуют отрезки $A_p A_q$, где числа p и q разной четности. Поэтому среди вершин остальных отрезков будет k вершин с четными номерами и k вершин с нечетными номерами, причем отрезки соединяют вершины с номерами одной четности. Следовательно, число k четно. Для чисел n вида $4m$, $4m+1$, $4m+2$ и $4m+3$ количество k чет-

ных чисел равно $2m$, $2m$, $2m + 1$ и $2m + 1$ соответственно, поэтому $n = 4m$ или $n = 4m + 1$.

23.9. Предположим, что мы разбили десятиугольник требуемым образом. Пусть n — число сторон черных треугольников, m — число сторон белых треугольников. Так как каждая сторона черного треугольника (кроме сторон многоугольника) является также и стороной белого треугольника, то $n - m = 10$. С другой стороны, оба числа n и m делятся на 3. Получено противоречие.

23.10. Пусть Q — квадратный лист бумаги, $L(Q)$ — сумма длин тех сторон клеток, которые лежат внутри его. Тогда $L(Q)$ делится на 4, так как все рассматриваемые стороны разбиваются на четверки сторон, получающихся друг из друга поворотами на $\pm 90^\circ$ и 180° относительно центра квадрата.

Если квадрат Q разделен на квадраты Q_1, \dots, Q_n , то сумма длин отрезков деления равна $L(Q) - L(Q_1) - \dots - L(Q_n)$. Ясно, что это число делится на 4, так как числа $L(Q), L(Q_1), \dots, L(Q_n)$ делятся на 4.

23.11. При перекрашивании горизонтали или вертикали, содержащей k черных и $8 - k$ белых клеток, получится $8 - k$ черных и k белых клеток. Поэтому число черных клеток изменится на $(8 - k) - k = 8 - 2k$, т. е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраняется, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.

23.12. При перекрашивании квадрата 2×2 , содержащего k черных и $4 - k$ белых клеток, получится $4 - k$ черных и k белых клеток. Поэтому число черных клеток изменится на $(4 - k) - k = 4 - 2k$, т. е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраняется, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.

23.13. Диагонали разбивают многоугольник на несколько частей. Будем называть *соседними* те из них, у которых есть общая сторона. Ясно, что из любой внутренней точки многоугольника можно попасть в любую другую, переходя каждый раз только из соседней части в соседнюю. Часть плоскости, лежащую вне многоугольника, также можно считать одной из этих частей. Число рассматриваемых треугольников для точек этой части равно нулю, поэтому достаточно доказать, что при переходе из соседней части в соседнюю четность числа треугольников сохраняется.

Пусть общая сторона двух соседних частей лежит на диагонали (или стороне) PQ . Тогда всем рассматриваемым треугольникам, кроме треугольников со стороной PQ , обе эти части одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат. Поэтому при переходе из одной части в другую число треугольников изменяется на $k_1 - k_2$, где k_1 — число вершин многоугольника, лежащих по одну сторону от PQ , k_2 — число вершин, лежащих по другую сторону от PQ . Так как $k_1 + k_2 = 2m - 2$, то число $k_1 - k_2$ четно.

23.14. Если хотя бы одно из расстояний между фишками увеличилось бы, то увеличилась бы и сумма всех попарных расстояний между фишками, но сумма всех попарных расстояний между фишками не изменяется при любой перестановке.

23.15. Пусть n — количество вершин исходного многоугольника, n_1, \dots, n_p — количества вершин полученных многоугольников. С одной стороны, сумма углов всех полученных многоугольников равна $\sum_{i=1}^p (n_i - 2)\pi = \sum_{i=1}^p n_i \pi - 2p\pi$. С другой стороны, она равна $2(r - n) + (n - 2)\pi$. Остается заметить, что $\sum_{i=1}^p n_i = 2(q - n) + n$.

23.16. Легко проверить, что длина границы всего заросшего бурьяном участ-

ка (или нескольких участков) не возрастает. В начальный момент она не превосходит $9 \cdot 4 = 36$, поэтому в конечный момент она не может быть равной 40.

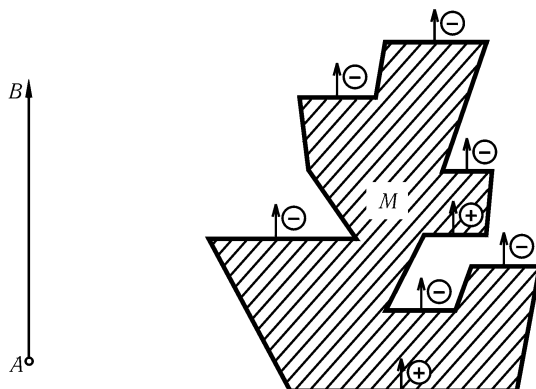


Рис. 23.8

23.17. Фиксируем на плоскости некоторый луч AB . Любому многоугольнику M поставим в соответствие число $F(M)$ (зависящее от AB) следующим образом. Рассмотрим все стороны M , перпендикулярные AB , и каждой из них поставим в соответствие число $\pm l$, где l — длина этой стороны и знак «плюс» берется, если мы, идя от этой стороны в направлении луча AB , попадаем внутрь M , а знак «минус» — если наружу (рис. 23.8). Сумму всех полученных чисел мы и обозначим $F(M)$; если у M нет сторон, перпендикулярных AB , то $F(M) = 0$.

Легко видеть, что если многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2 , то $F(M) = F(M_1) + F(M_2)$, а если M' получен из M параллельным переносом, то $F(M') = F(M)$. Поэтому, если M_1 и M_2 можно разрезать на части, переводящиеся друг в друга параллельным переносом, то $F(M_1) = F(M_2)$.

На рис. 23.9 изображены равные правильные треугольники PQR и PQS и луч AB , перпендикулярный стороне PQ . Легко видеть, что $F(PQR) = a$ и $F(PQS) = -a$, где a — длина сторон этих правильных треугольников. Поэтому равные треугольники PQR и PQS нельзя разрезать на части, переводящиеся друг в друга параллельным переносом.

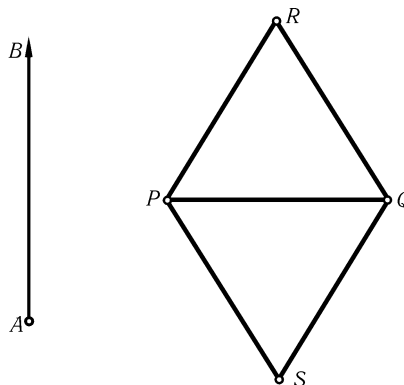


Рис. 23.9

23.18. Предположим, что выпуклый многоугольник M разрезан на невыпуклые четырехугольники M_1, \dots, M_n . Каждому многоугольнику N поставим в соответствие число $f(N)$, равное разности между суммой его внутренних углов, меньших 180° , и суммой углов, дополняющих до 360° его углы, большие 180° . Сравним числа $A = f(M)$ и $B = f(M_1) + \dots + f(M_n)$. Рассмотрим для этого все точки, являющиеся вершинами четырехугольников M_1, \dots, M_n . Их можно разбить на четыре типа.

1. Вершины многоугольника M . Эти точки дают одинаковые вклады в A и B .
2. Точки на сторонах многоугольника M или M_i . Вклад каждой такой точки в B на 180° больше, чем в A .
3. Внутренние точки многоугольника, в которых сходятся углы четырехугольника, меньше 180° . Вклад каждой такой точки в B на 360° больше, чем в A .
4. Внутренние точки многоугольника M , в которых сходятся углы четырехугольников, причем один из них больше 180° . Такие точки дают нулевые вклады в A и B .

В итоге получаем $A \leq B$. С другой стороны, $A > 0$, а $B = 0$. Неравенство $A > 0$ очевидно, а для доказательства равенства $B = 0$ достаточно проверить, что если N — невыпуклый четырехугольник, то $f(N) = 0$. Пусть углы N равны $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \delta$. У любого невыпуклого четырехугольника ровно один угол больше 180° , поэтому $f(N) = \beta + \gamma + \delta - (360^\circ - \alpha) = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 360^\circ = 0^\circ$.

Получено противоречие, поэтому выпуклый многоугольник нельзя разрезать на конечное число невыпуклых четырехугольников.

23.19. Пусть S_n — окружность, построенная на n -м шаге, O_n — ее центр. Рассмотрим величину $F_n = \sum (R^2 - O_n A_i^2)$, где суммирование ведется только по точкам, оказавшимся внутри окружности S_n . Будем обозначать точки, лежащие внутри окружностей S_n и S_{n+1} , буквами B с индексом; точки, лежащие внутри окружности S_{n+1} , но вне окружности S_n , буквами C , а точки, лежащие внутри окружности S_n , но вне окружности S_{n+1} , буквами D . Тогда $F_n = \sum (R^2 - O_n B_i^2) + \sum (R^2 - O_n C_i^2)$ и $F_{n+1} = \sum (R^2 - O_{n+1} B_i^2) + \sum (R^2 - O_{n+1} D_i^2)$. Так как точка O_{n+1} является центром масс системы точек B и C , то $\sum O_n B_i^2 + \sum O_n C_i^2 = q O_n O_{n+1}^2 + \sum O_{n+1} B_i^2 + \sum O_{n+1} C_i^2$, где q — общее количество точек B и C . Следовательно, $F_{n+1} - F_n = q O_n O_{n+1}^2 + \sum (R^2 - O_{n+1} D_i^2) - \sum (R^2 - O_{n+1} C_i^2)$. Все три слагаемых неотрицательны, поэтому $F_{n+1} \geq F_n$. В частности, $F_n \geq F_1 > 0$, т. е. $q > 0$.

Центров масс различных наборов данных точек конечное число, поэтому различных положений окружностей S_i конечное число. Следовательно, $F_{n+1} = F_n$ для некоторого n , а значит, $q O_n O_{n+1}^2 = 0$, т. е. $O_n = O_{n+1}$.

23.20. Так как общее число клеток шахматной доски 5×5 клеток нечетно, то черных и белых клеток не может быть поровну. Пусть для определенности черных клеток больше. Тогда жуков, сидящих на белых клетках, меньше, чем черных клеток. Поэтому хотя бы одна из черных клеток останется пустой, так как на черные клетки переползают только жуки, сидящие на белых клетках.

23.21. Вырезаны поля одного цвета, пусть для определенности черного. Поэтому остается 32 белых и 30 черных клеток. Так как кость домино всегда накрывает одну белую и одну черную клетку, то костями домино нельзя замостить шахматную доску 8×8 клеток, из которой вырезаны два противоположных угловых поля.

23.22. Предположим, что доска 10×10 клеток разбита на такие фигурки. Каждая фигурка содержит либо 1, либо 3 черные клетки, т. е. всегда нечетное число. Самых фигурок должно быть $100/4 = 25$ штук. Поэтому они содержат нечетное число черных клеток, а всего черных клеток $100/2 = 50$ штук. Получено противоречие.

23.23. Разрежем плоскость на одинаковые квадраты со стороной $2R$ и раскрасим их в шахматном порядке. Впишем в каждый из них окружность. Тогда детали полотна можно считать расположенными на этих окружностях, причем движение поезда, идущего из начала в конец, происходит в белых клетках по часовой стрелке, а в черных — против (или наоборот; см. рис. 23.10). Поэто-

му тупик образоваться не может, так как по обоим звеньям тупика движение происходит в одну сторону.

23.24. Рассмотрим решетку, изображенную на рис. 23.11, и раскрасим ее в два цвета, как показано на этом рисунке (белые узлы на этом рисунке не закрашены; исходный квадрат заштрихован, причем кузнечики сидят в его белых вершинах). Докажем, что кузнечики могут попасть только в белые узлы, т. е. при симметрии

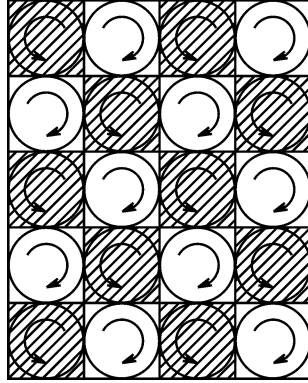


Рис. 23.10

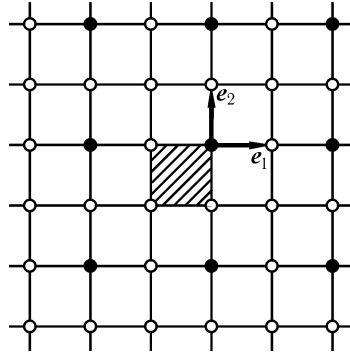


Рис. 23.11

относительно белого узла белый узел переходит в белый. Для этого достаточно доказать, что при симметрии относительно белого узла черный узел переходит в черный. Пусть A — черный узел, B — белый, а A_1 — образ точки A при симметрии относительно B . Точка A_1 является черным узлом тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AA_1} = 2m\mathbf{e}_1 + 2n\mathbf{e}_2$, где m и n — целые числа. Ясно, что $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AB} = 2(m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2)$, поэтому A_1 — черный узел. Таким образом, кузнечик не может попасть в четвертую вершину квадрата.

23.25. Раскрасим узлы клетчатой бумаги в шахматном порядке (рис. 23.12). Так как концы любого единичного отрезка разноцветны, то ломаная с одноцветными концами содержит нечетное число узлов, а с разноцветными — четное. Предположим, что из всех узлов границы (кроме вершин квадрата) выходят ломаные. Докажем, что тогда все ломаные вместе содержат четное число узлов. Для этого достаточно доказать, что число ломаных с одноцветными концами четно. Пусть на границе квадрата расположено $4m$ белых и $4n$ черных узлов (вершины квадрата не учитываются). Обозначим число ломаных, у которых оба конца белые, через k . Тогда имеется $4m - 2k$ ломаных с разноцветными концами и $[4n - (4m - 2k)]/2 = 2(n - m) + k$ ломаных с черными концами. Поэтому ломаных с одноцветными концами будет $k + 2(n - m) + k = 2(n - m + k)$ — четное число. Остается заметить, что квадратный лист бумаги размером 100×100 клеток содержит нечетное число узлов. Поэтому ломаные, содержащие четное число узлов, не могут проходить через все узлы.

23.26. Раскрасим треугольники, как показано на рис. 23.13. Тогда черных треугольников будет $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$, а белых $1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$. Ясно, что два треугольника с последовательными номерами разноцветны. Поэтому среди занумерованных треугольников черных может быть только на 1 больше, чем белых. Следовательно, общее число занумерованных треугольников не превосходит $n(n - 1) + 1$.

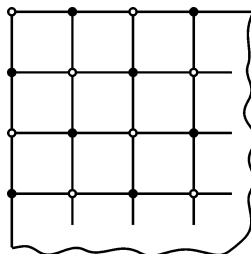


Рис. 23.12

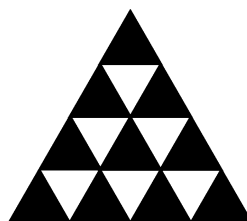


Рис. 23.13

23.27. Раскрасим дно коробки в два цвета, как показано на рис. 23.14. Тогда каждая плитка 2×2 покрывает ровно одну черную клетку, а плитка 1×4 покрывает 2 или 0. Поэтому четность числа черных клеток dna коробки совпадает с четностью числа плиток 2×2 . Так как при замене плитки 2×2 на плитку 1×4 четность числа плиток 2×2 изменится, выложить дно коробки плитками не удастся.

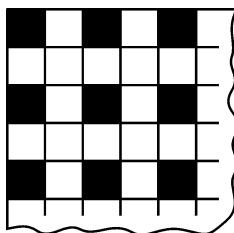


Рис. 23.14

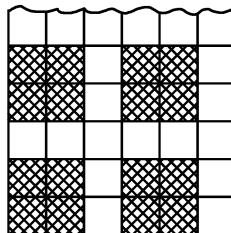


Рис. 23.15

23.28. Заштрихуем на данном квадратном листе бумаги квадратики 2×2 так, как показано на рис. 23.15. При этом получится 100 заштрихованных квадратиков. Каждый вырезанный квадратик задевает ровно один заштрихованный квадратик, поэтому хотя бы один заштрихованный квадратик остается целым, и его можно вырезать.

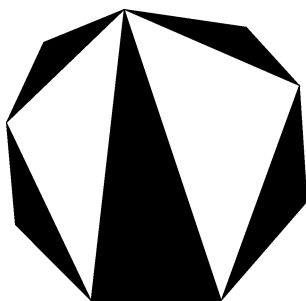


Рис. 23.16

23.29. Если многоугольник разбит на части несколькими диагоналями, то эти части можно окрасить в два цвета так, чтобы части, имеющие общую сторону, были разного цвета. Это можно сделать следующим образом. Будем последовательно проводить диагонали. Каждая диагональ разбивает многоугольник на две части. В одной из них сохраняем раскраску, а другую перекрашиваем, заменяя везде белый цвет на черный, а черный — на белый. Проведем эту операцию для всех нужных диагоналей, получим требуемую раскраску. Так как в нашем случае в каждой вершине сходится нечетное число треугольников, то при такой раскраске все стороны многоугольника будут принадлежать треугольникам одного цвета, например черного (рис. 23.16). Обозначим число сторон белых треугольников через m . Ясно, что m делится на 3. Так как каждая сторона

белого треугольника является также и стороной черного треугольника, а все стороны многоугольника являются сторонами черных треугольников, то число сторон черных треугольников равно $n + m$. Поэтому $n + m$ делится на 3, а поскольку m делится на 3, то и n делится на 3.

23.30. Раскрасим доску в четыре цвета, как показано на рис. 23.17. Легко сосчитать, что клеток второго цвета 26, а четвертого 24. Каждая плитка 1×4 накрывает по одной клетке каждого цвета. Поэтому плитками 1×4 нельзя замостить доску 10×10 , так как иначе клеток каждого цвета было бы поровну.

23.31. Раскрасим клетчатую бумагу в четыре цвета, как показано на рис. 23.18. Среди данных n клеток найдется не менее $n/4$ одноцветных клеток, а одноцветные клетки не имеют общих точек.

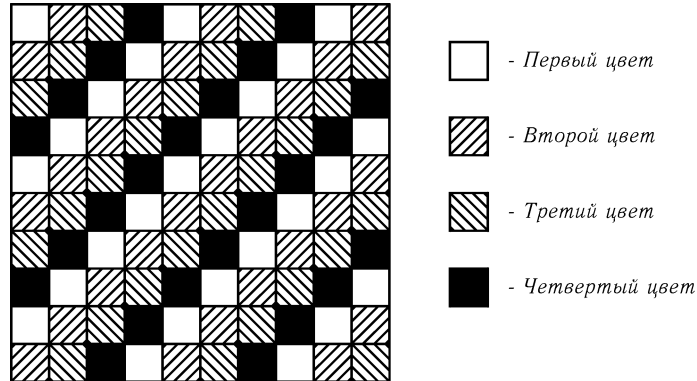


Рис. 23.17

23.32. Раскрасим узлы клетчатой бумаги в четыре цвета в том же порядке, в каком раскрашены клетки на рис. 23.18. Если $n \geq 5$, то найдутся две одноцветные вершины n -угольника. Середина отрезка с концами в одноцветных узлах является узлом. Так как n -угольник выпуклый, то середина отрезка с концами в его вершинах лежит либо внутри его, либо на стороне.

23.33. Разобьем полученный квадрат на клетки размером 1×1 и раскрасим их в три цвета, как показано на рис. 23.19. Легко проверить, что плитки 1×3 можно разбить на два типа: плитка 1-го типа накрывает одну клетку 1-го цвета и две клетки 2-го цвета, а плитка 2-го типа накрывает одну клетку 2-го цвета и две клетки 3-го цвета. Предположим, что все клетки 1-го цвета накрыты плитками 1×3 . Тогда плиток 1-го типа 9, а плиток 2-го типа 7. Следовательно, они накрывают $9 \cdot 2 + 7 = 25$ клеток 2-го цвета и $7 \cdot 2 = 14$ клеток 3-го цвета. Получено противоречие, поэтому одна из клеток 1-го цвета накрыта плиткой 1×1 .

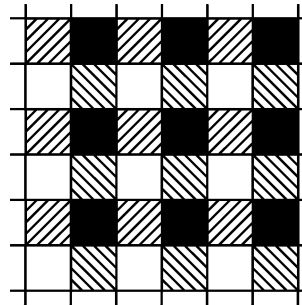


Рис. 23.18

23.34. Разрежем данный n -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (см. задачу 22.23). Вершины n -угольника можно раскрасить в три цвета так, что все вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета (см. задачу 23.40). Вершин какого-нибудь цвета будет не более $\lfloor n/3 \rfloor$;

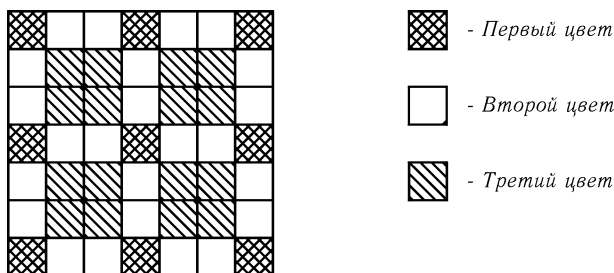


Рис. 23.19

сторожей достаточно поставить в этих вершинах.

23.35. Рассмотрим правильный треугольник со стороной 1. Все три его вершины не могут быть разного цвета, поэтому две вершины имеют один цвет; расстояние между ними равно 1.

23.36. Предположим, что любые две точки, лежащие на расстоянии 1, окрашены в разные цвета. Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной 1; все его вершины разного цвета. Пусть точка A_1 симметрична A относительно прямой BC . Так как $A_1B = A_1C = 1$, то цвет точки A_1 отличен от цветов точек B и C , т. е. она окрашена в тот же цвет, что и точка A . Эти рассуждения показывают, что если $AA_1 = \sqrt{3}$, то точки A и A_1 одного цвета. Поэтому все точки окружности радиуса $\sqrt{3}$ с центром A одного цвета. Ясно, что на этой окружности найдутся две точки, расстояние между которыми равно 1. Получено противоречие.

23.37. Приведем пример раскраски плоскости в семь цветов, для которой расстояние между любыми двумя одноцветными точками не равно 1. Разобьем плоскость на равные шестиугольники со стороной a и окрасим их, как показано на рис. 23.20 (точки, принадлежащие двум или трем шестиугольникам, можно красить в любой из цветов этих шестиугольников). Наибольшее расстояние между точками одного цвета, лежащими в одном шестиугольнике, не превосходит $2a$, а наименьшее расстояние между точками одного цвета, лежащими в разных шестиугольниках, не меньше длины отрезка AB (см. рис. 23.20). Ясно, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4a^2 + 3a^2 = 7a^2 > (2a)^2$. Поэтому, если $2a < 1 < \sqrt{7}a$, т. е. $1/\sqrt{7} < a < 1/2$, то расстояние между точками одного цвета не может быть равно 1.

23.38. Предположим, что нет прямоугольного треугольника с вершинами одного цвета. Разделим каждую сторону правильного треугольника двумя точками на три равные части. Эти точки образуют правильный шестиугольник. Если две его противоположные вершины одного цвета, то все остальные вершины будут второго цвета, а значит, есть прямоугольный треугольник с вершинами второго цвета. Следовательно, противоположные вершины шестиугольника разноцветные. Поэтому найдутся две соседние разноцветные вершины; противоположные им вершины тоже разноцветные. Одна из этих пар разноцветных вершин лежит на стороне треугольника. Точки этой стороны, отличные от вершин шестиугольника, не могут быть ни первого, ни второго цвета. Получено противоречие.

23.39. Докажем это утверждение индукцией по числу треугольников триангуляции. Для одного треугольника требуемая раскраска существует. Предположим теперь, что можно раскрасить требуемым образом любую триангуляцию, состоя-

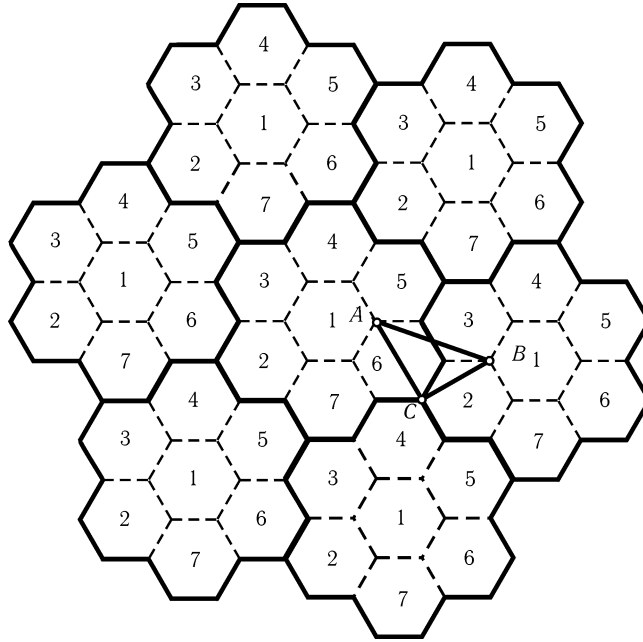


Рис. 23.20

щую менее чем из n треугольников, и докажем, что тогда можно раскрасить любую триангуляцию, состоящую из n треугольников. Выбросим треугольник, одна из сторон которого лежит на стороне триангулированной фигуры. Оставшуюся часть можно раскрасить по предположению индукции (она, конечно, может состоять из нескольких кусков, но это не мешает). У выброшенного треугольника только две стороны могут граничить с остальными треугольниками. Поэтому его можно окрасить в цвет, отличный от цветов двух соседних с ним треугольников.

23.40. Доказательство аналогично решению задачи 23.39. Главное отличие заключается в том, что выбрасывать нужно треугольник, выходящий двумя сторонами на границу многоугольника (см. задачу 22.26).

23.41. Доказательство проведем индукцией по числу кругов n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть M — любая точка, O — наиболее удаленный от нее центр круга. Тогда круг с центром O касается не более трех других данных кругов. Выбросим его и раскрасим остальные круги согласно предположению индукции. Этот круг можно окрасить цветом, отличным от цветов касающихся его кругов.

Глава 24

Целочисленные решетки

Основные сведения

Рассмотрим на плоскости систему прямых, заданных уравнениями $x = m$ и $y = n$, где m и n — целые числа. Эти прямые образуют решетку квадратов или *целочисленную решетку*. Вершины этих квадратов, т. е. точки с целочисленными координатами, называют *узлами* целочисленной решетки.

§1. Многоугольники с вершинами в узлах решетки

24.1*. Существует ли правильный треугольник с вершинами в узлах целочисленной решетки?

24.2*. Докажите, что при $n \neq 4$ правильный n -угольник нельзя расположить так, чтобы его вершины оказались в узлах целочисленной решетки.

24.3*. Можно ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами расположить так, чтобы его вершины лежали в узлах целочисленной решетки, но ни одна из его сторон не проходила по линиям решетки?

24.4*. Существует ли замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев равной длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки?

24.5*. Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах целочисленной решетки. Внутри его лежит n узлов решетки, а на границе m узлов. Докажите, что его площадь равна $n + m/2 - 1$ (*формула Пика*).

24.6*. Вершины треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решетки, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри его есть ровно один узел O . Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

См. также задачу 23.32.

§2. Разные задачи

24.7*. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток окрашено в черный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполняться два условия: 1) все черные клетки лежат в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $0,2$ и не более $0,8$ площади K .

24.8*. Начало координат является центром симметрии выпуклой фигуры площадью более 4 . Докажите, что эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат (Минковский).

24.9*. Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r . Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $1/r$.

24.10*. Внутри выпуклой фигуры с площадью S и полупериметром p лежит n узлов решетки. Докажите, что $n > S - p$.

24.11*. Докажите, что для любого n существует окружность, внутри которой лежит ровно n целочисленных точек.

24.12*. Докажите, что для любого n существует окружность, на которой лежит ровно n целочисленных точек.

Решения

24.1. Предположим, что вершины правильного треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решетки. Тогда тангенсы всех углов, образованных сторонами AB и AC с линиями решетки, рациональны. При любом положении треугольника ABC сумма или разность некоторых двух таких углов α и β равна 60° . Следовательно, $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) / (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$ — рациональное число. Получено противоречие.

24.2. Для $n = 3$ и $n = 6$ утверждение вытекает из предыдущей задачи, поэтому будем в дальнейшем считать, что $n \neq 3, 4, 6$. Предположим, что существуют правильные n -угольники с вершинами в узлах целочисленной решетки ($n \neq 3, 4, 6$). Среди всех таких n -угольников можно выбрать тот, у которого длина стороны наименьшая. (Для доказательства достаточно заметить, что если a — длина отрезка с концами в узлах решетки, то $a = \sqrt{n^2 + m^2}$, где n и m — целые числа, поэтому длина отрезка с концами в узлах решетки может принимать лишь конечное число различных значений, меньших данного.) Пусть $\overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{A_{i+1} A_{i+2}}$. Тогда $B_1 \dots B_n$ — правильный n -угольник, вершины которого лежат в узлах целочисленной решетки, а его сторона меньше стороны n -угольника $A_1 \dots A_n$. Для $n = 5$ это видно из рис. 24.1, а для $n \geq 7$ — из рис. 24.2. Получено противоречие с выбором n -угольника $A_1 \dots A_n$.

24.3. Легко проверить, что треугольник с вершинами в точках с координатами $(0, 0)$, $(12, 16)$ и $(-12, 9)$ обладает требуемыми свойствами.

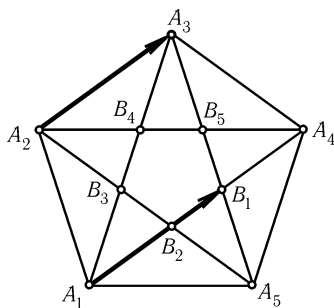


Рис. 24.1

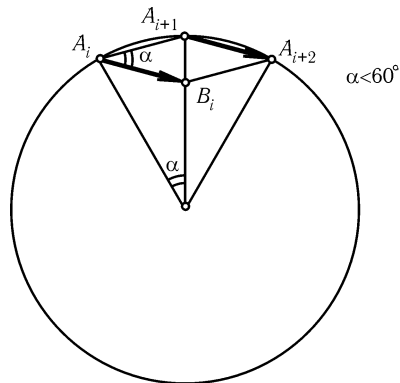


Рис. 24.2

24.4. Предположим, что существует замкнутая ломаная $A_1 \dots A_n$ с нечетным числом звеньев равной длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки. Пусть a_i и b_i — координаты проекций вектора $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ на горизонтальную и вертикальную оси. Обозначим длину звена ломаной через c . Тогда $c^2 = a_i^2 + b_i^2$, поэтому c^2 при делении на 4 дает остаток 0, 1 или 2. Если c^2 делится на 4, то a_i и b_i делятся на 4 (это доказывается простым перебором всех возможных остатков, которые a_i и b_i дают при делении на 4). Поэтому при гомотетии с центром A_1 и коэффициентом 0,5 наша ломаная перейдет в ломаную с меньшей длиной звена, вершины которой по-прежнему лежат в узлах решетки. После нескольких таких операций приходим к ломаной, у которой c^2 не делится на 4, т. е. дает остаток 1 или 2. Разберем эти варианты, предварительно заметив, что $a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_m = 0$.

1. c^2 при делении на 4 дает остаток 2. Тогда числа a_i и b_i оба нечетны, поэтому число $a_1 + \dots + a_m$ нечетно и не может равняться нулю.

2. c^2 при делении на 4 дает остаток 1. Тогда одно из чисел a_i и b_i нечетно, а другое четно, поэтому число $a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_m$ нечетно и не может равняться нулю.

24.5. Каждому многоугольнику N с вершинами в узлах целочисленной решетки поставим в соответствие число $f(N) = n + m/2 - 1$. Пусть многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2 с вершинами в узлах решетки. Докажем, что если формула Пика верна для двух из многоугольников M , M_1 и M_2 , то она верна и для третьего. Для этого достаточно доказать, что $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$. Узлы, по которым разрез не проходит, дают одинаковые вклады в $f(M)$ и в $f(M_1) + f(M_2)$. «Неконцевые» узлы разреза дают в $f(M)$ вклад 1, а в $f(M_1)$ и в $f(M_2)$ — по 0,5. Каждый же из двух концевых узлов разреза дает в $f(M)$, $f(M_1)$ и $f(M_2)$ вклады по 0,5, поэтому вклад концевых узлов в $f(M)$ на 1 меньше, чем в $f(M_1) + f(M_2)$. Так как в $f(M)$ из всех вкладов вычитается 1, а в $f(M_1) + f(M_2)$ вычитается 2, то $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$.

Докажем теперь справедливость формулы Пика для произвольного треугольника. Если M — прямоугольник со сторонами длиной p и q , направленными по линиям решетки, то

$$f(M) = (p-1)(q-1) + \frac{2(p+q)}{2} - 1 = pq,$$

т. е. для M формула Пика справедлива. Разрезав прямоугольник M диагональю на треугольники M_1 и M_2 и воспользовавшись тем, что $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$ и $f(M_1) = f(M_2)$, легко доказать справедливость формулы Пика для любого прямоугольного треугольника с катетами, направленными по линиям решетки. Отрезав несколько таких треугольников от прямоугольника, можно получить любой треугольник (рис. 24.3).

Для завершения доказательства формулы Пика остается заметить, что любой многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники.

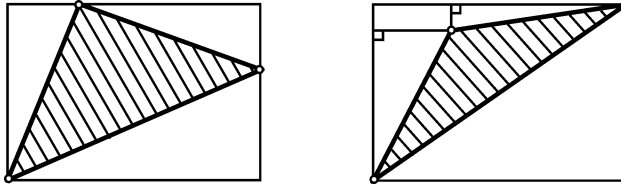


Рис. 24.3

24.6. Согласно формуле Пика $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COA} = 1/2$, а значит, O — точка пересечения медиан треугольника ABC (см. задачу 4.2).

24.7. Возьмем какой-нибудь достаточно большой квадрат со стороной 2^n так, чтобы все черные клетки лежали внутри его и составляли менее $0,2$ его площади. Разрежем этот квадрат на четыре одинаковых квадрата. Каждый из них окрашен менее чем на $0,8$. Те из них, которые окрашены более чем на $0,2$, оставляем, а остальные режем дальше таким же образом. Полученные квадраты 2×2 будут окрашены на $1/4$, $1/2$, $3/4$ или не будут окрашены вовсе. Из листа бумаги нужно вырезать те полученные квадраты, в которых есть окрашенные клетки.

24.8. Рассмотрим все выпуклые фигуры, получающиеся из данной переносами на векторы, обе координаты которых четны. Докажем, что хотя бы две из этих фигур пересекаются. Исходную фигуру можно заключить в круг радиуса R с центром в начале координат, причем R можно выбрать целым числом. Возьмем те из рассматриваемых фигур, координаты центров которых являются неотрицательными числами, не превосходящими $2n$. Этих фигур ровно $(n+1)^2$ штук и все они лежат внутри квадрата со стороной $2(n+R)$. Если бы они не пересекались, то при любом n выполнялось бы неравенство $(n+1)^2 S < 4(n+R)^2$, где S — площадь данной фигуры. Но так как $S > 4$, то n можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $(n+R)/(n+1) < \sqrt{S/4}$.

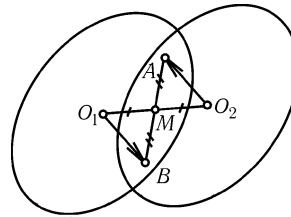


Рис. 24.4

Пусть теперь фигуры с центрами O_1 и O_2 имеют общую точку A (рис. 24.4). Докажем, что тогда середина M отрезка O_1O_2 принадлежит обеим фигурам (ясно, что точка M имеет целые координаты). Пусть $O_1\vec{B} = -O_2\vec{A}$. Так как данная фигура центрально симметрична, точка B принадлежит фигуре с центром O_1 . Эта фигура выпукла, и точки A и B принадлежат ей, поэтому ей принадлежит также середина отрезка AB . Ясно, что середина отрезка AB совпадает с серединой отрезка O_1O_2 .

24.9. Пусть охотник находится в точке O , а заяц — в точке A ; A_1 — точка, симметричная A относительно O . Рассмотрим фигуру Φ , содержащую все точки,

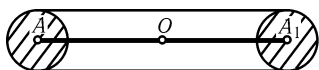


Рис. 24.5

расстояние от которых до отрезка AA_1 не превосходит r (рис. 24.5). Достаточно доказать, что Φ содержит хотя бы один узел решетки (если узел попадает в заштрихованную часть, то точка A принадлежит стволу дерева).

Площадь Φ равна $4rh + \pi r^2$, где h — расстояние от охотника до зайца. Если $h > 1/r$, то $4rh + \pi r^2 > 4$. По теореме Минковского Φ содержит целочисленную точку.

24.10. Рассмотрим целочисленную решетку, заданную уравнениями $x = k + 1/2$ и $y = l + 1/2$, где k и l — целые числа. Докажем, что каждый квадрат этой решетки дает неотрицательный вклад в величину $n - S + p$. Рассмотрим два случая.

1. Фигура содержит центр квадрата. Тогда $n' = 1$ и $S' \leq 1$, поэтому $n' - S' + p' \geq 0$.

2. Фигура пересекает квадрат, но не содержит его центр. Докажем, что в этом случае $S' \leq p'$; при этом можно ограничиться рассмотрением случаев, изображенных на рис. 24.6 (т. е. можно считать, что центр O квадрата лежит на границе фигуры). Так как расстояния от центра квадрата до его сторон равны $1/2$, то $p' \geq 1/2$. Проведя через точку O опорную прямую к данной фигуре, получим, что $S' \leq 1/2$.

Ясно также, что все вклады квадратов не могут быть одновременно нулевыми.

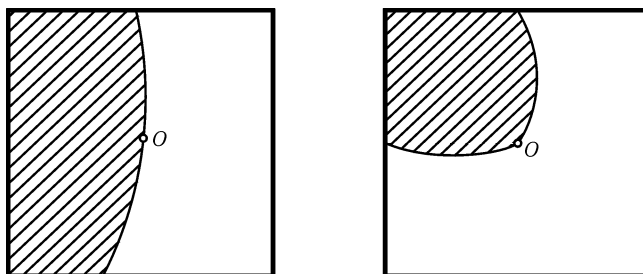


Рис. 24.6

24.11. Докажем сначала, что на окружности с центром $A = (\sqrt{2}, 1/3)$ не может лежать более одной целочисленной точки. Если m и n — целые числа, то $(m - \sqrt{2})^2 + (n - 1/3)^2 = q - 2m\sqrt{2}$, где q — рациональное число. Поэтому из равенства

$$(m_1 - \sqrt{2})^2 + (n_1 - 1/3)^2 = (m_2 - \sqrt{2})^2 + (n_2 - 1/3)^2$$

следует, что $m_1 = m_2$. По теореме Виета сумма корней уравнения $(n - 1/3)^2 = d$ равна $2/3$, поэтому лишь один корень может быть целочисленным.

Расположим теперь радиусы окружностей с центром A , проходящих через целочисленные точки, в порядке возрастания: $R_1 < R_2 < R_3 < \dots$. Если $R_n < R < R_{n+1}$, то внутри окружности радиуса R с центром A лежит ровно n целочисленных точек.

24.12. Докажем сначала, что уравнение $x^2 + y^2 = 5^k$ имеет ровно $4(k + 1)$ целочисленных решений. При $k = 0$ и $k = 1$ это утверждение очевидно. Докажем, что уравнение $x^2 + y^2 = 5^k$ имеет ровно восемь таких решений (x, y) , что x и y

не делятся на 5; вместе с $4(k-1)$ решениями вида $(5a, 5b)$, где a и b — решение уравнения $a^2 + b^2 = 5^{k-2}$, они дают нужное количество решений. Эти решения получаются друг из друга перестановками x и y и изменениями знаков; мы будем называть их нетривиальными решениями.

Пусть $x^2 + y^2$ делится на 5. Тогда $(x+2y)(x-2y) = x^2 + y^2 - 5y^2$ тоже делится на 5. Поэтому одно из чисел $x+2y$ и $x-2y$ делится на 5. Легко проверить также, что если $x+2y$ и $x-2y$ делятся на 5, то x и y делятся на 5.

Если (x, y) — нетривиальное решение уравнения $x^2 + y^2 = 5^k$, то $(x+2y, 2x-y)$ и $(x-2y, 2x+y)$ — решения уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 5^{k+1}$, причем ровно одно из них нетривиально. Остается доказать, что нетривиальное решение единственно с точностью до перестановки x и y и изменения знаков. Пусть (x, y) — нетривиальное решение уравнения $x^2 + y^2 = 5^k$. Тогда как пары $\pm \frac{2x-y}{5}, \pm \frac{x+2y}{5}$ и $\pm \frac{x+2y}{5}, \pm \frac{2x-y}{5}$, так и пары $\pm \frac{2x+y}{5}, \pm \frac{x-2y}{5}$ и $\pm \frac{x-2y}{5}, \pm \frac{2x+y}{5}$ являются решениями уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 5^{k-1}$, но целочисленными будут пары ровно одного из этих видов, так как ровно одно из чисел $x+2y$ и $x-2y$ делится на 5. При этом мы получим нетривиальное решение, потому что $(x+2y)(x-2y) = (x^2 + y^2) - 5y^2$ при $k \geq 2$ делится на 5, но не делится на 25. Таким образом, каждое из восьми нетривиальных решений уравнения $x^2 + y^2 = 5^k$ дает восемь нетривиальных решений уравнения $\xi^2 + \eta^2 = 5^{k-1}$, причем для одной половины решений нужно воспользоваться формулами первого вида, а для другой половины решений — формулами второго вида.

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Пусть $n = 2k + 1$. Докажем, что на окружности радиуса $5^k/3$ с центром $(1/3, 0)$ лежит ровно n целочисленных точек. Уравнение $x^2 + y^2 = 5^{2k}$ имеет $4(2k+1)$ целочисленных решений. Кроме того, 5^{2k} при делении на 3 дает остаток 1, поэтому одно из чисел x и y делится на 3, а другое при делении на 3 дает остаток ± 1 . Следовательно, ровно в одной из пар (x, y) , $(x, -y)$, (y, x) и $(-y, x)$ первое и второе числа дают при делении на 3 остатки -1 и 0 соответственно. Поэтому уравнение $(3z-1)^2 + (3t)^2 = 5^{2k}$ имеет ровно $2k+1$ целочисленных решений.

Пусть $n = 2k$. Докажем, что на окружности радиуса $5^{(k-1)/2}/2$ с центром $(1/2, 0)$ лежит ровно n целочисленных точек. Уравнение $x^2 + y^2 = 5^{k-1}$ имеет ровно $4k$ целочисленных решений, причем одно из чисел x и y четно, а другое нечетно. Поэтому уравнение $(2z-1)^2 + (2t)^2 = 5^{k-1}$ имеет ровно $2k$ целочисленных решений.

Глава 25

Разрезания, разбиения, покрытия

Основные сведения

1. Во всех задачах этой главы рассматриваются лишь прямолинейные разрезы.

2. Две фигуры называют *равносоставленными*, если одну из них можно разрезать на части и сложить из них вторую фигуру (нетрудно убедиться, что тогда и вторую фигуру можно разрезать на части, из которых можно сложить первую фигуру). Ясно, что равносоставленные фигуры имеют равные площади. Оказывается, что для многоугольников верно и обратное, т. е. любые два равновеликих многоугольника равносоставлены (см. задачу 25.29, б)).

3. Будем говорить, что фигура Φ *покрыта* фигурами Φ_1, \dots, Φ_n , если Φ содержится в объединении этих фигур, т. е. любая точка фигуры Φ принадлежит хотя бы одной из фигур Φ_1, \dots, Φ_n . Если же фигуры Φ_1, \dots, Φ_n не пересекаются (точнее говоря, не имеют общих внутренних точек) и их объединение совпадает с Φ , то будем говорить, что Φ *замощена* фигурами Φ_1, \dots, Φ_n .

§1. Равносоставленные фигуры

25.1. Разрежьте произвольный треугольник на 3 части и сложите из них прямоугольник.

25.2. Разрежьте произвольный треугольник на части, из которых можно составить треугольник, симметричный исходному относительно некоторой прямой (части переворачивать нельзя).

25.3. Разрежьте правильный треугольник шестью прямыми на части и сложите из них 7 одинаковых правильных треугольников.

25.4*. Разрежьте правильный шестиугольник на 5 частей и сложите из

них квадрат.

* * *

25.5*. Разрежьте квадрат на 6 частей и сложите из них три одинаковых квадрата.

25.6*. Даны два параллелограмма равной площади с общей стороной. Докажите, что первый параллелограмм можно разрезать на части и сложить из них второй.

25.7*. Докажите, что любой прямоугольник можно разрезать на части и сложить из них прямоугольник со стороной 1.

25.8*. а) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на части и сложить из них прямоугольник со стороной 1.

б) Даны два многоугольника равной площади. Докажите, что первый многоугольник можно разрезать на части и сложить из них второй.

§2. Разрезания на части, обладающие специальными свойствами

25.9. Разрежьте фигуру, изображенную на рис. 25.1 на 4 равные части.

25.10. Существует ли треугольник, который можно разрезать: а) на 3; б) на 5 равных треугольников, подобных исходному?

25.11*. а) Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать на неравные треугольники, подобные исходному.

б) Докажите, что правильный треугольник нельзя разрезать на неравные правильные треугольники.

25.12*. Разрежьте квадрат на 8 остроугольных треугольников.

25.13*. Можно ли какой-нибудь невыпуклый 5-угольник разрезать на два равных 5-угольника?

25.14*. Разрежьте произвольный тупоугольный треугольник на 7 остроугольных.

25.15*. Разрежьте разносторонний треугольник на 7 равнобедренных, три из которых равны.

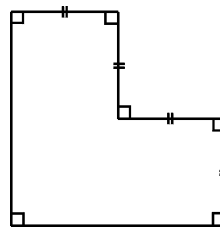


Рис. 25.1

§3. Свойства частей, полученных при разрезаниях

25.16. В выпуклом n -угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на несколько многоугольников. Докажите, что у каждого из них

не более n сторон.

25.17. Докажите, что если n -угольник разрезан произвольным образом на k треугольников, то $k \geq n - 2$.

25.18*. На квадратном листе бумаги нарисовано n прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам листа. Никакие два из этих прямоугольников не имеют общих внутренних точек. Докажите, что если вырезать эти прямоугольники, то количество кусков, на которые распадается оставшаяся часть листа, не более $n + 1$.

25.19*. Докажите, что если выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно разрезать на два подобных четырехугольника, то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

25.20*. В квадрате со стороной 1 проведено конечное число отрезков, параллельных его сторонам, причем эти отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин отрезков равна 18. Докажите, что площадь одной из частей, на которые разбит квадрат, не меньше 0,01.

25.21*. Треугольник, все углы которого не превосходят 120° , разрезан на несколько треугольников. Докажите, что хотя бы у одного из полученных треугольников все углы не превосходят 120° .

См. также задачи 22.25, 22.26.

§4. Разрезания на параллелограммы

25.22*. Докажите, что следующие свойства выпуклого многоугольника F эквивалентны: 1) F имеет центр симметрии; 2) F можно разрезать на параллелограммы.

25.23*. Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разрезать на центрально симметричные многоугольники, то он имеет центр симметрии.

25.24*. Докажите, что любой правильный $2n$ -угольник можно разрезать на ромбы.

25.25*. Правильный восьмиугольник со стороной 1 разрезан на параллелограммы. Докажите, что среди них есть по крайней мере два прямоугольника, причем сумма площадей всех прямоугольников равна 2.

§5. Плоскость, разрезанная прямыми

Пусть на плоскости проведено n попарно непараллельных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. В задачах 25.26–25.30 рассматриваются свойства фигур, на которые эти прямые разбивают плоскость. При этом фигуру называют n -звенной, если она ограничена n звеньями (т. е. отрезками или лучами).

25.26. Докажите, что при $n = 4$ среди полученных частей есть четырехугольник.

25.27. а) Найдите число всех полученных фигур.

б) Найдите число ограниченных фигур, т. е. многоугольников.

25.28. а) Докажите, что при $n = 2k$ среди полученных фигур не более $2k - 1$ углов.

б) Может ли при $n = 100$ среди полученных фигур быть только три угла?

25.29*. Докажите, что если среди полученных фигур есть p -звенная и q -звенная, то $p + q \leq n + 4$.

25.30*. Докажите, что при $n \geq 3$ среди полученных частей не менее $(2n - 2)/3$ треугольников.

Откажем теперь от предположения, что никакие три из рассматриваемых прямых не пересекаются в одной точке. Если P — точка пересечения двух или нескольких прямых, то количество прямых данной системы, проходящих через точку P , будем обозначать $\lambda(P)$.

25.31*. Докажите, что количество отрезков, на которые данные прямые разбиты точками их пересечения, равно $-n + \sum \lambda(P)$.

25.32*. Докажите, что количество частей, на которые данные прямые разбивают плоскость, равно $1 + n + \sum (\lambda(P) - 1)$, причем среди этих частей $2n$ неограниченных.

25.33*. Части, на которые плоскость разрезана прямыми, раскрашены в красный и синий цвет так, что соседние части разного цвета (см. задачу 27.1). Пусть a — количество красных частей, b — количество синих частей. Докажите, что

$$a \leq 2b - 2 - \sum (\lambda(P) - 2),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда красные области — треугольники и углы.

§6. Разные задачи на разрезания

25.34*. Можно ли невыпуклый четырехугольник разрезать двумя прямыми на 6 частей?

25.35*. Докажите, что любой выпуклый n -угольник, где $n \geq 6$, можно разрезать на выпуклые пятиугольники.

25.36*. Докажите, что для любого натурального n , где $n \geq 6$, квадрат можно разрезать на n квадратов.

25.37*. Докажите, что выпуклый 22-угольник нельзя разрезать диагоналями на 7 пятиугольников.

25.38*. Можно ли разрезать правильный треугольник на 1000000 выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая имела общие точки не более чем с 40 из них?

25.39*. Квадратный лист бумаги разрезают прямой на две части. Одну из полученных частей разрезают на две части, и так делают несколько раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось 100 двадцатиугольников?

25.40*. Прямоугольник разрезан на прямоугольники, длина одной из сторон каждого из которых — целое число. Докажите, что длина одной из сторон исходного прямоугольника — целое число.

См. также задачи 23.17 и 23.18.

§7. Разбиение фигур на отрезки

25.41. Докажите, что четырехугольник (с границей и внутренностью) можно разбить на отрезки, т. е. представить в виде объединения непересекающихся отрезков.

25.42*. Докажите, что треугольник можно разбить на отрезки.

25.43*. Докажите, что круг можно разбить на отрезки.

25.44*. Докажите, что плоскость можно разбить на отрезки.

§8. Покрытия

25.45*. На отрезке длиной 1 расположено несколько отрезков, полностью его покрывающих. Докажите, что можно выбросить некоторые из них так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали отрезок и сумма их длин не превосходила 2.

25.46*. Отрезок длиной 1 покрыт несколькими лежащими на нем отрезками. Докажите, что среди них можно выбрать несколько попарно непересекающихся отрезков, сумма длин которых не меньше 0,5.

25.47*. Дан выпуклый пятиугольник, все углы которого тупые. Докажите, что в нем найдутся две такие диагонали, что круги, построенные на них как на диаметрах, полностью покроют весь пятиугольник.

25.48*. а) Квадрат со стороной 1 покрыт несколькими меньшими квадратами со сторонами, параллельными его сторонам. Докажите, что среди них можно выбрать непересекающиеся квадраты, сумма площадей которых не меньше $1/9$.

б) Площадь объединения нескольких кругов равна 1. Докажите, что из них можно выбрать несколько попарно непересекающихся кругов с общей площадью не менее $1/9$.

25.49*. Проектор освещает угол величиной 90° . Докажите, что в любых четырех заданных точках можно разместить 4 прожектора так, что они осветят всю плоскость.

25.50*. Длина проекции фигуры Φ на любую прямую не превосходит 1. Верно ли, что Φ можно накрыть кругом диаметра: а) 1; б) 1,5?

25.51*. Докажите, что любые n точек на плоскости всегда можно накрыть несколькими непересекающимися кругами так, что сумма их диаметров меньше n и расстояние между любыми двумя из них больше 1.

25.52*. На круглом столе радиуса R расположено без наложений n круглых монет радиуса r , причем больше нельзя положить ни одной монеты. Докажите, что $R/r \leq 2\sqrt{n} + 1$.

См. также задачи 20.12, 20.16, 20.31, 22.4, 22.9, 22.14, 22.15.

§9. Замощения костями домино и плитками

25.53. Замостите обычную шахматную доску плитками, изображенными на рис. 25.2.

25.54. Прямоугольник размером $m \times n$ замощен плитками, изображенными на рис. 25.2. Докажите, что m и n делятся на 4.

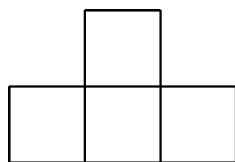


Рис. 25.2

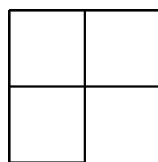


Рис. 25.3

25.55*. Из шахматной доски со стороной а) 2^n ; б) $6n+1$ выброшена одна клетка. Докажите, что оставшуюся часть доски можно замостить плитками, изображенными на рис. 25.3.

25.56*. Вырежьте из обычной шахматной доски одну клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было замостить плитками размером 1×3 .

25.57*. Прямоугольник размером $2n \times 2m$ замостили костями домино 1×2 . Докажите, что на этот слой костей можно положить второй слой так, что ни одна кость второго слоя не совпадает с костью первого слоя.

25.58*. Прямоугольник покрыт в два слоя карточками 1×2 (над каждой клеткой лежат ровно две карточки). Докажите, что карточки можно разбить на два непересекающихся множества, каждое из которых покрывает весь прямоугольник.

25.59*. а) Можно ли квадрат 6×6 замостить костями домино 1×2 так, чтобы не было «шва», т. е. прямой, не разрезающей костей?

б) Докажите, что любой прямоугольник $m \times n$, где m и n больше 6 и mn четно, можно замостить костями домино так, чтобы не было «шва».

в) Докажите, что прямоугольник 6×8 можно замостить костями домино так, чтобы не было «шва».

25.60*. Имеется неограниченное количество плиток в форме многоугольника M . Будем говорить, что из этих плиток можно сложить паркет,

если ими можно покрыть круг сколь угодно большого радиуса так, чтобы не было ни просветов, ни перекрытий.

а) Докажите, что если M — выпуклый n -угольник, где $n \geq 7$, то паркет сложить нельзя.

б) Приведите пример такого выпуклого пятиугольника с попарно непараллельными сторонами, что паркет сложить можно.

Решения

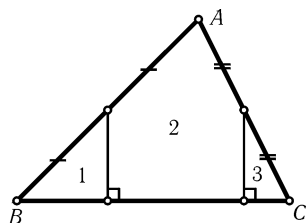
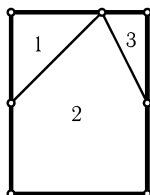


Рис. 25.4



25.1. Пусть A — наибольший угол треугольника ABC . Тогда углы B и C острые. Проведя разрезы через середины сторон AB и AC перпендикулярно BC , переставим полученные части, как показано на рис. 25.4.

25.2. Пусть A — наибольший угол треугольника. Разрежем треугольник ABC на равнобедренные треугольники и переставим их, как показано на рис. 25.5.

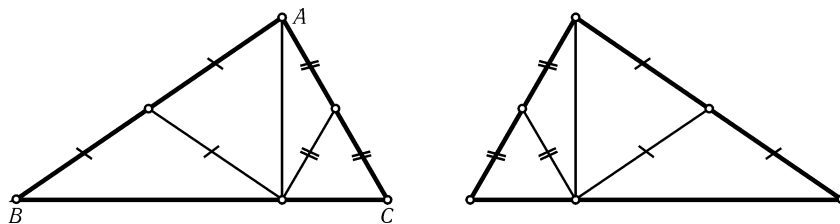


Рис. 25.5

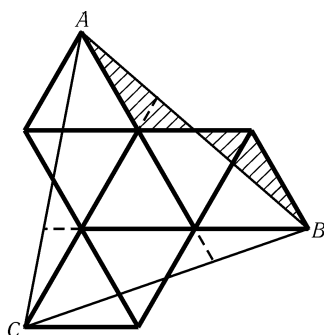


Рис. 25.6

25.3. Сложим 7 одинаковых правильных треугольников, как показано на рис. 25.6. Тогда ABC — правильный треугольник. Ясно, что заштрихованные треугольники равны. Теперь легко понять, что на рис. 25.6 фактически изображено, как разрезать правильный треугольник ABC шестью прямыми на части, из которых можно сложить 7 одинаковых правильных треугольников.

25.4. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.7. Отрезок AB равен стороне квадрата, площадь которого равна площади шестиугольника. Остальные разрезы проводятся очевидным образом.

25.5. Мы будем решать обратную задачу: разрежем три квадрата со стороной a и сложим из них квадрат со стороной $\sqrt{3}a$. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.8.

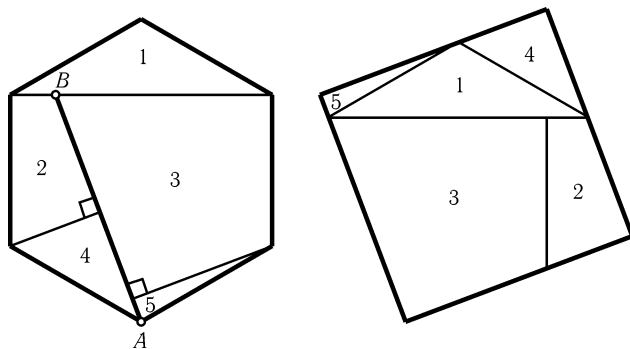


Рис. 25.7

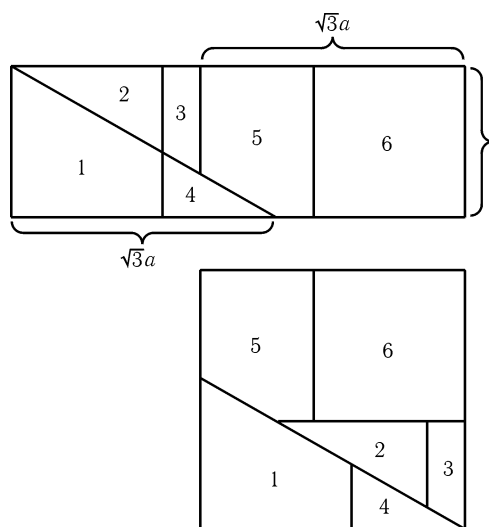


Рис. 25.8

25.6. На рис. 25.9 показано, как это сделать.

25.7. Нужно доказать, что если есть два прямоугольника со сторонами a, b и c, d , причем $ab = cd = S$, то первый прямоугольник можно разрезать на части и сложить из них второй. Пусть для определенности $a \leq b$ и $c \leq d$. Тогда $c \leq \sqrt{S} \leq b$ и $a \leq d$. Отрежем от обоих прямоугольников по два прямоугольных треугольника с катетами a и c , как показано на рис. 25.10. Заштрихованные параллелограммы равновелики и имеют сторону длиной $\sqrt{a^2 + c^2}$, поэтому один параллелограмм можно разрезать на части и сложить из них второй (см. задачу 25.6).

25.8. а) Для решения этой задачи нужно воспользоваться результатами задач 22.23, 25.1 и 25.7. Сначала разрезаем многоугольник непересекающимися диагоналями на треугольники. Каждый из этих треугольников разрезаем на части и

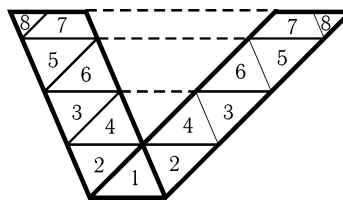


Рис. 25.9

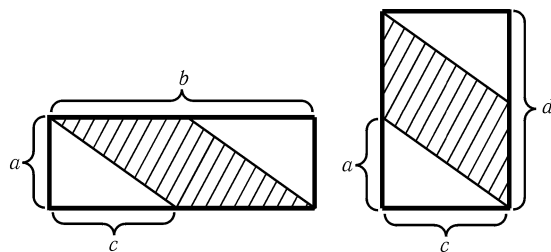


Рис. 25.10

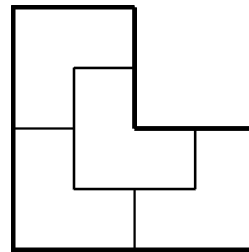


Рис. 25.11

складываем из них прямоугольник. Полученные прямоугольники разрезаем на части и складываем из них прямоугольники со стороной 1. Ясно, что из нескольких прямоугольников со стороной 1 можно сложить один прямоугольник со стороной 1.

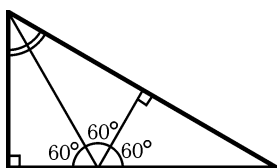


Рис. 25.12

б) Разрежем первый многоугольник на части и сложим из них прямоугольник со стороной 1. Так как второй многоугольник можно разрезать на части и сложить из них этот прямоугольник, то и прямоугольник можно разрезать на части и сложить из них второй многоугольник (при этом части, на которые был разрезан первый многоугольник, будут разрезаны на более мелкие части).

25.9. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.11.

25.10. а) Существует. Из трех одинаковых прямоугольных треугольников с углом 60° можно сложить один прямоугольный треугольник с углом 60° , как показано на рис. 25.12.

б) Требуемым образом можно разрезать любой прямоугольный треугольник (рис. 25.13, а) и треугольник с углами $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ (рис. 25.13, б).

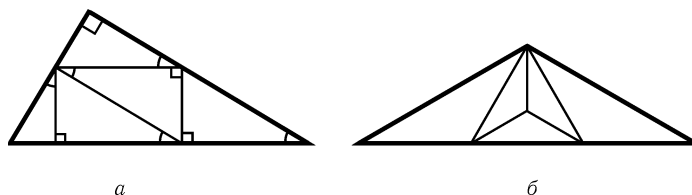


Рис. 25.13

25.11. а) Можно считать, что $BC/AC = k > 1$. Приложим к треугольнику ABC треугольники 1, 2, 3, 4 и 5 (см. рис. 25.14). Может оказаться, что треугольники 4 и 5 равны, т. е. $k + k^3 = k^4$. В этом случае дополним конструкцию треугольниками 6 и 7, а треугольник 5 заменим треугольником 8. Тогда треугольники 7 и 8 не равны, т. е. $k^6 \neq k + k^3 + k^5$. В самом деле, так как $k + k^3 = k^4$, то $k^6 = k^2(k + k^3) = k^3 + k^5 < k + k^3 + k^5$.

б) Предположим, что правильный треугольник разрезан на неравные правильные треугольники. Стороны двух треугольников разбиения не могут совпадать. Будем рассматривать только стороны треугольников разбиения, лежащие внутри (не на границе) исходного треугольника; пусть N — число таких

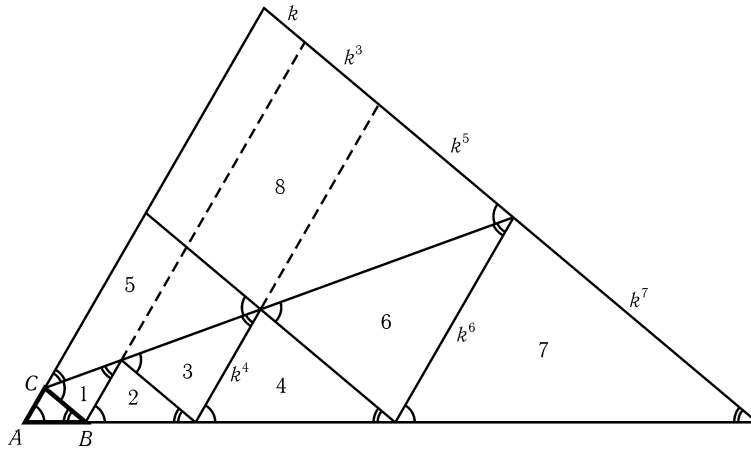


Рис. 25.14

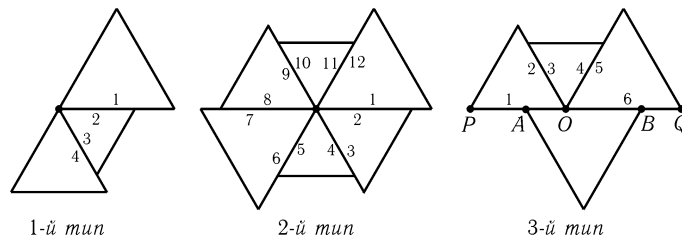


Рис. 25.15

сторон. Возникает три типа вершин треугольников разбиения (см. рис. 25.15). Из каждой вершины 1-го, 2-го и 3-го типа выходит соответственно 4, 12 и 6 сторон. Пусть n_1, n_2 и n_3 — количества точек 1-го, 2-го и 3-го типа. Тогда $N = (4n_1 + 12n_2 + 6n_3)/2 = 2n_1 + 6n_2 + 3n_3$.

Каждой точке 3-го типа можно сопоставить 3 стороны (на рис. 25.15 это стороны AB, OP и OQ). Легко проверить, что каждая сторона будет соответствовать хотя бы одной точке 3-го типа. Следовательно, $N \leq 3n_3$, а значит, $2n_1 + 6n_2 \leq 0$. В частности, $n_1 = 0$, т. е. разбиение состоит лишь из исходного треугольника.

25.12. Требуемые разрезы изображены на рис. 25.16; пунктирные полуокружности показывают, что все полученные треугольники остроугольные.

25.13. Да, можно. См. рис. 25.17, а) или рис. 25.17, б).

25.14. $\angle ACB > 90^\circ$ и O — центр вписанной окружности S треугольника ABC . Проведем к S касательные через точки пересечения S с отрезками OA и OB и обозначим получившиеся углы, как показано на рис. 25.18. Последовательно вычисляя углы,

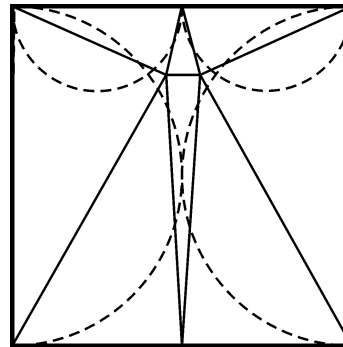


Рис. 25.16

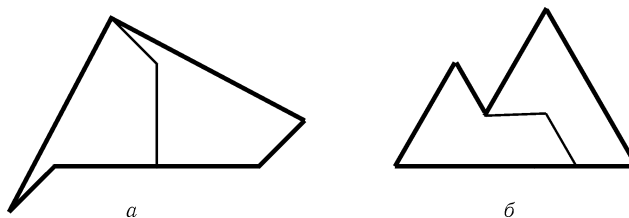


Рис. 25.17

получаем, что $\phi_1 = (\pi - \alpha)/2 < \pi/2$, $\phi_2 = (\pi - \phi_1)/2 = (\pi + \alpha)/4 < \pi/2$ (аналогично $\phi'_2 = (\pi + \beta)/4$), $\phi_3 = \pi - \phi_2 - \gamma/2 = 3\pi/4 - \alpha/4 - \gamma/2 < \pi/2 + (\pi/4 - \gamma/2) < \pi/2$, $\phi_4 = \pi - 2\phi_2 = (\pi - \alpha)/2 < \pi/2$ и $\phi_5 = \pi - \phi_2 - \phi'_2 = \pi/2 - \alpha/4 - \beta/4 < \pi/2$. Аналогично доказывается, что и все остальные углы семи треугольников, изображенных на рис. 25.18, меньше 90° .

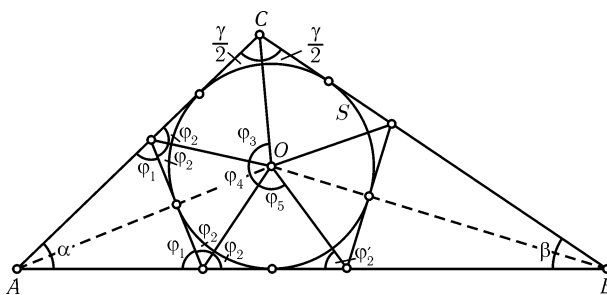


Рис. 25.18

25.15. Пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC и $AC \geq BC$. Возьмем сначала на стороне AB точку D так, что $AD = AC$, затем на BC — точку E так, что $BE = BD$, затем на AC — точку F так, что $CF = CE$, затем на AB — точку G так, что $AG = AF$ (рис. 25.19). Тогда $GD = FC = CE$. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Так как $\angle CAO = \angle DAO$ и $CA = DA$, то $\triangle CAO = \triangle DAO$, поэтому $OC = OD$. Аналогично $OF = OG$, $OC = OG$ и $OD = OE$. Поэтому $OE = OD = OC = OG = OF$, т. е. на рис. 25.19 изображено требуемое разбиение.

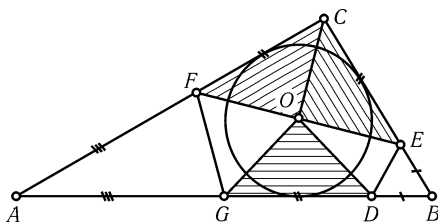


Рис. 25.19

25.16. Прямая, на которой лежит сторона многоугольника разбиения, проходит через две вершины исходного многоугольника, а через каждую вершину исходного многоугольника может проходить не более двух таких прямых. Поэтому число сторон многоугольника разбиения не больше числа вершин исходного многоугольника.

25.17. Если n -угольник разрезан на k треугольников, то каждый его угол состоит из углов этих треугольников. Поэтому сумма углов многоугольника не больше суммы углов треугольников, т. е. $(n - 2)\pi \leq k\pi$ или $n - 2 \leq k$.

25.18. Сумма внешних углов многоугольника, прилегающих к внутренним углам, меньшим π , не меньше 2π (см. задачу 22.20). Внешние углы фигур, на которые распадается оставшаяся часть листа, являются либо внешними углами квадрата, либо внутренними углами вырезанных прямоугольников. Поэтому сумма всех внешних углов этих фигур не превосходит $2\pi(n+1)$, т. е. количество фигур не превосходит $n+1$.

25.19. Пусть отрезок MN , где точки M и N лежат на сторонах AB и CD , разрезает четырехугольник $ABCD$ на два подобных четырехугольника. Тогда угол AMN четырехугольника $AMND$ равен одному из углов четырехугольника $NMBC$. С другой стороны, $\angle NMB = 180^\circ - \angle AMN$. Поэтому если $\angle AMN = \angle NMB$, то $\angle NMB = 90^\circ$, а если угол AMN равен другому углу четырехугольника $NMBC$, то в этом четырехугольнике есть два угла, составляющих в сумме 180° . Проведя аналогичные рассуждения для угла MND , получаем, что либо $AB \perp MN$ и $CD \perp MN$ (и тогда $AB \parallel CD$), либо в четырехугольнике $NMBC$ есть два угла, составляющие в сумме 180° ; без ограничения общности можно считать, что один из них — угол BMN .

Если $\angle BMN + \angle MNC = 180^\circ$, то $BM \parallel CN$.

Если $\angle BMN + \angle MBC = 180^\circ$, то $MN \parallel BC$. Поэтому либо $AD \parallel MN$, либо $ND \parallel MA$.

Если $\angle BMN + \angle BCN = 180^\circ$, то четырехугольники $NMBC$ и $AMND$ вписанные. Следовательно, $\angle BCN = 180^\circ - \angle BMN$ и $\angle ADN = 180^\circ - \angle AMN = \angle BMN$, т. е. $BC \parallel AD$.

25.20. Сумма длин границ всех фигур, на которые разбит квадрат, равна $2 \cdot 18 + 4 = 40$. В самом деле, проведенные отрезки дают двукратный вклад в эту сумму, а стороны квадрата однократный. Пусть для i -й фигуры сумма длин горизонтальных частей границы равна $2x_i$, вертикальных $2y_i$, а ее площадь равна s_i . Тогда эту фигуру можно заключить в прямоугольник со сторонами x_i и y_i , поэтому $x_i y_i \geq s_i$, а значит, $x_i + y_i \geq 2\sqrt{x_i y_i} \geq 2\sqrt{s_i}$. Следовательно, $40 = \sum(2x_i + 2y_i) \geq 4 \sum \sqrt{s_i}$, т. е. $\sum \sqrt{s_i} < 10$.

Предположим, что $s_i < 0,01$ для всех i . Тогда $\sqrt{s_i} < 0,1$ и $1 = \sum s_i < 0,1 \sum \sqrt{s_i}$, т. е. $\sum \sqrt{s_i} > 10$. Получено противоречие.

25.21. Рассмотрим все точки, отличные от вершин исходного треугольника и являющиеся вершинами полученных треугольников. Пусть m из этих точек лежит внутри исходного треугольника и n на его границе. Сумма всех углов полученных треугольников равна $\pi + \pi n + 2\pi m$, т. е. число этих треугольников равно $1 + n + 2m$. С другой стороны, к внутренней точке прилегает не более двух углов, превосходящих 120° , а к точке на границе — не более одного. Поэтому число полученных треугольников больше, чем число их углов, превосходящих 120° .

25.22. Рассмотрим выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$. Докажем, что каждое из свойств 1 и 2 эквивалентно свойству 3: «Для любого вектора $\vec{A_i A_{i+1}}$ найдется вектор $\vec{A_j A_{j+1}} = -\vec{A_i A_{i+1}}$ ».

Ясно, что из свойства 1 следует свойство 3. Докажем, что из свойства 3 следует свойство 1. Если выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$ обладает свойством 3, то $n = 2m$ и $\vec{A_i A_{i+1}} = -\vec{A_{m+i} A_{m+i+1}}$. Пусть O_i — середина отрезка $A_i A_{m+i}$. Так как $A_i A_{i+1} A_{m+i} A_{m+i+1}$ — параллелограмм, то $O_i = O_{i+1}$. Поэтому все точки O_i совпадают, и эта точка является центром симметрии многоугольника.

Докажем, что из свойства 2 следует свойство 3. Пусть выпуклый многоугольник F разрезан на параллелограммы. Нужно доказать, что для любой стороны многоугольника F найдется другая сторона, параллельная и равная ей. От ка-

ждой стороны многоугольника F отходит цепочка параллелограммов, т. е. эта сторона как бы перемещается по ним параллельно, причем она может разбиваться на несколько частей (рис. 25.20). Так как у выпуклого многоугольника может быть еще только одна сторона, параллельная данной, то все разветвления цепочки упираются в одну и ту же сторону, причем ее длина не меньше длины стороны, из которой цепочка выходит. Мы можем выпустить цепочку параллелограммов как из первой стороны во вторую, так и из второй в первую, поэтому длины этих сторон равны.

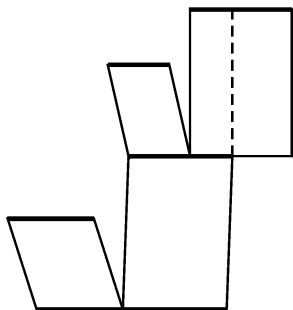


Рис. 25.20

Остается доказать, что из свойства 3 следует свойство 2. Способ разрезания многоугольника с равными и параллельными противоположными сторонами указан на рис. 25.21. После каждой такой операции получаем многоугольник с меньшим числом сторон, по-прежнему обладающий свойством 3, и проделываем с ним то же самое, пока не придем к параллелограмму.

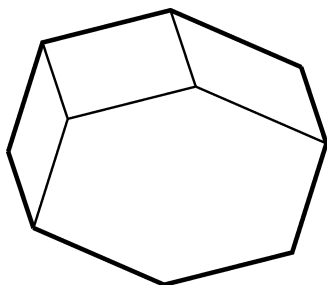


Рис. 25.21

25.23. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Если выпуклый многоугольник M разрезан на выпуклые центрально симметричные многоугольники, то их можно разрезать на параллелограммы. Поэтому M можно разрезать на параллелограммы, т. е. M имеет центр симметрии.

25.24. Докажем индукцией по n , что любой $2n$ -угольник, стороны которого имеют одну и ту же длину и противоположные стороны параллельны, можно разрезать на ромбы. Для $n = 2$ это очевидно, а из рис. 25.21 ясно, как делается индукционный шаг.

25.25. Выделим в правильном восьмиугольнике две взаимно перпендикулярные пары противоположных сторон и рассмотрим, как и в задаче 25.1, цепочки параллелограммов, соединяющие противоположные стороны. На пересечениях этих цепочек стоят прямоугольники. Рассмотрев две другие пары противоположных сторон, получим еще хотя бы один прямоугольник.

Параллелограммы каждой цепочки можно дополнительно разрезать так, чтобы цепочка распалась на несколько «дорожек», причем в каждой дорожке соседние параллелограммы примыкали бы друг к другу целыми сторонами, а не частями сторон. Объединение прямоугольников нового разбиения совпадает с объединением прямоугольников исходного разбиения, поэтому доказательство достаточно провести для нового разбиения. Каждая дорожка имеет постоянную ширину; значит, длина одной стороны каждого прямоугольника, входящего в дорожку, равна ширине дорожки, а сумма длин всех других сторон равна сумме всех ширин дорожек, соответствующих второй паре сторон. Следовательно, площадь всех прямоугольников, входящих в одну дорожку, равна произведению ширины дорожки на длину стороны многоугольника, т. е. численно равна ширине дорожки. Поэтому площадь всех прямоугольников, соответствующих двум перпендикулярным парам противоположных сторон, равна 1, а площадь вообще всех прямоугольников равна 2.

25.26. Обозначим точки пересечения одной из данных прямых с остальными через A , B и C . Для определенности будем считать, что точка B лежит между A и C . Пусть D — точка пересечения прямых, проходящих через A и C . Любая прямая, проходящая через точку B и не проходящая через точку D , разрезает треугольник ACD на треугольник и четырехугольник.

25.27. а) Пусть n прямых разбивают плоскость на a_n частей. Проведем еще одну прямую. При этом число частей увеличится на $n + 1$, так как новая прямая имеет n точек пересечения с уже проведенными прямыми. Поэтому $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Так как $a_1 = 2$, то $a_n = 2 + 2 + 3 + \dots + n = (n^2 + n + 2)/2$.

б) Заключив все точки пересечения данных прямых в окружность, легко проверить, что количество неограниченных фигур равно $2n$. Поэтому количество ограниченных фигур равно $(n^2 + n + 2)/2 - 2n = (n^2 - 3n + 2)/2$.

25.28. а) Все точки пересечения данных прямых можно заключить в некоторую окружность. Прямые разбивают эту окружность на $4k$ дуг. Ясно, что две соседние дуги не могут одновременно принадлежать углам, поэтому число углов не превосходит $2k$, причем равенство может достигаться, только если дуги, принадлежащие углам, чередуются. Остается доказать, что равенство не может достигаться. Предположим, что дуги, принадлежащие углам, чередуются. Так как по обе стороны от любой из данных прямых лежит по $2k$ дуг, то противоположные дуги (т. е. дуги, заданные двумя прямыми) должны принадлежать углам (рис. 25.22), чего не может быть.

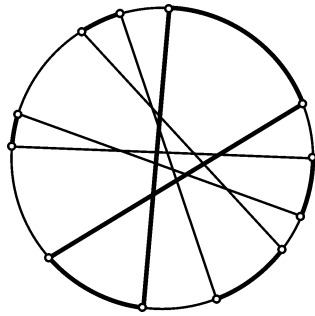


Рис. 25.22

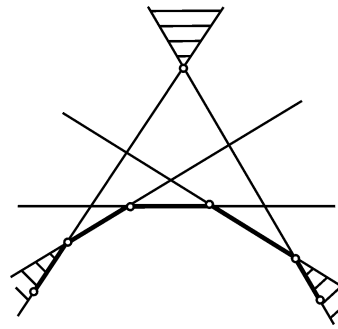


Рис. 25.23

б) Для любого n среди полученных фигур может быть три угла. На рис. 25.23 показано, как построить соответствующее разбиение плоскости.

25.29. Назовем прямую *граничной* для данной фигуры, если она является продолжением отрезка или луча, ограничивающего эту фигуру. Достаточно доказать, что две рассматриваемые фигуры не могут иметь более четырех общих граничных прямых. Если две фигуры имеют четыре общие граничные прямые, то одна из фигур лежит в области 1, а другая лежит в области 2 (рис. 25.24). Пятая граничная прямая фигуры, лежащей в области 1, должна пересекать две соседние стороны четырехугольника 1, но тогда она не может быть граничной прямой для фигуры, лежащей в области 2.

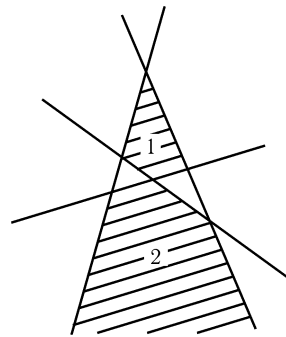


Рис. 25.24

25.30. Рассмотрим все точки пересечения данных прямых. Докажем, что эти точки могут лежать по одну сторону не более чем от двух данных прямых. Предположим, что все точки пересечения лежат по одну сторону от трех данных прямых. Эти прямые образуют треугольник ABC . Четвертая прямая не может пересекать только стороны этого треугольника, т. е. она пересекает хотя бы одно продолжение стороны. Пусть для определенности она пересекает продолжение стороны AB за точку B в некоторой точке M . Тогда точки A и M лежат по разные стороны от прямой BC . Получено противоречие. Поэтому имеются по крайней мере $n - 2$ прямые, по обе стороны от которых лежат точки пересечения.

Если мы выберем в полуплоскости, заданной прямой l , ближайшую к l точку пересечения, то эта точка будет вершиной треугольника, прилегающего к прямой l . Таким образом, имеется не менее $n - 2$ прямых, к которым прилегает по крайней мере по два треугольника, и две прямые, к каждой из которых прилегает хотя бы один треугольник. Так как каждый треугольник прилегает ровно к трем прямым, то треугольников не менее $(2(n - 2) + 2)/3$.

25.31. Если P — точка пересечения данных прямых, то из P выходит $2\lambda(P)$ отрезков или лучей. Кроме того, каждый из x отрезков имеет две граничные точки, а каждый из $2n$ лучей имеет одну граничную точку. Поэтому $2x + 2n = 2 \sum \lambda(P)$, т. е. $x = -n + \sum \lambda(P)$.

25.32. Доказательство проведем индукцией по n . Для двух прямых утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$ прямых, и рассмотрим систему, состоящую из n прямых. Пусть f — количество частей, на которые данные n прямых разбивают плоскость; $g = 1 + n + \sum(\lambda(P) - 1)$. Выбросим из данной системы одну прямую и для полученной системы прямых определим аналогичным образом числа f' и g' . Если на выброшенной прямой лежит k точек пересечения прямых, то $f' = f - k - 1$ и $g' = 1 + (n - 1) + \sum(\lambda'(P) - 1)$. Легко проверить, что $\sum(\lambda(P) - 1) = -k + \sum(\lambda'(P) - 1)$. По предположению индукции $f' = g'$. Поэтому $f = f' + k + 1 = g' + k + 1 = g$. Ясно также, что количество неограниченных частей равно $2n$.

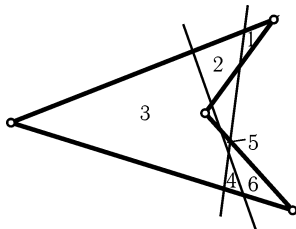


Рис. 25.25

25.33. Пусть a'_k — количество красных k -угольников, a' — количество ограниченных красных областей, количество отрезков, на которые данные прямые разбиты точками их пересечения, равно $\sum \lambda(P) - n$ (см. задачу 25.31). Каждый отрезок является стороной не более чем одного красного многоугольника, поэтому $3a' \leq \sum_{k \geq 3} ka'_k \leq \sum \lambda(P) - n$, причем одно неравенство достигается тогда и только тогда, когда нет красных k -угольников, где $k > 3$, а другое неравенство достигается тогда и только тогда, когда любой отрезок является стороной красного k -угольника, т. е. любая неограниченная красная

область является углом.

Количество ограниченных областей равно $1 - n + \sum(\lambda(P) - 1) = c$ (см. задачу 25.32). поэтому количество b' ограниченных синих областей равно $c - a' \geq 1 - n + \sum(\lambda(P) - 1) - (\sum \lambda(P) - n)/3 = 1 - (2n/3) + \sum(2\lambda(P)/3 - 1)$. Цвета $2n$ неограниченных областей чередуются, поэтому $b = b' + n \geq 1 + (n/3) + \sum(2\lambda(P)/3 - 1)$ и $a = a' + n \leq (2n + \sum \lambda(P))/3$, а значит, $2b - a \geq 2 + \sum(\lambda(P) - 2)$.

25.34. Можно. Пример изображен на рис. 25.25.

25.35. Докажем по индукции, что любой выпуклый n -угольник, где $n \geq 5$,

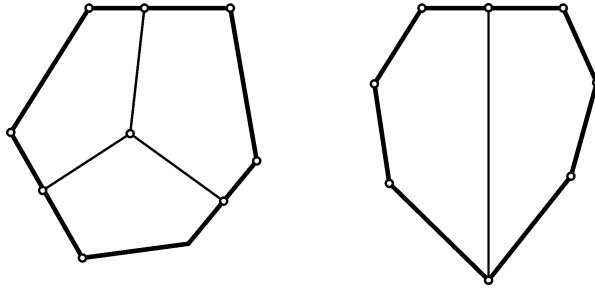


Рис. 25.26

можно разрезать на пятиугольники. Для $n = 5$ это очевидно, а как это сделать для $n = 6$ и 7 , показано на рис. 25.26. Предположим теперь, что $n \geq 8$ и любой выпуклый m -угольник, где $5 \leq m \leq n$, можно разрезать на пятиугольники. От n -угольника можно отрезать пятиугольник, образованный пятью последовательными вершинами. При этом остается $(n - 3)$ -угольник. Так как $5 \leq (n - 3) < n$, то $(n - 3)$ -угольник можно разрезать на пятиугольники по предположению индукции.

25.36. Пусть квадрат разрезан на m квадратиков. Разрежем один из этих квадратиков на 4 квадратика. При этом квадрат будет разрезан на $m + 3$ квадратиков. Остается заметить, что квадрат можно разрезать на 6, 7 и 8 квадратиков (рис. 25.27).

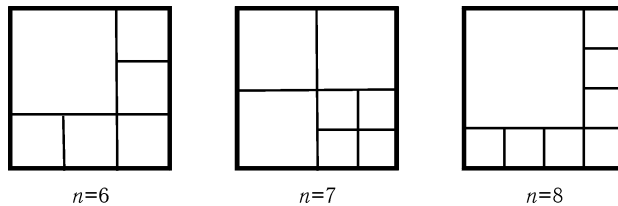


Рис. 25.27

25.37. Докажем по индукции, что $(3k+1)$ -угольник нельзя разрезать по диагоналям на k пятиугольников. Для $k = 1$ это утверждение очевидно. Предположим теперь, что оно доказано для всех $(3k + 1)$ -угольников, и докажем его для $(3k + 4)$ -угольника. Предположим, что $(3k + 4)$ -угольник разрезан по диагоналям на $k + 1$ пятиугольник. Если каждый из них имеет не более трех сторон на границе, то число сторон многоугольника не более $3k + 3$. Поэтому существует пятиугольник с четырьмя сторонами на границе. Отрезав его, получим $(3k + 1)$ -угольник, разрезанный диагоналями на k пятиугольников. Получено противоречие.

25.38. Если провести разрезы, близкие к вершинам выпуклого n -угольника, то можно отсечь от него n треугольников и получить выпуклый $2n$ -угольник. Легко проверить, что при этом любая прямая пересекает не более двух отсеченных треугольников.

Отсечем от правильного треугольника 3 треугольника, затем от полученного шестиугольника — 6 треугольников и так далее, до тех пор, пока не получим $3 \cdot 2^{19}$ -угольник. Любая прямая может пересечь не более двух треугольников, отсекаемых на каждом шаге. Поэтому всего прямая может пересечь не более $1 +$

$+ 2 \cdot 19 = 39$ многоугольников. Общее число многоугольников, на которые разбит правильный треугольник, равно $1 + 3 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 2^{18} = 1 + 3(2^{19} - 1) > 2^{20} = (2^{10})^2 > 1000^2$. Ясно, что можно отсекать не все треугольники, чтобы получить ровно 1000000 многоугольников.

25.39. Ясно, что после n разрезов получится $n + 1$ кусок. Так как после каждого разрезания общее число вершин полученных фигур увеличивается на 2, 3 или 4, то после n разрезов общее число вершин не превосходит $4n + 4$. Если после n разрезов получилось 100 20-угольников, то кроме 20-угольников есть еще $n + 1 - 100$ кусков, так как общее число кусков равно $n + 1$. Поскольку у каждого куска не менее трех вершин, общее число вершин не меньше $100 \cdot 20 + (n - 99) \cdot 3 = 1703 + 3n$. Следовательно, $1703 + 3n \leq 4n + 4$, т. е. $n \geq 1699$.

Остается доказать, что за 1699 разрезов можно разрезать квадрат требуемым образом. Чтобы разрезать квадрат на 100 прямоугольников, достаточно 99 разрезов, а чтобы отрезать от каждого из этих прямоугольников по 16 треугольников и превратить их в 20-угольники, достаточно 16000 разрезов.

25.40. Введем систему координат с началом в одной из вершин исходного прямоугольника и осями, направленными по его сторонам. Разрежем координатную плоскость прямыми $x = n/2$ и $y = m/2$, где m и n — целые числа, и раскрасим полученные части в шахматном порядке. Если стороны прямоугольника параллельны осям координат, а длина одной из его сторон равна 1, то суммы площадей его белых и черных частей равны. В самом деле, при симметрии относительно средней линии прямоугольника белые части переходят в черные и наоборот. Для прямоугольника с целочисленной стороной справедливо аналогичное утверждение, потому что его можно разрезать на прямоугольники со стороной 1. Остается доказать, что если суммы площадей белых и черных частей равны, то одна из сторон прямоугольника целочисленная. Предположим, что обе стороны исходного прямоугольника не целые. Прямые $x = m$ и $y = n$ отсекают от него прямоугольники, одна из сторон каждого из которых равна 1, и прямоугольник, обе стороны которого меньше 1. Легко проверить, что в последнем прямоугольнике суммы площадей белых и черных частей не могут быть равны.

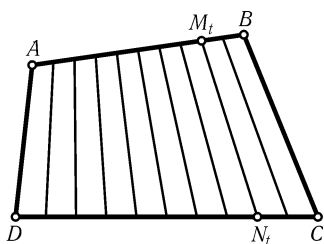


Рис. 25.28

25.41. Возьмем на сторонах AB и DC точки M_t и N_t так, что $AM_t : M_tB = DN_t : N_tC = t : (1 - t)$, где $0 < t < 1$. Тогда семейство отрезков M_tN_t , а также отрезки AD и BC образуют искомое разбиение (рис. 25.28).

25.42. Возьмем на стороне BC треугольника ABC точку P , а на стороне AC — точки Q и R . «Вырожденный четырехугольник» $QRCP$ и четырехугольник $AQPВ$ можно разбить на отрезки, как это делалось в предыдущей задаче (рис. 25.29).

25.43. Разделим диаметр AB точками C, D, E и F на 5 равных частей. Пусть точки M_t и P_t лежат на отрезках CD и EF , причем $CM_t : M_tD = FP_t : P_tE = t : (1 - t)$, где $0 < t < 1$, а точки Q_t и N_t лежат на разных дугах окружности, заданных точками A и B , и делят эти дуги в отношении $t : (1 - t)$ (рис. 25.30). Отрезки M_tN_t и P_tQ_t вместе с отрезками AC , DE и FB дают требуемое разбиение.

25.44. Разбиение плоскости на отрезки изображено на рис. 25.31. Выделенные ломаные состоят из концов отрезков разбиения; их звенья, естественно, не являются отрезками разбиения.

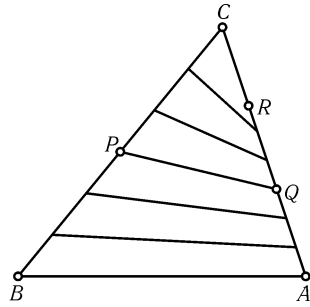


Рис. 25.29

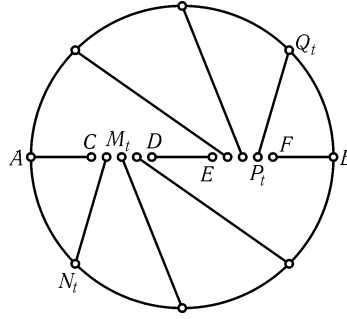


Рис. 25.30

25.45. Выберем среди всех отрезков, покрывающих левый конец исходного отрезка, тот, у которого правый конец самый правый, и обозначим этот отрезок I_1 . После того как выбран отрезок I_k , выбираем среди всех отрезков, покрывающих его правый конец, тот, у которого правый конец самый правый. Таким образом выберем несколько отрезков, полностью покрывающих исходный отрезок. Остается доказать, что сумма их длин не превосходит 2. Отрезок I_{k+2} не имеет общих точек с I_k , так как иначе вместо I_{k+1} мы должны были бы выбрать I_{k+2} . Поэтому каждая точка исходного отрезка длиной 1 покрыта не более чем двумя отрезками I_k , т. е. сумма длин этих отрезков не превосходит 2.

25.46. Будем последовательно выбрасывать отрезки, покрытые одним или несколькими оставшимися отрезками, до тех пор, пока это возможно. Направим ось координат по данному отрезку и обозначим координаты концов оставшихся отрезков через a_k и b_k ($a_k < b_k$). Один из двух отрезков с общим левым концом всегда будет выброшен, поэтому можно считать, что $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$. Докажем, что тогда $b_k < a_{k+2}$, т. е. четные отрезки не пересекаются и нечетные тоже. Предположим, что $b_k \geq a_{k+2}$. Возможны два случая.

1. $b_{k+1} \leq b_{k+2}$, тогда отрезок с номером $k+1$ покрыт отрезками с номерами k и $k+2$. Получено противоречие.
2. $b_{k+1} \geq b_{k+2}$, тогда отрезок с номером $k+2$ покрыт отрезком с номером $k+1$. Получено противоречие.

Остается заметить, что сумма длин либо четных, либо нечетных отрезков не меньше 0,5.

25.47. Пусть AB — наибольшая сторона пятиугольника. Рассмотрим полосу, заданную перпендикулярами к стороне AB , проведенными через A и B . Так как углы EAB и ABC тупые, точки E и C лежат вне этой полосы. Поэтому точка D лежит внутри полосы, так как иначе длина одного из отрезков ED и DC была бы больше длины отрезка AB . Обозначим проекцию точки D на отрезок AB через D_1 (рис. 25.32). Тогда круги с диаметрами AD и BD полностью покрывают четырехугольники $AEDD_1$ и $BCDD_1$.

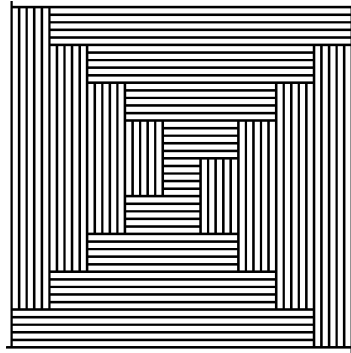


Рис. 25.31

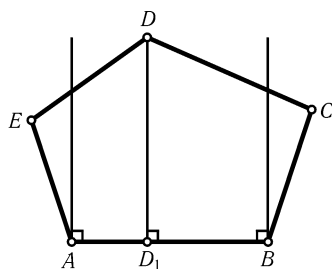


Рис. 25.32

25.48. а) Рассмотрим наибольший квадрат K покрытия и выбросим все квадраты, пересекающиеся с ним. Они лежат внутри квадрата, сторона которого в 3 раза больше стороны K , поэтому площадь, занимаемая ими, не больше 81, где s — площадь K . Квадрат K относим к выбранным и в дальнейшем его уже не рассматриваем. Для остальных квадратов проделываем то же самое до тех пор, пока все квадраты будут либо выбраны, либо выброшены. Если сумма площадей выбранных квадратов равна S , то общая площадь выброшенных квадратов не превосходит $8S$. По-

этому $1 \leq S + 8S$, т. е. $S \geq 1/9$.

б) Выберем круг наибольшего радиуса, раздую его в три раза и выбросим все круги, целиком лежащие в этом раздутии. Оставшиеся круги не пересекаются с первым. Для них сделаем то же самое и т. д. Раздутия всех выбранных кругов содержат все данные круги, а площадь раздутия в 9 раз больше площади исходного круга, поэтому $9S \geq 1$, где S — общая площадь всех выбранных кругов. Следовательно, $S \geq 1/9$.

25.49. Проведем прямую l так, что две данные точки лежат по одну сторону от нее и две — по другую. Пусть точки A и B лежат по одну сторону от l , C и D — по другую. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на прямую l . Поставим в точке A прожектор так, чтобы он освещал угол, заданный лучом AA_1 и лучом, параллельным l и пересекающим прямую BB_1 . Прожектор в точке B поставим аналогичным образом (рис. 25.33, а). Эти два прожектора освещают полуплоскость, содержащую точки C и D . Аналогично в точках C и D ставим прожекторы, освещающие другую полуплоскость. (Если $AB \perp l$, то прожекторы нужно направить так, как показано на рис. 25.33, б.)

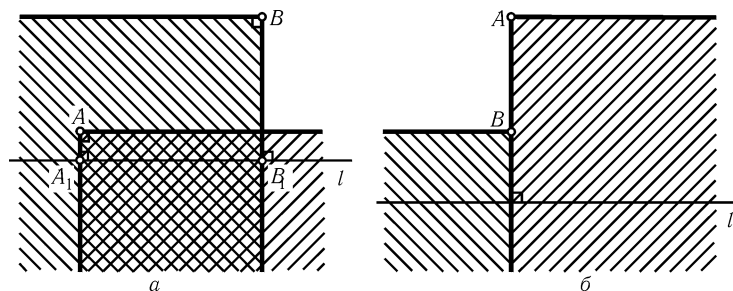


Рис. 25.33

25.50. а) Не верно. Пусть Φ — правильный треугольник со стороной 1. Легко проверить, что длина проекции Φ на любую прямую не больше 1. С другой стороны, так как треугольник Φ остроугольный, его нельзя накрыть кругом, радиус которого меньше радиуса описанной окружности (см. задачу 9.92). Диаметр описанной окружности треугольника Φ равен $2/\sqrt{3} > 1$.

б) Верно. Если проекции фигуры Φ на две взаимно перпендикулярные прямые равны a и b , то ее можно заключить в прямоугольник со сторонами a и b . Диаметр описанной окружности этого прямоугольника равен $\sqrt{a^2 + b^2}$. Но $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} < 1,5$.

25.51. Построим круги с центрами в данных точках радиуса $a = 1/2 + 1/2n$. Ясно, что пересекающиеся круги радиусов R_1 и R_2 можно заключить в круг радиуса не более $R_1 + R_2$. Будем так делать до тех пор, пока не получатся непересекающиеся круги. Все данные точки расположены на расстоянии не меньше a от границ этих кругов, поэтому их радиусы можно уменьшить на $b < a$, и при этом они по-прежнему будут покрывать все данные точки. Если кругов k штук, то сумма их диаметров не больше $n \cdot 2a - k \cdot 2b \leq 2na - 2b$. Нам нужно, чтобы выполнялись следующие условия: $2na - 2b < n$ и $2b > 1$. Они выполняются, если $a = 1/2 + 1/2n$ и $b = 1/2 + 1/4n$.

25.52. Раздвигая все монеты в 2 раза, т. е. для каждой из них рассмотрим круг радиуса $2r$ с тем же центром. Если центр одной монеты не принадлежит раздвинутой второй монете, то расстояние между их центрами больше $2r$, а значит, эти монеты не пересекаются. Кроме того, если центр монеты удален от края стола меньше чем на r , то она лежит внутри стола. Поэтому раздвигая монеты полностью покрывают круг радиуса $R - r$, так как иначе можно было бы положить монету с центром в непокрытой точке. Следовательно, $4\pi r^2 n \geq \pi(R - r)^2$, т. е. $2\sqrt{n} \geq (R - r)/r$.

25.53. Требуемое замощение изображено на рис. 25.34.

25.54. Положим первую плитку в углу данного прямоугольника. После этого замощение квадрата 4×4 определяется однозначно (см. рис. 25.35). Поэтому данный прямоугольник можно разрезать на квадраты 4×4 .

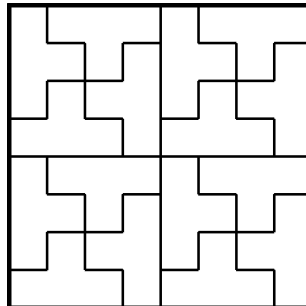


Рис. 25.34

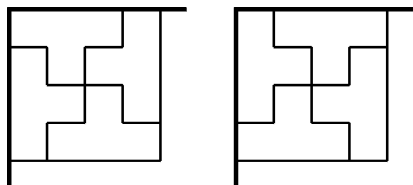


Рис. 25.35

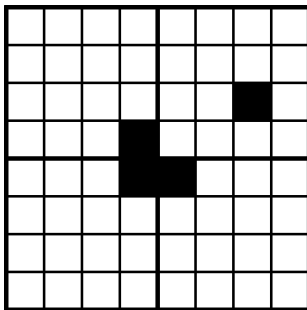


Рис. 25.36

25.55. а) Докажем это утверждение по индукции. Для квадрата со стороной 2 оно очевидно. Предположим теперь, что можно замостить любой квадрат со стороной 2^n без одной клетки, и покажем, как тогда замостить квадрат со стороной 2^{n+1} без одной клетки. Разобьем этот квадрат на 4 квадрата со стороной 2^n . Выброшенная клетка попадает в один из них, а по одной клетке в трех остальных квадратах можно покрыть одной фигуркой (рис. 25.36). Теперь в каждом из этих четырех квадратов со стороной 2^n выброшено по одной клетке, поэтому их можно замостить данными фигурками.

б) Докажем сначала требуемое утверждение для $n = 1$, т. е. для квадрата со стороной 7. Можно считать, что выброшенная клетка лежит в одном из заштри-

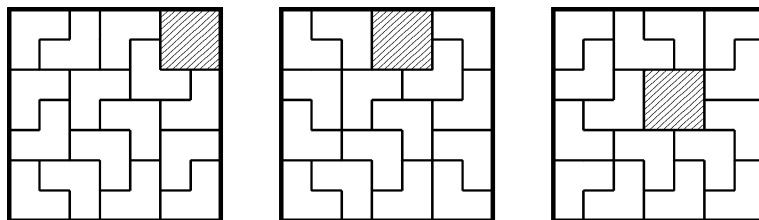


Рис. 25.37

хованных на рис. 25.37 квадратиков; требуемые замощения изображены на этом же рисунке.

Покажем теперь, как с помощью замощения квадрата со стороной $6n + 1$ построить замощение квадрата со стороной $6n + 7$. Четыре квадрата со стороной $6n + 1$, Прилегающие к вершинам квадрата со стороной $6n + 7$, полностью покрывают этот квадрат. Поэтому выброшенная клетка лежит в одном из этих квадратов; замостим его. Оставшуюся часть можно разрезать на квадраты со стороной 6 и прямоугольники размером 6×7 . Эти квадраты и прямоугольники можно разрезать на прямоугольники размером 2×3 , каждый из которых состоит из двух плиток.

25.56. Требуемое покрытие изображено на рис. 25.38.

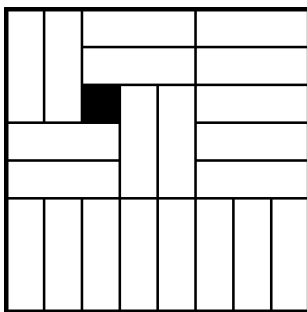


Рис. 25.38

25.57. Разрежем прямоугольник со сторонами $2n$ и $2m$ на квадратики со стороной 2 и вторым слоем будем мостить каждый квадратик по отдельности. Квадратик можно замостить либо двумя горизонтальными костями домино, либо двумя вертикальными. Ясно, что нам подойдет одно из этих покрытий, так как в квадратике со стороной 2 не могут содержаться одновременно горизонтальная и вертикальная кости.

25.58. Докажем это утверждение для любой фигуры, а не только для прямоугольника. Возьмем произвольную карточку A_0 . Одна из ее клеток покрыта клеткой другой карточки A_1 , вторая клетка A_1 покрыта клеткой карточки A_2 и т. д. Цепочка карточек A_0, A_1, A_2, \dots замкнется, причем именно на карточке A_0 , так как иначе какая-либо клетка будет покрыта трижды (не исключено, что эта цепочка состоит только из двух карточек A_0 и A_1). Замкнутая цепочка карточек состоит из четного числа карточек (для доказательства можно рассмотреть ломаную, каждое звено которой соединяет центры клеток одной карточки; эта ломаная имеет четное число и горизонтальных и вертикальных звеньев). Поэтому для карточек, входящих в замкнутую цепочку, искомым разбиением является разбиение на карточки с четными и нечетными номерами. Все эти карточки выбрасываем и для оставшихся карточек проделываем такую же операцию и т. д.

25.59. а) Нельзя. Предположим, что квадрат 6×6 замощен костями домино 1×2 так, что нет «шва». Рассмотрим 10 отрезков, которые делят квадрат на 36 клеток (стороны самого квадрата мы не рассматриваем). Каждый из этих отрезков разрезает не менее двух костей. В самом деле, если бы такой отрезок

разрезал одну кость, то по обе стороны от него лежало бы целое число костей и еще половина кости, т. е. нечетное число клеток. Этого не может быть, так как площадь каждой из частей, на которые отрезок разрезает квадрат, четна. Ясно также, что одну кость не могут разрезать разные отрезки. Поэтому должно быть по крайней мере 20 костей, а их всего 18.

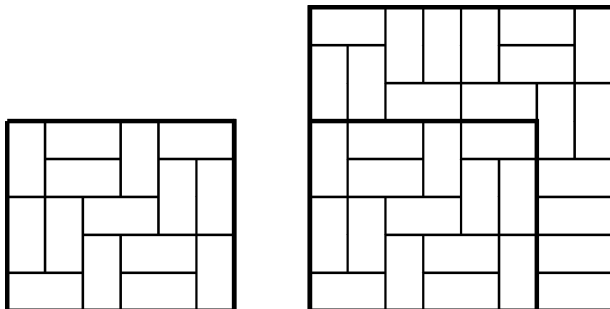


Рис. 25.39

б) На рис. 25.39 показано, как замостить прямоугольники 5×6 и 8×8 (при замощении прямоугольника 8×8 использовано замощение прямоугольника 5×6).

Теперь достаточно доказать, что если можно замостить прямоугольник $m \times n$, то можно замостить и прямоугольник $m \times (n + 2)$. Для этого нужно разрезать замощенный прямоугольник $m \times n$ на две части, не разрезая костей. Затем нужно правую часть сдвинуть вправо на расстояние 2 и промежуток заполнить горизонтальными костями (рис. 25.40).

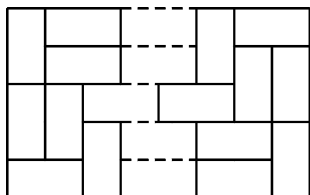


Рис. 25.40

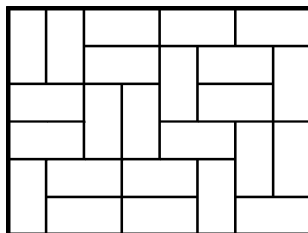


Рис. 25.41

в) Требуемое замощение изображено на рис. 25.41.

25.60. а) Предположим, что круг K радиуса R покрыт паркетом, состоящим из одинаковых выпуклых n -угольников. Рассмотрим все точки, лежащие внутри круга K и являющиеся вершинами n -угольников. Эти точки бывают двух типов: точки 1-го типа лежат на сторонах других n -угольников и сумма углов, сходящихся в них, равна 180° ; в точках 2-го типа сходятся углы, сумма которых равна 360° . Пусть p и q — количества точек 1-го и 2-го типа соответственно. В каждой точке 1-го типа сходятся не менее двух углов n -угольников, а в каждой точке 2-го типа — не менее трех углов. Поэтому, $2p + 3q \leq 2nL_1$, где L_1 — количество n -угольников, пересекающихся с K . Суммы углов, сходящихся в точках 1-го и 2-го типа равны 180° и 360° соответственно. Поэтому $p + 2q \geq (n - 2)L_2$, где L_2 — количество n -угольников, лежащих внутри K . Сложив неравенства $4p + 6q \leq 4nL_1$ и $-3p - 6q \leq 6L_2 - 3nL_2$, получим $p \leq 6L_2 - n(4L_1 - 3L_2)$, т. е.

$p/L_2 \leq 6 - n(4L_1/L_2 - 3)$. Так как $\lim_{R \rightarrow \infty} L_1/L_2 = 1$, то $\lim_{R \rightarrow \infty} p/L_2 = 6 - n$. Значит, если из данных выпуклых n -угольников можно сложить паркет, то $6 - n \geq 0$, т. е. $n \leq 6$.

б) См. рис. 25.42.

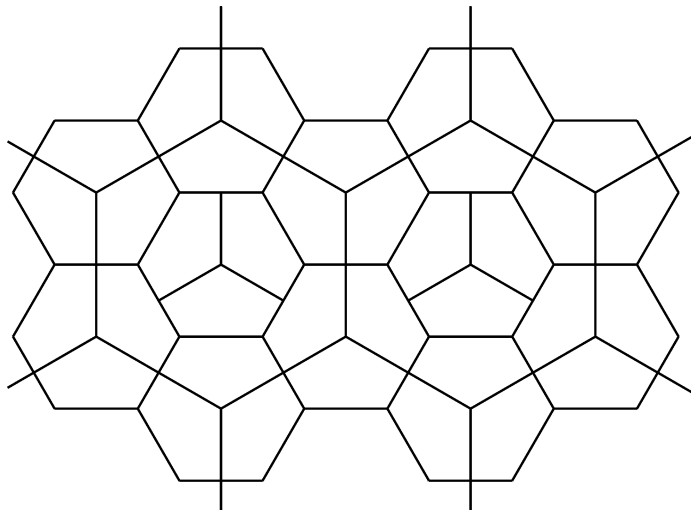


Рис. 25.42

Глава 26

Системы точек и отрезков. Примеры и контрпримеры

§1. Системы точек

26.1. а) Архитектор хочет расположить четыре высотных здания так, что, гуляя по городу, можно увидеть их шпили в произвольном порядке (т. е. для любого набора номеров зданий i, j, k, l можно стоя в некоторой точке и поворачиваясь в направлении «по» или «против» часовой стрелки, увидеть сначала шпиль здания i , затем j, k, l). Удастся ли ему это сделать?

б) Тот же вопрос для пяти зданий.

26.2. На плоскости дано n точек, причем из любой четверки этих точек можно выбросить одну точку так, что оставшиеся точки будут лежать на одной прямой. Докажите, что из данных точек можно выбросить одну точку так, что все оставшиеся точки будут лежать на одной прямой.

26.3*. На плоскости дано 400 точек. Докажите, что различных расстояний между ними не менее 15.

26.4*. На плоскости дано $n \geq 3$ точек. Пусть d — наибольшее расстояние между парами этих точек. Докажите, что имеется не более n пар точек, расстояние между которыми равно d .

26.5*. На плоскости дано 4000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует 1000 непересекающихся четырехугольников (возможно, невыпуклых) с вершинами в этих точках.

26.6*. На плоскости дано 22 точки, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки, заданные парами, пересекались по крайней мере в пяти точках.

26.7*. Докажите, что для любого натурального N существует N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и все попарные расстояния между которыми являются целыми числами.

См. также задачи 20.13–20.15, 22.7.

§2. Системы отрезков, прямых и окружностей

26.8. Постройте замкнутую шестизвенную ломаную, пересекающую каждое свое звено ровно один раз.

26.9. Можно ли нарисовать на плоскости шесть точек и так соединить их непересекающимися отрезками, что каждая точка будет соединена ровно с четырьмя другими?

26.10*. Точка O , лежащая внутри выпуклого многоугольника $A_1 \dots A_n$, обладает тем свойством, что любая прямая OA_i содержит еще одну вершину A_j . Докажите, что кроме точки O никакая другая точка не обладает этим свойством.

26.11*. На окружности отметили $4n$ точек и окрасили их через одну в красный и синий цвета. Точки каждого цвета разбили на пары, а точки каждой пары соединили отрезками того же цвета. Докажите, что если никакие три отрезка не пересекаются в одной точке, то найдется по крайней мере n точек пересечения красных отрезков с синими.

26.12*. На плоскости расположено $n \geq 5$ окружностей так, что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все окружности имеют общую точку.

§3. Примеры и контрпримеры

Есть много неверных утверждений, кажущихся на первый взгляд верными. Для опровержения такого рода утверждений нужно построить соответствующий пример; такие примеры называют *контрпримерами*.

26.13. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м²?

26.14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB и CD и углы A и C . Обязательно ли этот четырехугольник параллелограмм?

26.15*. Список упорядоченных в порядке возрастания длин сторон и диагоналей одного выпуклого четырехугольника совпадает с таким же списком для другого четырехугольника. Обязательно ли эти четырехугольники равны?

26.16*. Пусть $n \geq 3$. Существуют ли n точек, не лежащих на одной прямой, попарные расстояния между которыми иррациональны, а площади всех треугольников с вершинами в них рациональны?

26.17*. Существуют ли на плоскости три такие точки A , B и C , что для любой точки X длина хотя бы одного из отрезков XA , XB и XC иррациональна?

26.18*. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM , биссектриса BK и высота CH . Может ли площадь треугольника, образованного точками пересечения этих отрезков, быть больше $0,499S_{ABC}$?

26.19*. На бесконечном листе клетчатой бумаги (размер клетки 1×1) укладываются кости домино размером 1×2 так, что они накрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы любая прямая, идущая по линиям сетки, разрежала лишь конечное число костей?

26.20*. Может ли конечный набор точек содержать для каждой своей точки ровно 100 точек, удаленных от нее на расстояние 1?

26.21*. На плоскости расположено несколько непересекающихся отрезков. Всегда ли можно соединить концы некоторых из них отрезками так, чтобы получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная?

26.22*. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если центр его вписанной окружности одинаково удален от середин двух сторон?

26.23*. Арена цирка освещается n различными прожекторами. Каждый прожектор освещает выпуклую фигуру. Известно, что если выключить любой прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить любые два прожектора, то арена будет освещена не полностью. При каких n это возможно?

См. также задачи 22.17–22.19, 22.27, 22.28, 22.30, 23.37, 24.11, 24.12.

Решения

26.1. а) Легко проверить, что, построив четвертое здание внутри треугольника, образованного тремя другими зданиями, получим требуемое расположение.

б) Расположить требуемым образом пять зданий нельзя. В самом деле, если мы видим последовательно здания A_1, A_2, \dots, A_n , то $A_1A_2 \dots A_n$ — несамопересекающаяся ломаная. Поэтому если $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, то его вершины нельзя увидеть в следующем порядке: A, C, D, B . Остается заметить, что из пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, всегда можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника (задача 22.2).

26.2. Можно считать, что $n \geq 4$ и не все точки лежат на одной прямой. Тогда можно выбрать четыре точки A, B, C и D , не лежащие на одной прямой. По условию три из них лежат на одной прямой. Пусть для определенности точки A, B и C лежат на прямой l , а D не лежит на l . Нужно доказать, что все точки, кроме D , лежат на прямой l . Предположим, что точка E не принадлежит l . Рассмотрим четверку точек A, B, D, E . Тройки точек A, B, D и A, B, E не лежат на одной прямой. Поэтому на одной прямой лежит либо тройка точек A, D, E , либо тройка точек B, D, E . Пусть для определенности на одной прямой лежат точки A, D и E . Тогда никакие три из точек B, C, D, E не лежат на одной прямой. Получено противоречие.

26.3. Пусть количество различных расстояний между точками равно k . Фиксируем две точки. Тогда все остальные точки являются точками пересечения двух семейств концентрических окружностей, содержащих по k окружностей. Следовательно, общее количество точек не превосходит $2k^2 + 2$. Остается заметить, что $2 \cdot 14^2 + 2 = 394 < 400$.

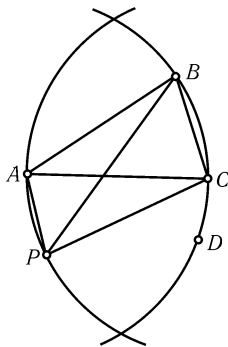


Рис. 26.1

26.4. Назовем *диаметром* отрезок длиной d , соединяющий пару данных точек. Концы всех диаметров, выходящих из точки A , лежат на окружности с центром A и радиусом d . Так как расстояние между любыми двумя точками не превосходит d , концы всех диаметров, выходящих из A , лежат на дуге, угловая величина которой не превосходит 60° . Следовательно, если из точки A выходят три диаметра AB , AC и AD , то один из концов этих диаметров лежит внутри угла, образованного двумя другими. Пусть для определенности точка C лежит внутри угла BAD . Докажем, что тогда из точки C выходит не более одного диаметра. Предположим, что есть еще диаметр CP и точки B и P лежат по разные стороны от прямой AC (рис. 26.1). Тогда $ABCP$ — выпуклый четырехугольник, поэтому $AB + CP < AC + BP$ (см. задачу 9.14), т. е. $d + d < d + BP$, а значит, $BP > d$, чего не может быть.

В итоге получаем, что либо из каждой точки выходит не более двух диаметров, либо существует точка, из которой выходит не более одного диаметра. Теперь требуемое утверждение можно доказать индукцией по числу точек. Для $n = 3$ оно очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любой системы из n точек, и докажем его для системы из $n + 1$ точки. В этой системе либо есть точка, из которой выходит не более одного диаметра, либо из каждой точки

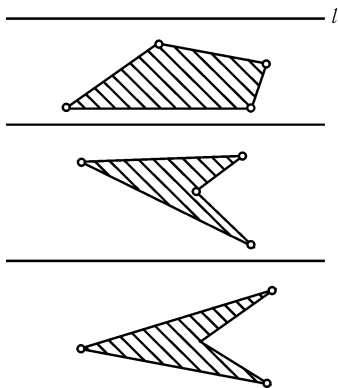


Рис. 26.2

выходит не более двух диаметров. В первом случае отбрасываем эту точку и, воспользовавшись тем, что в оставшейся системе не более n диаметров, получаем требуемое. Второй случай очевиден.

26.5. Проведем все прямые, соединяющие пары данных точек, и выберем прямую l , не параллельную ни одной из них. Прямыми, параллельными l , можно разбить данные точки на четверки. Четырехугольники с вершинами в этих четверках точек искомые (рис. 26.2).

26.6. Разобьем данные точки произвольным образом на шесть групп: четыре группы по четыре точки, группа из пяти точек и группа из одной точки. Рассмотрим группу из пяти точек. Из них можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами некоторого выпуклого четырех-

угольника $ABCD$ (см. задачу 22.2). Объединим в пары точки A, C и B, D . Тогда отрезки AC и BD , заданные парами, пересекаются. Одна из пяти точек осталась свободной. Присоединим ее к четверке точек и с полученной пятеркой точек сделаем то же самое и т. д. После пяти таких операций останутся две точки, и мы объединим их в пару.

26.7. Так как $\frac{2n}{n^2+1}^2 + \frac{n^2-1}{n^2+1}^2 = 1$, то существует угол φ , обладающий тем свойством, что $\sin \varphi = 2n/(n^2+1)$ и $\cos \varphi = (n^2-1)/(n^2+1)$, причем $0 < 2N\varphi < \pi/2$ при достаточно большом n . Рассмотрим окружность радиуса R с центром O и возьмем на ней точки A_0, A_1, \dots, A_{N-1} так, что $\angle A_0OA_k = 2k\varphi$. Тогда $A_iA_j = 2R\sin(|i-j|\varphi)$. Воспользовавшись формулами $\sin(m+1)\varphi = \sin m\varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos m\varphi$ и $\cos(m+1)\varphi = \cos m\varphi \cos \varphi - \sin m\varphi \sin \varphi$, легко доказать, что числа $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ рациональны для всех натуральных m . Возьмем в качестве R наибольший общий делитель всех знаменателей рациональных чисел $\sin \varphi, \dots, \sin(N-1)\varphi$. Тогда A_0, \dots, A_{N-1} — требуемая система точек.

26.8. Требуемый пример изображен на рис. 26.3.

26.9. Можно. Пример изображен на рис. 26.4.

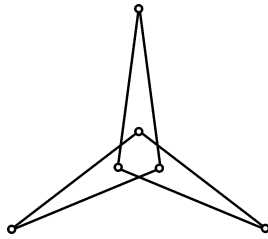


Рис. 26.3

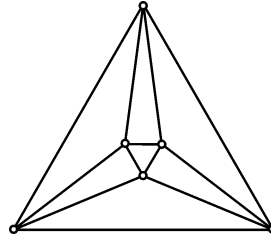


Рис. 26.4

26.10. Из условия следует, что все вершины многоугольника разбиваются на пары, задающие диагонали A_iA_j , которые проходят через точку O . Поэтому число вершин четно и по обе стороны от каждой такой диагонали A_iA_j лежит равное число вершин. Следовательно, $j = i + m$, где m — половина числа вершин. Таким образом, точка O является точкой пересечения диагоналей, соединяющих противоположные вершины. Ясно, что точка пересечения этих диагоналей единственна.

26.11. Если AC и BD — пересекающиеся красные отрезки, то число точек пересечения любой прямой с отрезками AB и CD не превосходит числа точек пересечения этой прямой с отрезками AC и BD . Поэтому, заменив красные отрезки AC и BD на отрезки AB и CD , мы не увеличим число точек пересечения красных отрезков с синими, а число точек пересечения красных отрезков с красными уменьшим, так как исчезнет точка пересечения AC и BD . После нескольких таких операций все красные отрезки станут непересекающимися, и нам остается доказать, что в этом случае число точек пересечения красных отрезков с синими не меньше n . Рассмотрим произвольный красный отрезок. Так как другие красные отрезки его не пересекают, то по обе стороны от него лежит четное число красных точек, т. е. нечетное число синих точек. Следовательно, найдется синий отрезок, пересекающий данный красный отрезок. Поэтому числе точек пересечения красных отрезков с синими не меньше числа красных отрезков, т. е. не меньше n .

26.12. Пусть A — общая точка первых трех окружностей S_1, S_2 и S_3 . Обозначим точки пересечения окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 через B, C, D соответственно. Предположим, что существует окружность S , не проходящая через точку A . Тогда окружность S проходит через точки B, C и D . Пусть S' — пятая окружность. Каждая пара точек из набора A, B, C, D является парой точек пересечения двух из окружностей S_1, S_2, S_3, S . Поэтому окружность S' проходит

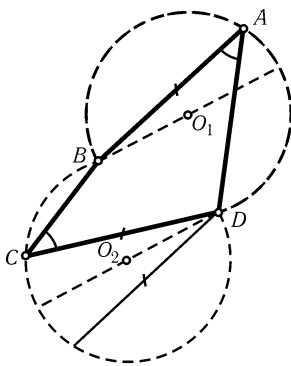


Рис. 26.5

через одну точку из каждой пары точек A, B, C, D . С другой стороны, окружность S' не может проходить через три точки из A, B, C, D , поскольку каждая тройка этих точек задает одну из окружностей S_1, S_2, S_3, S . Поэтому окружность S' не проходит через какие-то две из этих точек. Получено противоречие.

26.13. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ см и $BC = 500$ м. Пусть O — точка пересечения его диагоналей. Легко проверить, что площадь треугольника AOD больше 1 м², а все его высоты меньше 1 см.

26.14. Нет, не обязательно. На рис. 26.5 показано, как получить нужный четырехугольник $ABCD$.

26.15. Не обязательно. Легко проверить, что список длин сторон и диагоналей для равнобедренной трапеции с высотой 1 и основаниями 2 и 4 совпадает с таким же списком для четырехугольника с перпендикулярными диагоналями длиной 2 и 4 , делящимися точкой пересечения на отрезки длиной 1 и $1, 1$ и 3 (рис. 26.6).

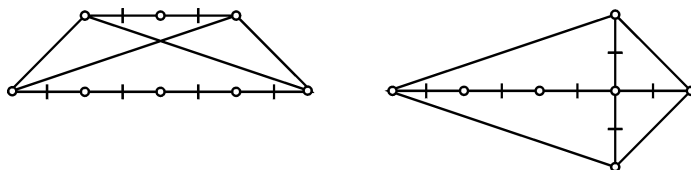


Рис. 26.6

26.16. Да, существуют. Рассмотрим точки $P_i = (i, i^2)$, где $i = 1, \dots, n$. Площади всех треугольников с вершинами в узлах целочисленной решетки рациональны (см. задачу 24.5), а числа $P_i P_j = |i - j| \sqrt{1 + (i + j)^2}$ иррациональны.

26.17. Да, существуют. Пусть C — середина отрезка AB . Тогда $XC^2 = (2XA^2 + 2XB^2 - AB^2)/2$. Если число AB^2 иррационально, то числа XA, XB и XC не могут одновременно быть рациональными.

26.18. Может. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC_1 с катетами $AB = 1$ и $BC_1 = 2n$. Проведем в нем медиану AM_1 , биссектрису BK_1 и высоту C_1H_1 . Площадь треугольника, образованного этими отрезками, больше $S_{ABM_1} - S_{ABK_1}$. Ясно, что $S_{ABK_1} < 1/2$ и $S_{ABM_1} = n/2$, т. е. $S_{ABM_1} - S_{ABK_1} > (S/2) - (S/2n)$, где $S = S_{ABC_1}$. Поэтому при достаточно большом n площадь треугольника, образованного отрезками AM_1, BK_1 и C_1H_1 , будет больше $0,499S$.

Точку C_1 можно слегка сдвинуть так, чтобы прямоугольный треугольник ABC_1 превратился в остроугольный треугольник ABC , а площадь треугольника, образованного точками пересечения отрезков, осталась больше $0,499$ площади треугольника ABC .

26.19. Можно. Замостим, например, бесконечные уголки, изображенные на рис. 26.7.

26.20. Да, может. Докажем это утверждение индукцией, заменив 100 на n . При $n = 1$ можно взять концы отрезка длиной 1 . Предположим, что утверждение доказано для n и A_1, \dots, A_k — нужный набор точек. Пусть A'_1, \dots, A'_k —

образы точек A_1, \dots, A_k при параллельном переносе на единичный вектор \mathbf{a} . Для доказательства шага индукции единичный вектор \mathbf{a} достаточно выбрать так, что $\mathbf{a} \neq \overrightarrow{A_i A_j}$ и $A_j A'_i \neq 1$ при $i \neq j$, т. е. $|\overrightarrow{A_j A_i} + \mathbf{a}| \neq 1$ при $i \neq j$. Каждое из этих ограничений исключает из единичной окружности не более одной точки.

26.21. Не всегда. Рассмотрим отрезки, изображенные на рис. 26.8. Концы каждого короткого отрезка можно соединить только с концами ближайшего к нему длинного отрезка. Ясно, что при этом не может получиться замкнутая самопересекающаяся ломаная.

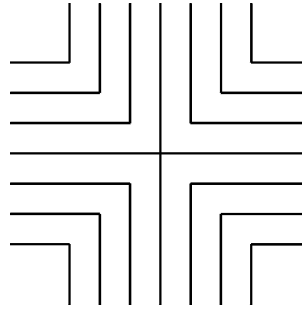


Рис. 26.7

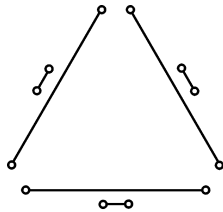


Рис. 26.8

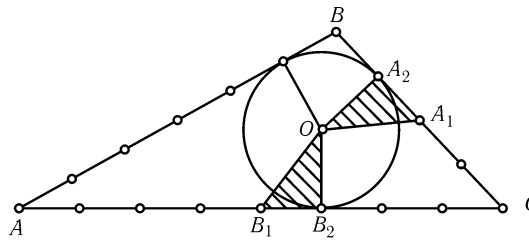


Рис. 26.9

26.22. Не обязательно. Докажем, что центр O вписанной окружности треугольника ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$ и $CA = 8$ одинаково удален от середин сторон AC и BC . Обозначим середины сторон AC и BC через B_1 и A_1 , а основания перпендикуляров, опущенных из точки O на AC и BC , — через B_2 и A_2 (рис. 26.9). Так как $A_1 A_2 = 1 = B_1 B_2$ (см. задачу 3.2) и $OA_2 = OB_2$, то $\triangle OA_1 A_2 = \triangle OB_1 B_2$ т. е. $OA_1 = OB_1$.

26.23. Это возможно при любом $n \geq 2$. Впишем в арену правильный k -угольник, где k — число различных пар, которые можно составить из n прожекторов, т. е. $k = n(n - 1)/2$. Тогда можно установить взаимно однозначное соответствие между сегментами, отсекаемыми сторонами k -угольника, и парами прожекторов. Пусть каждый прожектор освещает весь k -угольник и сегменты, соответствующие парам прожекторов, в которые он входит. Легко проверить, что это освещение обладает требуемыми свойствами.

Глава 27

Индукция и комбинаторика

Основные сведения

1. При решении геометрических задач иногда используется *метод математической индукции*. Он заключается в следующем. Пусть имеется некоторое утверждение $A(n)$, где n — натуральное число. Чтобы доказать истинность этого утверждения для всех $n \geq k$, достаточно доказать его истинность для $n = k$ и доказать, что из истинности утверждения для $n = t$, где t — любое натуральное число, не меньшее k , следует его истинность для $n = t + 1$.

Доказательство истинности утверждения $A(n)$ при $n = k$ называют *базой индукции*, а доказательство того, что из истинности утверждения для $n = t$ следует его истинность для $n = t + 1$, называют *индукционным шагом*.

§1. Индукция

27.1. Докажите, что если плоскость разбита на части прямыми и окружностями, то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.

27.2* Докажите, что в выпуклом n -угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

27.3* Пусть E — точка пересечения боковых сторон AD и BC трапеции $ABCD$, B_{n+1} — точка пересечения прямых A_nC и BD ($A_0 = A$), A_{n+1} — точка пересечения прямых EB_{n+1} и AB . Докажите, что $A_nB = AB/(n + 1)$.

27.4*. На прямой даны точки A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_{n-1} . Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} A_i B_k}{\prod_{j \neq i} A_i A_j} = 1.$$

27.5*. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

См. также задачи 2.12, 5.109, 22.7, 22.10–22.13, 22.21 б), 22.23, 22.24, 22.30, 23.39–23.41, 26.20.

§2. Комбинаторика

27.6. На окружности отмечено несколько точек, A — одна из них. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках больше: содержащих точку A или не содержащих ее?

27.7. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

27.8*. В выпуклом n -угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.

27.9*. В выпуклом n -угольнике ($n \geq 4$) проведены все диагонали. На сколько частей они делят n -угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

27.10*. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $C_n^5 / (n-4)$ различных выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках (определение числа C_n^k см. на с. 400).

27.11*. Докажите, что число неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n -угольника равно ближайшему к $n^2/12$ целому числу.

См. также задачу 25.6.

Решения

27.1. Доказательство проведем индукцией по общему числу прямых и окружностей. Для одной прямой или окружности утверждение очевидно. Предположим теперь, что можно раскрасить требуемым образом любую карту, заданную n прямыми и окружностями, и покажем, как тогда раскрасить карту, заданную $n+1$ прямыми и окружностями. Выбросим одну из этих прямых (или окружностей) и раскрасим карту, заданную оставшимися n прямыми и окружностями. Затем

цвета всех частей, лежащих по одну сторону от выброшенной прямой (или окружности), сохраним, а цвета всех частей, лежащих по другую сторону, заменим на противоположные.

27.2. Докажем индукцией по n , что в выпуклом n -угольнике нельзя выбрать более n сторон или диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку. При $n = 3$ это очевидно. Предположим, что утверждение верно для любого выпуклого n -угольника, и докажем его для $(n + 1)$ -угольника. Если из каждой вершины $(n + 1)$ -угольника выходит не более двух выбранных сторон или диагоналей, то их всего выбрано не более $n + 1$. Поэтому будем считать, что из некоторой вершины A выходят три выбранные стороны или диагонали AB_1 , AB_2 и AB_3 , причем AB_2 лежит между AB_1 и AB_3 . Так как диагональ или сторона, выходящая из точки B_2 и отличная от AB_2 не может одновременно пересекать AB_1 и AB_3 , то из B_2 выходит только одна выбранная диагональ. Поэтому можно выбросить точку B_2 вместе с диагональю AB_2 и применить предположение индукции.

27.3. Ясно, что $A_0B = AB$. Пусть C_n — точка пересечения прямых EA_n и DC , $DC : AB = k$, $AB = a$, $A_nB = a_n$ и $A_{n+1}B = x$. Так как $CC_{n+1} : A_nA_{n+1} = DC_{n+1} : BA_{n+1}$, то $kx : (a_n - x) = (ka - kx) : x$, т. е. $x = aa_n / (a + a_n)$. Если $a_n = a / (n + 1)$, то $x = a / (n + 2)$.

27.4. Докажем сначала требуемое утверждение при $n = 2$. Так как $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = \vec{0}$, то $(\overrightarrow{A_1B_1} / \overrightarrow{A_1A_2}) + (\overrightarrow{A_2B_1} / \overrightarrow{A_2A_1}) = 1$. Для доказательства шага индукции поступим следующим образом. Фиксируем точки A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_{n-2} , а точку B_{n-1} будем считать переменной. Рассмотрим функцию

$$f(B_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{A_iB_k}}{\prod_{j \neq i} \overrightarrow{A_iA_j}}.$$

Эта функция линейная, причем по предположению индукции $f(B_{n-1}) = 1$, если B_{n-1} совпадает с одной из точек A_1, \dots, A_n . Следовательно, эта функция тождественно равна 1.

27.5. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали его для $n - 1$ точки и докажем его для n точек. Если на каждой прямой, проходящей через две данные точки, лежит еще одна данная точка, то все данные точки лежат на одной прямой (см. задачу 20.13). Поэтому существует прямая, на которой лежат ровно две данные точки A и B . Выбросим точку A . Возможны два случая.

1. Все оставшиеся точки лежат на одной прямой l . Тогда будет ровно n различных прямых: $n - 1$ прямая, проходящая через A , и прямая l .

2. Оставшиеся точки не лежат на одной прямой. Тогда среди прямых, их соединяющих, по предположению индукции есть не менее $n - 1$ различных, причем все они отличны от прямой l . Вместе с прямой AB они составляют не менее n прямых.

27.6. Любому многоугольнику, не содержащему точки A , можно поставить в соответствие многоугольник, содержащий точку A , добавив ее к его вершинам. А вот обратную операцию, т. е. отбрасывание вершины A , можно производить только для n -угольников с $n \geq 4$. Поэтому многоугольников, содержащих точку A , больше, чем многоугольников, не содержащих точки A , причем больше на число треугольников с вершиной A , т. е. на $(n - 1)(n - 2) / 2$.

27.7. Первую точку можно выбрать десятью способами. Каждую из следующих восьми точек можно выбрать двумя способами, так как она должна быть соседней с одной из ранее выбранных точек (иначе получится самопересекающаяся ломаная). Поскольку начало и конец при таком подсчете не различаются, результат нужно разделить на 2. Следовательно, всего имеется $10 \cdot 2^8 / 2 = 1280$ ломаных.

27.8. Любая точка пересечения диагоналей определяет две диагонали, пересечением которых она является, а концы этих диагоналей определяют выпуклый четырехугольник. Обратное, любые четыре вершины многоугольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому число точек пересечения диагоналей равно числу способов выбора четырех точек из n , т. е. равно $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$.

27.9. Будем поочередно проводить диагонали. Когда мы проводим очередную диагональ, число частей, на которые проведенные ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m + 1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведенными, т. е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n -угольник, равно $D + P + 1$, где D — число диагоналей, P — число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D = n(n-3)/2$. Согласно предыдущей задаче $P = n(n-1)(n-2)(n-3)/24$.

27.10. Если выбрать любые пять точек, то существует выпуклый четырехугольник с вершинами в них (задача 22.2). Остается заметить, что четверку точек можно дополнить до пятерки $n - 4$ различными способами.

27.11. Пусть всего имеется N неравных треугольников с вершинами в вершинах правильного n -угольника, причем из них N_1 правильных, N_2 неправильных равнобедренных и N_3 разносторонних. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A , неправильный равнобедренный — трем треугольникам с вершиной A , а разносторонний — шести. Так как всего имеется $(n-1)(n-2)/2$ треугольников с вершиной A , то $(n-1)(n-2)/2 = N_1 + 3N_2 + 6N_3$.

Ясно, что число неравных правильных треугольников равно 0 или 1, а число неравных равнобедренных равно $(n-1)/2$ или $(n/2) - 1$, т. е. $N_1 = 1 - c$, $N_1 + N_2 = (n-2+d)/2$, где c и d равны 0 или 1. Поэтому $12N = 12(N_1 + N_2 + N_3) = 2(N_1 + 3N_2 + 6N_3) + 6(N_1 + N_2) + 4N_1 = (n-1)(n-2) + 3(n-2+d) + 4(1-c) = n^2 + 3d - 4c$. Так как $|3d - 4c| < 6$, то N совпадает с ближайшим к $n^2/12$ целым числом.

Глава 28

Инверсия

Основные сведения

1. Все геометрические преобразования, с которыми нам приходилось встречаться в этой книге, переводили прямые в прямые, а окружности в окружности. Инверсия — это преобразование другого типа, которое также сохраняет класс прямых и окружностей, но может прямую перевести в окружность, а окружность — в прямую. На этом и других замечательных свойствах инверсии основывается ее поразительная эффективность при решении разнообразных геометрических задач.

2. **О п р е д е л е н и е.** Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R . *Инверсией относительно окружности S* называют преобразование, переводящее произвольную точку A , отличную от O , в точку A^* , лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O . Инверсию относительно S будем также называть *инверсией с центром O и степенью R^2* , а окружность S — *окружностью инверсии*.

3. Непосредственно из определения инверсии видно, что точки окружности S она оставляет на месте, точки, лежащие внутри S , переводит наружу, а точки, лежащие вне S , — внутрь S . Если точка A переходит при инверсии в A^* , то точку A^* эта инверсия переводит в A , т. е. $(A^*)^* = A$. Образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая.

В этом месте надо сделать оговорку, связанную с тем, что инверсия не является в строгом смысле слова преобразованием плоскости, так как точка O нигде не переходит. Поэтому формально мы не имеем права говорить об «образе прямой, проходящей через точку O », а должны рассматривать объединение двух лучей, получающихся из прямой выбрасыванием точки O . Аналогично обстоит дело и с окружностями, содержащими точку O . Мы, тем не менее, будем придерживаться этих нестрогих, но зато более наглядных формулировок, надеясь, что читатель легко восстановит точный смысл.

4. Всюду в этой главе образ точки A при инверсии обозначается через A^* .

5. Сформулируем важнейшие свойства инверсии, постоянно использующиеся при решении задач.

При инверсии с центром O :

- а) прямая l , не содержащая O , переходит в окружность, проходящую через O (задача 28.2);
- б) окружность с центром C , проходящая через O , переходит в прямую, перпендикулярную OC (задача 28.3);
- в) окружность, не проходящая через O , переходит в окружность, не проходящую через O (задача 28.3);
- г) касание окружностей и прямых сохраняется, если только точка касания не совпадает с центром инверсии; в последнем случае получается пара параллельных прямых (задача 28.4);
- д) величина угла между двумя окружностями (или между окружностью и прямой, или между двумя прямыми) сохраняется (задача 28.5).

§1. Свойства инверсии

28.1. Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A^* , а точка B — в B^* . Докажите, что треугольники OAB и OB^*A^* подобны.

28.2. Докажите, что при инверсии с центром O прямая l , не проходящая через O , переходит в окружность, проходящую через O .

28.3. Докажите, что при инверсии с центром O окружность, проходящая через O , переходит в прямую, а окружность, не проходящая через O , — в окружность.

28.4. Докажите, что касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

О п р е д е л е н и е. Пусть две окружности пересекаются в точке A . Углом между окружностями называют угол между касательными к окружностям в точке A . (Ясно, что если окружности пересекаются в точках A и B , то угол между касательными в точке A равен углу между касательными в точке B .) Аналогично определяется угол между прямой и окружностью.

28.5*. Докажите, что при инверсии сохраняется угол между окружностями (между окружностью и прямой, между прямыми).

28.6*. Докажите, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

28.7*. Через точку A проведена прямая l , пересекающая окружность S с центром O в точках M и N и не проходящая через O . Пусть M' и N' — точки, симметричные M и N относительно OA , а A' — точка пересечения прямых MN' и $M'N$. Докажите, что A' совпадает с образом точки A при инверсии относительно S (и, следовательно, не зависит от выбора прямой l).

§2. Построение окружностей

При решении задач этого параграфа мы часто будем говорить «сделаем инверсию...». В переводе на более формальный язык это звучит так: «Построим при помощи циркуля и линейки образы всех данных точек, прямых и окружностей при инверсии относительно данной окружности». Выполнимость таких построений вытекает из свойств инверсии и задачи 28.8.

В задачах на построение часто используется существование инверсии, переводящей две непересекающиеся окружности в концентрические. Из решения задачи 28.6 следует, что центр и радиус такой инверсии (а значит, и образы окружностей) можно построить циркулем и линейкой.

28.8. Постройте образ точки A при инверсии относительно окружности S с центром O .

28.9. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности (или прямой).

28.10*. Через данную точку проведите окружность, касающуюся двух данных окружностей (или окружности и прямой).

28.11*. Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей (*задача Аполлония*).

28.12*. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

28.13*. Постройте окружность, касающуюся данной окружности S и перпендикулярную двум данным окружностям S_1 и S_2 .

28.14*. Проведите через данные точки A и B окружность, пересекающую данную окружность S под углом α .

§3. Построения одним циркулем

По традиции, идущей от древних греков, в геометрии обычно рассматриваются построения циркулем и линейкой. Но можно также производить построения с помощью других инструментов, а еще можно, например, рассмотреть построения с помощью лишь одного циркуля без линейки. С помощью одного циркуля, естественно, нельзя построить сразу все точки прямой. Поэтому мы договоримся считать, что прямая построена, если построены две ее точки. Оказывается, что при таком условии с помощью циркуля можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки. Это следует из возможности построить одним циркулем точки пересечения прямой, заданной двумя точками, с окружностью (задача 28.21, а) и точку пересечения двух прямых (задача 28.21, б)), так как любое построение циркулем и линейкой представляет собой последовательность находжений точек пересечения окружностей и прямых.

В этом параграфе рассматриваются построения одним циркулем без помощи линейки, т. е. слово «постройте» означает «постройте пользуясь одним только циркулем». При этом отрезок считается построенным, если построены его концы.

28.15. а) Постройте отрезок, который в два раза длиннее данного отрезка.

б) Постройте отрезок, который в n раз длиннее данного отрезка.

28.16. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой, проходящей через данные точки B и C .

28.17*. Постройте образ точки A при инверсии относительно данной окружности S с данным центром O .

28.18*. Постройте середину отрезка с данными концами.

28.19*. Постройте окружность, в которую переходит данная прямая AB при инверсии относительно данной окружности с данным центром O .

28.20*. Постройте окружность, проходящую через три данные точки.

28.21*. а) Постройте точки пересечения данной окружности S и прямой, проходящей через данные точки A и B .

б) Постройте точку пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , где A_1, B_1, A_2 и B_2 — данные точки.

§4. Сделаем инверсию

28.22. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (рис. 28.1). Найдите множество их точек касания.

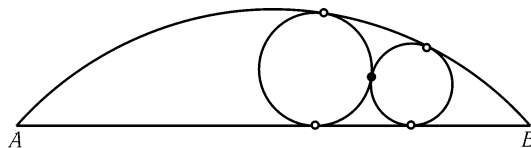


Рис. 28.1

28.23. Найдите множество точек касания пар окружностей, касающихся сторон данного угла в данных точках A и B .

28.24. Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

28.25*. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку (см. задачу 3.44).

28.26*. Никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD .

28.27*. Через точки A и B проведены окружности S_1 и S_2 , касающиеся окружности S , и окружность S_3 , перпендикулярная S . Докажите, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2 .

28.28*. Две окружности, пересекающиеся в точке A , касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1 , а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причем касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 , касаются друг друга.

28.29*. Окружность S_A проходит через точки A и C ; окружность S_B проходит через точки B и C ; центры обеих окружностей лежат на прямой AB . Окружность S касается окружностей S_A и S_B , а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1 . Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC .

28.30*. а) Докажите, что окружность, проходящая через середины сторон треугольника, касается его вписанной и трех невписанных окружностей (Фейербах).

б) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки C_1 и B_1 так, что $AC_1 = B_1C_1$ и вписанная окружность S треугольника ABC является невписанной окружностью треугольника AB_1C_1 . Докажите, что вписанная окружность треугольника AB_1C_1 касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC .

§5. Точки, лежащие на одной окружности, и окружности, проходящие через одну точку

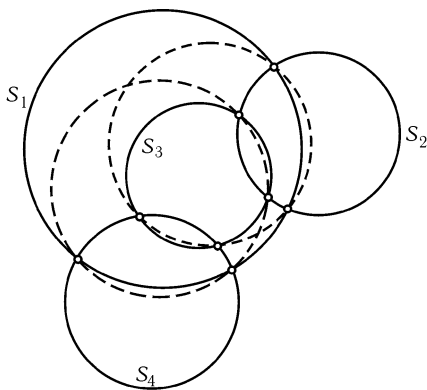


Рис. 28.2

28.31. Даны четыре окружности, причем окружности S_1 и S_3 пересекаются с обеими окружностями S_2 и S_4 . Докажите, что если точки пересечения S_1 с S_2 и S_3 с S_4 лежат на одной окружности или прямой, то и точки пересечения S_1 с S_4 и S_2 с S_3 лежат на одной окружности или прямой (рис. 28.2).

28.32*. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4 . Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2 , S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2 , S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2 , S_4 и S_1 — в точках D_1 и D_2 (рис. 28.3). Докажите, что если

точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности S (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).

28.33*. Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHVKCLDMEN$ (рис. 28.4). Около

треугольников — лучей звезды описали окружности. Докажите, что пять точек пересечения этих окружностей, отличных от A, B, C, D, E , лежат на одной окружности.

28.34*. На плоскости взяты шесть точек $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1A_2B_3, A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $B_1B_2A_3, B_1A_2B_3$ и $A_1B_2B_3$ пересекаются в одной точке.

28.35*. На плоскости взяты шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников $A_1B_1C_1, A_1B_2C_2, A_2B_1C_2, A_2B_2C_1$, проходят через одну точку, то и окружности, описанные около треугольников $A_2B_2C_2, A_2B_1C_1, A_1B_2C_1, A_1B_1C_2$, проходят через одну точку.

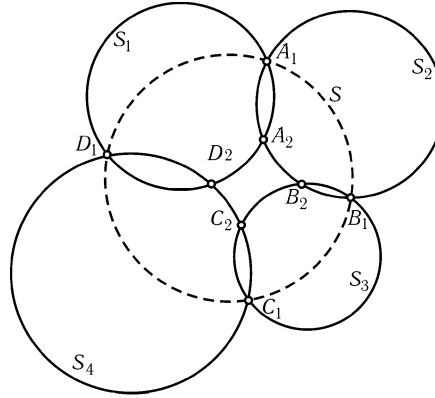


Рис. 28.3

28.36*. В этой задаче мы будем рассматривать наборы из n прямых общего положения, т. е. наборы, в которых никакие две прямые не параллельны и никакие три не проходят через одну точку.

Набору из двух прямых общего положения поставим в соответствие точку — их точку пересечения, а набору из трех прямых общего положения — окружность, проходящую через три точки пересечения. Если l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре прямые общего положения, то четыре окружности S_i , соответствующие четырем тройкам прямых, получаемых отбрасыванием прямой l_i , пройдут через одну точку (см. задачу 2.85, а)), которую мы и поставим в соответствие четверке прямых. Эту конструкцию можно продолжить.

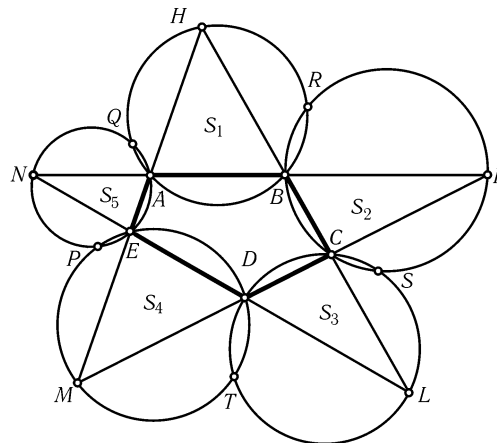


Рис. 28.4

а) Пусть $l_i, i = 1, \dots, 5$ — пять прямых общего положения. Докажите, что пять точек A_i , соответствующих четверкам прямых, получаемых отбрасыванием прямой l_i , лежат на одной окружности.

б) Докажите, что эту цепочку можно продолжить, поставив в соответствие каждому набору из n прямых общего положения точку при четном n и окружность при нечетном n , так, что n окружностей (точек), соответствующих наборам из $n - 1$ прямых, проходят через эту точку (лежат на этой окружности).

28.37*. Пусть на двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 выбраны точки M_1 и M_2 , не совпадающие с точкой пересечения M этих прямых. Поставим в соответствие им окружность, проходящую через M_1 , M_2 и M .

Если (l_1, M_1) , (l_2, M_2) , (l_3, M_3) — прямые с выбранными точками в общем положении, то согласно задаче 2.81, а) три окружности, соответствующие парам (l_1, M_1) и (l_2, M_2) , (l_2, M_2) и (l_3, M_3) , (l_3, M_3) и (l_1, M_1) , пересекаются в одной точке, которую мы поставим в соответствие тройке прямых с точками.

а) Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре прямые общего положения, на каждой из которых задано по точке, причем эти точки лежат на одной окружности. Докажите, что четыре точки, соответствующие тройкам, получаемым отбрасыванием одной из прямых, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что каждому набору из n прямых общего положения с заданными на них точками, лежащими на одной окружности, можно поставить в соответствие точку (при нечетном n) или окружность (при четном n) так, что n окружностей (точек при четном n), соответствующих наборам из $n - 1$ прямых, проходят через эту точку (лежат на этой окружности при четном n).

§6. Цепочки окружностей

28.38*. Окружности S_1, S_2, \dots, S_n касаются двух окружностей R_1 и R_2 и, кроме того, S_1 касается S_2 в точке A_1 , S_2 касается S_3 в точке A_2 , ..., S_{n-1} касается S_n в точке A_{n-1} . Докажите, что точки A_1, A_2, \dots, A_{n-1} лежат на одной окружности.

28.39*. Докажите, что если существует цепочка окружностей S_1, S_2, \dots, S_n , каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2 , то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1 , касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним образом в противном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей T_1, T_2, \dots, T_n (*поризм Штейнера*).

28.40*. Докажите, что для двух непересекающихся окружностей R_1 и R_2 цепочка из n касающихся окружностей (см. предыдущую задачу) существует тогда и только тогда, когда угол между окружностями T_1 и T_2 , касающимися R_1 и R_2 в точках их пересечения с прямой, соединяющей центры, равен целому кратному углу $360^\circ/n$ (рис. 28.5).

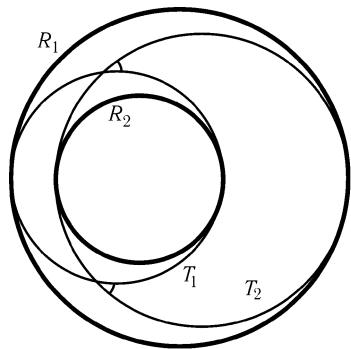


Рис. 28.5

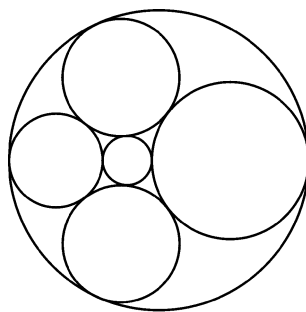


Рис. 28.6

28.41*. Каждая из шести окружностей касается четырех из оставшихся пяти (рис. 28.6). Докажите, что для любой пары непересекающихся окружностей (из этих шести) их радиусы и расстояние между центрами связаны соотношением $d^2 = r_1^2 + r_2^2 \pm 6r_1r_2$ («плюс» — если окружности не лежат одна внутри другой, «минус» — в противном случае).

Решения

28.1. Пусть R^2 — степень инверсии. Тогда $OA \cdot OA^* = OB \cdot OB^* = R^2$, откуда $OA : OB = OB^* : OA^*$ и $\triangle OAB \sim \triangle OB^*A^*$, поскольку $\angle AOB = \angle B^*OA^*$.

28.2. Опустим из точки O перпендикуляр OC на прямую l и возьмем произвольную точку M на l . Из подобия треугольников OCM и OM^*C^* (задача 28.1) следует, что $\angle OM^*C^* = \angle OCM = 90^\circ$, т. е. точка M^* лежит на окружности S с диаметром OC^* . Если X — какая-то точка S , отличная от O , то она является образом при инверсии точки Y пересечения прямых l и OX (так как образ точки Y лежит, с одной стороны, на луче OX , а с другой стороны, как уже доказано, на окружности S). Итак, инверсия переводит прямую l в окружность S (без точки O).

28.3. Случай, когда окружность S проходит через O , фактически был разобран в предыдущей задаче (и формально следует из нее, так как $(M^*)^* = M$). Предположим теперь, что точка O не принадлежит S . Пусть A и B — точки пересечения окружности S с прямой, проходящей через O и центр S , а M — произвольная точка S . Докажем, что образом S является окружность с диаметром A^*B^* . Для этого достаточно показать, что $\angle A^*M^*B^* = 90^\circ$. По согласию задачи 28.1 $\triangle OAM \sim \triangle OM^*A^*$ и $\triangle OBM \sim \triangle OM^*B^*$, следовательно, $\angle OMA = \angle OA^*M^*$ и $\angle OMB = \angle OB^*M^*$, точнее, $\angle(OM, MA) = -\angle(OA^*, M^*A^*)$ и $\angle(OM, MB) = -\angle(OB^*, M^*B^*)$ (чтобы не рассматривать различные случаи расположения точек, мы воспользуемся свойствами ориентированных углов между прямыми, изложенными в гл. 2). Поэтому $\angle(A^*M^*, M^*B^*) = \angle(A^*M^*, OA^*) + \angle(OB^*, M^*B^*) = \angle(OM, MA) + \angle(MB, OM) = \angle(MB, MA) = 90^\circ$.

28.4. Если точка касания не совпадает с центром инверсии, то после инверсии эти окружности (окружность и прямая) будут по-прежнему иметь одну общую точку, т. е. касание сохранится.

Если окружности с центрами A и B касаются в точке O , то при инверсии с центром O они перейдут в пару прямых, перпендикулярных AB . Наконец, если прямая l касается в точке O окружности с центром A , то при инверсии с центром O прямая l переходит в себя, а окружность — в прямую, перпендикулярную OA . В каждом из этих случаев получаем пару параллельных прямых.

28.5. Проведем через точку пересечения окружностей касательные l_1 и l_2 . Так как при инверсии касающиеся окружности и прямые переходят в касающиеся (см. задачу 28.4), то угол между образами окружностей равен углу между образами касательных к ним. При инверсии с центром O прямая l_i переходит в себя или в окружность, касательная к которой в точке O параллельна l_i . Поэтому угол между образами прямых l_1 и l_2 при инверсии с центром O равен углу между этими прямыми.

28.6. *Первое решение.* Проведем через центры окружностей координатную ось. Пусть a_1 и a_2 — координаты точек пересечения оси с S_1 , b_1 и b_2 — с S_2 . Пусть O — точка на оси с координатой x . Тогда при инверсии с центром O и степенью k наши окружности перейдут в окружности, диаметры которых лежат на оси, и их концы имеют координаты a'_1 , a'_2 и b'_1 , b'_2 , где $a'_1 = x + \frac{k}{a_1 - x}$, $a'_2 = x + \frac{k}{a_2 - x}$, $b'_1 = x + \frac{k}{b_1 - x}$, $b'_2 = x + \frac{k}{b_2 - x}$. Полученные окружности концентричны, если $(a'_1 + a'_2)/2 = (b'_1 + b'_2)/2$, т. е. 0

$$\frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} = \frac{1}{b_1 - x} + \frac{1}{b_2 - x},$$

откуда $(b_1 + b_2 - a_1 - a_2)x^2 + 2(a_1a_2 - b_1b_2)x + b_1b_2(a_1 + a_2) - a_1a_2(b_1 + b_2) = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения относительно x равен $4(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)(b_2 - a_1)(b_2 - a_2)$. Он положителен в точности тогда, когда окружности не пересекаются, что и доказывает существование искомой инверсии.

Существование такой инверсии в случае окружности и прямой доказывается аналогично.

Второе решение. Возьмем из прямой, соединяющей центры O_1 и O_2 окружностей, точку C так, чтобы касательные, проведенные к окружностям из точки C , были равны. Эту точку C можно построить, проведя радикальную ось окружностей (см. задачу 3.54). Пусть l — длина этих касательных. Окружность S радиуса l с центром в C перпендикулярна S_1 и S_2 . Поэтому при инверсии с центром O , где O — любая из точек пересечения окружности S с прямой O_1O_2 , S перейдет в прямую, перпендикулярную окружностям S_1^* и S_2^* и, следовательно, проходящую через их центры. Но прямая O_1O_2 тоже проходит через центры S_1^* и S_2^* , поэтому окружности S_1^* и S_2^* концентричны, т. е. O — центр искомой инверсии.

В случае, когда S_2 не окружность, а прямая, роль прямой O_1O_2 играет перпендикуляр, опущенный из точки O_1 на S_2 , точка C будет точкой его пересечения с S_2 , а l — длиной касательной, проведенной из C к S_1 .

28.7. Пусть точка A лежит вне S , тогда A' лежит внутри S и $\angle MA'N = (\sphericalangle MN + \sphericalangle M'N')/2 = \sphericalangle MN = \angle MON$, т. е. четырехугольник $MNOA'$ вписанный. Но при инверсии относительно S прямая MN перейдет в окружность, проходящую через точки M , N , O (задача 28.2). Поэтому точка A^* (образ A при инверсии) лежит на описанной окружности четырехугольника $MNOA'$. По тем же причинам точки A' и A^* принадлежат и окружности, проходящей через M' , N' и O . Но эти две окружности не могут иметь других общих точек, кроме O и A' . Следовательно, $A^* = A'$.

В случае, когда A лежит внутри S , применим уже доказанное к прямой MN' и точке A' (она находится вне S). Получим, что $A = (A')^*$. Но тогда $A' = A^*$.

28.8. Пусть точка A лежит вне окружности S . Проведем через A прямую, касающуюся S в точке M . Пусть MA' — высота треугольника OMA . Прямоугольные треугольники OMA и $OA'M$ подобны, поэтому $A'O : OM = OM : OA$ и $OA' = R^2/OA$, т. е. точка A' искомая. Если же A находится внутри S , то выполним построение в обратном порядке: проводим перпендикуляр AM к OA (точка M лежит на окружности). Тогда касательная к S в точке M пересекается с лучом OA в искомой точке A^* . Доказательство повторяется дословно.

28.9. Если обе данные точки A и B лежат на данной окружности S (или прямой), то задача решений не имеет. Пусть теперь точка A не лежит на S . При инверсии с центром A искомая окружность перейдет в прямую, проходящую через B^* и касающуюся S^* . Из этого вытекает следующее построение. Сделаем инверсию относительно произвольной окружности с центром A . Проведем через B^* касательную l к S^* . Еще раз сделаем инверсию. Тогда l перейдет в искомую окружность.

Если точка B^* лежит на S^* , то задача имеет единственное решение, если B^* лежит вне S^* , то решений два, а если внутри, то ни одного.

28.10. После инверсии с центром в данной точке окружности S_1 и S_2 перейдут в пару окружностей S_1^* и S_2^* (окружность S^* и прямую l ; пару прямых l_1 и l_2), а касающаяся их окружность — в общую касательную к S_1^* и S_2^* (соответственно в касательную к S^* , параллельную l ; прямую, параллельную l_1 и l_2). Поэтому для построения искомой окружности нужно построить прямую, касающуюся S_1^* и S_2^* (касающуюся S^* и параллельную l ; параллельную l_1 и l_2), и еще раз сделать инверсию.

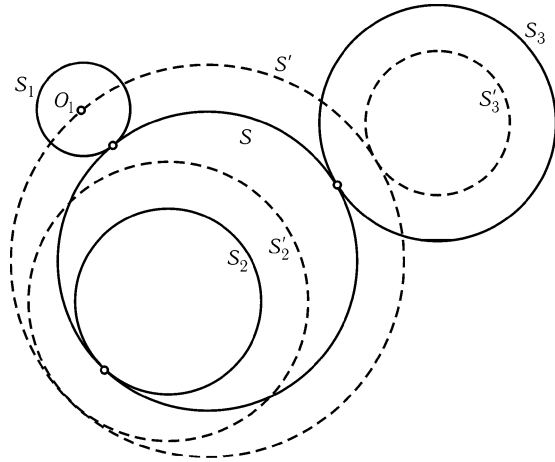


Рис. 28.7

28.11. Сведем эту задачу к задаче 28.10. Пусть окружность S радиуса r касается окружностей S_1, S_2, S_3 радиусов r_1, r_2, r_3 соответственно. Касание окружности S с каждой из S_i ($i = 1, 2, 3$) может быть как внешним, так и внутренним, поэтому всего возможно восемь различных случаев касания. Пусть, например, S касается S_1 и S_3 внешним, а S_2 — внутренним образом (рис. 28.7). Заменим окружности S, S_2, S_3 на концентрические им окружности S', S_2', S_3' так, что-

бы S' касалась S'_2 и S'_3 и проходила через центр O_1 окружности S_1 . Для этого достаточно, чтобы радиусы S' , S'_2 , S'_3 равнялись $r + r_1$, $r_2 + r_1$, $|r_3 - r_1|$. Обратное, по окружности S' , проходящей через O_1 и касающейся S'_2 и S'_3 (внешне, если $r_3 - r_1 \geq 0$, и внутренне, если $r_3 - r_1 < 0$), мы можем построить окружность S , дающую решение задачи, уменьшив радиус S' на r_1 . Построение такой окружности S' описано в решении задачи 28.10 (если виды касания заданы, то окружность строится однозначно). Таким же способом можно выполнить построение и в остальных возможных вариантах касания.

28.12. При инверсии с центром в данной точке A искомая окружность перейдет в прямую, перпендикулярную образам данных окружностей S_1 и S_2 , т. е. в прямую, соединяющую центры S_1^* и S_2^* . Таким образом, искомая окружность — образ при этой инверсии произвольной прямой, проходящей через центры S_1^* и S_2^* .

28.13. Сделаем инверсию, переводящую окружности S_1 и S_2 в пару прямых (если они имеют общую точку) или в пару концентрических окружностей (см. задачу 28.6) с общим центром A . В последнем случае окружность, перпендикулярная им обеим, перейдет в прямую, проходящую через A (так как не существует окружностей, перпендикулярных двум концентрическим окружностям); касательная, проведенная из A к S^* , есть образ искомой окружности при этой инверсии. Если S_1^* и S_2^* — параллельные прямые, то образ искомой окружности — любая из двух прямых, перпендикулярных S_1^* и S_2^* и касающихся S^* . Наконец, если S_1^* и S_2^* — пересекающиеся в некоторой точке B прямые, то искомая окружность — это образ при инверсии любой из двух окружностей с центром B , касающихся S^* .

28.14. После инверсии с центром в точке A задача сводится к построению прямой l , проходящей через B^* , пересекающей окружность S^* под углом α , т. е. к построению точки X на S^* такой, что $\angle B^*XO = 90^\circ - \alpha$, где O — центр S^* . Эта точка лежит на пересечении S^* с дугой, из которой отрезок B^*O виден под углом $90^\circ - \alpha$.

28.15. а) Пусть AB — данный отрезок. Проведем окружность с центром B радиуса AB . Отложив на этой окружности хорды AX , XY и YZ , равные по длине AB , мы получим равносторонние треугольники ABX , XYB и YZB . Поэтому $\angle ABZ = 180^\circ$ и $AZ = 2AB$.

б) В решении задачи а) описано, как на прямой AB отложить отрезок BZ , равный AB . Повторив эту процедуру $n - 1$ раз, получим отрезок AC , причем $AC = nAB$.

28.16. Проведем окружности с центрами B и C , проходящие через A . Тогда отличная от A точка пересечения этих окружностей и будет искомой.

28.17. Предположим сначала, что точка A лежит вне окружности S . Пусть B и C — точки пересечения S и окружности радиуса AO с центром A . Проведем окружности с центрами B и C радиуса $BO = CO$; пусть O и A' — их точки пересечения. Докажем, что A' — искомая точка. Действительно, при симметрии относительно прямой OA окружности с центрами B и C переходят друг в друга, поэтому точка A' остается на месте. Следовательно, точка A' лежит на прямой OA . Равнобедренные треугольники OAB и OBA' подобны, так как имеют равные углы при основании. Следовательно, $OA' : OB = OB : OA$ или $OA' = OB^2/OA$, что и требовалось.

Пусть теперь точка A лежит внутри S . Будем откладывать с помощью построения из задачи 28.15, а) на луче OA отрезки AA_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$, ... длины OA до тех пор, пока одна из точек A_n не окажется вне окружности S . Применяя к точке A_n описанное выше построение, получим на OA точку A_n^* такую, что

$OA_n^* = R^2/nOA = OA^*/n$. Для того чтобы построить точку A^* , остается только увеличить в n раз отрезок OA_n^* (см. задачу 28.15, б)).

28.18. Пусть A и B — данные точки. Если точка C лежит на луче AB и $AC = 2AB$, то при инверсии относительно окружности радиуса AB с центром A точка C перейдет в середину отрезка AB . Построение сведено к задачам 28.15, а) и 28.17.

28.19. Центром этой окружности является образ при инверсии точки O' , симметричной O относительно AB . Остается применить задачи 28.16 и 28.17.

28.20. Пусть A, B, C — данные точки. Построим (задача 28.17) образы точек B и C при инверсии с центром A и произвольной степенью. Тогда окружность, проходящая через A, B и C , будет образом прямой B^*C^* при этой инверсии, и ее центр строится по предыдущей задаче.

28.21. а) Пользуясь предыдущей задачей, построим центр O окружности S . Затем построим точки A^* и B^* — образы точек A и B при инверсии относительно S . Образ прямой AB является окружностью S_1 , проходящей через точки A^*, B^* и O . Воспользовавшись задачей 28.19, построим S_1 . Искомые точки являются образами точек пересечения окружностей S и S_1 , т. е. просто точками пересечения S и S_1 .

б) Рассмотрим некоторую инверсию с центром A_1 . Прямая A_2B_2 при этой инверсии переходит в окружность S , проходящую через точки A_1, A_2^* и B_2^* . Окружность S мы можем построить, воспользовавшись задачей 28.19. Затем построим точки пересечения S и прямой A_1B_1 , воспользовавшись решением задачи а). Искомой точкой является образ точки пересечения, отличной от A_1 , при рассматриваемой инверсии.

28.22. При инверсии с центром в вершине A сегмента конфигурация, изображенная на рис. 28.1, перейдет в пару касающихся окружностей, вписанных в угол с вершиной B^* . Ясно, что множество точек касания таких окружностей — это биссектриса угла, а искомое множество является ее образом при инверсии — дугой окружности с концами AB , делящей пополам угол между дугой сегмента и хордой AB .

28.23. Пусть C — вершина данного угла. При инверсии с центром в точке A прямая CB перейдет в окружность S , а окружности S_1 и S_2 — в окружность S_1^* с центром O_1 , касающуюся S в точке B^* , и прямую l , параллельную C^*A , касающуюся S_1^* в точке X (рис. 28.8). Проведем в окружности S радиус $OD \perp C^*A$. Точки O, B^* и O_1 лежат на одной прямой, а $OD \parallel O_1X$. Поэтому $\angle OB^*D = 90^\circ - \angle DOB^*/2 = 90^\circ - (\angle XO_1B^*/2) = \angle O_1B^*X$, следовательно, точка X лежит на прямой DB^* . Еще раз применив инверсию, получим, что искомое множество точек касания — это дуга AB окружности, проходящей через точки A, B и D^* .

28.24. Данная инверсия переводит прямую BC в окружность, проходящую через точки A, B и C , причем образ отрезка BC должен остаться внутри угла BAC .

28.25. Пусть S_1 и S_2 — окружности, вписанные в сегмент; M, N — их точки пересечения (рис. 28.9). Покажем, что прямая MN проходит через точку P окружности сегмента, равноудаленную от его концов A и B . Действительно, согласно предыдущей задаче инверсия с центром P и степенью PA^2 переводит отрезок AB в дугу AB , а окружности S_1 и S_2 — в окружности S_1^* и S_2^* , по-прежнему вписанные в сегмент. Но касательные к S_1 , проведенные из P , касаются также и S_1^* , поэтому $S_1^* = S_1$ (так как обе эти окружности одинаковым образом касаются трех фиксированных прямых). Аналогично $S_2^* = S_2$, следовательно, точки M

к S и S_a), P и Q — точки касания окружностей S и S_a со стороной BC , D и E — точки пересечения прямых A_1B_1 и A_1C_1 с прямой $B'C'$. Согласно задаче 3.2 $BQ = CP = p - c$, а значит, $A_1P = A_1Q = |b - c|/2$. Достаточно доказать, что при инверсии с центром A_1 и степенью A_1P^2 точки B_1 и C_1 переходят в D и E (при этой инверсии окружности S и S_a переходят в себя, а описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ переходит в прямую $B'C'$).

Пусть K — середина отрезка CC' . Точка K лежит на прямой A_1B_1 , причем $A_1K = BC'/2 = |b - c|/2 = A_1P$. Кроме того, $A_1D : A_1K = BC' : BA = = A_1K : A_1B_1$, т. е. $A_1D \cdot A_1B_1 = A_1K^2 = A_1P^2$. Аналогично $A_1E \cdot A_1C_1 = A_1P^2$.

б) Окружность S' , проходящая через середины сторон треугольника ABC , проходит еще и через основания высот (задача 5.117). Пусть H — основание высоты, опущенной из вершины B , B_2 — середина стороны AC . Достаточно проверить, что инверсия с центром A и степенью $AB_2 \cdot AH = \frac{b}{2}c \cos A = pr \operatorname{ctg} A$ переводит вневписанную окружность S_a во вписанную окружность треугольника AB_1C_1 . Действительно, эта инверсия переводит окружность S' в себя, а согласно задаче а) окружности S' и S_a касаются.

Пусть X — середина отрезка AB_1 . Тогда $CX = r$ и $AX = r \operatorname{ctg} A$. Остается заметить, что длина касательной из точки A к окружности S_a равна p .

28.31. После инверсии с центром в точке пересечения S_1 и S_2 получим прямые l_1, l_2 и l , пересекающиеся в одной точке. Прямая l_1 пересекает окружность S_4^* в точках A и B , прямая l_2 пересекает S_3^* в точках C и D , а прямая l проходит через точки пересечения этих окружностей. Поэтому точки A, B, C, D лежат на одной окружности (задача 3.9).

28.32. Сделаем инверсию с центром в точке A_1 . Тогда окружности S_1, S_2 и S_4 перейдут в прямые $A_2^*D_1^*, B_1^*A_2^*$ и $D_1^*B_1^*$, окружности S_3 и S_4 — в окружности S_3^* и S_4^* , описанные около треугольников $B_2^*C_1^*B_1^*$ и $C_1^*D_1^*D_2^*$ (рис. 28.11). Проведем окружность через точки B_2^*, D_2^*, A_2^* . Согласно задаче 2.81, а) она пройдет через точку C_2^* пересечения окружностей S_3^* и S_4^* . Таким образом, точки $A_2^*, B_2^*, C_2^*, D_2^*$ лежат на одной окружности. Следовательно, точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности или прямой.

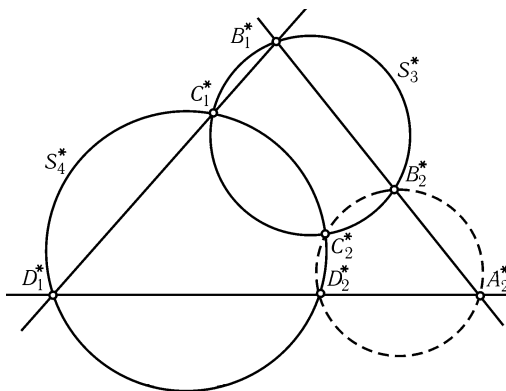


Рис. 28.11

28.33. Пусть P, Q, R, S, T — точки пересечения окружностей S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , о которых говорится в условии (см. рис. 28.4). Докажем, например, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности. Проведем окружность Σ , описанную около треугольника NKD . Применяя результат задачи 2.85, а) (совпадающей с 19.46) к четырехугольникам $AKDE$ и $BNDC$, получаем, что окружности S_4, S_5 и Σ пересекаются в одной точке (в точке P) и окружности S_2, S_3, Σ тоже пересекаются в одной точке (в точке S). Следовательно, окружность Σ проходит через точки P и S . Заметим теперь, что из восьми точек пересечения окружностей Σ, S_1, S_2, S_5 четыре, а именно N, A, B, K лежат на одной прямой. Следова-

но, согласно задаче 28.32 оставшиеся четыре точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

28.34. После инверсии с центром в точке пересечения описанных окружностей треугольников $A_1A_2B_3, A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ эти окружности перейдут в прямые, а утверждение задачи сведется к доказательству того, что описанные окружности треугольников $B_1^*B_2^*A_3^*, B_1^*A_2^*B_3^*$ и $A_1^*B_2^*B_3^*$ проходят через одну точку, т. е. к утверждению задачи 2.81, а).

28.35. После инверсии с центром в точке пересечения описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1, A_1B_2C_2, A_2B_1C_2$ и $A_2B_2C_1$ мы получим четыре прямые и четыре окружности, описанные около образованных этими прямыми треугольников. Согласно задаче 2.85, а) эти окружности проходят через одну точку.

28.36. а) Обозначим через M_{ij} точку пересечения прямых l_i и l_j , а через S_{ij} — окружность, соответствующую трем оставшимся прямым. Тогда точка A_1 является отличной от точки M_{34} точкой пересечения окружностей S_{15} и S_{12} .

Повторив это рассуждение для всех точек A_i , получаем, что они в силу задачи 28.33 лежат на одной окружности.

б) Докажем утверждение задачи по индукции, рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n .

Пусть n нечетно. Обозначим через A_i точку, соответствующую набору из $n - 1$ прямой, получаемому отбрасыванием прямой l_i , а через A_{ijk} — точку, соответствующую набору из n данных прямых без прямых l_i, l_j и l_k . Аналогично обозначим через S_{ij} и S_{ijkm} окружности, соответствующие наборам из $n - 2$ и $n - 4$ прямых, получаемых отбрасыванием прямых l_i, l_j и l_i, l_j, l_k, l_m .

Для того чтобы доказать, что n точек A_1, A_2, \dots, A_n лежат на одной окружности, достаточно доказать, что любые четыре из них лежат на одной окружности. Докажем это, например, для точек A_1, A_2, A_3 и A_4 . Так как точки A_i и A_{ijk} лежат на S_{ij} , то окружности S_{12} и S_{23} пересекаются в точках A_2 и A_{123} , окружности S_{23} и S_{34} — в точках A_3 и A_{234} , окружности S_{34} и S_{41} — в точках A_4 и A_{134} , окружности S_{41} и S_{12} — в точках A_1 и A_{124} . Но точки $A_{123}, A_{234}, A_{134}$ и A_{124} лежат на одной окружности — окружности S_{1234} , поэтому согласно задаче 28.32 точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности.

Пусть теперь n четно; $S_i, A_{ij}, S_{ijk}, A_{ijkm}$ — окружности и точки, соответствующие наборам из $n - 1, n - 2, n - 3$ и $n - 4$ прямых. Для того чтобы доказать, что окружности S_1, S_2, \dots, S_n пересекаются в одной точке, покажем, что это верно для любых трех из них. (Этого достаточно при $n \geq 5$; см. задачу 26.12.) Докажем, например, что S_1, S_2 и S_3 пересекаются в одной точке. По определению точек A_{ij} и окружностей S_i и S_{ijk} точки A_{12}, A_{13} и A_{14} лежат на окружности S_1 ; A_{12}, A_{23} и A_{24} — на S_2 ; A_{13}, A_{14} и A_{34} — на S_3 ; A_{12}, A_{14} и A_{24} — на S_{124} ; A_{13}, A_{14}, A_{34} — на S_{134} ; A_{23}, A_{24}, A_{34} — на S_{234} . Но три окружности S_{124}, S_{134} и S_{234} проходят через точку A_{1234} поэтому согласно задаче 28.34 и окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в одной точке.

28.37. а) Обозначим через M_{ij} точку пересечения прямых l_i и l_j . Тогда точка A_1 , соответствующая тройке l_2, l_3, l_4 , — это точка пересечения описанных окружностей треугольников $M_2M_3M_{23}$ и $M_3M_4M_{34}$. Рассуждая аналогично для точек A_2, A_3 и A_4 , мы получим, что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности согласно задаче 28.32, так как точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на одной окружности.

б) Как и в задаче 28.36, б), докажем утверждение по индукции, рассматривая отдельно случаи четного и нечетного n .

Пусть n четно и A_i, S_{ij}, A_{ijk} и S_{ijklm} обозначают точки и окружности, соответствующие наборам из $n-1, n-2, n-3$ и $n-4$ прямых. Докажем, что точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности. По определению точек A_i и A_{ijk} окружности S_{12} и S_{23} пересекаются в точках A_2 и A_{123} ; S_{23} и S_{34} — в точках A_3 и A_{234} ; S_{34} и S_{41} — в точках A_4 и A_{134} ; S_{41} и S_{12} — в точках A_1 и A_{124} . Точки $A_{123}, A_{234}, A_{134}$ и A_{124} лежат на окружности S_{1234} , поэтому согласно задаче 28.32 точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что и любые четыре из точек A_i (и, следовательно, все они) лежат на одной окружности.

Доказательство в случае нечетного $n \geq 5$ дословно повторяет доказательство утверждения задачи 28.36, б) для случая четного n .

28.38. Если окружности R_1 и R_2 пересекаются или касаются, то инверсия с центром в их точке пересечения переведет окружности S_1, S_2, \dots, S_n в окружности, касающиеся пары прямых и друг друга в точках $A_1^*, A_2^*, \dots, A_{n-1}^*$, лежащих на биссектрисе угла, образованного прямыми R_1^* и R_2^* , если R_1^* и R_2^* пересекаются, и на прямой, параллельной R_1^* и R_2^* , если эти прямые не пересекаются. Применив инверсию еще раз, получим, что точки $A_1^*, A_2^*, \dots, A_{n-1}^*$ лежат на одной окружности.

Если же окружности R_1 и R_2 не пересекаются, то согласно задаче 28.6 найдется инверсия, переводящая их в пару концентрических окружностей. В этом случае точки $A_1^*, A_2^*, \dots, A_{n-1}^*$ лежат на окружности, концентрической с R_1^* и R_2^* , а значит, точки A_1, A_2, \dots, A_{n-1} лежат на одной окружности.

28.39. Сделаем инверсию, переводящую R_1 и R_2 в пару концентрических окружностей. Тогда окружности $S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$ и T_1^* равны между собой (рис. 28.12). Повернув цепочку S_1^*, \dots, S_n^* вокруг центра окружности R_1^* так, чтобы S_1^* перешла в T_1^* , и сделав инверсию еще раз, получим нужную цепочку T_1, T_2, \dots, T_n .

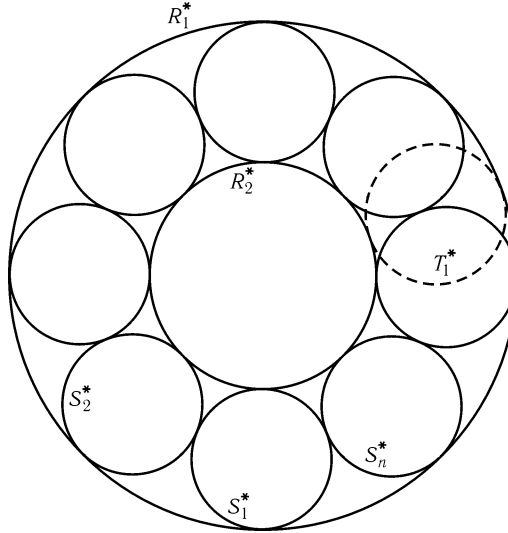


Рис. 28.12

28.40. Центр инверсии, переводящей окружности R_1 и R_2 в концентрические, лежит (см. решение задачи 28.6) на линии их центров. Поэтому, сделав эту

инверсию и учтя, что угол между окружностями и касание при этом сохраняется, мы сведем доказательство к случаю концентрических окружностей R_1 и R_2 с центром O и радиусами r_1 и r_2 .

Проведем окружность S с центром P радиуса $(r_1 - r_2)/2$, касающуюся R_1 изнутри и R_2 внешне, и две окружности S' и S'' радиуса $(r_1 + r_2)/2$ с центрами A и B , касающиеся R_1 и R_2 в их точках пересечения с прямой OP (рис. 28.13). Пусть OM и ON — касательные к S , проведенные из O . Очевидно, что цепочка из n окружностей, касающихся R_1 и R_2 , существует тогда и только тогда, когда угол MON равен $m360^\circ/n$ (в этом случае окружности цепочки m раз обегают окружность R_2). Поэтому осталось доказать, что угол между окружностями S' и S'' равен $\angle MON$. Но угол между S' и S'' равен углу между их радиусами, проведенными в точку пересечения C . Кроме того, $\triangle ACO = \triangle PON$ (так как $OP = r_1 - (r_1 - r_2)/2 = (r_1 + r_2)/2 = AC$, $PN = (r_1 - r_2)/2 = r_1 - ((r_1 + r_2)/2) = OA$, $\angle PNO = \angle AOC = 90^\circ$). Поэтому $\angle ACB = 2\angle ACO = 2\angle PON = \angle NOM$.

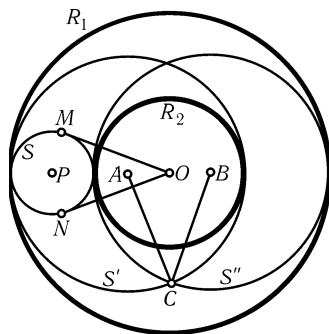


Рис. 28.13

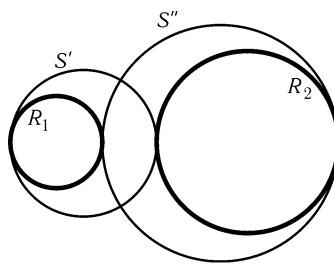


Рис. 28.14

28.41. Пусть R_1 и R_2 — какая-либо пара непересекающихся окружностей. Оставшиеся четыре окружности образуют цепочку, поэтому по предыдущей задаче окружности S' и S'' , касающиеся R_1 и R_2 в точках их пересечения с линией центров, пересекаются под прямым углом (рис. 28.14). Если R_2 лежит внутри R_1 , то радиусы r' и r'' окружностей S' и S'' равны $(r_1 + r_2 + d)/2$ и $(r_1 + r_2 - d)/2$, а расстояние между их центрами $d' = 2r_1 - r_1 - r_2 = r_1 - r_2$. Угол между S' и S'' равен углу между их радиусами, проведенными в точку пересечения, поэтому $(d')^2 = (r')^2 + (r'')^2$ или, после преобразований, $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 6r_1r_2$.

В случае, когда R_1 и R_2 не лежат одна внутри другой, радиусы окружностей S' и S'' равны $(d + (r_1 - r_2))/2$ и $(d - (r_1 - r_2))/2$, а расстояние между центрами $d' = r_1 + r_2 + d - (r_1 + r_2) = r_1 + r_2$. В результате получаем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 6r_1r_2$.

Глава 29

Аффинные преобразования

§1. Аффинные преобразования

О п р е д е л е н и е. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.

Частным случаем аффинных преобразований являются движения и преобразования подобия.

О п р е д е л е н и е. *Растяжением* плоскости относительно оси l с коэффициентом k называется преобразование плоскости, при котором каждая точка M переходит в такую точку M' , что $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, где O — проекция точки M на прямую l . (Растяжение с коэффициентом меньше единицы называется *сжатием*.)

29.1. Докажите, что растяжение плоскости является аффинным преобразованием.

29.2. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

29.3. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — образы точек A, B, C, D при аффинном преобразовании. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

Из предыдущей задачи вытекает, что мы можем определить образ вектора \overrightarrow{AB} при аффинном отображении L как $\overrightarrow{L(A)L(B)}$, и это определение не будет зависеть от выбора точек A и B .

29.4. Докажите, что если L — аффинное преобразование, то

а) $L(\vec{0}) = \vec{0}$;

б) $L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b})$;

в) $L(k\mathbf{a}) = kL(\mathbf{a})$.

29.5. Пусть A', B', C' — образы точек A, B, C при аффинном преобразовании L . Докажите, что если C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = p : q$, то C' делит отрезок $A'B'$ в том же отношении.

29.6. а) Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, которое переводит данную точку O в данную точку O' , а данный базис векторов e_1, e_2 — в данный базис e'_1, e'_2 .

б) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в A_1 , B — в B_1 , C — в C_1 .

в) Даны два параллелограмма. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, которое один из них переводит в другой.

29.7*. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из его сторон. Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный пятиугольник.

29.8*. Докажите, что если при аффинном (не тождественном) преобразовании L каждая точка некоторой прямой l переходит в себя, то все прямые вида $ML(M)$, где в качестве M берутся произвольные точки, не лежащие на прямой l , параллельны друг другу.

29.9*. Докажите, что любое аффинное преобразование можно представить в виде композиции двух растяжений и аффинного преобразования, переводящего любой треугольник в подобный ему треугольник.

29.10*. На плоскости дан многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точка O внутри его. Докажите, что равенства

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} &= 2 \cos \frac{2\pi}{n} \overrightarrow{OA_2}, \\ \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} &= 2 \cos \frac{2\pi}{n} \overrightarrow{OA_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_1} &= 2 \cos \frac{2\pi}{n} \overrightarrow{OA_n}. \end{aligned}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы существовало аффинное преобразование, переводящее данный многоугольник в правильный, а точку O — в его центр.

Многоугольник, который аффинным преобразованием можно перевести в правильный многоугольник, называют *аффинно правильным*.

29.11*. Докажите, что любое аффинное преобразование можно представить в виде композиции растяжения (сжатия) и аффинного преобразования, переводящего любой треугольник в подобный ему треугольник.

29.12*. Докажите, что если аффинное преобразование переводит некоторую окружность в себя, то оно является либо поворотом, либо симметрией.

29.13*. Докажите, что если M' и N' — образы многоугольников M и N при аффинном преобразовании, то отношение площадей M и N равно отношению площадей M' и N' .

§2. Решение задач при помощи аффинных преобразований

29.14. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

29.15. На сторонах AB , BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b , c , d — прямые, проходящие через B , C , D параллельно прямым KL , KM , ML соответственно. Докажите, что прямые b , c , d проходят через одну точку.

29.16. Дан треугольник ABC . Пусть O — точка пересечения его медиан, а M , N и P — точки сторон AB , BC и CA , делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т. е. $AM : MB = BN : NC = CP : PA = p : q$). Докажите, что:

- O — точка пересечения медиан треугольника MNP ;
- O — точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN , BP и CM .

29.17. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P , а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q . Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

29.18. В параллелограмме $ABCD$ точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 лежат соответственно на сторонах AB , BC , CD , DA . На сторонах A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки A_2 , B_2 , C_2 , D_2 . Известно, что

$$\frac{AA_1}{BA_1} = \frac{BB_1}{CB_1} = \frac{CC_1}{DC_1} = \frac{DD_1}{AD_1} = \frac{A_1D_2}{D_1D_2} = \frac{D_1C_2}{C_1C_2} = \frac{C_1B_2}{B_1B_2} = \frac{B_1A_2}{A_1A_2}.$$

Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм со сторонами, параллельными сторонам $ABCD$.

29.19. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC даны точки M , N и P соответственно. Докажите:

- если точки M_1 , N_1 и P_1 симметричны точкам M , N и P относительно середин соответствующих сторон, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.
- если M_1 , N_1 и P_1 — такие точки сторон AC , BA и CB , что $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$ и $PP_1 \parallel AB$, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

§3. Комплексные числа

Комплексным числом называют выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Если $z = a + bi$,

то числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимой* частью числа z (обозначение: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$), а комплексное число $a - bi$ называют числом, *сопряженным* к числу z (обозначение: \bar{z}). Перемножают комплексные числа по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов, заменяя каждый раз i^2 на -1 , т. е.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Каждое вещественное число a можно рассматривать как комплексное число $a + 0i$.

Если на плоскости выбрать систему координат, то можно установить взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости, при котором числу $a + bi$ соответствует точка с координатами (a, b) . При этом умножение на комплексное число z приобретает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть r — расстояние от нуля до z , φ — угол, на который нужно повернуть вокруг нуля луч, содержащий положительные вещественные числа, чтобы получить луч Oz . Тогда умножение на число z — это композиция гомотетии с коэффициентом r (с центром в нуле) и поворота на угол φ . Числа r и φ называют соответственно *модулем* и *аргументом* числа z (обозначение: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$). По-другому геометрическую интерпретацию произведения комплексных чисел можно сформулировать так: при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Зная геометрическую интерпретацию комплексных чисел, легко научиться их делить: для этого нужно делить модули и вычитать аргументы. Деление можно вести также и чисто алгебраически. Для каждого комплексного числа $z = a + bi$ имеет место очевидное равенство

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Поэтому $w/z = w\bar{z}/|z|^2$.

Тот факт, что произведение комплексных чисел, с одной стороны, вычисляется чисто алгебраически, а с другой стороны, имеет геометрическую интерпретацию, иногда бывает полезным при решении задач планиметрии. Как правило, решение, использующее комплексные числа, в действительности использует только векторы и поворот. Но иногда комплексные числа позволяют взглянуть на теоремы планиметрии с новой точки зрения и, что гораздо важнее, глубже понять их природу.

Очень простую интерпретацию на языке комплексных чисел имеет инверсия с центром в нуле: она отображает число z в число R^2/\bar{z} , где R^2 — степень инверсии.

29.20. Пусть a, b, c, d — комплексные числа, причем углы aOb и cOd равны и противоположно ориентированы. Докажите, что тогда $\operatorname{Im} abcd = 0$.

Будем говорить, что треугольники ABC и $A'B'C'$ *собственно подобны*, если существует поворотная гомотетия, которая переводит A в A' , B в B' , C в C' .

29.21. Докажите, что если треугольники abc и $a'b'c'$ на комплексной плоскости *собственно подобны*, то

$$(b - a)/(c - a) = (b' - a')/(c' - a').$$

29.22. Докажите, что треугольники abc и $a'b'c'$ *собственно подобны*, тогда и только тогда, когда

$$a'(b - c) + b'(c - a) + c'(a - b) = 0.$$

29.23. Пусть a и b — комплексные числа, лежащие на окружности с центром в нуле, u — точка пересечения касательных к этой окружности в точках a и b . Докажите, что $u = 2ab/(a + b)$.

29.24. Пусть a — комплексное число, лежащее на единичной окружности S с центром в нуле, t — вещественное число (точка, лежащая на вещественной оси). Пусть, далее, b — отличная от a точка пересечения прямой at с окружностью S . Докажите, что $\bar{b} = (1 - ta)(t - a)$.

29.25. Даны треугольник ABC и прямая l , проходящая через центр O вписанной окружности. Обозначим через A_1 (соответственно B_1, C_1) основание перпендикуляра, опущенного на прямую l из точки A (соответственно B, C), а через A_2 (соответственно B_2, C_2) обозначим точку вписанной окружности, диаметрально противоположную точке касания со стороной BC (соответственно CA, AB). Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 , пересекаются в одной точке, и эта точка лежит на вписанной окружности.

29.26. а) Докажите, что все окружности и прямые задаются уравнениями вида

$$Az\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + D = 0,$$

где A и D — вещественные числа, а c — комплексное число. Наоборот, докажите, что любое уравнение такого вида задает либо окружность, либо прямую, либо точку, либо пустое множество.

б) Докажите, что при инверсии окружности и прямые переходят в окружности и прямые.

29.27. Пусть точки A^*, B^*, C^*, D^* являются образами точек A, B, C, D при инверсии. Докажите, что:

а) $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A^*C^*}{A^*D^*} : \frac{B^*C^*}{B^*D^*}$;

б) $\angle(DA, AC) - \angle(DB, BC) = \angle(D^*B^*, B^*C^*) - \angle(D^*A^*, A^*C^*)$.

29.28. Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-b}{a-c}$, называемое *простым отношением* трех комплексных чисел, вещественно.

б) Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c, d , лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$, называемое *двойным отношением* четырех комплексных чисел, вещественно.

29.29*. а) Докажите, что если A, B, C и D — произвольные точки плоскости, то $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ (*неравенство Птолемея*).

б) Докажите, что если A_1, A_2, \dots, A_6 — произвольные точки плоскости, то

$$A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 \leq A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 + \\ + A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_1A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6.$$

в) Докажите, что (нестрогое) неравенство Птолемея обращается в равенство тогда и только тогда, когда $ABCD$ — (выпуклый) вписанный четырехугольник.

г) Докажите, что неравенство из задачи б) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $A_1 \dots A_6$ — вписанный шестиугольник.

29.30*. Докажите, что если a, b, c и d — длины последовательных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, а m и n — длины его диагоналей, то $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(A + C)$ (Бретшнейдер).

29.31*. а) Даны точка X и треугольник ABC . Докажите, что

$$\frac{XB}{b} \cdot \frac{XC}{c} + \frac{XC}{c} \cdot \frac{XA}{a} + \frac{XA}{a} \cdot \frac{XB}{b} \geq 1,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

б) На сторонах BC, CA, AB взяты точки A_1, B_1, C_1 . Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC , a_1, b_1, c_1 — длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, S — площадь треугольника ABC . Докажите, что

$$4S^2 \leq a^2b_1c_1 + b^2a_1c_1 + c^2a_1b_1.$$

29.32*. На сторонах аффинно правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ с центром O внешним образом построены квадраты $A_{j+1}A_jB_jC_{j+1}$ ($j = 1, \dots, n$). Докажите, что отрезки B_jC_j и OA_j перпендикулярны, а их отношение равно $2(1 - \cos(2\pi/n))$.

29.33*. На сторонах выпуклого n -угольника внешним образом построены правильные n -угольники. Докажите, что их центры образуют правильный n -угольник тогда и только тогда, когда исходный n -угольник аффинно правильный.

29.34*. Вершины треугольника соответствуют комплексным числам a, b и c , лежащим на единичной окружности с центром в нуле. Докажите, что если точки z и w изогонально сопряжены, то $z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c$ (Морли).

29.35*. Точки Z и W изогонально сопряжены относительно правильного треугольника. При инверсии относительно описанной окружности точки Z и W переходят в Z^* и W^* . Докажите, что середина отрезка Z^*W^* лежит на вписанной окружности.

29.36*. Точки Z и W изогонально сопряжены относительно правильного треугольника ABC с центром O ; M — середина отрезка ZW . Докажите, что $\angle AOZ + \angle AOW + \angle AOM = n\pi$ (углы ориентированы).

§4. Эллипсы Штейнера

Согласно задаче 29.6, б) для данного треугольника ABC существует единственное аффинное преобразование, которое переводит правильный треугольник в данный треугольник. Образ вписанной окружности правильного треугольника при таком преобразовании называют *вписанным эллипсом Штейнера*, а образ описанной окружности — *описанным эллипсом Штейнера*.

Вписанный эллипс Штейнера имеет наибольшую площадь среди всех эллипсов, вписанных в данный треугольник, а описанный — наименьшую среди всех

описанных. Это легко доказывается, если перевести эллипс в окружность аффинным преобразованием и воспользоваться тем, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей.

29.37. Найдите уравнения эллипсов Штейнера в барицентрических координатах.

Точкой Штейнера называют точку пересечения описанного эллипса Штейнера с описанной окружностью треугольника, отличную от вершин треугольника.

29.38. Найдите барицентрические координаты точки Штейнера.

Отметим без доказательства, что касательная в точке касания вписанной окружности и окружности девяти точек касается также и вписанного эллипса Штейнера. То же самое верно и для вневписанных окружностей.

Решения

29.1. Нам надо доказать, что если A', B', C' — образы точек A, B, C при растяжении относительно прямой l с коэффициентом k и точка C лежит на прямой AB , то точка C' лежит на прямой $A'B'$. Пусть $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$. Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точек A, B, C на прямую l , и пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A}, \mathbf{b} = \overrightarrow{B_1B}, \mathbf{c} = \overrightarrow{C_1C}, \mathbf{a}' = \overrightarrow{A_1A'}, \mathbf{b}' = \overrightarrow{B_1B'}, \mathbf{c}' = \overrightarrow{C_1C'}, \mathbf{x} = \overrightarrow{A_1B_1}, \mathbf{y} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Из того, что при проекции на прямую l сохраняется отношение длин пропорциональных векторов, следует, что $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = t(\mathbf{y} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}))$. Вычитая первое равенство из второго, получаем $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. По определению растяжения $\mathbf{a}' = k\mathbf{a}, \mathbf{b}' = k\mathbf{b}, \mathbf{c}' = k\mathbf{c}$, поэтому $\overrightarrow{A'C'} = \mathbf{y} + k(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = t\mathbf{x} + k(t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = t(\mathbf{x} + k(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = t\overrightarrow{A'B'}$.

29.2. По определению образы прямых — прямые, а из взаимной однозначности аффинного преобразования следует, что образы непересекающихся прямых не пересекаются.

29.3. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Рассмотрим сначала случай, когда точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Тогда $ABCD$ — параллелограмм. Из предыдущей задачи следует, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

Пусть теперь точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Возьмем такие точки E и F , не лежащие на этой прямой, что $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. Пусть E_1 и F_1 — их образы. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

29.4. а) $L(\vec{0}) = L(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{L(A)L(A)} = \vec{0}$.

б) $L(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = L(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{L(A)L(C)} = \overrightarrow{L(A)L(B)} + \overrightarrow{L(B)L(C)} = L(\overrightarrow{AB}) + L(\overrightarrow{BC})$.

в) Предположим сначала, что число k целое. Тогда

$$L(k\mathbf{a}) = L(\underbrace{\mathbf{a} + \dots + \mathbf{a}}_k) = \underbrace{L(\mathbf{a}) + \dots + L(\mathbf{a})}_k = kL(\mathbf{a}).$$

Пусть теперь $k = m/n$ — рациональное число. Тогда $nL(k\mathbf{a}) = L(nk\mathbf{a}) = L(m\mathbf{a}) = mL(\mathbf{a})$, поэтому $L(k\mathbf{a}) = mL(\mathbf{a})/n = kL(\mathbf{a})$. Наконец, если k — любое действительное число, то всегда найдется последовательность k_n рациональных чисел, сходящаяся к k (например, последовательность десятичных приближений k). Поскольку L непрерывно, то

$$L(k\mathbf{a}) = L(\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \mathbf{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n L(\mathbf{a}) = kL(\mathbf{a}).$$

29.5. В силу задачи 29.4, в) из условия $q\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{CB}$ следует, что $q\overrightarrow{A'C'} = qL(\overrightarrow{AC}) = L(q\overrightarrow{AC}) = L(p\overrightarrow{CB}) = pL(\overrightarrow{CB}) = p\overrightarrow{C'B'}$.

29.6. а) Зададим отображение L следующим образом. Пусть X — произвольная точка. Поскольку e_1, e_2 — базис, существуют однозначно определенные числа x_1 и x_2 такие, что $\overrightarrow{OX} = x_1e_1 + x_2e_2$. Поставим в соответствие точке X такую точку $X' = L(X)$, что $\overrightarrow{O'X'} = x_1e'_1 + x_2e'_2$. Так как e'_1, e'_2 — тоже базис, полученное отображение взаимно однозначно. (Обратное отображение строится аналогично.) Докажем, что любая прямая AB при отображении L переходит в прямую. Пусть $A' = L(A)$, $B' = L(B)$ и a_1, a_2, b_1, b_2 — координаты точек A и B в базисе e_1, e_2 , т. е. такие числа, что $\overrightarrow{OA} = a_1e_1 + a_2e_2$, $\overrightarrow{OB} = b_1e_1 + b_2e_2$. Рассмотрим произвольную точку C прямой AB . Тогда $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ при некотором k , т. е. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = ((1-k)a_1 + kb_1)e_1 + ((1-k)a_2 + kb_2)e_2$. Следовательно, если $C' = L(C)$, то $\overrightarrow{O'C'} = ((1-k)a_1 + kb_1)e'_1 + ((1-k)a_2 + kb_2)e'_2 = \overrightarrow{O'A'} + k(\overrightarrow{O'B'} - \overrightarrow{O'A'})$, т. е. точка C' лежит на прямой $A'B'$.

Единственность отображения L следует из результата задачи 29.4. В самом деле, $L(\overrightarrow{OX}) = x_1L(e_1) + x_2L(e_2)$, т. е. образ точки X однозначно определяется образами векторов e_1, e_2 и точки O .

б) Для доказательства можно воспользоваться предыдущей задачей, положив $O = A$, $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$, $O' = A_1$, $e'_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, $e'_2 = \overrightarrow{A_1C_1}$.

в) Следует из задачи б) и из того, что параллельные прямые переходят в параллельные.

29.7. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Согласно задаче 29.6, б) существует аффинное преобразование, которое три последовательные вершины данного пятиугольника переводит в точки A, B, C . Пусть D' и E' — образы остальных двух вершин при этом преобразовании. Докажем, что они совпадают с D и E .

С одной стороны, $AD' \parallel BC$ и $CE' \parallel AB$, поэтому точка D' лежит на прямой AD , а точка E' — на прямой CE . С другой стороны, $E'D' \parallel AC \parallel ED$, поэтому если бы точки D' и E' не совпадали с точками D и E , то либо они обе были бы вне полосы, ограниченной прямыми AE и BD (рис. 29.1, а), либо обе внутри этой полосы (рис. 29.1, б). В обоих случаях прямые AE' и BD' не были бы параллельными.

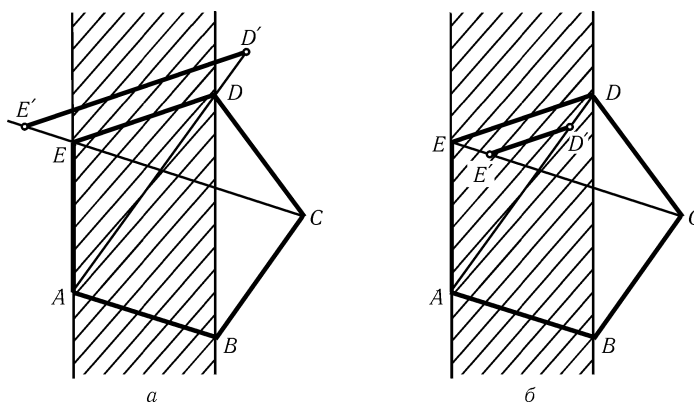


Рис. 29.1

29.8. Пусть M и N — произвольные точки, не лежащие на прямой l . Обозначим через M_0 и N_0 их проекции на прямую l , а через M' и N' — образы точек M и N при отображении L . Прямые M_0M и N_0N параллельны, так как они обе перпендикулярны l , т. е. существует такое число k , что $\overrightarrow{M_0M} = k\overrightarrow{N_0N}$. Тогда согласно задаче 29.4, в) $\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{N_0N'}$. Поэтому образ треугольника M_0MM' при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{M_0N_0}$ гомотетичен с коэффициентом k треугольнику N_0NN' , следовательно, прямые MM' и NN' параллельны.

29.9. Поскольку аффинное отображение однозначно определяется образами вершин любого фиксированного треугольника (см. задачу 29.6, б)), достаточно доказать, что из любого треугольника можно при помощи двух растяжений получить треугольник, подобный некоторому наперед заданному, например, равнобедренный прямоугольный. Докажем это. Пусть ABC — произвольный треугольник, BN — биссектриса внешнего угла B , прилежащего к стороне BC . Тогда при растяжении относительно BN с коэффициентом $\operatorname{tg} 45^\circ / \operatorname{tg} \angle CBN$ из треугольника ABC получается треугольник $A'B'C'$ с прямым углом B' . Из прямоугольного треугольника при помощи растяжения относительно одного из его катетов всегда можно получить равнобедренный прямоугольный треугольник.

29.10. Докажем сначала, что если $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник, вписанный в единичную окружность, а O — его центр, то указанные в условии задачи равенства выполняются, т. е.

$$\overrightarrow{OA_{i-1}} + \overrightarrow{OA_{i+1}} = 2k\overrightarrow{OA_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

(мы считаем, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$; через k обозначено число $\cos(2\pi/n)$). Для этого при каждом фиксированном i выберем на плоскости систему координат с центром в точке O и осью Ox , направленной вдоль луча OA_i . Тогда точки A_{i-1} , A_i и A_{i+1} имеют координаты $k, -\sin(2\pi/n)$, $(1, 0)$ и $k, \sin(2\pi/n)$ соответственно. Равенство (1) при данном i теперь легко проверяется.

В силу задачи 29.4 равенства (1) выполняются также для образа правильного n -угольника при аффинном преобразовании.

Наоборот, пусть для многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и точки O внутри его выполнены равенства (1). Возьмем правильный многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$ с центром O и рассмотрим аффинное преобразование L , которое переводит треугольник OB_1B_2 в треугольник OA_1A_2 . Докажем индукцией по i , что $L(B_i) = A_i$ для всех $i \geq 2$. При $i = 2$ это утверждение следует из определения отображения L . Предположим, что мы его доказали для всех чисел, не превосходящих i , и докажем для $i + 1$. Так как для правильных многоугольников равенства (1) уже доказаны, а для многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ они выполнены по предположению, то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_{i+1}} &= 2k\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_{i-1}} = \\ &= 2kL(\overrightarrow{OB_i}) - L(\overrightarrow{OB_{i-1}}) = L(2k\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OB_{i-1}}) = L(\overrightarrow{OB_{i+1}}). \end{aligned}$$

29.11. Пусть L — данное аффинное преобразование, O — произвольная точка, T — сдвиг на вектор $\overrightarrow{L(O)O}$, и пусть $L_1 = T \circ L$. Тогда O — неподвижная точка преобразования L_1 . Среди всех точек единичной окружности с центром O выберем точку A , для которой максимальна длина вектора $L(\overrightarrow{OA})$. Пусть H — поворотная гомотетия с центром O , которая точку $L_1(A)$ переводит в точку A , и пусть $L_2 = H \circ L_1 = H \circ T \circ L$. Тогда L_2 есть аффинное преобразование, которое оставляет на месте точки O и A , а значит, согласно задаче 29.4, в), и все

остальные точки прямой OA , причем, в силу выбора точки A , для всех точек M имеем неравенство $|\overrightarrow{OM}| \geq |L(\overrightarrow{OM})|$.

Докажем (и из этого будет следовать утверждение задачи), что L_2 — сжатие относительно прямой OA . Если преобразование L_2 тождественно, то оно является сжатием с коэффициентом 1, поэтому будем считать, что L_2 не тождественно. Согласно задаче 29.11 все прямые вида $\overrightarrow{ML_2(M)}$, где M — произвольная точка не на прямой OA , друг другу параллельны. Пусть \overrightarrow{OB} — единичный вектор, перпендикулярный всем этим прямым. Тогда B — неподвижная точка преобразования L_2 , так как иначе было бы

$$|\overrightarrow{OL_2(B)}| = \sqrt{OB^2 + BL_2(B)^2} > |OB|.$$

Если B не лежит на прямой OA , то согласно задаче 29.6, б) преобразование L_2 тождественно. Если B лежит на прямой OA , то все прямые вида $\overrightarrow{ML_2(M)}$ перпендикулярны неподвижной прямой преобразования L_2 . При помощи задачи 29.4, в) несложно показать, что отображение, обладающее этим свойством, является растяжением или сжатием.

29.12. Докажем сначала, что аффинное преобразование L , переводящее данную окружность в себя, переводит диаметрально противоположные точки в диаметрально противоположные. Для этого заметим, что касательная к окружности в точке A переходит в прямую, которая в силу взаимной однозначности преобразования L пересекается с окружностью в единственной точке $L(A)$, т. е. является касательной в точке $L(A)$. Поэтому если касательные в точках A и B параллельны (т. е. AB — диаметр), то касательные в точках $L(A)$ и $L(B)$ тоже параллельны, т. е. $L(A)L(B)$ — тоже диаметр.

Фиксируем какой-нибудь диаметр AB данной окружности. Поскольку $L(A)L(B)$ — тоже диаметр, то существует движение P , являющееся поворотом или симметрией, которое переводит A и B в $L(A)$ и $L(B)$, а каждую из дуг α и β , на которые точки A и B делят данную окружность, — в образ этой дуги при отображении L .

Докажем, что отображение $F = P^{-1} \circ L$ является тождественным. В самом деле, $F(A) = A$ и $F(B) = B$, следовательно, все точки прямой AB остаются неподвижными. Поэтому если X — произвольная точка окружности, то касательная в точке X пересекает прямую AB там же, где и касательная в точке $X' = F(X)$, так как точка пересечения остается неподвижной. А поскольку X и X' лежат на одной и той же из двух дуг α или β , то точка X совпадает с точкой X' . Итак, $P^{-1} \circ L$ — тождественное преобразование, т. е. $L = P$.

29.13. Пусть a_1 и a_2 — какие-нибудь две перпендикулярные прямые. Поскольку аффинное преобразование сохраняет отношение длин параллельных отрезков, то длины всех отрезков, параллельных одной прямой, умножаются на один и тот же коэффициент. Обозначим через k_1 и k_2 эти коэффициенты для прямых a_1 и a_2 . Пусть φ — угол между образами этих прямых. Докажем, что данное аффинное преобразование изменяет площади всех многоугольников в k раз, где $k = k_1 k_2 \sin \varphi$.

Для прямоугольника со сторонами, параллельными a_1 и a_2 , а также для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными a_1 и a_2 , это утверждение очевидно. Любой другой треугольник можно получить, отрезав от прямоугольника со сторонами, параллельными a_1 и a_2 , несколько прямоугольных треугольников с катетами, параллельными a_1 и a_2 (рис. 29.2), и, наконец, согласно задаче 22.23, любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

29.14. Поскольку аффинным преобразованием любой треугольник переводится в правильный (задача 29.6, б)) и при этом сохраняются отношения длин параллельных отрезков (задача 29.5), достаточно доказать утверждение задачи для правильного треугольника ABC .

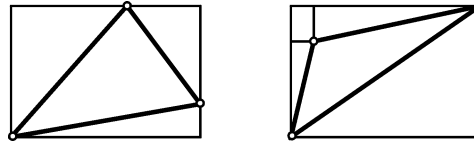


Рис. 29.2

Пусть точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ делят стороны треугольника на равные части, а A', B', C' — середины сторон (рис. 29.3). При симметрии относительно AA' прямая BB_1 перейдет в CC_2 , а прямая BB_2 — в CC_1 . Поскольку симметричные прямые пересекаются на оси симметрии, AA' содержит диагональ рассматриваемого шестиугольника. Аналогично оставшиеся диагонали лежат на BB' и CC' . Ясно, что медианы AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

29.15. Из задачи 29.6, б) следует, что любой параллелограмм аффинным преобразованием можно перевести в квадрат. Поскольку при этом сохраняются отношения длин параллельных отрезков (задача 29.5), достаточно доказать утверждение задачи в случае, когда $ABCD$ — квадрат. Обозначим через P точку пересечения прямых b и d . Нам достаточно доказать, что $PC \parallel MK$. Отрезок KL переходит в LM при повороте на 90° вокруг центра квадрата $ABCD$, поэтому прямые b и d , которые соответственно параллельны этим отрезкам, перпендикулярны; значит, P лежит на окружности, описанной вокруг $ABCD$. Тогда $\angle CPD = \angle CBD = 45^\circ$, следовательно, угол между прямыми CP и b равен 45° , но угол между прямыми MK и KL тоже равен 45° , и $b \parallel KL$, следовательно, $CP \parallel MK$.

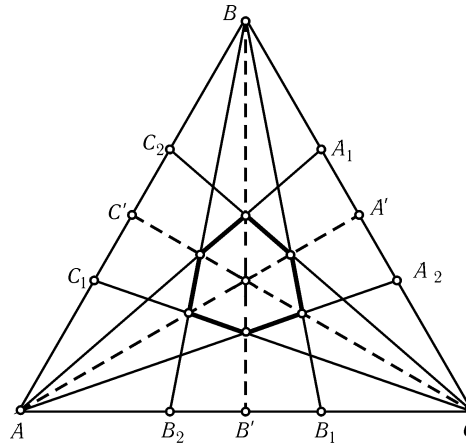


Рис. 29.3

29.16. а) Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в правильный треугольник $A'B'C'$. Пусть O', M', N', P' — образы точек O, M, N, P . При повороте на 120° вокруг точки O' треугольник $M'N'P'$ переходит в себя, поэтому этот треугольник правильный и O' — точка пересечения его медиан. Поскольку при аффинном преобразовании медиана переходит в медиану, O — точка пересечения медиан треугольника MNP .

б) Решение аналогично решению предыдущей задачи.

29.17. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее $ABCD$ в равнобедренную трапецию $A'B'C'D'$. В качестве такого преобразования можно взять аффинное преобразование, переводящее треугольник ADE в равнобедренный треугольник (E — точка пересечения прямых AB и CD). Тогда при симметрии относительно серединного перпендикуляра к $A'D'$ точка P' переходит в точку Q' , т. е. прямые $P'Q'$ и $A'D'$ параллельны.

29.18. Любой параллелограмм $ABCD$ аффинным преобразованием можно перевести в квадрат (для этого нужно треугольник ABC перевести

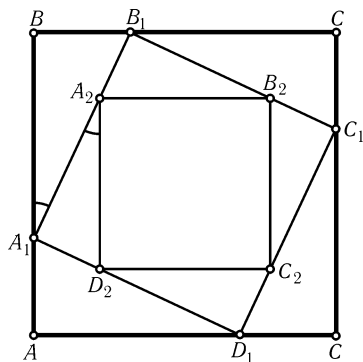


Рис. 29.4

в равнобедренный прямоугольный треуголь-
ник). Поскольку в задаче идет речь только о па-
раллельности прямых и об отношениях отрез-
ков, лежащих на одной прямой, можно счита-
ть, что $ABCD$ — квадрат. Рассмотрим по-
ворот на 90° , переводящий $ABCD$ в себя. При
этом повороте четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$
и $A_2B_2C_2D_2$ тоже переходят в себя, следова-
тельно, они тоже являются квадратами. При
этом $\operatorname{tg} \angle BA_1B_1 = BB_1 : BA_1 = A_1D_2 : A_1A_2 =$
 $= \operatorname{tg} \angle A_1A_2D_2$, т. е. $AB \parallel A_2D_2$ (рис. 29.4).

29.19. а) Поскольку любой треугольник аф-
финным преобразованием переводится в пра-
вильный и при этом середины сторон переходят
в середины сторон, центрально симметрич-

ные точки — в центрально симметричные, а равновеликие треугольники — в равновеликие треугольники (задача 29.13), то будем считать, что треугольник ABC равносторонний со стороной a . Обозначим длины отрезков AM, BN, CP через p, q, r соответственно. Тогда

$$S_{ABC} - S_{MNP} = S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CNP} =$$

$$= \sin 60^\circ (p(a-r) + q(a-p) + r(a-q))/2 = \sin 60^\circ (a(p+q+r) - (pq+qr+rp))/2.$$

Аналогично

$$S_{ABC} - S_{M_1N_1P_1} =$$

$$= \sin 60^\circ (r(a-p) + p(a-q) + q(a-r))/2 = \sin 60^\circ (a(p+q+r) - (pq+qr+rp))/2.$$

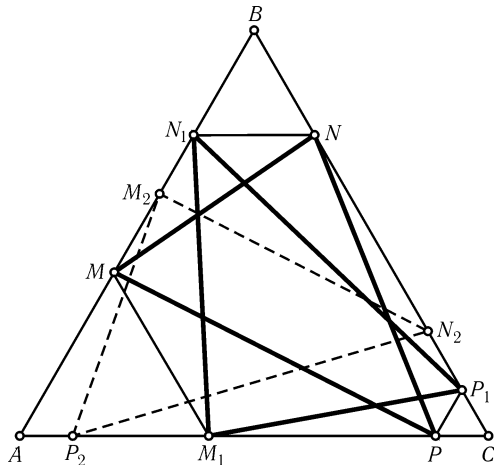


Рис. 29.5

б) Как и в предыдущей зада-
че, будем считать, что ABC —
правильный треугольник. Пусть
 $M_2N_2P_2$ — образ треугольника
 $M_1N_1P_1$ при повороте вокруг цен-
тра треугольника ABC на 120°
в направлении от A к B (рис. 29.5).
Тогда $AM_2 = CM_1 = BM$. Анало-
гично, $BN_2 = CN$ и $CP_2 = AP$,
т. е. точки M_2, N_2, P_2 симметричны
точкам M, N, P относительно сере-
дин соответствующих сторон. Тем
самым задача свелась к предыду-
щей.

29.20. Пусть $A = a/|a|, B =$
 $= b/|b|, C = c/|c|, D = d/|d|$. Эти
точки лежат на единичной окруж-
ности. Существует такой поворот
 R^α , что $B = R^\alpha(A)$ и $D = R^\alpha(C)$.
Но R^α — это умножение на ком-
плексное число $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Следовательно, $B/A = C/D = w$. Пусть $k =$
 $= |abcd|$. Тогда $ac\bar{b}\bar{d} = kAC\bar{B}\bar{D} = kAC\bar{B}^{-1}\bar{D}^{-1} = k$.

Следовательно, $B/A = C/D = w$. Пусть $k =$
 $= |abcd|$. Тогда $ac\bar{b}\bar{d} = kAC\bar{B}\bar{D} = kAC\bar{B}^{-1}\bar{D}^{-1} = k$.

29.21. Сдвинем данные треугольники на векторы $-a$ и $-a'$ соответственно. В результате получатся собственно подобные треугольники с вершинами $0, b-a, c-a$ и $0, b'-a', c'-a'$. При этом точка $b-a$ переводится в точку $c-a$ той же поворотной гомотетией, которой точка $b'-a'$ переводится в точку $c'-a'$. Из этого следует утверждение задачи.

29.22. Если треугольники abc и $a'b'c'$ собственно подобны, то $a' = az + w$, $b' = bz + w$, $c' = cz + w$, где z и w — некоторые комплексные числа. В таком случае

$$a'(b-c) + b'(c-a) + c'(a-b) = (az+w)(b-c) + (bz+w)(c-a) + (cz+w)(a-b) = 0.$$

Предположим теперь, что

$$a'(b-c) + b'(c-a) + c'(a-b) = 0. \quad (1)$$

Пусть $z = \frac{a'-b'}{a-b}$ и $w = \frac{ab'-a'b}{a-b}$. Тогда $a' = az + w$ и $b' = bz + w$. Рассмотрим комплексное число $c'' = cz + w$. Треугольники abc и $a'b'c''$ собственно подобны, поэтому

$$a'(b-c) + b'(c-a) + c''(a-b) = 0. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $c'' = c'$.

29.23. Пусть $v = (a+b)/2$ — середина отрезка ab . Тогда прямоугольные треугольники $0av$ и $0vb$ собственно подобны, поскольку имеют равные углы в вершине 0 . Поэтому согласно задаче 29.21 $a/u = v/b$. Значит, $u = ab/v = 2ab/(a+b)$.

29.24. Прямоугольные треугольники, образованные соответственно точками $0, (\bar{a} + \bar{b})/2, t$ и $0, (a + \bar{a})/2, t$, собственно подобны. Согласно задаче 29.21

$$\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2t} = \frac{\frac{a + \bar{a}}{2t} - a}{t - a} = \frac{\bar{a} - a}{2(t - a)},$$

т. е. $\bar{a}t - 1 + \bar{b}(t - a) = t\bar{a} - ta$ (здесь мы воспользовались равенством $a\bar{a} = |a|^2 = 1$). Значит, $\bar{b} = (1 - ta)/(t - a)$.

29.25. Обозначим через A_3 (соответственно B_3, C_3) отличную от A_2 (соответственно B_2, C_2) точку пересечения прямой A_1A_2 (соответственно B_1B_2, C_1C_2) со вписанной окружностью. Нужно доказать, что эти три точки совпадают.

Расположим треугольник ABC на комплексной плоскости так, чтобы вписанная окружность совпала с единичной окружностью с центром в нуле, а прямая l — с вещественной осью. Пусть a, b, c — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Тогда согласно задаче 29.23 $A = 2bc/(b+c)$. Поэтому $A_1 = \operatorname{Re} A = (A + \bar{A})/2 = bc/(b+c) + \bar{b}\bar{c}/(\bar{b} + \bar{c})$. Но

$$\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b} + \bar{c}} = \frac{b\bar{b}\bar{c} + \bar{b}c\bar{c}}{(b+c)(\bar{b} + \bar{c})} = \frac{|b|^2\bar{c} + |c|^2\bar{b}}{(b+c)(\bar{b} + \bar{c})} = \frac{1}{b+c}.$$

Значит, $A_1 = bc/(b+c) + 1/(b+c) = (1+bc)/(b+c)$. Ясно, что $A_2 = -a$. Поэтому согласно задаче 29.24

$$A_3 = \frac{1 + \frac{1+bc}{b+c}a}{\frac{1+bc}{b+c} + a} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ca}.$$

Аналогично доказывается, что B_3 и C_3 тоже равны этому комплексному числу.

29.26. а) Окружности и прямые задаются уравнениями

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

с вещественными коэффициентами A, B, C, D (при $A = 0$ такое уравнение задает прямую, а при $A \neq 0$ — окружность, точку или пустое множество). Наоборот, любое такое уравнение задает либо окружность, либо прямую, либо точку, либо пустое множество. Но $z = x + iy$, поэтому $x^2 + y^2 = z\bar{z}$ и $Bx + Cy = cz + \bar{c}\bar{z}$, где $c = (B - Ci)/2$.

б) Образом числа z при инверсии с центром в нуле и степенью 1 является число $w = 1/\bar{z}$. Поделив уравнение из задачи а) на $z\bar{z}$, получим, что если w — образ точки z при этой инверсии, то

$$Dw\bar{w} + cw + \bar{c}\bar{w} + A = 0,$$

т. е. число w удовлетворяет уравнению того же вида.

29.27. Установим соответствие между точками плоскости и комплексными числами так, чтобы центр инверсии находился в нуле. Тогда образом числа z при инверсии со степенью R является число R/\bar{z} . Двойным отношением комплексных чисел a, b, c, d называют комплексное число

$$(abcd) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}.$$

Если a^*, b^*, c^*, d^* — образы чисел a, b, c, d при инверсии, то

$$\begin{aligned} \overline{(a^*b^*c^*d^*)} &= \frac{R/a - R/c}{R/a - R/d} : \frac{R/b - R/c}{R/b - R/d} = \\ &= \frac{R(c-a)/ac}{R(d-a)/ad} : \frac{R(c-b)/bc}{R(d-b)/bd} = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = (abcd). \end{aligned}$$

Задача а) следует из равенства модулей этих чисел, а задача б) — из равенства их аргументов.

29.28. а) Пусть A, B, C — точки, соответствующие числам a, b, c . Комплексное число $(a-b) : (a-c)$ вещественно тогда и только тогда, когда векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} пропорциональны.

б) Пусть S — окружность (или прямая), на которой лежат точки b, c, d . Прибавив, если нужно, ко всем четырем числам одно и то же комплексное число (это не изменяет двойное отношение), можно считать, что окружность S проходит через 0. Значит, ее образ при инверсии — прямая. В решении задачи 29.27 показано, что двойное отношение сохраняется при инверсии. Поэтому остается решить такую задачу. Точки (т. е. комплексные числа) b, c, d лежат на одной прямой; нужно доказать, что число a лежит на той же прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ вещественно. Это следует из задачи а).

29.29. а) Утверждение задачи вытекает из следующих свойств комплексных чисел: 1) $|zw| = |z| \cdot |w|$; 2) $|z+w| \leq |z| + |w|$. Действительно, если a, b, c, d — произвольные комплексные числа, то

$$(a-b)(c-d) + (b-c)(a-d) = (a-c)(b-d).$$

Поэтому

$$|a-b| \cdot |c-d| + |b-c| \cdot |a-d| \geq |a-c| \cdot |b-d|.$$

б) Нужно лишь проверить соответствующее тождество для комплексных чисел a_1, \dots, a_6 (это тождество получается из написанного в условии неравенства заменой знака \leq на знак $=$, и заменой каждого сомножителя $A_i A_j$ на сомножитель $(a_i - a_j)$).

в) Нестрогое неравенство $|z + w| \leq |z| + |w|$ обращается в равенство тогда и только тогда, когда комплексные числа z и w пропорциональны с вещественным положительным коэффициентом пропорциональности. Поэтому, как видно из решения задачи а), неравенство Птолемея обращается в равенство тогда и только тогда, когда число $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)}$ вещественно и положительно, т. е. число $q = \frac{a-b}{a-d} : \frac{c-b}{c-d}$ вещественно и отрицательно. Число q — это двойное отношение чисел a, b, c, d . Согласно задаче 29.28, б) оно вещественно тогда и только тогда, когда данные точки лежат на одной окружности. Остается доказать, что если данные точки лежат на одной окружности, то q отрицательно тогда и только тогда, когда ломаная $abcd$ несамопересекающаяся. Последнее условие эквивалентно тому, что точки b и d лежат на разных дугах, отсекаемых точками a и c . Отобразим нашу окружность при помощи инверсии на прямую. В решении задачи 29.27 показано, что двойное отношение сохраняется при инверсии. Поэтому если a^*, b^*, c^*, d^* — комплексные числа, соответствующие образам наших точек, то их двойное отношение равно q . Рассматривая всевозможные (с точностью до порядка) способы расположения точек a^*, b^*, c^*, d^* на прямой, легко убедиться, что $q < 0$ тогда и только тогда, когда на отрезке $a'c'$ лежит ровно одна из точек b' и d' .

г) Задачу б) можно следующим образом решить с помощью неравенства Птолемея:

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 \cdot A_3 A_6 \cdot A_4 A_5 + A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 \cdot A_5 A_6 + \\ & + A_2 A_3 \cdot A_1 A_4 \cdot A_5 A_6 + A_2 A_3 \cdot A_4 A_5 \cdot A_1 A_6 + A_3 A_4 \cdot A_2 A_5 \cdot A_1 A_6 = \\ & = A_1 A_2 \cdot A_3 A_6 \cdot A_4 A_5 + (A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 + A_2 A_3 \cdot A_1 A_4) \cdot A_5 A_6 + \\ & + (A_2 A_3 \cdot A_4 A_5 + A_3 A_4 \cdot A_2 A_5) \cdot A_1 A_6 \geq \\ & \geq A_1 A_2 \cdot A_3 A_6 \cdot A_4 A_5 + A_1 A_3 \cdot A_2 A_4 \cdot A_5 A_6 + A_2 A_4 \cdot A_3 A_5 \cdot A_1 A_6 = \\ & = A_1 A_2 \cdot A_3 A_6 \cdot A_4 A_5 + (A_1 A_3 \cdot A_5 A_6 + A_3 A_5 \cdot A_1 A_6) \cdot A_2 A_4 \geq \\ & \geq A_1 A_2 \cdot A_3 A_6 \cdot A_4 A_5 + A_1 A_5 \cdot A_3 A_6 \cdot A_2 A_4 = \\ & = (A_1 A_2 \cdot A_4 A_5 + A_1 A_5 \cdot A_2 A_4) \cdot A_3 A_6 \geq A_1 A_4 \cdot A_2 A_5 \cdot A_3 A_6. \end{aligned}$$

Все использованные нестрогие неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда четырехугольники $A_1 A_2 A_3 A_4$, $A_2 A_3 A_4 A_5$, $A_1 A_3 A_5 A_6$ и $A_1 A_2 A_4 A_5$ вписанные. Легко видеть, что это эквивалентно тому, что шестиугольник $A_1 \dots A_6$ вписанный.

29.30. Докажем сначала, что если u, v, w, z — комплексные числа, причем $u + v + w + z = 0$, то

$$|uw - vz|^2 = |u + v|^2 |v + w|^2.$$

В самом деле,

$$|uw - vz| = |uw + v(u + v + w)| = |u + v| \cdot |v + w|.$$

Пусть комплексные числа u, v, w, z соответствуют векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$. Тогда $|u + v|^2 |v + w|^2 = m^2 n^2$ и

$$|uw - vz|^2 = (uw - vz)(\bar{u}\bar{w} - \bar{v}\bar{z}) = |uw|^2 + |vz|^2 - (uw\bar{v}\bar{z} - \bar{u}\bar{w}vz).$$

Так как $|uw|^2 = a^2c^2$ и $|vz|^2 = b^2d^2$, то остается доказать, что

$$uw\bar{v}z - \bar{u}v\bar{w}z = 2abcd \cos(A + C).$$

Для этого достаточно проверить, что аргумент числа $uw\bar{v}z$ равен $\pm(\angle A + \angle C)$. Остается заметить, что аргумент числа $u\bar{v}$ (соответственно $w\bar{z}$) равен $\pm\varphi$, где φ — угол между векторами u и v (соответственно w и z).

29.31. а) Расположим треугольник ABC на комплексной плоскости так, чтобы точка X совпала с нулем. Пусть α, β, γ — комплексные числа, соответствующие вершинам треугольника. Требуемое неравенство следует из тождества

$$\frac{\beta}{\alpha - \gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha - \beta} + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta - \gamma} + \frac{\alpha}{\gamma - \beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma - \alpha} = 1.$$

б) Описанные окружности треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в некоторой точке X (задача 2.81, а)). Пусть R_a, R_b, R_c — радиусы этих окружностей, R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Тогда

$$\begin{aligned} a^2b_1c_1 + b^2a_1c_1 + c^2a_1b_1 &= 8R \sin A \sin B \sin C (aR_bR_c + bR_cR_b + cR_aR_b) = \\ &= \frac{4S}{R} (aR_bR_c + bR_cR_b + cR_aR_b). \end{aligned}$$

Ясно, что $2R_a \geq XA$, $2R_b \geq XB$, $2R_c \geq XC$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{4S}{R} (aR_bR_c + bR_cR_b + cR_aR_b) &\geq \\ &\geq \frac{abcS}{R} \cdot \frac{XB}{b} \cdot \frac{XC}{c} + \frac{XC}{c} \cdot \frac{XA}{a} + \frac{XA}{a} \cdot \frac{XB}{b} \geq \frac{abcS}{R} = 4S^2. \end{aligned}$$

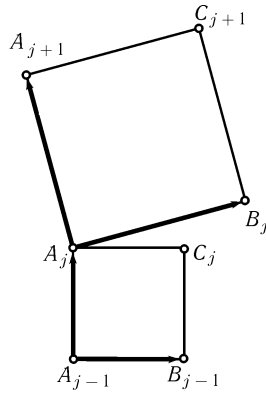


Рис. 29.6

29.32. Установим соответствие между точками плоскости и комплексными числами так, чтобы точка O совпала с нулем. Тогда $B_j - A_j = -i(A_{j+1} - A_j)$ и $C_j - A_j = -i(A_j - A_{j-1})$ (см. рис. 29.6; мы считаем, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$). Вычитая второе равенство из первого, получаем $B_j - C_j = -i(A_{j-1} + A_{j+1} - 2A_j)$. Но согласно задаче 29.10 $A_{j-1} + A_{j+1} = 2 \cos(2\pi/n)A_j$. Значит, $B_j - C_j = 2i(1 - \cos(2\pi/n))A_j$.

29.33. Пусть $A_1 \dots A_n$ — исходный n -угольник, причём его вершины занумерованы против часовой стрелки; B_j — центр правильного n -угольника, построенного внешним образом на стороне A_jA_{j+1} . Будем считать, что точки плоскости отождествлены с комплексными числами. Обозначим через w комплексное число $\cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. Умножение на w (соответственно на \bar{w}) является поворотом вокруг нуля на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке).

Точка A_j при повороте вокруг B_{j-1} на угол $2\pi/n$ против часовой стрелки переходит в точку A_{j-1} , а при повороте вокруг B_j по часовой стрелке — в точку A_{j+1} . Поэтому имеют место равенства

$$A_{j-1} - B_{j-1} = w(A_j - B_{j-1}), \quad A_{j+1} - B_j = \bar{w}(A_j - B_j)$$

для всех $j = 1, \dots, n$ (здесь и далее мы будем считать, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$). Следовательно,

$$B_{j-1}(w-1) = wA_j - A_{j-1}, \quad B_j(\bar{w}-1) = \bar{w}A_j - A_{j+1}.$$

Сложим эти равенства. Учитывая, что $w-1 = -w(\bar{w}-1)$, получим

$$(B_j - wB_{j-1})(\bar{w}-1) = (w + \bar{w})A_j - A_{j-1} - A_{j+1} \quad (1)$$

для всех $j = 1, \dots, n$.

Многоугольник $B_1B_2 \dots B_n$ является правильным тогда и только тогда, когда соответствие между точками плоскости и комплексными числами можно установить так, что $B_j = wB_{j-1}$ для всех $j = 1, \dots, n$, т. е. при всех j левая часть (1) равна нулю.

С другой стороны, согласно задаче 29.10 многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ аффинно правильный тогда и только тогда, когда соответствие между точками плоскости и комплексными числами можно установить так, что $\cos(2\pi/n)A_j = A_{j-1} + A_{j+1}$ для всех $j = 1, \dots, n$. Поскольку $w + \bar{w} = \cos(2\pi/n)$, последнее условие эквивалентно тому, что правая часть (1) равна нулю.

29.34. Согласно задаче 29.20

$$\operatorname{Im}(a-z)(a-w)(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{c}) = 0.$$

Обозначим $(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{c})$, $(\bar{b}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{c})$ и $(\bar{c}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{b})$ через A , B и C соответственно. Тогда

$$\operatorname{Im} a^2 A - \operatorname{Im} aA(z+w) + \operatorname{Im} Azw = 0. \quad (1)$$

Заметим, что $a(b+c)A$ — вещественное число. Действительно,

$$a(b+c)A = 2 \operatorname{Re} \bar{a}(b+c) - |a(b+c)|^2$$

(чтобы проверить это равенство, нужно воспользоваться тем, что $\operatorname{Re} \zeta = (\zeta + \bar{\zeta})/2$, и тем, что $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, поскольку точки a , b , c лежат на единичной окружности). Таким образом,

$$\operatorname{Im} a^2 A = \operatorname{Im} (a+b+c)aA - \operatorname{Im} a(b+c)A = \operatorname{Im} aA(a+b+c).$$

Далее,

$$abc \cdot aA = ab(\bar{a}-\bar{b}) \cdot ac(\bar{a}-\bar{c}) = (a-b)(a-c) = \bar{A}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} Azw = -\operatorname{Im} \overline{Az\bar{w}} = -\operatorname{Im} aA \cdot abc \cdot \bar{z}\bar{w}.$$

Подставляя эти равенства в (1), получаем

$$\operatorname{Im} aA[a+b+c - (z+w) - abc \cdot \bar{z}\bar{w}] = \operatorname{Im} aAp = 0$$

(через p обозначено выражение в квадратных скобках).

Аналогично доказывается, что $\operatorname{Im} bBp = \operatorname{Im} cCp = 0$. Таким образом, либо $p = 0$ и тогда утверждение задачи доказано, либо числа aA , bB и cC пропорциональны с вещественным коэффициентом пропорциональности. Но второй случай невозможен, так как иначе число

$$\frac{aA}{bB} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{c}-\bar{b}}$$

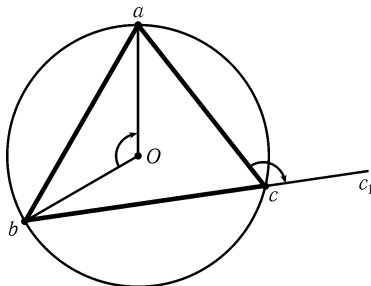


Рис. 29.7

было бы вещественным, т. е. $\angle bOa = \angle acc_1 = = \pi n$ (углы ориентированные: рис. 29.7). Однако $\angle acc_1 = \pi - \angle c$ и $\angle bOa = 2\angle c$ по теореме о вписанном угле, поэтому $\angle c = \pi(n-1)$, чего не может быть.

29.35. Расположим данный правильный треугольник на комплексной плоскости так, чтобы центр его описанной окружности оказался в нуле и радиус описанной окружности был равен 1. Пусть z и w — комплексные числа, соответствующие точкам Z и W . Согласно задаче 29.34 $z + w + \bar{z}\bar{w} = 0$, т. е. $\bar{z} + \bar{w} = -zw$. Ясно, что $z^* = -1/\bar{z}$ и $w^* = -1/\bar{w}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{2}(z^* + w^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{w}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\bar{z} + \bar{w}}{\bar{z}\bar{w}} = -\frac{1}{2} \frac{zw}{\bar{z}\bar{w}}$$

модуль этого числа равен $\frac{1}{2}$.

29.36. Расположим данный треугольник так, чтобы центр описанной окружности оказался в нуле, а точка A — в единице. Пусть z и w — комплексные числа, соответствующие точкам Z и W . Повороты плоскости вокруг нуля на указанные углы соответствуют умножению на комплексные числа z/\bar{z} , w/\bar{w} и $(z+w)/(\bar{z} + \bar{w})$. Но согласно задаче 29.34 $z + w = -\bar{z}\bar{w}$, значит, произведение этих трех комплексных чисел равно 1.

29.37. Бариецентрические координаты точки не изменяются при аффинном преобразовании, поэтому эллипсы Штейнера задаются такими же уравнениями, как вписанная и описанная окружности. Поэтому описанный эллипс Штейнера в бариецентрических координатах $(\alpha : \beta : \gamma)$ задается уравнением $\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0$ (задача 14.39), а вписанный — уравнением

$$2\beta\gamma + 2\alpha\gamma + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

(задача 14.45, б)).

29.38. Описанный эллипс Штейнера задается уравнением $\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0$ (задача 29.37), а описанная окружность — уравнением $a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0$, где a, b, c — длины сторон (задача 14.39). Из первого уравнения получаем $\gamma = -\alpha\beta/(\alpha + \beta)$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим $\alpha : \beta = = (c^2 - a^2) : (b^2 - c^2)$. Таким образом, точка Штейнера имеет бариецентрические координаты

$$\frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2} .$$

З а м е ч а н и е. На с. 370 дано другое определение точки Штейнера. Задача 14.50 показывает, что эти определения эквивалентны.

Глава 30

Проективные преобразования

§1. Проективные преобразования прямой

1. Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, O — точка, не лежащая ни на одной из этих прямых. *Центральным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 с центром O называют отображение, которое точке A_1 прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с прямой l_2 .

2. Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, l — прямая, не параллельная ни одной из этих прямых. *Параллельным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 вдоль прямой l называют отображение, которое точке A_1 прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_2 с прямой, проходящей через точку A_1 параллельно прямой l .

3. Отображение P прямой a на прямую b называют *проективным*, если оно является композицией центральных или параллельных проектирований, т. е. если существуют прямые $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$ и отображения P_i прямых a_i на a_{i+1} , каждое из которых является либо центральным, либо параллельным проектированием, причем P является композицией преобразований P_i . В случае, когда прямая b совпадает с прямой a , отображение P называют *проективным преобразованием* прямой a .

30.1*. Докажите, что существует проективное отображение, которое три данные точки одной прямой переводит в три данные точки другой прямой.

О п р е д е л е н и е. *Двойным отношением* четверки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называют число

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

где через a, b, c, d обозначены координаты точек A, B, C, D соответственно. Легко проверить, что двойное отношение не зависит от выбора координаты на прямой. Мы будем также писать

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

подразумевая, что через AC/BC (соответственно AD/BD) обозначено отношение длин этих отрезков, если векторы \vec{AC} и \vec{BC} (соответственно \vec{AD} и \vec{BD}) сонаправлены, или отношение длин отрезков, взятое со знаком «−», если эти векторы противоположно направлены.

О п р е д е л е н и е. *Двойным отношением* четверки прямых a, b, c, d , проходящих через одну точку, называют число

$$(abcd) = \pm \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)},$$

знак которого выбирается следующим образом: если один из углов, образованных прямыми a и b , не пересекается ни с одной из прямых c или d (в этом случае говорят, что пара прямых a и b не разделяет пару прямых c и d), то $(abcd) > 0$; в противном случае $(abcd) < 0$.

30.2*. а) Даны прямые a, b, c, d , проходящие через одну точку, и прямая l , через эту точку не проходящая. Пусть A, B, C, D — точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d соответственно. Докажите, что $(abcd) = (ABCD)$.

б) Докажите, что двойное отношение четверки точек сохраняется при проективных преобразованиях.

30.3*. Докажите, что если $(ABCX) = (ABCY)$, то $X = Y$ (все точки попарно различны, кроме, быть может, точек X и Y , и лежат на одной прямой).

30.4*. Докажите, что проективное преобразование прямой однозначно определяется образами трех произвольных точек.

30.5*. Докажите, что нетождественное проективное преобразование прямой имеет не более двух неподвижных точек.

30.6*. Дано отображение прямой a на прямую b , сохраняющее двойное отношение любой четверки точек. Докажите, что это отображение проективно.

30.7*. Докажите, что преобразование P числовой прямой является проективным тогда и только тогда, когда оно представляется в виде

$$P(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где a, b, c, d — такие числа, что $ad - bc \neq 0$. (Такие отображения называют *дробно-линейными*.)

30.8*. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если $(ABCD) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

30.9*. Даны прямая l , окружность и точки M, N , лежащие на окружности и не лежащие на прямой l . Рассмотрим отображение P прямой l на себя, являющееся композицией проектирования прямой l на данную окружность из точки M и проектирования окружности на прямую l из точки N . (Если точка X лежит на прямой l , то $P(X)$ есть пересечение прямой NY с прямой l , где Y — отличная от M точка пересечения прямой MX с данной окружностью.) Докажите, что преобразование P проективно.

30.10*. Даны прямая l , окружность и точка M , лежащая на окружности и не лежащая на прямой l . Пусть P_M — проектирование прямой l на данную окружность из точки M (точка X прямой отображается в отличную от M точку пересечения прямой XM с окружностью), R — движение плоскости, сохраняющее данную окружность (т. е. поворот плоскости вокруг центра окружности или симметрия относительно диаметра). Докажите, что композиция $P_M^{-1} \circ R \circ P_M$ является проективным преобразованием.

З а м е ч а н и е. Если считать, что данная окружность отождествлена с прямой l посредством проектирования из точки M , то утверждение последней задачи можно переформулировать следующим образом: отображение окружности на себя при помощи движения плоскости является проективным преобразованием прямой.

§2. Проективные преобразования плоскости

О п р е д е л е н и е. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, O — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. *Центральным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 с центром O называют отображение, которое точке A_1 плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с плоскостью α_2 .

30.11*. Докажите, что если плоскости α_1 и α_2 пересекаются, то центральное проектирование α_1 на α_2 с центром O задает взаимно однозначное отображение плоскости α_1 с выкинутой прямой l_1 на плоскость α_2 с выкинутой прямой l_2 , где l_1 и l_2 — прямые пересечения плоскостей α_1 и α_2 соответственно с плоскостями, проходящими через O и параллельными α_2 и α_1 . При этом на l_1 отображение не определено.

О п р е д е л е н и е. Прямую, на которой не определено центральное проектирование, называют *исключительной прямой* данной проекции.

30.12*. Докажите, что при центральном проектировании прямая, не являющаяся исключительной, проецируется в прямую.

Для того чтобы центральное проектирование было определено всюду, удобно считать, что на каждой прямой помимо обычных точек имеется еще одна точка, называемая *бесконечно удаленной*. При этом если две прямые параллельны, то их бесконечно удаленные точки совпадают, другими словами, параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Мы также будем считать, что на каждой плоскости помимо обычных прямых имеется еще *бесконечно удаленная прямая*, на которой лежат все бесконечно удаленные точки прямых данной плоскости. Бесконечно удаленная прямая пересекается с каждой обычной прямой l , лежащей на той же плоскости, в бесконечно удаленной точке прямой l .

Если ввести бесконечно удаленные точки и прямые, то центральное проектирование плоскости α_1 на плоскость α_2 с центром в точке O будет определено для всех точек плоскости α_1 . При этом исключительная прямая будет проецироваться в бесконечно удаленную прямую плоскости α_2 , а именно, образом точки M

исключительной прямой будет бесконечно удаленная точка прямой OM ; в этой точке пересекаются прямые плоскости α_2 , параллельные прямой OM .

30.13*. Докажите, что если наряду с обычными точками и прямыми рассматривать бесконечно удаленные, то

- а) через любые две точки проходит единственная прямая;
- б) любые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются в единственной точке;
- в) центральное проектирование одной плоскости на другую является взаимно однозначным отображением.

О п р е д е л е н и е. Отображение P плоскости α на плоскость β называют *проективным*, если оно является композицией центральных проектирований и аффинных преобразований, т. е. если существуют плоскости $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \beta$ и отображения P_i плоскостей α_i на α_{i+1} , каждое из которых является либо центральным проектированием, либо аффинным преобразованием, причем P является композицией преобразований P_i . В случае, когда плоскость α совпадает с плоскостью β , отображение P называют *проективным преобразованием плоскости α* . Прообраз бесконечно удаленной прямой мы будем называть *исключительной* прямой данного проективного преобразования.

30.14*. а) Докажите, что проективное преобразование P плоскости, переводящее бесконечно удаленную прямую в бесконечно удаленную прямую, является аффинным.

б) Докажите, что если точки A, B, C, D лежат на прямой, параллельной исключительной прямой проективного преобразования P плоскости α , то $P(A)P(B) : P(C)P(D) = AB : CD$.

в) Докажите, что если проективное преобразование P переводит параллельные прямые l_1 и l_2 в параллельные прямые, то либо P аффинно, либо его исключительная прямая параллельна прямым l_1 и l_2 .

г) Пусть P — взаимно однозначное преобразование множества всех конечных и бесконечных точек плоскости, которое каждую прямую переводит в прямую. Докажите, что P проективно.

30.15. Даны точки A, B, C, D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1, B_1, C_1, D_1 , удовлетворяющие тому же условию.

а) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1 .

б) Докажите, что преобразование задачи а) единственно, т. е. проективное преобразование плоскости определяется образами четырех точек в общем положении (ср. с задачей 30.4).

в) Докажите утверждение задачи а), если точки A, B, C лежат на одной прямой l , а точки A_1, B_1, C_1 — на одной прямой l_1 .

г) Единственно ли преобразование задачи в)?

Рассмотрим в пространстве единичную сферу с центром в начале координат. Пусть $N(0, 0, 1)$ — ее северный полюс. *Стереографической проекцией сферы на плоскость* называют отображение, которое каждой точке M сферы сопоставляет отличную от N точку пересечения прямой MN с плоскостью Oxy . Известно (см. например, задачу 16.19, б) в книге: *В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, Задачи по стереометрии.* — М.: Наука, 1989), что при стереографической проек-

ции окружность на сфере переходит в окружность на плоскости. Воспользуйтесь этим фактом при решении следующих двух задач:

30.16*. а) Докажите, что существует проективное преобразование, которое данную окружность переводит в окружность, а данную точку, лежащую внутри окружности, переводит в центр образа.

б) Докажите, что если проективное преобразование переводит данную окружность в окружность, а точку M — в ее центр, то исключительная прямая перпендикулярна диаметру, проходящему через M .

30.17*. На плоскости дана окружность и не пересекающая ее прямая. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а данную прямую — в бесконечно удаленную прямую.

30.18*. Докажите, что существует проективное преобразование, которое данную окружность переводит в окружность, а данную хорду — в ее диаметр.

30.19*. Дана окружность S и точка O внутри ее. Рассмотрим все проективные преобразования, которые S отображают в окружность, а O — в ее центр. Докажите, что все такие преобразования отображают на бесконечность одну и ту же прямую.

Эта прямая называется *полярной* точки O относительно окружности S .

30.20*. Проективное преобразование некоторую окружность переводит в себя, а ее центр оставляет на месте. Докажите, что это — поворот или симметрия.

30.21*. Даны две параллельные прямые a, b и точка O . Тогда для каждой точки M можно выполнить следующее построение. Проведем через M произвольную прямую l , не проходящую через O и пересекающую прямые a и b . Точки пересечения обозначим соответственно через A и B , и пусть M' — точка пересечения прямой OM с прямой, параллельной OB и проходящей через A .

а) Докажите, что точка M' не зависит от выбора прямой l .

б) Докажите, что преобразование плоскости, переводящее точку M в точку M' , является проективным.

30.22*. Докажите, что преобразование координатной плоскости, которое каждую точку с координатами (x, y) отображает в точку с координатами $(\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$, является проективным.

30.23*. Пусть O — центр линзы, π — некоторая плоскость, проходящая через ее оптическую ось a и f — прямые пересечения плоскости π с плоскостью линзы и с фокальной плоскостью соответственно ($a \parallel f$). В школьном курсе физики показано, что если пренебречь толщиной линзы, то изображение M' точки M , лежащей в плоскости π , строится следующим образом (рис. 30.1). Проведем через точку M произвольную прямую l ; пусть A — точка пересечения прямых a и l , B — точка пересечения прямой f с прямой, проходящей через O параллельно l . Тогда M' есть точка пересечения

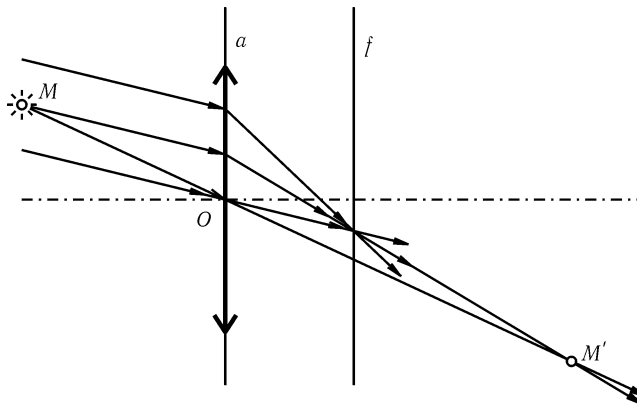


Рис. 30.1

прямых AB и OM . Докажите, что преобразование плоскости π , сопоставляющее каждой точке ее изображение, является проективным.

Таким образом, через увеличительное стекло мы видим образ нашего мира при проективном преобразовании.

§3. Переведем данную прямую на бесконечность

30.24*. Докажите, что геометрическое место точек пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$, у которых стороны AB и CD лежат на двух данных прямых l_1 и l_2 , а стороны BC и AD пересекаются в данной точке P , является прямой, проходящей через точку Q пересечения прямых l_1 и l_2 .

30.25*. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD , BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L , а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N . Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF .

30.26*. Прямые a, b, c пересекаются в одной точке O . В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a ; B_1 и B_2 — на прямой b ; C_1 и C_2 — на прямой c . A, B, C — точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 , A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой (Дезарг).

30.27*. Точки A, B, C лежат на прямой l , а точки A_1, B_1, C_1 — на прямой l_1 . Докажите, что точки пересечения прямых AB_1 и BA_1 , BC_1 и CB_1 , CA_1 и AC_1 лежат на одной прямой (Папп).

30.28*. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть P, Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон AB и CD , AD и BC соответственно, R — произвольная точка внутри четырехугольника. Пусть K — точка пересечения прямых BC и PR , L — точка пересечения прямых AB и QR , M — точка пересечения прямых AK и DR . Докажите, что точки L, M и C лежат на одной прямой.

30.29*. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O , и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_1 . Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке O_2 (теорема о дважды перспективных треугольниках).

30.30*. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O , прямые AA_1, BC_1 и CB_1 пересекаются в одной точке O_1 и прямые AC_1, BB_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_2 . Докажите, что прямые AB_1, BA_1 и CC_1 тоже пересекаются в одной точке O_3 (теорема о трижды перспективных треугольниках).

30.31*. Даны четырехугольник $ABCD$ и прямая l . Обозначим через P, Q, R точки пересечения прямых AB и CD , AC и BD , BC и AD , а через P_1, Q_1, R_1 — середины отрезков, которые эти пары прямых отсекают на прямой l . Докажите, что прямые PP_1, QQ_1 и RR_1 пересекаются в одной точке.

30.32*. Даны треугольник ABC и прямая l . Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины отрезков, отсекаемых на прямой l углами A, B, C , а через A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых AA_1 и BC , BB_1 и AC , CC_1 и AB . Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

30.33*. Даны четыре точки A, B, C, D . Пусть P, Q, R — точки пересечения прямых AB и CD , AD и BC , AC и BD соответственно; K и L — точки пересечения прямой QR с прямыми AB и CD соответственно. Докажите, что $(QRKL) = -1$ (теорема о полном четырехстороннике).

30.34*. Окружность пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 . Пусть l_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2, BB_2 и CC_1 ; прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в одной точке (или параллельны).

30.35*. Докажите, что для любого нечетного $n \geq 3$ на плоскости можно указать $2n$ различных точек, не лежащих на одной прямой, и разбить их на пары так, чтобы любая прямая, проходящая через две точки из разных пар, проходила бы еще через одну из этих $2n$ точек.

§4. Применение проективных преобразований, сохраняющих окружность

Основным инструментом для решения задач этого параграфа являются задачи 30.16 и 30.17.

30.36*. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.

30.37*. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

30.38*. а) Через точку P проводятся всевозможные секущие окружности S . Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности S , проведенных в двух точках пересечения окружности с секущей.

б) Через точку P проводятся всевозможные пары секущих AB и CD окружности S (A, B, C, D — точки пересечения с окружностью). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD .

30.39*. Даны окружность S , прямая l , точка M , лежащая на S и не лежащая на l , и точка O , не лежащая на S . Рассмотрим преобразование P прямой l , являющееся композицией проектирования l на S из M , S на себя из O и S на l из M , т. е. $P(A)$ — пересечение прямых l и MC , где C — отличная от B точка пересечения S с прямой OB , а B — отличная от A точка пересечения S с прямой MA . Докажите, что преобразование P проективно.

З а м е ч а н и е. Если считать, что окружность S отождествлена с прямой l посредством проектирования из точки M , то утверждение последней задачи можно переформулировать следующим образом: центральное проектирование окружности на себя является проективным преобразованием.

30.40*. Даны окружность S , точка P , расположенная вне S , и прямая l , проходящая через P и пересекающая окружность в точках A и B . Точку пересечения касательных к окружности в точках A и B обозначим через K .

а) Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через P и пересекающие AK и BK в точках M и N . Докажите, что геометрическим местом точек пересечения отличных от AK и BK касательных к S , проведенных из точек M и N , является некоторая прямая, проходящая через K , из которой выкинуто ее пересечение с внутренностью S .

б) Будем на окружности разными способами выбирать точку R и проводить прямую, соединяющую отличные от R точки пересечения прямых RK и RP с S . Докажите, что все полученные прямые проходят через одну точку, и эта точка лежит на l .

30.41*. Внеписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D , а продолжений сторон AB и AC — в точках E и F . Пусть T — точка пересечения прямых BF и CE . Докажите, что точки A , D и T лежат на одной прямой.

30.42*. Пусть $ABCDEF$ — описанный шестиугольник. Докажите, что его диагонали AD , BE и CF пересекаются в одной точке (Брианшон).

30.43*. В окружность S вписан шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA лежат на одной прямой (Паскаль).

30.44*. Пусть O — середина хорды AB окружности S , MN и PQ — произвольные хорды, проходящие через O , причем точки P и N лежат по одну сторону от AB , E и F — точки пересечения хорды AB с хордами MP и NQ соответственно. Докажите, что O — середина отрезка EF (задача о бабочке).

30.45*. Точки A , B , C и D лежат на окружности, SA и SD — касательные к этой окружности, P и Q — точки пересечения прямых AB и CD , AC и BD соответственно. Докажите, что точки P , Q и S лежат на одной прямой.

§5. Применение проективных преобразований прямой в задачах на доказательство

30.46*. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ взята точка M_1 . Пусть M_2 — проекция M_1 на прямую BC из D , M_3 — проекция M_2 на CD из A , M_4 — проекция M_3 на DA из B , M_5 — проекция M_4 на AB из C и т. д. Докажите, что $M_{13} = M_1$ (а значит, $M_{14} = M_2$, $M_{15} = M_3$ и т. д.).

30.47*. Используя проективные преобразования прямой, докажите теорему о полном четырехстороннике (задача 30.33).

30.48*. Используя проективные преобразования прямой, докажите теорему Паппа (задача 30.27).

30.49*. Используя проективные преобразования прямой, решите задачу о бабочке (задача 30.44).

30.50*. Точки A , B , C , D , E , F лежат на одной окружности. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA лежат на одной прямой (Паскаль).

§6. Применение проективных преобразований прямой в задачах на построение

30.51*. Даны окружность, прямая и точки A , A' , B , B' , C , C' , M , лежащие на этой прямой. Согласно задачам 30.1 и 30.3 существует единственное проективное преобразование данной прямой на себя, отображающее точки A , B , C соответственно в A' , B' , C' . Обозначим это преобразование через P . Постройте при помощи одной линейки а) точку $P(M)$; б) неподвижные точки отображения P (задача Штейнера).

Задача построения неподвижных точек проективного преобразования является ключевой для этого параграфа в том смысле, что остальные задачи тем или иным способом к ней сводятся (см. также замечания после задач 30.10 и 30.39).

30.52*. Даны две прямые l_1 и l_2 и две точки A и B , не лежащие на этих прямых. Циркулем и линейкой постройте на прямой l_1 такую точку X , чтобы прямые AX и BX высекали на прямой l_2 отрезок, а) имеющий данную длину a ; б) делящийся пополам в данной точке E прямой l_2 .

30.53*. Точки A и B лежат на прямых a и b соответственно, а точка P не лежит ни на одной из этих прямых. Циркулем и линейкой проведите через P прямую, пересекающую прямые a и b в точках X и Y соответственно таких, что длины отрезков AX и BY имеют а) данное отношение; б) данное произведение.

30.54*. Циркулем и линейкой проведите через данную точку прямую, на которой три данные прямые высекают равные отрезки.

30.55*. Даны окружность S и две хорды AB и CD . Циркулем и линейкой постройте на окружности такую точку X , чтобы прямые AX и BX высекали на CD отрезок а) имеющий данную длину a ; б) делящийся пополам в данной точке E хорды CD .

30.56*. а) Даны прямая l и точка P вне ее. Циркулем и линейкой постройте на l отрезок XU данной длины, который виден из P под данным углом α .

б) Даны две прямые l_1 и l_2 и точки P и Q , не лежащие на этих прямых. Циркулем и линейкой постройте на прямой l_1 точку X и на прямой l_2 точку Y так, что отрезок XU виден из точки P под данным углом α , а из точки Q — под данным углом β .

30.57*. а) Дана некоторая окружность. При помощи одной линейки постройте n -угольник, стороны которого проходят через данные n точек, а вершины лежат на n данных прямых.

б) При помощи одной линейки впишите в данную окружность n -угольник, стороны которого проходят через данные n точек.

в) При помощи циркуля и линейки впишите в данную окружность многоугольник, у которого некоторые стороны проходят через данные точки, некоторые другие параллельны данным прямым, а остальные имеют данные длины (о каждой стороне имеется информация одного из трех перечисленных типов).

§7. Невозможность построений при помощи одной линейки

30.58*. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя разделить данный отрезок пополам.

30.59*. На плоскости дана окружность. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя построить ее центр.

Решения

30.1. Обозначим данные прямые через l_0 и l , данные точки на прямой l_0 — через A_0, B_0, C_0 , данные точки на прямой l — через A, B, C . Пусть l_1 — произвольная прямая, не проходящая через точку A . Возьмем произвольную точку O_0 , не лежащую на прямых l_0 и l_1 . Обозначим через P_0 центральное проектирование прямой l_0 на прямую l_1 с центром в точке O_0 , а через A_1, B_1, C_1 — проекции точек A_0, B_0, C_0 . Пусть l_2 — произвольная прямая, проходящая через точку A , не совпадающая с прямой l и не проходящая через A_1 . Возьмем некоторую точку O_1 на прямой AA_1 и рассмотрим центральное проектирование P_1 прямой l_1 на l_2 с центром в O_1 . Обозначим через A_2, B_2, C_2 проекции точек A_1, B_1, C_1 . Ясно, что A_2 совпадает с A . Наконец, пусть P_2 — проектирование прямой l_2 на прямую l , которое в том случае, когда прямые BB_2 и CC_2 не параллельны, является центральным проектированием с центром в точке пересечения этих прямых, а в том случае, когда прямые BB_2 и CC_2 параллельны, является параллельным проектированием вдоль одной из этих прямых. Композиция $P_2 \circ P_1 \circ P_0$ является требуемым проективным преобразованием.

30.2. а) Обозначим точку пересечения четырех данных прямых через O ; пусть H — проекция этой точки на прямую l и $h = OH$. Тогда

$$\begin{aligned} 2S_{OAC} &= OA \cdot OC \sin(a, c) = h \cdot AC, \\ 2S_{OBC} &= OB \cdot OC \sin(b, c) = h \cdot BC, \\ 2S_{OAD} &= OA \cdot OD \sin(a, d) = h \cdot AD, \\ 2S_{OBD} &= OB \cdot OD \sin(b, d) = h \cdot BD. \end{aligned}$$

Поделив первое равенство на второе, а третье — на четвертое, получаем

$$\frac{OA \sin(a, c)}{OB \sin(b, c)} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{OA \sin(a, d)}{OB \sin(b, d)} = \frac{AD}{BD}.$$

Деля получившиеся равенства, получаем $|(ABCD)| = |(abcd)|$. Для доказательства того, что числа $(ABCD)$ и $(abcd)$ имеют одинаковый знак, можно, например, выписать все возможные способы расположения точек на прямой (24 способа), и в каждом случае убедиться в том, что $(ABCD)$ положительно тогда и только тогда, когда пара прямых a, b не разделяет пару прямых c, d .

б) является непосредственным следствием задачи а).

30.3. Пусть a, b, c, x, y — координаты точек A, B, C, X, Y . Тогда

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{c-a}{c-b} = \frac{y-a}{y-b} : \frac{c-a}{c-b}.$$

Следовательно, поскольку все точки различны, $(x-a)(y-b) = (x-b)(y-a)$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $ax - bx = ay - by$. Сокращая это равенство на $(a-b)$, получаем $x = y$.

30.4. Пусть образ каждой из трех данных точек при одном проективном преобразовании совпадает с образом этой точки при другом проективном преобразовании. Докажем, что тогда совпадают образы любой другой точки при этих преобразованиях. Обозначим образы данных точек через A, B, C . Возьмем произвольную точку и обозначим через X и Y ее образы при данных проективных преобразованиях. Тогда согласно задаче 30.2 $(ABCX) = (ABCY)$, и следовательно, согласно задаче 30.3, $X = Y$.

30.5. Эта задача является следствием предыдущей.

30.6. Фиксируем на прямой a три различные точки. Согласно задаче 30.1 существует проективное отображение P , которое эти точки отображает так же, как данное отображение. Но в решении задачи 30.4 фактически доказано, что любое отображение, сохраняющее двойное отношение, однозначно определяется образами трех точек. Поэтому данное отображение совпадает с P .

30.7. Во-первых, покажем, что дробно-линейное преобразование

$$P(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

сохраняет двойное отношение. Действительно, пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные числа и $y_i = P(x_i)$. Тогда

$$y_i - y_j = \frac{ax_i + b}{cx_i + d} - \frac{ax_j + b}{cx_j + d} = \frac{(ad - bc)(x_i - x_j)}{(cx_i + d)(cx_j + d)},$$

следовательно, $(y_1 y_2 y_3 y_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4)$.

В решении задачи 30.4 фактически было доказано, что если преобразование прямой сохраняет двойное отношение, то оно однозначно задается образами произвольных трех различных точек. Согласно задаче 30.2, б) проективные преобразования сохраняют двойное отношение. Остается доказать, что для любых попарно различных точек x_1, x_2, x_3 и попарно различных точек y_1, y_2, y_3 найдется дробно-линейное преобразование P , для которого $P(x_i) = y_i$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для любых трех различных точек найдется дробно-линейное преобразование, переводящее их в три фиксированные точки $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$. Действительно, если P_1 и P_2 — дробно-линейные преобразования такие, что $P_1(x_i) = z_i$ и $P_2(y_i) = z_i$, то $P_2^{-1}(P_1(x_i)) = y_i$. (Преобразование, обратное дробно-линейному, является дробно-линейным, так как если $y = (ax + b)/(cx + d)$, то $x = (dy - b)/(-cy + a)$; то, что композиция дробно-линейных преобразований дробно-линейна, проверьте самостоятельно.)

Итак, нам надо доказать, что если x_1, x_2, x_3 — произвольные различные числа, то найдутся такие числа a, b, c, d , что $ad - bc \neq 0$ и

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= 0, \\ ax_2 + b &= cx_2 + d, \\ cx_3 + d &= 0. \end{aligned}$$

Найдя из первого и третьего уравнений b и d и подставив во второе, получаем уравнение

$$a(x_2 - x_1) = c(x_2 - x_3),$$

из которого находим решение $a = (x_2 - x_3), b = x_1(x_3 - x_2), c = (x_2 - x_1), d = x_3(x_1 - x_2)$. При этом $ad - bc = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \neq 0$.

30.8. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть a, b, c, d — координаты данных точек. Тогда по условию $(c - a)(d - b) = (c - b)(d - a)$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $cb + ad = ca + bd$. Переносим все в левую часть и разлагая на множители, получаем $(d - c)(b - a) = 0$, т. е. либо $a = b$, либо $c = d$.

В т о р о е р е ш е н и е. Предположим, что $C \neq D$, и докажем, что в этом случае $A = B$. Рассмотрим такое центральное проектирование данной прямой на другую прямую, при котором точка D проецируется в бесконечно удаленную точку. Пусть A', B', C' — проекции точек A, B, C . Согласно задаче 30.2 $(ABCD) = (A'B'C'\infty) = 1$, т. е. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. Но это значит, что $A = B$.

30.9. Согласно задаче 30.6 нам достаточно доказать, что преобразование P сохраняет двойное отношение четверки точек. Пусть A, B, C, D — произвольные точки прямой l . Обозначим через A', B', C', D' их образы при преобразовании P , а через a, b, c, d и a', b', c', d' — прямые MA, MB, MC, MD и NA', NB', NC', ND' соответственно. Тогда согласно задаче 30.2, а) $(ABCD) = (abcd)$ и $(A'B'C'D') = (a'b'c'd')$, а по теореме о вписанном угле $\angle(a, c) = \angle(a', c')$, $\angle(b, c) = \angle(b', c')$ и т. д., а значит, $(abcd) = (a'b'c'd')$.

30.10. Пусть $N = R^{-1}(M)$, $m = R(l)$, P_N — проектирование прямой l на окружность из точки N , Q — проектирование прямой m на прямую l из точки M . Тогда $P_M^{-1} \circ R \circ P_M = Q \circ R \circ P_N^{-1} \circ P_M$. Но согласно предыдущей задаче отображение $P_N^{-1} \circ P_M$ проективно.

30.11. Прямые, проходящие через O и параллельные плоскости α_1 (соответственно α_2), пересекают плоскость α_2 (соответственно α_1) в точках прямой l_2 (соответственно l_1). Поэтому если точка лежит на одной из плоскостей α_1, α_2 и не лежит на прямых l_1, l_2 , то определено проектирование ее на другую плоскость. Ясно, что разные точки проецируются в разные.

30.12. При центральной проекции на плоскость α_2 с центром O прямая l проецируется в пересечение плоскости, проходящей через O и l , с плоскостью α_2 .

30.13. Эта задача является непосредственным следствием аксиом геометрии и определения.

30.14. а) Из задачи 30.13, в) следует, что если наряду с обычными точками рассматривать бесконечно удаленные, то преобразование P взаимно однозначно. При этом бесконечно удаленная прямая отображается на бесконечно удаленную прямую. Поэтому множество конечных точек тоже взаимно однозначно отображается на множество конечных точек. А поскольку прямые при отображении P переводятся в прямые, то P аффинно.

б) Обозначим через l прямую, на которой лежат точки A, B, C, D , а через l_0 — исключительную прямую преобразования P . Возьмем произвольную точку O вне плоскости α и рассмотрим плоскость β , которая проходит через прямую l и параллельна плоскости, проходящей через прямую l_0 и точку O . Пусть Q — композиция центрального проектирования плоскости α на плоскость β с центром O и последующего поворота пространства вокруг оси l , переводящего плоскость β в плоскость α . Исключительной прямой преобразования Q является прямая l_0 . Поэтому проективное преобразование $R = P \circ Q^{-1}$ плоскости α переводит бесконечно удаленную прямую в бесконечно удаленную прямую и согласно задаче а) является аффинным, в частности, сохраняет отношения отрезков, лежащих на прямой l . Остается заметить, что преобразование Q оставляет точки прямой l неподвижными.

в) То, что параллельные прямые l_1 и l_2 переходят в параллельные, означает, что бесконечно удаленная точка A этих прямых переходит в бесконечно удаленную точку, т. е. A лежит на прообразе l бесконечно удаленной прямой. Следовательно, либо l — бесконечно удаленная прямая, и тогда согласно задаче а) преобразование P аффинно, либо прямая l параллельна прямым l_1 и l_2 .

г) Обозначим через l_∞ бесконечно удаленную прямую. Если $P(l_\infty) = l_\infty$, то P задает взаимно однозначное преобразование плоскости, которое каждую прямую переводит в прямую, и, значит, по определению является аффинным. В противном случае обозначим $P(l_\infty)$ через a и рассмотрим произвольное проективное преобразование Q , исключительной прямой которого является a . Обозначим $Q \circ P$ через R . Тогда $R(l_\infty) = l_\infty$, и, значит, как было показано выше, R аффинно. Следовательно, $P = Q^{-1} \circ R$ проективно.

30.15. а) Достаточно показать, что точки A, B, C, D можно перевести проективным преобразованием в вершины квадрата. Пусть E и F — точки (возможно, бесконечно удаленные) пересечения прямой AB с прямой CD и прямой BC с прямой AD соответственно. Если прямая EF конечна, то существует центральное проектирование плоскости ABC на некоторую плоскость α , для которого EF — исключительная прямая. В качестве центра проецирования можно взять произвольную точку O вне плоскости ABC , а в качестве плоскости α — произвольную плоскость, параллельную плоскости OEF и не совпадающую с ней. При этом точки A, B, C, D проецируются в вершины параллелограмма, который уже при помощи аффинного преобразования можно перевести в квадрат. Если же прямая EF бесконечно удаленная, то $ABCD$ — уже параллелограмм.

б) В силу задачи а) нам достаточно разобрать случай, когда $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — один и тот же параллелограмм. В этом случае его вершины неподвижны, а значит, неподвижны две точки бесконечно удаленной прямой, в которых пересекаются продолжения противоположных сторон. Поэтому согласно задаче 30.14, а) отображение должно быть аффинным, и, следовательно, согласно задаче 29.6, — тождественным.

в) Поскольку прямые l и l_1 мы можем спроецировать на бесконечность (см. решение задачи а)), нам достаточно доказать, что существует аффинное преобразование, которое данную точку O отображает в данную точку O_1 , а прямые, параллельные данным прямым a, b, c соответственно, отображает на прямые, параллельные данным прямым a_1, b_1, c_1 соответственно. Можно считать, что прямые a, b, c проходят через O , а прямые a_1, b_1, c_1 — через O_1 . Выберем на c и c_1 произвольные точки C и C_1 и проведем через каждую из них по две прямые a', b' и a'_1, b'_1 параллельно прямым a, b и a_1, b_1 соответственно. Тогда аффинное преобразование, которое параллелограмм, ограниченный прямыми a, a', b, b' , переводит в параллелограмм, ограниченный прямыми a_1, a'_1, b_1, b'_1 (см. задачу 29.6, в)), является искомым.

г) Не обязательно. Преобразование из задачи 30.21 (как и тождественное преобразование) оставляет неподвижными точку O и прямую a .

30.16. а) Рассмотрим на координатной плоскости Oxz точки $O(0, 0), N(0, 1), E(1, 0)$. Для произвольной точки M , лежащей на дуге NE единичной окружности (см. рис. 30.2), обозначим через P середину отрезка EM , а через M^* и P^* — точки пересечения прямых NM и NP соответственно с прямой OE .

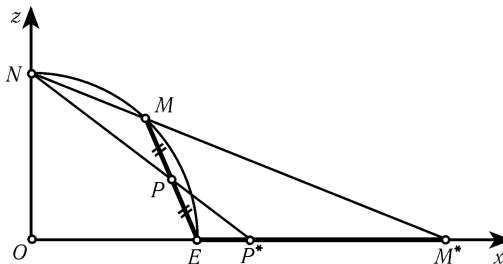


Рис. 30.2

Докажем, что для любого числа $k > 2$ можно выбрать точку M таким образом, что $M^*E : P^*E = k$. Пусть $A(a, b)$ — произвольная точка плоскости, $A^*(t, 0)$ — точка пересечения прямых NA и OE , $B(0, b)$ — проекция точки A

на прямую ON . Тогда

$$t = \frac{A^*O}{ON} = \frac{AB}{BN} = \frac{a}{1-b}.$$

Поэтому, если (x, z) — координаты точки M , то точки P, M^*, P^* имеют соответственно координаты

$$P \left(\frac{x+1}{2}, \frac{z}{2} \right), \quad M^* \left(\frac{x}{1-z}, 0 \right), \quad P^* \left(\frac{(x+1)/2}{1-(z/2)}, 0 \right),$$

значит,

$$M^*E : P^*E = \frac{x}{1-z} - 1 : \frac{x+1}{2-z} - 1 = \frac{x+z-1}{1-z} : \frac{x+z-1}{2-z} = \frac{2-z}{1-z}.$$

Ясно, что уравнение $(2-z)/(1-z) = k$ имеет решение $z = (k-2)/(k-1)$, причем если $k > 2$, то $0 < z < 1$, и, следовательно, точка $M(\sqrt{1-z^2}, z)$ требуемая.

Докажем теперь основное утверждение задачи. Обозначим данные окружность и точку внутри ее соответственно через S и C . Если точка C является центром окружности S , то требуемым проективным преобразованием является тождественное преобразование. Поэтому будем считать, что C не центр. Обозначим через AB диаметр, содержащий точку C . Пусть для определенности $BC > CA$. Положим $k = BA : AC$. Тогда $k > 2$, и, следовательно, как было доказано, на единичной окружности в плоскости Oxz можно расположить точку M так, что $M^*E : P^*E = k = BA : CA$. Поэтому преобразованием подобия окружность S можно перевести в окружность S_1 , построенную в плоскости Oxy на отрезке EM^* как на диаметре, так, чтобы точки A, B, C перешли соответственно в точки E, M^*, P^* . При стереографической проекции окружность S_1 проецируется в окружность S_2 на единичной сфере, которая симметрична относительно плоскости Oxz , а значит, и относительно прямой EM . Поэтому EM — диаметр окружности S_2 , а его середина — точка P — ее центр. Пусть α — плоскость, содержащая окружность S_2 . Ясно, что при центральном проектировании плоскости Oxy на плоскость α из северного полюса единичной сферы окружность S_1 перейдет в S_2 , а точка P^* — в ее центр P .

б) Диаметр AB , проходящий через M , переходит в диаметр. Поэтому касательные в точках A и B переходят в касательные. Но если параллельные прямые переходят в параллельные, то исключительная прямая им параллельна (см. задачу 30.14, в)).

30.17. Рассмотрим на координатной плоскости Oxz точки $O(0, 0), N(0, 1), E(1, 0)$. Для произвольной точки M , лежащей на дуге NE единичной окружности, обозначим через P пересечение отрезка EM с прямой $z = 1$. Ясно, что двигая точку M по дуге NE , мы можем сделать отношение $EM : MP$ равным произвольному числу. Поэтому преобразованием подобия данную окружность S можно перевести в окружность S_1 , построенную на отрезке EM как на диаметре в плоскости α , перпендикулярной Oxz , так, чтобы данная прямая l перешла в прямую, проходящую через P перпендикулярно Oxz . Окружность S_1 лежит на единичной сфере с центром в начале координат, следовательно, при стереографической проекции она проецируется в окружность S_2 на плоскости Oxy . Таким образом, при центральном проектировании плоскости α на плоскость Oxy из N окружность S_1 перейдет в S_2 , а прямая l — в бесконечно удаленную.

30.18. Пусть M — произвольная точка на данной хорде. Согласно задаче 30.16 существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а точку M — в ее центр. Поскольку при проективном преобразовании прямая переходит в прямую, данная хорда перейдет в диаметр.

30.19. Проведем через O две произвольные хорды AC и BD . Пусть P и Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим произвольное проективное преобразование, которое S отображает в окружность, а O — в ее центр. Ясно, что четырехугольник $ABCD$ при этом преобразовании переходит в прямоугольник, а следовательно, прямая PQ — в бесконечно удаленную.

30.20. Проективное преобразование прямую переводит в прямую, а поскольку центр остается на месте, каждый диаметр переходит в диаметр. Поэтому каждая бесконечно удаленная точка, в которой пересекаются прямые, касающиеся окружности в диаметрально противоположных точках, переходит в бесконечно удаленную точку. Следовательно, согласно задаче 30.14, а) данное преобразование аффинно, а согласно задаче 29.14 оно является поворотом или симметрией.

30.21. а) Точка M' лежит на прямой OM , поэтому ее положение однозначно определяется отношением $MO : OM'$. Но в силу того, что треугольники MBO и MAM' подобны, $MO : OM' = MB : MA$, а последнее отношение не зависит от выбора прямой l по теореме Фалеса.

б) **Первое решение.** Если данное преобразование (обозначим его P) доопределить в точке O , положив $P(O) = O$, то, как легко проверить, P задает взаимно однозначное преобразование множества всех конечных и бесконечных точек плоскости (чтобы по точке M' построить точку M , надо взять на a произвольную точку A , провести прямые AM' , $OB \parallel AM'$ и AB). Ясно, что каждая прямая, проходящая через O , переходит в себя. Каждая прямая l , не проходящая через O , переходит в прямую, параллельную OB и проходящую через M . Остается воспользоваться задачей 30.14, г).

Второе решение (набросок). Обозначим данную плоскость через π , и пусть $\pi' = R(\pi)$, где R — некоторый поворот пространства вокруг оси a . Обозначим $R(O)$ через O' , и пусть P — проектирование плоскости π на плоскость π' из точки пересечения прямой OO' с плоскостью, проходящей через b параллельно π' . Тогда преобразование $R^{-1} \circ P$ совпадает (докажите самостоятельно) с преобразованием, о котором идет речь в формулировке задачи.

30.22. **Первое решение.** Обозначим данное преобразование через P . Доопределим его в точках прямой $x = 0$ и в бесконечно удаленных точках, положив $P(0, k) = M_k$, $P(M_k) = (0, k)$, где M_k — бесконечно удаленная точка на прямой $y = kx$. Легко видеть, что доопределенное таким образом отображение P взаимно однозначно. Докажем, что каждая прямая переходит в прямую. Действительно, прямая $x = 0$ и бесконечно удаленная прямая переходят одна в другую. Пусть $ax + by + c = 0$ — произвольная другая прямая (т. е. b или c не равно нулю). Поскольку $P \circ P = E$, образ любой прямой совпадает с ее прообразом. Ясно, что точка $P(x, y)$ лежит на рассматриваемой прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a}{x} + \frac{by}{x} + c = 0$, т. е. $cx + by + a = 0$. Остается воспользоваться задачей 30.14, г).

Второе решение (набросок). Если прямые $x = 1$ и $x = 0$ обозначить соответственно через a и b , а точку $(-1, 0)$ — через O , то данное преобразование совпадает с преобразованием из предыдущей задачи.

30.23. Если прямую f обозначить через b , то преобразование этой задачи является обратным преобразованию из задачи 30.21.

30.24. Рассмотрим проективное преобразование, для которого прямая PQ является исключительной. Образы l'_1 и l'_2 прямых l_1 и l_2 при этом преобразовании параллельны, а образами рассматриваемых четырехугольников являются параллелограммы, у которых две стороны лежат на прямых l'_1 и l'_2 , а две другие

стороны параллельны некоторой фиксированной прямой (бесконечно удаленная точка этой прямой является образом точки P). Ясно, что геометрическим местом точек пересечения диагоналей таких параллелограммов является прямая, равноудаленная от прямых l'_1 и l'_2 .

30.25. Сделаем проективное преобразование с исключительной прямой EF . Тогда четырехугольник $ABCD$ перейдет в параллелограмм, а прямые KL и MN — в прямые, параллельные его сторонам и проходящие через точку пересечения диагоналей, т. е. в средние линии. Поэтому образы точек K, L, M, N являются серединами сторон параллелограмма и, следовательно, образы прямых KN и LM параллельны, т. е. точка X переходит в бесконечно удаленную точку, а значит, X лежит на исключительной прямой EF .

30.26. Сделаем проективное преобразование с исключительной прямой AB . Образы точек при этом преобразовании будем обозначать буквами со штрихом. Рассмотрим гомотегию с центром в точке O' (или параллельный перенос, если O' — бесконечно удаленная точка), переводящую точку C'_1 в C'_2 . При этой гомотетии отрезок $B'_1C'_1$ перейдет в отрезок $B'_2C'_2$, поскольку $B'_1C'_1 \parallel B'_2C'_2$. Аналогично $C'_1A'_1$ перейдет в $C'_2A'_2$. Поэтому соответственные стороны треугольников $A'_1B'_1C'_1$ и $A'_2B'_2C'_2$ параллельны, т. е. все три точки A', B', C' лежат на бесконечно удаленной прямой.

30.27. Рассмотрим проективное преобразование, исключительная прямая которого проходит через точки пересечения прямых AB_1 и BA_1 , BC_1 и CB_1 , и обозначим через A', B', \dots образы точек A, B, \dots . Тогда $A'B'_1 \parallel B'A'_1$, $B'C'_1 \parallel C'B'_1$, и надо доказать, что $C'A'_1 \parallel A'C'_1$ (см. задачу 1.12, а)).

30.28. В результате проективного преобразования с исключительной прямой PQ задача сводится к задаче 4.54.

30.29. Эта задача является переформулировкой предыдущей. Действительно, предположим, что пара прямых OO_1 и OB разделяет пару прямых OA и OC , а пара прямых O_1O и O_1B разделяет пару прямых O_1A и O_1C (остальные способы расположения этих прямых разберите самостоятельно аналогично этому). Тогда если точки A_1, B, B_1, C_1, O, O_1 и точку пересечения прямых AB_1 и CC_1 переобозначить соответственно D, R, L, K, Q, P и B , то из предыдущей задачи следует, что нужные прямые проходят через точку M .

30.30. Рассмотрим проективное преобразование с исключительной прямой O_1O_2 и обозначим через A', B', \dots образы точек A, B, \dots . Тогда $A'C'_1 \parallel C'A'_1 \parallel B'B'_1$, $B'C'_1 \parallel C'B'_1 \parallel A'A'_1$. Будем для определенности считать, что точка C лежит внутри угла $A'O'B'$ (остальные случаи переобозначением сводятся к этому). Сделаем еще, если необходимо, аффинное преобразование, мы можем считать, что параллелограмм $O'A'C'_1B'$ является квадратом, а значит, $O'A'_1C'_1B'_1$ — тоже квадрат, причем диагонали $O'C'_1$ и $O'C'$ этих квадратов лежат на одной прямой. Остается воспользоваться симметрией относительно этой прямой.

30.31. Сделаем проективное преобразование с исключительной прямой, параллельной l и проходящей через точку пересечения прямых PP_1 и QQ_1 , а затем аффинное преобразование, которое образы прямых l и PP_1 делает перпендикулярными, мы можем считать, что прямые PP_1 и QQ_1 перпендикулярны прямой l , а наша задача заключается в том, чтобы доказать, что прямая RR_1 тоже перпендикулярна l (точки P_1, Q_1, R_1 останутся серединами соответствующих отрезков, поскольку эти отрезки параллельны исключительной прямой; см. задачу 30.14, б)). Отрезок PP_1 является медианой и высотой, а значит, и биссектрисой в треугольнике, образованном прямыми l, AB и CD . Аналогично, QQ_1 — биссек-

триа в треугольнике, образованном прямыми l , AC и BD . Из этого и из того, что $PP_1 \parallel QQ_1$, следует, что $\angle BAC = \angle BDC$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный, и $\angle ADB = \angle ACB$. Обозначим точки, в которых l пересекает прямые AC и BD , через M и N (рис. 30.3). Тогда угол между l и AD равен $\angle ADB - \angle QNM = \angle ACB - \angle QMN$, т. е. он равен углу между l и BC . Следовательно, треугольник, ограниченный прямыми l , AD и BC , равнобедренный, и отрезок RR_1 , являющийся его медианой, является также его высотой, т. е. он перпендикулярен прямой l , что и требовалось доказать.

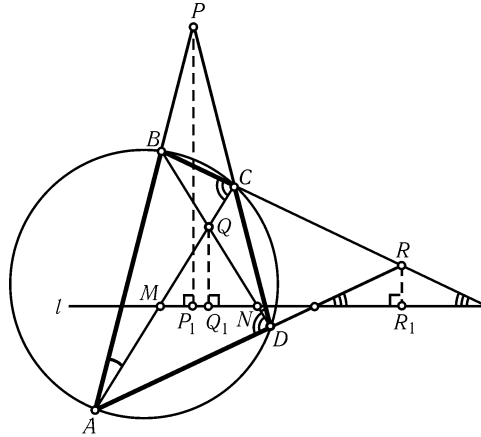


Рис. 30.3

30.32. Сделаем проективное преобразование с исключительной прямой, параллельной l и проходящей через точку A , мы можем считать, что точка A бесконечно удаленная, т. е. прямые AB и AC параллельны. При этом согласно задаче 30.14, б) точки A_1, B_1, C_1 по-прежнему будут серединами соответствующих отрезков, так как эти отрезки лежат на прямой, параллельной исключительной. Два треугольника, образованные прямыми l, AB, BC и l, AC, BC , гомотетичны, следовательно, прямые BB_1 и CC_1 , являющиеся медианами этих треугольников, параллельны. Таким образом, четырехугольник $BB_1C_1C_2$ является параллелограммом, поскольку у него параллельны противоположные стороны. Остается заметить, что точка A_2 лежит на середине диагонали BC этого параллелограмма, а значит, и на диагонали B_1C_2 .

30.33. Сделаем проективное преобразование, исключительной прямой которого является прямая PQ . Через A', B', \dots обозначим образы точек A, B, \dots . Тогда $A'B'C'D'$ — параллелограмм, R' — точка пересечения его диагоналей, Q' — бесконечно удаленная точка прямой $Q'R'$, K' и L' — точки, отсекаемые сторонами параллелограмма на прямой $Q'R'$. Ясно, что точки K' и L' симметричны относительно точки R' . Следовательно,

$$(Q'R'K'L') = \frac{Q'K'}{Q'L'} : \frac{R'K'}{R'L'} = 1 : \frac{R'K'}{R'L'} = -1.$$

Остается заметить, что согласно задаче 30.2, б) $(Q'RK'L) = (Q'R'K'L')$.

30.34. Согласно теореме Паскаля точки пересечения прямых A_1B_2 и C_1C_2 , B_1C_2 и A_1A_2 , C_1A_1 и B_1B_2 лежат на одной прямой. Переведем эту прямую на бесконечность. После этого можно воспользоваться результатом задачи 14.15.

30.35. Пусть $A_1 \dots A_n$ — правильный n -угольник, l_i — прямая, содержащая его сторону, противоположную вершине A_i , B_i — точка пересечения прямой l_i с бесконечно удаленной прямой. Разобьем точки $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ на пары (A_i, B_i) . Покажем, что это разбиение обладает требуемым свойством. Для этого нужно рассмотреть прямые $B_i B_j$, $A_i A_j$ и $A_i B_j$ ($i \neq j$).

1) Прямая $B_i B_j$ содержит все точки B_1, \dots, B_n . Поскольку $n \geq 3$, среди них есть точка, отличная от B_i и B_j .

2) Прямая $A_i A_j$ параллельна одной из прямых l_k , поскольку число n нечетно. Следовательно, прямая $A_i A_j$ проходит через точку B_k .

3) Если $i \neq j$, то прямая, проходящая через вершину A_i параллельно прямой l_j , содержит некоторую вершину A_k , $k \neq i$. Поэтому прямая $A_i B_j$ проходит через точку A_k .

Применив к набору точек $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ проективное преобразование, можно добиться, чтобы все эти точки не были бесконечно удаленными.

30.36. Сделаем проективное преобразование, которое вписанную окружность четырехугольника переводит в окружность, а точку пересечения прямых, соединяющих противоположные точки касания, в ее центр (см. задачу 30.16, а)). Утверждение задачи теперь следует из того, что получившийся четырехугольник симметричен относительно центра окружности.

30.37. Сделаем проективное преобразование, которое вписанную окружность переводит в окружность, а точку пересечения двух из трех рассматриваемых прямых — в ее центр (см. задачу 30.16, а)). Тогда образы этих двух прямых являются одновременно биссектрисами и высотами образа данного треугольника, следовательно, он является правильным. Для правильного треугольника утверждение задачи очевидно.

30.38. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Точка P лежит вне S . Сделаем проективное преобразование, при котором окружность S перейдет в окружность, а точка P — в бесконечно удаленную точку (см. задачу 30.17), т. е. образы всех прямых, проходящих через P , будут друг другу параллельны. Тогда в задаче б) образом искомого ГМТ является прямая l — их общий перпендикуляр, проходящий через центр окружности, а в задаче а) — прямая l , из которой выкинут диаметр окружности. (Для доказательства нужно воспользоваться симметрией относительно прямой l .) Следовательно, само искомое ГМТ для задачи б) есть прямая, проходящая через точки касания S с касательными, проведенными через точку P , а для задачи а) — лежащая вне S часть этой прямой.

2. Точка P лежит внутри S . Сделаем проективное преобразование, при котором окружность S перейдет в окружность, а точка P — в ее центр (см. задачу 30.16, а)). Тогда в обеих задачах образом искомого ГМТ является бесконечно удаленная прямая. Следовательно, само искомое ГМТ есть прямая.

Полученная прямая в обоих случаях совпадает с полярной точки P относительно S (см. задачу 30.19).

30.39. Обозначим через t прямую, являющуюся искомым геометрическим местом точек в задаче 30.38, б), а через N — отличную от M точку пересечения S с прямой OM . Обозначим через Q композицию проецирований l на S из M и S на t из N . Согласно задаче 30.9 это отображение является проективным. Докажем, что P есть композиция Q с проецированием t на l из M . Пусть A — произвольная точка на l , B — ее проекция на S из M , C — проекция B на S из O , D — пересечение прямых BN и CM . Согласно задаче 30.38, б) точка D лежит на прямой t , т. е. $D = Q(A)$. Ясно, что $P(A)$ — это проекция D на l из M .

30.40. Обе задачи становятся очевидными после проективного преобразования, переводящего окружность S в окружность, а прямую KP — в бесконечно удаленную (см. задачу 30.17).

а) Требуемое ГМТ лежит на прямой, равноудаленной от образов прямых AK и BK .

б) Требуемая точка есть центр образа S .

30.41. Пусть A', B', \dots — образы точек A, B, \dots при проективном преобразовании, которое вневписанную окружность треугольника ABC переводит в окружность, а хорду EF — в диаметр (см. задачу 30.18). Тогда A' — бесконечно удаленная точка прямых, перпендикулярных диаметру $E'F'$, и нам нужно доказать, что прямая $D'T'$ содержит эту точку, т. е. тоже перпендикулярна $E'F'$. Так как $\triangle T'B'E' \sim \triangle T'F'C'$, то $C'T' : T'E' = C'F' : B'E'$. Но $C'D' = C'F'$ и $B'D' = B'E'$ как касательные, проведенные из одной точки, следовательно, $C'T' : T'E' = C'D' : D'B'$, т. е. $D'T' \parallel B'E'$.

30.42. Согласно задаче 30.16, а) достаточно рассмотреть случай, когда диагонали AD и BE проходят через центр окружности. Остается воспользоваться результатом задачи 6.86 для $n = 3$.

30.43. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее окружность S в окружность, а точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF — в бесконечно удаленные точки (см. задачу 29.19). Наша задача свелась к задаче 2.11.

30.44. Рассмотрим проективное преобразование, которое окружность S переводит в окружность, а точку O — в ее центр O' (см. задачу 30.16, а)). Пусть A', B', \dots — образы точек A, B, \dots . Тогда $A'B', M'N'$ и $P'Q'$ — диаметры. Поэтому при центральной симметрии относительно O' точка E' переходит в F' , т. е. O' — середина отрезка $E'F'$. Так как хорда AB перпендикулярна диаметру, проходящему через O , то согласно задаче 30.16, б) она параллельна исключительной прямой. Следовательно, согласно задаче 30.14, б) отношения отрезков, лежащих на прямой AB , сохраняются, а значит, O — середина отрезка EF .

30.45. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а отрезок AD — в ее диаметр (см. задачу 30.18). Пусть A', B', \dots — образы точек A, B, \dots . Тогда S переходит в бесконечно удаленную точку S' прямых, перпендикулярных прямой $A'D'$. Но $A'C'$ и $B'D'$ — высоты в $\triangle A'D'P'$, следовательно, Q' — ортоцентр этого треугольника. Поэтому прямая $P'Q'$ — тоже высота, следовательно, она проходит через точку S' .

30.46. Согласно задаче 30.15 достаточно рассмотреть только тот случай, когда $ABCD$ — квадрат. Нам надо доказать, что композиция описанных в условии проектирований является тождественным преобразованием. Согласно задаче 30.4 проективное преобразование тождественно, если у него имеются три различные неподвижные точки. Несложно проверить, что точки A, B и бесконечно удаленная точка прямой AB являются неподвижными для данного преобразования.

30.47. При проектировании прямой QR из точки A на прямую CD точки Q, R, K, L проектируются в точки D, C, P, L соответственно. Следовательно, согласно задаче 30.2, б) $(QRKL) = (DCPL)$. Аналогично, проектируя из точки B прямую CD на прямую QR , получаем $(DCPL) = (RQKL)$, следовательно, $(QRKL) = (RQKL)$. С другой стороны,

$$(RQKL) = \frac{RK}{RL} : \frac{QK}{QL} = \frac{QK}{QL} : \frac{RK}{RL}^{-1} = (QRKL)^{-1}.$$

Из этих двух равенств следует, что $(QRKL)^2 = 1$, т. е. либо $(QRKL) = 1$, либо

$(QRKL) = -1$. Но согласно задаче 30.8 двойное отношение различных точек не может равняться единице.

30.48. Обозначим точки пересечения прямых AB_1 и BA_1 , BC_1 и CB_1 , CA_1 и AC_1 через P , Q , R соответственно, а точку пересечения прямых PQ и CA_1 — через R_1 . Нам надо доказать, что точки R и R_1 совпадают. Пусть D — точка пересечения AB_1 и CA_1 . Рассмотрим композицию проектирований: прямой CA_1 на прямую l_1 из точки A , l_1 на CB_1 из B и CB_1 на CA_1 из P . Легко видеть, что получившееся проективное преобразование прямой CA_1 точки C , D и A_1 оставляет неподвижными, а точку R переводит в R_1 . Но согласно задаче 30.5 проективное преобразование с тремя неподвижными точками тождественно. Следовательно $R_1 = R$.

30.49. Пусть F' — точка, симметричная F относительно O . Нам надо доказать, что $F' = E$. Согласно задаче 30.9 композиция проецирования прямой AB на окружность S из точки M , а затем S обратно на AB из Q является проективным преобразованием прямой AB . Рассмотрим композицию этого преобразования с симметрией относительно точки O . При этом точки A , B , O , E переходят соответственно в B , A , F' , O . Следовательно, согласно задаче 30.2, б), $(ABOE) = (BAF'O)$. С другой стороны, ясно, что

$$(BAF'O) = \frac{BF'}{AF'} : \frac{BO}{AO} = \frac{AO}{BO} : \frac{AF'}{BF'} = (ABOF'), \text{ т. е. } (ABOE) = (ABOF'),$$

следовательно, согласно задаче 30.3, $E = F'$.

30.50. Обозначим точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA через P , Q , R соответственно, а точку пересечения прямых PQ и CD — через R' . Нам надо доказать, что точки R и R' совпадают. Пусть G — точка пересечения AB и CD . Рассмотрим композицию проецирований прямой CD на данную окружность из точки A , а затем — окружности на прямую BC из точки E . Согласно задаче 30.9 это отображение проективно. Легко видеть, что его композиция с проецированием BC на CD из точки P оставляет на месте точки C , D и G , а точку R переводит в R' . Но согласно задаче 30.5 проективное преобразование с тремя неподвижными точками тождественно. Следовательно, $R' = R$.

30.51. Обозначим данные прямую и окружность через l и S соответственно. Пусть O — произвольная точка данной окружности, и пусть $A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1$ — образы точек A, A', B, B', C, C' при проецировании прямой l на окружность S из точки O , т. е. A_1 (соответственно A'_1, B_1, \dots) — отличная от O точка пересечения прямой AO (соответственно $A'O, BO, \dots$) с окружностью S . Обозначим через B_2 точку пересечения прямых A'_1B_1 и $A_1B'_1$, а через C_2 — точку пересечения прямых A'_1C_1 и $A_1C'_1$. Пусть P_1 — композиция проецирований прямой l на окружность S из точки O , а затем окружности S на прямую B_2C_2 из точки A'_1 ; P_2 — композиция проецирований B_2C_2 на S из точки A_1 , а затем S на l из точки O . Тогда согласно задаче 30.9 преобразования P_1 и P_2 являются проективными, причем их композиция точки A, B, C отображает соответственно в A', B', C' .

Ясно, что все рассмотренные точки можно построить при помощи одной линейки (в том порядке, в котором они вводились).

а) Пусть M_1 — отличная от O точка пересечения прямой MO с окружностью S ; $M_2 = P_1(M)$ — точка пересечения прямых A'_1M_1 и B_2C_2 ; M_3 — отличная от A_1 точка пересечения прямой M_2A_1 с окружностью S ; $P(M) = P_2(P_1(M))$ — точка пересечения прямых l и OM_3 .

б) Пусть M_1 и N_1 — точки пересечения окружности S с прямой B_2C_2 . Тогда неподвижные точки преобразования P — это точки пересечения прямых OM_1 и ON_1 с прямой l .

30.52. а) Искомой точкой X является неподвижная точка композиции проецирования l_1 на l_2 из точки A , сдвига вдоль прямой l_2 на расстояние a и проецирования l_2 на l_1 из точки B . Неподвижная точка проективного преобразования строится в задаче 30.51.

б) В решении задачи а) сдвиг надо заменить на центральную симметрию относительно E .

30.53. а) Обозначим через k число, которому должно равняться отношение AH/BY . Рассмотрим проективное преобразование прямой a , являющееся композицией проецирования прямой a на прямую b из точки P , движения плоскости, переводящего b в a и B в A , и, наконец, гомотетии с центром A и коэффициентом k . Искомая точка X является неподвижной точкой этого преобразования. Построение точки Y очевидно.

б) Обозначим через k число, которому должно равняться произведение $AH \cdot BY$, через Q — точку пересечения прямых, проходящих через точки A и B параллельно прямым b и a соответственно, и пусть $p = AQ \cdot BQ$. Рассмотрим проективное преобразование прямой a , являющееся композицией проецирования прямой a на прямую b из точки P , проецирования b на a из Q , и гомотетии с центром A и коэффициентом k/p . Пусть X — неподвижная точка этого преобразования, Y — ее образ при первом проецировании, а X_1 — образ Y при втором проецировании. Докажем, что прямая XY искомая. Действительно, из подобия треугольников AQX_1 и BYQ следует

$$AX_1 \cdot BY = AQ \cdot BQ = p,$$

а значит,

$$AX \cdot BY = (k/p)AX_1 \cdot BY = k.$$

30.54. Пусть P — данная точка; A, B, C — попарные точки пересечения данных прямых a, b, c ; X, Y, Z — точки пересечения данных прямых с искомой прямой l (рис. 30.4). По предположению $XZ = ZY$. Пусть T — точка пересечения прямой c с прямой, проходящей через X параллельно b . Очевидно, что $XT = AY$. Из подобия треугольников XTB и CAB следует, что $XB : XT = CB : CA$, откуда $BX : YA = CB : CA$, т. е. отношение $BX : YA$ известно. Таким образом, задача сведена к задаче 30.53, а).

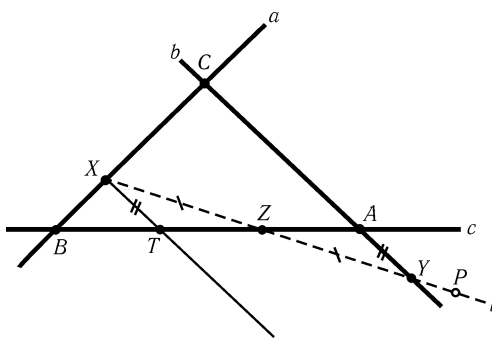


Рис. 30.4

30.55. а) Согласно задаче 30.9 композиция проецирований CD на S из A и S на CD из B является проективным преобразованием прямой CD . Пусть M — неподвижная точка композиции этого преобразования и сдвига вдоль прямой CD на расстояние a . Тогда проекция M на S из A является искомой точкой. Неподвижная точка проективного преобразования строится в задаче 30.51.

б) В решении задачи а) сдвиг надо заменить на центральную симметрию относительно E .

30.56. а) Проведем произвольную окружность S через точку P . Согласно задаче 30.10 композиция проецирования l на S из P , поворота вокруг центра окружности S на угол 2α и проецирования S на l из P является проективным преобразованием прямой l . Тогда (по теореме о вписанном угле) искомой точкой является неподвижная точка композиции этого преобразования и сдвига вдоль прямой CD на данное расстояние XY . Неподвижная точка проективного преобразования строится в задаче 30.51.

б) Проведем произвольные окружности S_1 и S_2 через точки P и Q соответственно. Рассмотрим композицию проецирования l_1 на S_1 из P , поворота вокруг центра окружности S_1 на угол 2α и проецирования S_1 на l_2 из P . Согласно задаче 30.10 это отображение является проективным. Аналогично, проективным отображением является композиция проецирования l_2 на S_2 из Q , поворота вокруг центра окружности S_2 на угол 2β и проецирования S_2 на l_1 из Q . По теореме о вписанном угле искомой точкой X является неподвижная точка композиции этих отображений, и для ее построения можно воспользоваться задачей 30.51.

30.57. а) Обозначим данные точки M_1, \dots, M_n , а данные прямые — l_1, \dots, l_n . Вершина искомого многоугольника есть неподвижная точка проективного преобразования прямой l_1 , являющегося композицией проектирований l_1 на l_2 из M_1 , l_2 на l_3 из M_2, \dots, l_n на l_1 из M_n . Неподвижная точка проективного преобразования строилась в задаче 30.51.

б) Выберем произвольную точку на данной окружности и посредством проецирования из выбранной точки отождествим данную окружность с некоторой прямой l . Согласно задаче 30.39 центральное проектирование окружности на себя при данном отождествлении является проективным преобразованием прямой l . Ясно, что вершина искомого многоугольника есть неподвижная точка композиции последовательных проектирований данной окружности на себя из данных точек. Неподвижная точка проективного преобразования строилась в задаче 30.51.

в) В решении задачи б) надо некоторые центральные проектирования заменить либо на повороты вокруг центра окружности, если соответствующая сторона имеет данную длину, либо на симметрии, если соответствующая сторона имеет данное направление (ось симметрии — диаметр, перпендикулярный данному направлению).

30.58. Предположим, что нам удалось найти требуемое построение, т. е. написать некоторую инструкцию, в результате выполнения которой всегда получается середина данного отрезка. Выполним это построение и рассмотрим проективное преобразование, которое концы данного отрезка оставляет неподвижными, а середину переводит в другую точку. Это преобразование можно выбрать так, чтобы исключительная прямая не проходила ни через одну из точек, получающихся в результате промежуточных построений. Выполним нашу якобы существующую инструкцию еще раз, но теперь всякий раз, когда нам будут встречаться слова «возьмем произвольную точку (соответственно прямую)», будем брать образ той точки (соответственно прямой), которую брали при первом выполнении построения. Поскольку при проективном преобразовании прямая пе-

реходит в прямую, а пересечение прямых — в пересечение их образов, причем в силу выбора проективного преобразования это пересечение всегда конечно, то на каждом шаге второго построения будем получать образ результата первого построения, поэтому в конце получим не середину отрезка, а ее образ. Приходим к противоречию.

З а м е ч а н и е. Фактически мы доказали следующее утверждение: если существует проективное преобразование, которое каждый из объектов A_1, \dots, A_n переводит в себя, а объект B в себя не переводит, то, исходя из объектов A_1, \dots, A_n , объект B невозможно построить с помощью одной линейки.

30.59. Утверждение задачи непосредственно вытекает из замечания в конце решения предыдущей задачи и из задачи 30.16, а).

Дополнение

Кубические уравнения, связанные с треугольником

Для любого треугольника несложно доказать соотношение

$$p - a = r \operatorname{ctg}(A/2),$$

где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. В самом деле, пусть $u = AC_1 = AB_1$, $v = BC_1 = BA_1$, $w = CA_1 = CB_1$ (см. рис. 1). Тогда $u + v = c$, $v + w = a$, $w + u = b$. Поэтому $u = \frac{b + c - a}{2} = p - a$. Остается заметить, что $AB_1 = r \operatorname{ctg}(A/2)$.

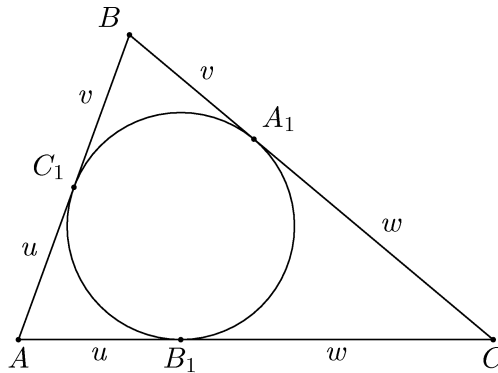


Рис. 1

Воспользуемся теоремой синусов и заменим a на $2R \sin A$, где R — радиус описанной окружности. В результате получим

$$p = 2R \sin A + r \operatorname{ctg}(A/2).$$

Рассмотрим для треугольника с некоторыми значениями p , R и r уравнение

$$p = 2R \sin \varphi + r \operatorname{ctg}(\varphi/2). \quad (1)$$

Это уравнение имеет корни $\varphi_1 = A$, $\varphi_2 = B$, $\varphi_3 = C$ — величины углов треугольника. Можно ожидать, что уравнение (1) в каком-то смысле является кубическим уравнением.

В уравнение (1) входят $\sin \varphi$ и $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$. Их можно выразить через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию. Например,

$$\sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}, \quad \operatorname{ctg}(\varphi/2) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}.$$

Поэтому при $x = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ уравнение (1) принимает вид

$$p = \frac{4Rx}{1 + x^2} + \frac{r}{x},$$

т. е.

$$x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет корни $x_1 = \operatorname{tg}(A/2)$, $x_2 = \operatorname{tg}(B/2)$, $x_3 = \operatorname{tg}(C/2)$. В том случае, когда эти числа различны, по теореме Виета получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{4R+r}{p}, \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= 1, \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{r}{p}. \end{aligned}$$

С помощью предельного перехода легко убедиться, что эти формулы остаются справедливыми и в том случае, когда среди чисел $\operatorname{tg}(A/2)$, $\operatorname{tg}(B/2)$, $\operatorname{tg}(C/2)$ есть равные.

Выразим теперь $\sin \varphi$ и $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ через $x = \cos \varphi$:

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2}, \quad \operatorname{ctg}(\varphi/2) = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), получим

$$p = \sqrt{1 - x^2} \left(2R + \frac{r}{1 - x} \right).$$

При $x \neq 1$ это уравнение приводится к виду

$$x^3 - \left(1 + \frac{r}{R} \right) x^2 + \left(\frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \right) x - \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + \frac{r}{R}, \\ \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A &= \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}, \\ \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $x = 2R \sin \varphi$ уравнение (1) принимает вид

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0.$$

Поэтому

$$a + b + c = 2p, \quad ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2, \quad abc = 4Rrp.$$

Аналогичным образом $\sin \varphi$ и $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ можно выражать через другие тригонометрические функции и подставлять эти выражения в уравнение (1).

При $x = \operatorname{tg} \varphi$ получаем уравнение

$$(p^2 - (2R + r)^2)x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0.$$

При $x = \sin^2(\varphi/2)$ получаем уравнение

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

При $x = \cos^2(\varphi/2)$ получаем уравнение

$$16R^2x^3 - 8R(4R + r)x^2 + (p^2 + (4R + r)^2)x - p^2 = 0.$$

Точки пересечения диагоналей правильных многоугольников

Известно довольно много задач про треугольники с целочисленными углами. Вот два примера таких задач.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80° . Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30^\circ$ и $\angle MCB = 10^\circ$. (См. рис. 2 а.) Доказать, что $\angle AMC = 70^\circ$.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20° . На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60^\circ$ и $\angle ECA = 50^\circ$. (См. рис. 2 б.) Доказать, что $\angle ADE = 30^\circ$.

Задачи такого типа обычно бывают связаны с точками пересечения троек диагоналей правильных многоугольников, в данном случае — правильного восемнадцатиугольника.

Обратимся к рис. 3. Этот рисунок показывает, что задача 1 эквивалентна следующему утверждению:

в правильном восемнадцатиугольнике диагонали A_1A_{13} , A_3A_{14} и A_6A_{15} пересекаются в одной точке.

В самом деле, если эти диагонали пересекаются в некоторой точке M , то

$$\angle A_1MA_6 = \frac{1}{2} (\sphericalangle A_1A_6 + \sphericalangle A_{13}A_{15}) = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ.$$

Ясно также, что углы треугольника $A_1A_6A_{14}$ равны 80° , 40° , 40° и $\angle MA_{14}A_6 = 30^\circ$, $\angle MA_6A_{14} = 10^\circ$.

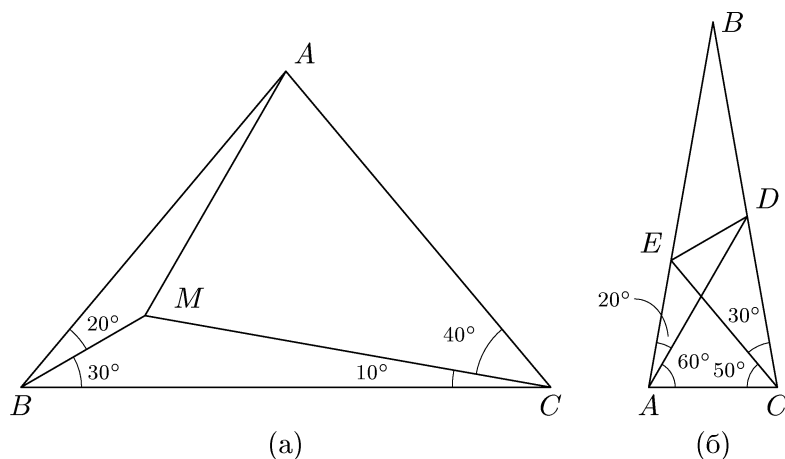


Рис. 2

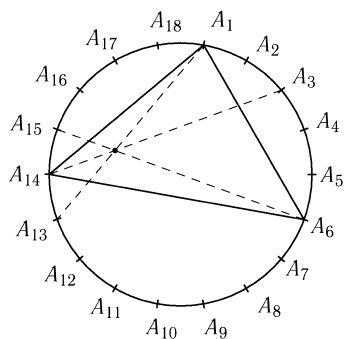


Рис. 3

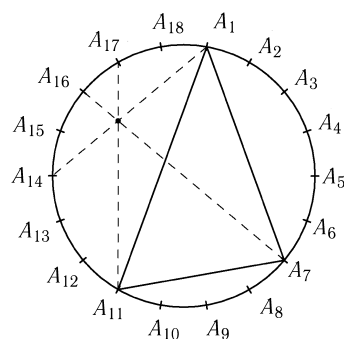


Рис. 4

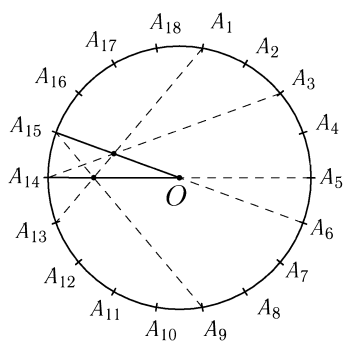


Рис. 5

Что же касается задачи 2, то она эквивалентна следующему утверждению: в правильном восемнадцатиугольнике диагонали A_1A_{14} , A_7A_{16} и $A_{11}A_{17}$ пересекаются в одной точке (рис. 4).

Но задачу 2 можно решить и с помощью совсем другой тройки пересекающихся диагоналей, а именно, диагоналей A_1A_{13} , A_3A_{14} и A_6A_{15} (рис. 5). В качестве треугольника ABC мы берем треугольник $A_{14}OA_{15}$. Диагонали A_1A_{13} и A_9A_{15} симметричны относительно диаметра A_5A_{14} , поэтому обе диагонали пересекают диаметр в одной точке.

Но мы пока не доказали, что тройки диагоналей на рис. 3–5 действи-

тельно пересекаются в одной точке. Проверять, пересекаются ли тройки диагоналей в одной точке, удобно с помощью следующего утверждения.

Т е о р е м а. *На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 (A_1 на BC и т. д.). Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис. 6). Тогда

$$2S_{AOB} : 2S_{AOC} = (AB \cdot AO \sin BAO) : (AC \cdot AO \sin CAO).$$

Следовательно,

$$1 = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{COA}}{S_{COB}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{BOA}} = \left(\frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{BC}{BA} \right) \frac{\sin BAO}{\sin CAO} \cdot \frac{\sin ACO}{\sin BCO} \cdot \frac{\sin CBO}{\sin ABO},$$

т. е.

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1} = 1.$$

Предположим теперь, что для точек A_1, B_1 и C_1 выполняется указанное соотношение. Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 . Нужно доказать, что отрезок CC_1 проходит через точку O . Иными словами, если C'_1 — точка пересечения прямых CO и AB , то $C'_1 = C_1$. Отрезки AA_1, BB_1 и CC'_1 пересекаются в одной точке, поэтому, как только что было доказано,

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1} \cdot \frac{\sin ACC'_1}{\sin BCC'_1} = 1.$$

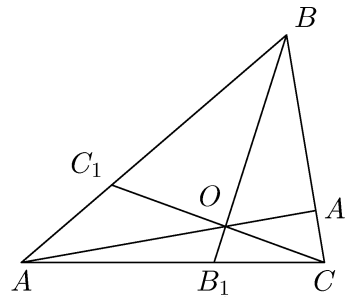


Рис. 6

Сравнив эту формулу с условием теоремы, получим

$$\sin ACC_1 : \sin BCC_1 = \sin ACC'_1 : \sin BCC'_1.$$

Остается доказать, что при движении точки X по отрезку AB величина $\sin ACX : \sin BCX$ изменяется монотонно. Сами углы $\angle ACX$ и $\angle BCX$ изменяются монотонно, но их синусы могут быть не монотонными в случае тупого угла C . Это не беда. В любом треугольнике есть острый угол, и мы с самого начала могли бы взять в качестве угла C острый угол треугольника. Доказательство теоремы завершено. \square

Теперь проверка того, что тройка диагоналей, изображенная на рис. 3, пересекается в одной точке, сводится к проверке тождества

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} = 1.$$

Доказать его несложно:

$$\sin 30^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \sin 70^\circ.$$

Тройка диагоналей, изображенная на рис. 3, соответствует тождеству

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 20^\circ = \sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 10^\circ.$$

Есть еще три тождества, приводящих к тройкам пересекающихся диагоналей:

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 80^\circ &= \sin 20^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ, \\ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ &= \sin 10^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ, \\ \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ &= \sin 10^\circ \sin 10^\circ \sin 100^\circ. \end{aligned}$$

Проверку этих тождеств мы оставляем читателю.

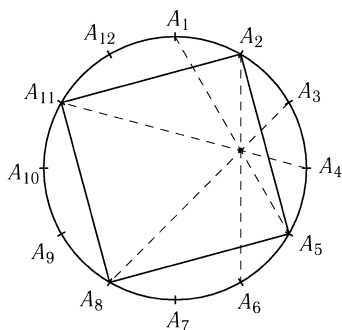


Рис. 7

Обратите внимание, что перестановка сомножителей в таких тождествах приводит к совсем другим тройкам пересекающихся диагоналей.

Наш интерес к восемнадцатиугольнику, а не к какому-либо другому правильному многоугольнику, связан с тем, что именно к нему приводят треугольники с углами, кратными 10° . Среди всех правильных многоугольников, число вершин которых меньше 18, интересные наборы пересекающихся диагоналей есть лишь у двенадцатиугольника. Например, диагонали A_1A_5 , A_2A_6 , A_3A_8 и A_4A_{11} правильного двенадцатиугольника пересекаются в одной точке

(рис. 7). Это утверждение эквивалентно следующей хорошо известной задаче.

Задача 3. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что треугольник ABP равнобедренный. Доказать, что $\angle PCD = 15^\circ$.

Упражнения

- Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.
 - На сторонах BA и AC взяты точки D и E так, что $\angle DCB = \angle EBC = 40^\circ$. Доказать, что $\angle AED = 30^\circ$.
 - На сторонах BA и BC взяты точки D и E так, что $\angle DCA = 50^\circ$ и $\angle EAC = 40^\circ$. Доказать, что $\angle AED = 30^\circ$.
- В треугольнике ABC углы A, B и C равны $14^\circ, 62^\circ$ и 104° . На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DBC = 50^\circ$ и $\angle ECB = 94^\circ$. Доказать, что $\angle CED = 34^\circ$.
- Доказать, что диагонали A_1A_{n+2} , $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ правильного $2n$ -угольника пересекаются в одной точке.

4. Доказать, что диагонали A_1A_7 , A_3A_{11} и A_5A_{21} правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16} .

5. Доказать, что в правильном тридцатиугольнике семь диагоналей

$$A_1A_{13}, A_2A_{17}, A_3A_{21}, A_4A_{24}, A_5A_{26}, A_8A_{29}, A_{10}A_{30}$$

пересекаются в одной точке.

Прямые Паскаля

В 1640 г. Блез Паскаль, которому было тогда 16 лет, напечатал в виде афиши тиражом 50 экземпляров свое сочинение «Опыт о кониках» («Essai sur les coniques»). Эти афиши были прибиты на стенах домов и розданы ученым. «Опыт о кониках» содержал несколько определений и лемм; доказательства отсутствовали. Основной теоремой этого сочинения была теорема о вписанном шестиугольнике. Эту теорему теперь называют теоремой Паскаля, а сам Паскаль, по свидетельству Лейбница, называл ее «мистическим шестиугольником» (Hexagramma mysticum). Эта теорема заключается в следующем. Если шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, то точки пересечения продолжений его противоположных сторон (т. е. прямых AB и DE , BC и EF , CD и AF) лежат на одной прямой. Паскаль также отметил, что из этой теоремы с помощью центральной проекции можно получить аналогичное утверждение для шестиугольника, вписанного в произвольное коническое сечение (эллипс, параболу, гиперболу).

В теореме Паскаля шестиугольник $ABCDEF$ не обязательно выпуклый; в данном случае шестиугольником можно считать произвольную замкнутую шестизвенную ломаную. Для шести фиксированных точек окружности существует ровно 60 замкнутых шестизвенных ломаных с вершинами в этих точках. В самом деле, выберем одну из шести точек; ее можно соединить с любой из пяти оставшихся точек, затем новую точку можно соединить с любой из четырех оставшихся точек и т. д. В результате получаем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ различных вариантов, но при этом одну и ту же шестизвенную ломаную мы считаем дважды, так как при нашем способе подсчета учитывается и направление обхода ломаной. Таким образом, количество различных шестизвенных ломаных с вершинами в данных точках равно $120/2 = 60$. Этим 60 шестизвенным ломаным соответствуют 60 прямых Паскаля. Якоб Штейнер (1827 г.) установил, что эти 60 прямых можно разбить на 20 троек прямых, пересекающихся в одной точке. Впоследствии Киркман (1850 г.) более детально исследовал конфигурацию 60 прямых Паскаля и установил, что помимо 20 точек Штейнера они пересекаются по три еще в 60 точках.

Известно много разных доказательств теоремы Паскаля, но все они не очень простые. Мы приведем одно из возможных доказательств, которое позволяет получить также и доказательства теорем Штейнера и Киркмана.

Введем для удобства следующее обозначение. Будем считать, что прямая AB задается уравнением $l_{AB} = 0$; это уравнение определено с точно-

стью до пропорциональности. В координатах x, y функция l_{AB} имеет вид $l_{AB}(x, y) = ax + by + c$, причем l_{AB} обращается в нуль в точках A и B .

Л е м м а. Пусть точки A, B, C и D лежат на окружности, заданной уравнением второй степени $f = 0$. Тогда

$$f = \lambda l_{AB}l_{CD} + \mu l_{BC}l_{AD},$$

где λ и μ — некоторые числа.

Первое доказательство. Пусть X — точка данной окружности, отличная от точек A, B, C и D . Выберем числа λ_1 и μ_1 так, что

$$\lambda_1 l_{AB}(X)l_{CD}(X) + \mu_1 l_{BC}(X)l_{AD}(X) = 0,$$

и рассмотрим кривую, заданную уравнением $f_1 = 0$, где $f_1 = \lambda_1 l_{AB}l_{CD} + \mu_1 l_{BC}l_{AD}$. Эта кривая задается уравнением второй степени и проходит через точки A, B, C, D и X . Но если кривая второй степени пересекает окружность в пяти различных точках, то эта кривая совпадает с окружностью, а значит, $f = \alpha f_1$, где α — некоторое число. \square

Второе доказательство. Введем косоугольную систему координат с осями AB и AD . Тогда прямые AB и AD задаются уравнениями $y = 0$ и $x = 0$ соответственно, а уравнение $f = 0$, задающее окружность, является уравнением второй степени относительно x и y .

Ограничения функций f и $\lambda l_{AB}l_{CD} + \mu l_{BC}l_{AD} = \lambda y l_{CD} + \mu x l_{BC}$ на любую из осей координат являются квадратными трехчленами с двумя общими корнями (A и B , или A и D). Поэтому числа λ и μ можно подобрать так, что многочлен

$$P(x, y) = f(x, y) - \lambda y l_{CD}(x, y) - \mu x l_{BC}(x, y)$$

обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $y = 0$. Это означает, что он делится на xy , т. е. $P(x, y) = qxy$, где q — константа. В точке C многочлен P обращается в нуль, а $xy \neq 0$. Поэтому $q = 0$, т. е.

$$f = \lambda l_{AB}l_{CD} + \mu l_{BC}l_{AD}. \quad \square$$

С помощью леммы мы докажем теоремы Паскаля, Штейнера и Киркмана. Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вершины которого лежат на окружности $f = 0$. Четырехугольники $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$ вписаны в эту окружность, поэтому f можно представить в любом из следующих видов:

$$f = \lambda_1 l_{AB}l_{CD} + \mu_1 l_{AD}l_{BC}, \quad (1)$$

$$f = \lambda_2 l_{AF}l_{ED} + \mu_2 l_{AD}l_{EF}, \quad (2)$$

$$f = \lambda_3 l_{BE}l_{CF} + \mu_3 l_{BC}l_{EF}. \quad (3)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\lambda_1 l_{AB}l_{CD} - \lambda_2 l_{AF}l_{ED} = (\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF})l_{AD}.$$

Пусть X — точка пересечения прямых AB и ED . В точке X обращаются в нуль функции $l_{AB}l_{CD}$ и $l_{AF}l_{ED}$, а функция l_{AD} в этой точке в нуль не обращается. Следовательно, в точке X обращается в нуль функция $\mu_1l_{BC} - \mu_2l_{EF}$, т. е. точка X лежит на прямой $\mu_1l_{BC} = \mu_2l_{EF}$. Аналогично доказывается, что точка пересечения прямых CD и AF лежит на прямой $\mu_1l_{BC} = \mu_2l_{EF}$. Очевидно также, что точка пересечения прямых BC и EF лежит на прямой $\mu_1l_{BC} = \mu_2l_{EF}$. В результате получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а (Паскаль). *Если точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности, то точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA лежат на одной прямой.*

Но продолжим рассуждения дальше. Приравнявая (2) и (3), получим, что точки пересечения прямых AF и BE , ED и CF , AD и BC лежат на прямой $\mu_2l_{AD} = \mu_3l_{BC}$. А приравняв (1) и (3), получим, что точки пересечения прямых AB и CF , CD и BE , AD и EF лежат на прямой $\mu_1l_{AD} = \mu_3l_{EF}$. Легко проверить, что полученные прямые

$$\mu_1l_{BC} = \mu_2l_{EF}, \quad \mu_2l_{AD} = \mu_3l_{BC}, \quad \mu_1l_{AD} = \mu_3l_{EF}$$

пересекаются в одной точке. В самом деле, если X — точка пересечения первых двух из этих прямых, то

$$\mu_1\mu_2l_{BC}(X)l_{AD}(X) = \mu_2\mu_3l_{EF}(X)l_{BC}(X).$$

Сократив на $\mu_2l_{BC}(X)$, получим $\mu_1l_{AD} = \mu_3l_{EF}$ (мы не будем останавливаться на обсуждении вырожденного случая, когда $\mu_2l_{BC}(X) = 0$).

Будем называть *прямой Паскаля* шестиугольника, вписанного в окружность, прямую, на которой лежат точки пересечения пар его противоположных сторон. При этом, как мы уже говорили, шестиугольником можно считать и замкнутую самопересекающуюся ломаную. Доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а Штейнера. *Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$ и $ADCFEF$ пересекаются в одной точке.*

Напомним, что при доказательстве этой теоремы исходными четырехугольниками были $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$. Можно исходить также из четырехугольников $ABFE$, $ABDC$ и $CDFE$. Тогда получим следующее утверждение.

Т е о р е м а Киркмана. *Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$ пересекаются в одной точке.*

Нетрудно убедиться, что каждая из 60 прямых Паскаля, соответствующих шести фиксированным точкам окружности, входит ровно в одну тройку Штейнера и в три тройки Киркмана.

Лемма, на которой было основано доказательство теорем Паскаля, Штейнера и Киркмана, бывает полезна и при доказательстве многих других геометрических теорем. Приведем два таких примера.

Самопересекающийся четырехугольник до некоторой степени похож на бабочку. С этим обстоятельством связаны названия следующих двух утверждений.

Т е о р е м а 1 (теорема о бабочке). Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB . Тогда прямые KN и ML пересекают прямую AB в точках, равноудаленных от точки O .

Т е о р е м а 2 (теорема о двух бабочках). Пусть стороны самопересекающихся четырехугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$, вписанных в одну и ту же окружность, пересекают хорду AB этой окружности в точках P, Q, R, S и P', Q', R', S' соответственно (сторона KL — в точке P , LM — в точке Q , и т. д.) Тогда если три из точек P, Q, R, S совпадают с соответственными тремя из точек P', Q', R', S' , то и оставшиеся две точки тоже совпадают. (Предполагается, что хорда AB не проходит через вершины четырехугольников.)

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы о бабочке. Пусть $f = 0$ — уравнение данной окружности. Согласно лемме $f = \lambda l_{KL}l_{MN} + \mu l_{KN}l_{ML}$. Это равенство выполняется и для ограничений всех рассматриваемых функций на прямую AB . Введем на прямой AB координату x , приняв точку O за начало координат. Тогда можно считать, что $f = x^2 - a$ и $l_{KL}l_{MN} = x^2$, поэтому $l_{KN}l_{ML} = bx^2 - c$. Следовательно, корни уравнения $l_{KN}l_{ML} = 0$ равноудалены от точки O , что и требовалось. \square

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы о двух бабочках. Пусть для определенности $P = P', Q = Q'$ и $R = R'$. Согласно лемме

$$\lambda l_{KL}l_{MN} + \mu l_{KN}l_{ML} = f = \lambda' l_{K'L'}l_{M'N'} + \mu' l_{K'N'}l_{M'L'}.$$

Рассмотрев ограничение этого равенства на прямую AB , получим равенство вида

$$\begin{aligned} \alpha(x-p)(x-r) + \beta(x-r)(x-s) = \\ = \alpha'(x-p)(x-r) + \beta'(x-q)(x-s'). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом требуется доказать, что $s = s'$.

Равенство (3) можно преобразовать к виду

$$\alpha''(x-p)(x-r) = (x-q)[\beta(x-s) - \beta'(x-s')].$$

Точка Q может совпасть только с точкой S , поэтому $Q \neq P$ и $Q \neq R$, а значит, $(x-p)(x-r)$ не делится на $(x-q)$. Поэтому $\beta(x-s) - \beta'(x-s') = 0$. Следовательно, $s = s'$. \square

Кубические кривые, связанные с треугольником

Каждому треугольнику можно многими разными способами сопоставить кубическую кривую, т. е. кривую, заданную уравнением вида

$$\sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Некоторые из таких кубических кривых обладают интересными геометрическими свойствами. Эти кубические кривые, или *кубики*, обычно называют по именам геометров, впервые их исследовавших: кубика Дарбу, кубика Томсона, кубика Нейберга, кубика Мак-Кэя.

Наиболее интересные свойства кубик, связанных с треугольником, так или иначе используют изогональное сопряжение относительно этого треугольника. Поэтому наше изложение будет опираться на свойства изогонального сопряжения. Мы будем также пользоваться трилинейными координатами. Несложно понять, что в трилинейных координатах (x, y, z) кубическая кривая задается уравнением вида

$$\sum_{i+j+k=3} c_{ijk} x^i y^j z^k = 0.$$

Первоначально кубики, связанные с треугольником, определялись посредством разнообразных геометрических конструкций. Но наиболее известные из этих кубик можно получить единой конструкцией¹.

Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

Т е о р е м а. Пусть на плоскости задана точка F . Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряженных точек P и Q , для которых прямая PQ проходит через точку F . Тогда точки P и Q заматают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трех вневписанных окружностей, а также через саму точку F .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка F имеет трилинейные координаты (f_1, f_2, f_3) . Если точка P имеет трилинейные координаты (x, y, z) , то точка Q , изогонально сопряженная с ней, имеет трилинейные координаты (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}) , т. е. (yz, zx, xy) . Поэтому условие, что точки P, Q, F лежат на одной прямой, запишется в виде

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$f_1 x(y^2 - z^2) + f_2 y(z^2 - x^2) + f_3 z(x^2 - y^2) = 0. \quad (1)$$

¹ Cundy H. M., Parry C. F. Some cubic curves associated with a triangle. — Journal of Geometry, 1995. Vol. 53. P. 41–66.

Легко проверить, что точка $F = (f_1, f_2, f_3)$, точки $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ и точки $I = (1, 1, 1)$, $I_a = (-1, 1, 1)$, $I_b = (1, -1, 1)$, $I_c = (1, 1, -1)$ лежат на кривой, заданной уравнением (1), т. е. координаты указанных точек удовлетворяют этому уравнению. \square

Непосредственно из геометрического определения кривой (1) видно, что она переходит сама в себя при изогональном сопряжении. В самом деле, если точка P лежит на кривой (1), то изогонально сопряженная с ней точка Q тоже лежит на кривой (1).

Точку F , с помощью которой строится кубическая кривая (1), будем называть *центром вращения* для этой кривой.

Кубика Дарбу.

Центром вращения для этой кривой служит точка \mathcal{H} , симметричная точке пересечения высот H относительно центра описанной окружности O . Легко проверить, что точка \mathcal{H} имеет трилинейные координаты

$$(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma, \cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha, \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta),$$

где α, β, γ — углы треугольника.

В трилинейных координатах кубика Дарбу задается уравнением

$$(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

(Мы написали только коэффициент при $x(y^2 - z^2)$; коэффициенты при $y(z^2 - x^2)$ и при $z(x^2 - y^2)$ записываются очевидным образом.)

Кубика Дарбу проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание.

Т е о р е м а. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки D на прямые BC, CA, AB . Точка D лежит на кубике Дарбу тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме Чевы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A,$$

где AC_1 и т. д. — ориентированные длины отрезков (т. е. числа AC_1 и C_1B имеют один и тот же знак, если точка C_1 лежит на отрезке AB , а если точка C_1 лежит вне отрезка AB , то эти числа имеют противоположные знаки).

Пусть (x, y, z) — нормированные трилинейные координаты точки D , т. е. x, y, z — расстояния от точки D до прямых BC, CA, AB с учетом знака. Легко проверить, что $AC_1 = \frac{z \cos \alpha + y}{\sin \alpha}$ и т. д. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} (z \cos \alpha + y)(y \cos \gamma + x)(x \cos \beta + z) = \\ = (z \cos \beta + x)(x \cos \gamma + y)(y \cos \alpha + z). \end{aligned}$$

Полученное уравнение легко преобразуется в уравнение кубики Дарбу. \square

З а м е ч а н и е 1. Если равенство

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

выполняется для некоторой точки D , то такое же равенство выполняется и для точки D' , симметричной точке D относительно центра описанной окружности. Поэтому кубика Дарбу симметрична относительно центра описанной окружности.

З а м е ч а н и е 2. Несложно доказать, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда существует кривая второго порядка, касающаяся сторон треугольника (или их продолжений) в точках A_1 , B_1 , C_1 .

Кубика Томсона.

Центром вращения для этой кривой служит центр масс M . Напомним, что центр масс треугольника имеет трилинейные координаты (bc, ca, ab) .

В трилинейных координатах кубика Томсона задается уравнением

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0.$$

По-другому это уравнение можно записать в виде

$$(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

Кубика Томсона проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

Из замечания 2 к теореме 1 видно, что кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, касающиеся сторон данного треугольника или их продолжений. Выделим среди них те кривые второго порядка, для которых перпендикуляры к сторонам треугольника в точках касания пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения этих перпендикуляров замечают кубик Дарбу. Можно доказать, что центры выделенных таким образом кривых второго порядка замечают кубик Томсона.

Кубика Мак-Кэя.

Центром вращения для этой кривой служит центр описанной окружности O . Напомним, что центр описанной окружности имеет трилинейные координаты $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

В трилинейных координатах кубика Мак-Кэя задается уравнением

$$\cos \alpha x(y^2 - z^2) + \cos \beta y(z^2 - x^2) + \cos \gamma z(x^2 - y^2) = 0.$$

Кубика Мак-Кэя проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Теорема. Пусть вершины треугольника расположены в точках a , b , c единичной окружности на комплексной плоскости. Точка, соответствующая комплексному числу z , лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(z - a)(z - b)(z - c) = abc(a\bar{z} - 1)(b\bar{z} - 1)(c\bar{z} - 1).$$

Доказательство. Пусть точки z и w изогонально сопряжены относительно данного треугольника. Тогда согласно теореме Морли (задача 29.34) точки z и w связаны соотношением

$$z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\bar{z} + \bar{w} + a\bar{b}\bar{c}zw = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \quad (3)$$

Умножим обе части соотношения (3) на $abc\bar{z}$ и вычтем из полученного выражение соотношение (2). В результате получим

$$w = \frac{a + b + c - z - (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z})abc\bar{z}}{1 - |abcz|^2}. \quad (4)$$

По определению кубики Мак-Кэя прямая zw проходит через центр описанной окружности, т. е. через начало координат. Это означает, что $w/\bar{w} = z/\bar{z}$. Выразив w/\bar{w} с помощью соотношения (4), после несложных преобразований получим требуемое уравнение. \square

Следствие. Кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трех точках, являющихся вершинами правильного треугольника. (Мы учитываем только точки пересечения, отличные от вершин исходного треугольника.)

Доказательство. Будем считать, что вершины треугольника расположены в точках единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда для точки z , лежащей на описанной окружности треугольника, выполняется равенство $\bar{z} = z^{-1}$. Поэтому точки пересечения кубики Мак-Кэя с описанной окружностью удовлетворяют уравнению

$$(z - a)(z - b)(z - c) = -z^{-3}abc(z - a)(z - b)(z - c).$$

Если исключить вершины треугольника, то останутся точки, удовлетворяющие соотношению $z^3 = -abc$. Эти точки образуют правильный треугольник. \square

Будем считать, что $\angle PQR$ — величина угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор \overrightarrow{QP} так, чтобы он стал сонаправлен с вектором \overrightarrow{QR} .

Теорема. Точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Доказательство. Снова будем считать, что вершины треугольника расположены на единичной окружности на комплексной плоскости. Положим $\alpha = \angle MAB$, $\beta = \angle MBC$, $\gamma = \angle MCA$. Пусть z — комплексное число, соответствующее точке M . Тогда

$$\frac{b-a}{z-a} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = e^{2i\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad e^{2i\alpha} = -b \frac{a\bar{z}-1}{z-a}.$$

Поэтому

$$e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -abc \frac{(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Таким образом, точка z лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$. \square

Легко проверить, что

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA + \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA = (2n+1)\pi.$$

Поэтому точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA + 2l\pi.$$

Отметим без доказательства следующее свойство кубики Мак-Кэя, которое обобщает теорему Фейербаха: описанная окружность треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров, опущенных из любой точки кубики Мак-Кэя на стороны треугольника ABC (или на их продолжения), касается окружности девяти точек треугольника ABC .

Кубика Нейберга.

Центром вращения для этой кривой служит бесконечно удаленная точка прямой OH . Иными словами, кубика Нейберга состоит из таких пар изогонально сопряженных точек P и Q , что прямая PQ параллельна прямой OH .

В трилинейных координатах кубика Нейберга задается уравнением

$$(\cos \alpha - 2 \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

Кубика Нейберга является бесспорным лидером по количеству замечательных точек треугольника, через которые она проходит. Действительно, эта кривая проходит через следующие точки: центр описанной окружности; ортоцентр; вершины правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (как внешним, так и внутренним образом); точки, симметричные вершинам треугольника ABC относительно его сторон; две точки, из которых стороны треугольника ABC видны под углом 60° или 120° (изогональные центры треугольника); две точки, для которых выполняется соотношение $AX \cdot BC = BX \cdot CA = CX \cdot AB$ (изодинамические центры треугольника).

Для рассмотренных выше кубик Дарбу, Томсона, Мак-Кэя и Нейберга центр вращения лежит на прямой Эйлера OH . Кубики, центры вращения которых лежат на прямой Эйлера, можно построить и посредством другой геометрической конструкции². Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

Т е о р е м а. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB , а треугольник $A_2B_2C_2$ получен из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом k . Тогда при фиксированном $k \neq 0$ точки P , для которых прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, заматают кубическую кривую.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x : y : z)$ — трилинейные координаты точки P . Тогда точка A_2 имеет трилинейные координаты

$$((1 - k)x : y + kx \cos \gamma : z + kx \cos \beta).$$

Поэтому прямая AA_2 задается линейным уравнением с коэффициентами $(0, -z - kx \cos \beta, y + kx \cos \gamma)$. Следовательно, прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда обращается в нуль определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z - kx \cos \beta & y + kx \cos \gamma \\ z + ky \cos \alpha & 0 & -x - ky \cos \gamma \\ -y - kz \cos \alpha & x + kz \cos \beta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= k(\cos \alpha - k \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots \quad \square$$

При $k = 1$ получаем кубик Дарбу, при $k = -1$ — кубик Томсона, а при $k = 2$ — кубик Нейберга. Если подходить формально, то кубика Мак-Кэя этой конструкцией не охватывается. Но естественно считать, что она относится к случаю $k = 0$.

Посмотрим теперь по-другому на конструкцию, изложенную в формулировке теоремы. А именно, фиксируем точку P и будем считать число k переменным. Для каких точек P прямые AA_2, BB_2, CC_2 будут пересекаться в одной точке при всех k ? И какие кривые будут заматают точки пересечения этих прямых?

Прямые AA_2, BB_2, CC_2 при всех k пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точка P при всех k лежит на кубике

$$(\cos \alpha - k \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

Девять таких точек нам известны: $A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, H, O$. Две кубические кривые, пересекающиеся в конечном числе точек, не могут иметь более девяти общих точек. Поэтому какие-то другие точки P могут обладать требуемым свойством лишь в исключительных случаях. Например, в случае правильного треугольника этим свойством обладают все точки, лежащие на высотах или их продолжениях.

²*Pinkernell G. M.* Cubic curves in the triangle plane. — *Journal of Geometry*, 1996. Vol. 55. P. 141–161.

Если $P = A, B, C$ или H , то прямые AA_2, BB_2, CC_2 при всех k пересекаются в точке P . Интересные случаи соответствуют только центрам окружностей — описанной, вписанной и внеписанных.

Т е о р е м а. а) Если $P = O$, то точки пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2 заматают прямую Эйлера OH .

б) Если $P = I$ ($P = I_a$), то точки пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2 заматают гиперболу, изогонально сопряженную прямой OI (прямой OI_a).

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в точке с трилинейными координатами $(x' : y' : z')$. Уравнение прямой AA_2 показывает, что

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y + kx \cos \gamma}{z + kx \cos \beta} = \frac{\cos \beta + k \cos \alpha \cos \gamma}{\cos \gamma + k \cos \alpha \cos \beta},$$

поскольку точка O имеет трилинейные координаты $(x : y : z) = (\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma)$. Поэтому

$$\begin{aligned} (x' : y' : z') &= \\ &= (\cos \alpha + k \cos \beta \cos \gamma : \cos \beta + k \cos \alpha \cos \gamma : \cos \gamma + k \cos \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Все такие точки лежат на прямой OH .

б) Ограничимся разбором случая $P = I$. В этом случае $(x : y : z) = (1 : 1 : 1)$, поэтому

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y + kx \cos \gamma}{z + kx \cos \beta} = \frac{1 + k \cos \gamma}{1 + k \cos \beta}.$$

Таким образом, точка, изогонально сопряженная точке $(x' : y' : z')$, имеет трилинейные координаты

$$(1 + \cos \alpha : 1 + k \cos \beta : 1 + k \cos \gamma).$$

Все такие точки лежат на прямой OI .

Предметный указатель

- Биссектриса** 1.13, 1.17, 1.28, 2.4 а), 2.19 а), 2.24, 2.66–2.70, 3.66 б), 4.34, 4.47, 5.13, 5.20, 5.38, 5.49–5.51, 5.94, 5.97, 6.41, 6.98, 7.46, 10.17–10.20, 10.75, 10.88, 10.95, 12.35, 16.1, 28.29
— внешнего угла 17.16
- Векторы** 6.67–6.79, 13.1–13.63
— сторон многоугольников 13.1–13.10
восьмиугольник 4.59, 9.45 б)
высота 1.20, 1.53–1.60, 1.64, 2.1, 2.19 б), 2.54, 2.62, 2.67, 3.66 а), 4.56, 5.43 а), 5.9, 5.54, 5.149, 6.98, 7.24, 9.25, 10.8–10.16, 10.6, 10.74, 10.78, 10.80, 10.88, 12.33, 12.34, 18.3
вычисления 12.50–12.78
- Геометрическое место точек (ГМТ)** с. 170; 2.5, 2.38, 3.54, 7.1–7.49, 12.78, 14.21 а), 15.15, 18.12, 18.15, 19.10, 19.22, 19.39, 30.38, 30.40 а)
ГМТ — прямая 6.17, 7.1–7.10
ГМТ — окружность 7.11–7.17
ГМТ с ненулевой площадью 7.36–7.39
гомотетия с. 363; 4.12, 7.26–7.29, 8.15, 8.16, 8.70, 17.25, 19.1–19.26, 20.12, 20.17
— поворотная с. 363; 2.86, 5.133, 18.30, 19.27–19.56
- Двенадцатиугольник** 4.62, 6.59
движение с. 341
— второго рода с. 341
— первого рода с. 341
делимость 23.9, 23.10
десятиугольник 8.65
— диаметр Брокара с. 370; 19.58
- Задача Аполлония** 28.11
— Брахмагупты 5.41, 8.53
— о бабочке 2.64, 2.96, 30.44, 30.49
— о луночках Гипократа 3.38
— Штейнера 30.51
задачи на максимум и минимум 6.72, 11.1–11.4, 15.1, 15.3, 18.22, 20.16, 20.17
- Инварианты** с. 415; 23.11–23.19
инверсия с. 470; 28.1–28.41, 29.26, 29.27, 29.28, 29.35
индукция 5.109 б), 22.7, 22.8, 22.10, 22.11, 22.12, 22.13 б), 22.21, 22.23, 22.24, 22.30, 23.39–23.41, 25.11, 26.20, 27.1–27.5, 28.36, 28.37
- Касательная** с. 55; 1.67, 2.21–2.30, 3.1–3.8, 3.27–3.33, 19.25
квадрат 1.19, 1.41, 1.42, 1.47, 2.6, 2.36, 2.56, 2.94, 4.25, 4.41, 5.23, 5.24, 5.29 б), 5.54, 5.55, 6.42, 7.19, 9.35, 9.43, 12.62, 12.63, 12.65, 12.78, 18.1, 18.3, 18.4–18.8, 18.12, 18.36–18.38, 19.32

- комбинаторика 25.6, 27.6–27.11
 композиция гомотетий 19.23–19.26
 — параллельных переносов с. 322
 — поворотов 18.35–18.46
 — симметрий 17.22–17.29
 координаты барицентрические с. 309; 14.32–14.41
 — трилинейные с. 310; 14.42–14.50
 кривые постоянной ширины 13.45
- Лемма Шпернера** 23.7
 ломаные внутри квадрата 9.58–9.61
- Медиана** 1.4, 1.27, 1.51, 2.7, 2.67, 4.1, 4.57, 5.17, 5.38, 5.97, 5.147, 9.1–9.5, 10.1–10.7, 10.50, 10.52, 10.62, 10.74, 10.76, 10.89, 13.1, 13.2, 16.1, 17.17, 18.2, 18.3, 5.20
 момент инерции с. 307; 14.19–14.26
 многоугольник 4.49, 6.1–6.104, 9.34, 9.49, 9.74–9.86, 11.3–11.37, 13.14, 13.17, 16.21, 17.27–17.29, 17.33, 17.34, 18.43, 19.8, 20.12, 20.17, 23.15, 24.5
 — аффинно правильный 13.10, 29.7, 29.32, 29.33
 — вписанный с. 140; 1.45, 2.11, 2.12, 2.60, 5.109 а), 6.80–6.84, 11.36, 11.48 б), 13.36, 22.12
 — выпуклый с. 140, 402; 3.65, 4.37, 4.38, 4.50, 6.90–6.94, 7.33, 9.18, 9.20, 9.21, 9.27 б), 9.42, 9.46, 9.51, 9.55–9.57, 9.81–9.82, 9.85, 9.86, 10.64, 11.37, 13.4, 13.7, 13.40, 13.42, 13.44, 13.46, 13.53, 14.43, 16.8, 18.28, 19.6, 19.9, 20.10, 20.31, 21.10, 21.11, 22.1–22.12, 23.13, 23.18, 23.29, 23.32, 26.10, 27.2, 27.8, 27.9
 — описанный с. 140; 4.39 б), 4.53, 6.85–6.89, 11.46 б), 19.6
 — невыпуклый 9.27 а), 9.90, 22.17–22.30, 23.1, 23.34
 — правильный с. 140; 2.9, 2.47, 4.28, 4.59, 4.62, 6.39, 6.44, 6.47–6.50, 6.56–6.79, 8.65, 9.48, 9.76, 9.83–9.84, 10.63, 11.46 а), 11.48 а), 17.31, 18.32, 19.48, 23.8, 24.2, 25.3, 25.4, 27.11, 30.35
- многоугольники гомотетичные 19.1–19.9
 многоугольники подобные с. 12
 метод ГМТ 7.30–7.35, 8.1–8.6
 — координат 3.54, 7.6, 7.14, 7.47, 12.75–12.78, 22.16
 — усреднения 13.39–13.46
- Неравенства** 4.37, 4.58, 5.129, 6.69, 9.1–9.93, 13.19–13.26, 13.39–13.44, 13.46, 14.25–14.27, 15.3 а), 15.7, 17.16–17.21, 19.7, 20.1, 20.4, 20.6, 20.7, 29.31 а)
 — для элементов треугольника 10.1–10.97
 неравенство Йиффа 5.134 б)
 — между средним арифметическим и средним геометрическим с. 217
 — Птолемея 9.67, 29.29 а)
 — треугольника 9.6–9.29, 10.92, 20.11
- Оболочка выпуклая** с. 383; 9.27, 9.47, 20.21, 20.22, 20.24–20.26, 22.1–22.3
 окружность 3.1–3.69, 14.47
 — Аполония 7.14, 7.15, 8.59–8.63
 — — для треугольника 7.16, 7.49
 — Брокара с. 370; 19.56, 19.57
 — вписанная 1.61, 2.42, 2.59 б), 3.2, 5.1, 5.3, 5.4, 5.8, 5.9, 5.30, 5.84, 5.124, 6.11, 6.82, 6.98, 10.51, 10.97, 12.70, 14.45 б), 14.48, 14.49, 17.18, 17.25, 19.7, 19.11, 19.15, 20.20, 28.30, 30.37
 — невписанная 3.2, 3.7, 5.2, 5.3, 5.6, 14.45 в), 28.30
 — девяти точек с. 110; 3.66, 5.117–5.120, 5.122, 5.125, 13.34 б), 14.46, 14.49, 28.30
 — инверсии с. 470

- Нейберга 5.135
- описанная 1.55, 2.4 а), 2.24, 2.44, 2.50, 2.57, 2.65, 2.70, 2.80–2.84, 2.85, 3.49, 5.10–5.15, 5.92, 5.95–5.107, 5.120, 5.128 в, 5.140–5.142, 5.148, 6.96, 9.92, 14.39, 14.45 а), 18.27, 18.29, 19.7, 19.15, 19.49, 19.50 а), 28.26, 28.28, 28.34, 28.35
- подобия с. 369; 19.50–19.56
- Схоуте 5.136
- Ферма–Аполония 7.47–7.49
- окружности вписанные в сегмент 3.42–3.47, 5.92, 28.22, 28.25, 6.102, 19.15
- гомотетичные 19.10–19.14
- касающиеся 1.65, 2.27, 2.30, 3.15–3.23, 28.32, 28.34, 28.37
- ортоцентр (см. точка пересечения высот)
- ось подобия с. 369
- — треугольника с. 370
- радикальная двух окружностей с. 63; 3.51–3.69, 8.86, 14.47 б)
- симметрии с. 338; 14.28, 17.30–17.34
- отношение двойное с. 506; 12.6, 29.28, 30.2–30.6, 30.33
- отрезков ориентированное с. 104
- отображение дробно-линейное 30.7

- Параллелограмм** 1.2, 1.23, 1.24, 1.6–1.8, 1.22, 1.46, 1.47, 1.49, 2.22, 2.23, 2.58, 3.7, 3.12, 3.26, 4.23, 4.50, 4.61, 6.25, 6.43, 7.10 а), 8.6, 9.52, 9.53, 9.73, 12.14, 13.18, 15.6, 15.7, 16.17, 18.8, 18.37, 19.47, 25.1, 25.4, 29.15, 29.18
- перегруппировка площадей 4.59–4.62
- перенос параллельный с. 322; 15.1–15.16, 16.9, 17.22 а), 17.23, 20.17
- площадь 1.34–1.39, 2.42, 2.56, 2.70, 2.71, 2.75, 3.38–3.41, 4.1–4.73, 5.11, 6.54, 6.55, 6.85, 7.2, 7.31, 8.2, 9.30–9.57, 9.70, 10.53–10.58, 11.2, 11.3, 11.7–11.9, 11.12, 11.14, 11.28, 11.30–11.33, 11.46, 11.48, 12.1, 12.3, 12.12, 12.18, 12.19, 12.20, 12.70, 12.72, 13.52–13.56, 13.37, 15.7, 16.5, 17.19, 20.1, 20.7, 20.16, 20.17, 24.5, 24.7, 25.4, 26.13, 26.16, 26.18, 29.13, 29.19, 29.31 а)
- вспомогательная 4.46–4.58, 5.5, 5.31, 6.38, 10.6, 10.96, 11.21, 22.29
- ориентированная с. 294
- треугольника 5.42 б), 5.52, 5.55, 5.113
- четырехугольника 4.42–4.45, 11.34
- поворот с. 349; 4.25, 17.22 б), 18.1–18.46, 19.37, 19.38
- поляра точки относительно окружности с. 60, с. 509; 30.40
- поризм Штейнера 28.39
- построения 3.36, 8.1–8.92, 16.13–16.21, 17.4–17.15, 18.11, 18.26, 18.31, 18.43, 19.16–19.21, 19.40, 19.41, 28.8–28.14, 30.51–30.59
- одним циркулем 28.15–28.30
- с помощью двусторонней линейки 8.71, 8.80–8.86
- — одной линейки 3.36, 6.103, 8.74–8.79
- — прямого угла 8.87–8.92
- преобразования аффинные 29.1–29.19
- проективные с. 508; 30.1–30.59
- — плоскости 30.13, 30.24–30.45, 30.58, 30.59
- — прямой 30.46–30.59
- примеры и контрпримеры 6.90–6.93, 22.17, 22.18, 22.27, 22.28, 22.30, 23.37, 24.11, 24.12, 26.13–26.20
- принцип Дирихле 21.1–21.29
- (правило) крайнего с. 381; 20.1–20.31
- проектирование центральное с. 505, с. 507

- параллельное с. 505
- проекция стереографическая с. 508
- произведение псевдоскалярное с. 294; 13.47–13.56
- скалярное с. 289; 9.75, 10.5, 11.5, 11.11, 13.11–13.18, 13.19–13.23
- прямая бесконечно удаленная с. 507
- Гаусса 3.61, 4.55
- исключительная с. 507, 508; 30.11, 30.13
- опорная с. 383; 9.56, 9.57, 20.23, 22.6
- Симсона с. 108; 5.11, 5.65, 5.95–5.109, 5.11, 19.58
- Эйлера с. 110; 5.116, 5.118, 5.119, 5.12, 5.123, 5.124
- прямоугольник 1.66, 1.65 б), 1.66, 4.10, 4.24, 7.4, 7.21, 7.27, 7.36, 8.9, 28.33
- прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части 2.71, 4.35–4.41, 6.54, 6.55, 16.8, 18.31
- пятиугольник 2.60, 4.9, 6.47–6.50, 6.58, 6.93, 9.23, 9.44, 9.74, 9.75, 10.63, 10.67, 12.8, 13.10, 13.56, 20.11, 29.7

- Разрезания** 23.15, 23.17, 23.29, 23.39, 23.40, 25.9–25.40
- на параллелограммы 25.22–25.25
- раскраски 23.35–23.41
- вспомогательные 23.20–23.34
- расстояние наибольшее или наименьшее 9.17, 9.19, 9.55, 17.33, 19.9, 20.8–20.15, 25.9
- растяжение с. 487
- решетки целочисленные с. 430; 21.1, 21.13, 21.23, 23.4, 23.32, 24.1–24.12
- ромб 1.52, 2.41, 2.74, 7.5, 20.18–20.20

- Семиугольник** 6.39, 9.79, 22.5
- сжатие с. 487
- симедиана с. 113; 5.137–5.138, 5.140, 5.141, 5.143
- симметрия скользящая с. 342
- осевая с. 338; 1.39, 1.58, 2.40, 2.84, 4.11, 5.10, 5.87, 9.38, 17.1–17.37
- относительно прямой (см. симметрия осевая)
- — точки (см. симметрия центральная)
- центральная с. 338; 11.7, 11.35, 16.1–16.21
- системы окружностей 20.5, 21.18, 23.41, 26.12, 28.38–28.41
- отрезков 20.28, 21.15, 21.17, 21.19, 22.16, 26.8, 26.9, 26.11
- прямых 20.14, 21.14, 25.5–25.12, 26.10, 28.36, 28.37
- системы точек 9.19, 9.47, 9.60, 20.3, 20.4, 20.8, 20.9, 20.13, 20.15, 20.16, 20.21, 20.22, 20.24, 20.26, 21.2, 21.3, 21.5, 21.6, 21.8, 21.10, 21.25, 21.26, 22.1, 22.7, 22.14, 23.19, 26.1–26.7, 26.16, 26.20, 27.11, 28.34
- соотношения метрические 12.1–12.49
- средняя линия трапеции с. 12
- — треугольника с. 12
- степень инверсии с. 470
- точки относительно окружности с. 470; 3.52, 3.53, 3.69
- сумма длин диагоналей четырехугольника 9.14–9.21
- суммы векторов 13.27–13.34

- Теорема Брианшона** 3.67, 5.76, 30.34, 30.42
- Бретшнейдера 29.30
- Гаусса 13.15
- Дезарга 5.70, 5.72–5.76, 30.26
- Карно 7.40–7.46
- косинусов с. 272; 5.9, 11.1, 11.4, 12.11–12.16,
- Менелая 5.64–5.77, 6.104, 14.41
- Минковского 24.8

- Морли 5.59, 29.34
- о группировке масс с. 305
- о дважды перспективных треугольниках 30.29
- о полном четырехстороннике 30.33, 30.47
- о седьмой окружности 5.63
- о трижды перспективных треугольниках 30.30
- Паппа 5.71, 5.73–5.75, 30.27, 30.48
- Паскаля 5.76, 6.95–6.104, 30.34, 30.43, 30.50
- Помпею 18.23
- Птолемея 6.37–6.46, 9.67
- — обобщенная 6.46
- Рамсея с. 407
- Сильвестра 20.13
- синусов с. 272; 12.1–12.10
- Фейербаха 14.49, 28.30
- Хелли 22.13–22.16
- Шаля 17.35–17.37
- Чевы 5.77–5.94, 10.56, 14.7, 14.41
- точка бесконечно удаленная с. 507
- Жергонна 5.78, 30.37
- Лемуана с. 113; 5.136, 5.144–5.149, 11.22, 19.55, 19.56, 19.57
- Микеля 2.85–2.89, 19.46, 28.36
- Нагеля 5.79
- пересечения высот 1.56, 2.82, 2.86, 2.91, 3.24, 3.34–3.37, 3.60, 3.61, 5.10, 5.28, 5.34, 5.36, 5.47, 5.56 а), 5.80, 5.107, 5.116–5.118, 6.17, 6.36, 7.18, 7.41, 10.79, 12.74, 13.12 б), 13.13, 13.55, 14.22, 14.35, 15.5, 18.33
- пересечения диагоналей 30.33, 30.25
- пересечения медиан 1.50 б), 5.116, 5.146, 7.26, 10.86, 11.18, 11.19, 12.16, 13.31, 13.37, 14.4, 14.6, 14.12, 14.16, 14.23, 14.37, 14.38, 19.1, 19.4, 19.10, 19.33, 24.6, 29.16
- Торричелли 2.8, 11.21, 18.9, 18.22
- Штейнера с. 370, 493; 14.50, 19.58, 29.38
- точки Брокара с. 111; 5.126–5.133, 14.44, 19.56
- изогонально сопряженные с. 107; 5.87, 5.115, 14.40 б), 29.34, 29.35, 29.36
- изотомически сопряженные с. 106; 5.85, 14.40 а)
- постоянные подобных фигур с. 370
- — треугольника с. 370
- соответственные с. 369
- трапеция 1.1, 1.10, 1.15, 1.21, 1.35, 2.16, 2.31, 2.40, 5.18, 5.21, 6.31, 9.29, 11.31–11.33, 12.69, 15.4, 19.2, 19.3, 19.26, 27.3, 29.17
- треугольник 5.1–5.149
- Брокара с. 111; 14.50, 19.57
- наибольший 20.18–20.20
- пифагоров с. 101
- подерный (педальный) с. 109; 5.110–5.115, 5.146, 5.147, 14.21 б)
- подобия с. 369
- постоянный с. 370
- треугольник правильный 1.29, 1.45, 1.46, 1.50 б), 1.59, 2.13, 2.15, 2.19, 2.37, 2.45, 2.55, 4.46, 5.25–5.31, 5.59, 5.60, 6.80, 7.16 б), 7.17, 7.22, 7.38, 7.45, 10.3, 10.77, 11.3, 14.21 а), 16.7, 18.10–18.16, 18.18–18.21, 18.23–18.25, 18.40, 18.41, 24.1, 29.35, 29.36
- прямоугольный 1.40, 1.43, 2.39, 2.66, 2.67, 3.38, 5.16–5.24, 5.32, 5.39, 5.42, 5.68, 5.144, 6.80, 11.14
- с углами 60° и 120° 2.33, 5.32–5.37
- целочисленный 5.38–5.43, 26.7
- треугольники подобные с. 12; 1.1–1.67, 2.51–2.65, 7.16 а), 8.12–8.14
- собственно подобные 29.21, 29.22
- равные вспомогательные 7.23–7.25
- триангуляция 22.8
- триссектриса 5.59

Угол Брокара с. 112; 5.128, 5.129, 5.134, 5.135, 5.136, 19.56
— вписанный с. 31; 2.1–2.96, 7.18–7.22, 8.7–8.11, 15.16, 18.15
— между окружностями с. 471
— — прямыми с. 31
— наименьший или наибольший 20.1–20.7
— ориентированный с. 289
узел решетки с. 430

Фигура выпуклая с. 402; 24.10, 26.23
формула Герона с. 274; 5.40, 5.42 б), 9.12, 9.37, 10.6, 12.18 б)
— Пика 24.5
— Эйлера 23.15

Центр вневписанной окружности 2.4 а), 2.93 б), 5.12, 5.34 б), 5.120
— вписанной окружности 1.30, 2.4 а), 2.50, 2.65, 2.93, 3.46, 3.66 б), 4.39 а), 5.7, 5.12–5.15, 5.34 б), 5.46, 5.52, 5.120, 6.16, 6.102, 7.45, 9.70, 10.30, 10.79, 11.20, 12.28, 13.38, 14.13, 14.35 б), 19.12, 19.13
— гомотетии с. 363
— — поворотной 19.42–19.49
— инверсии с. 470
— масс с. 305; 14.1–14.50, 19.8
— описанной окружности 1.32, 1.55 б), 2.1, 2.83, 2.84 в), 2.86, 2.90, 3.66 б), 4.56, 5.12, 5.15, 5.34 б), 5.36 б), 5.56 а), 5.113, 5.120, 6.40, 7.49, 10.79, 12.16, 12.75, 13.13, 13.37, 13.38, 14.24, 14.35 а), 18.30, 18.46, 19.13, 19.55, 19.56

— подобия с. 369
— правильного многоугольника с. 140
— радикальный трех окружностей с. 63
— симметрии 14.29, 17.34, 24.8, 25.1, 25.2

Чет и нечет 23.1–23.8

четыре прямые 2.85, 2.86, 2.89
четыреугольник 1.2, 1.5, 1.16, 1.38, 1.39, 1.52, 2.43, 3.4, 3.61, 4.7, 4.14–4.25, 4.29, 4.30, 4.35, 4.42–4.44, 4.55, 5.43 б), 5.72–5.74, 6.21–6.36, 7.2, 7.10 б), 7.31, 7.35, 8.6, 8.45–8.53, 9.31, 9.32, 9.38, 9.62–9.73, 10.61, 11.29–11.34, 13.6, 14.42, 14.43, 14.5, 14.8, 14.42, 15.11, 15.14, 16.5, 17.4, 17.19, 18.36, 18.39, 19.1, 20.18–20.20, 26.14, 26.15, 29.30, 30.24, 30.28, 30.31, 30.46
— вписанный 1.9, 1.44, 2.17, 2.14, 2.41, 2.46, 2.71–2.79, 2.87, 2.88, 3.9, 3.22, 3.31, 4.45 б), 5.41, 6.15–6.20, 6.24, 6.37, 6.38, 6.99, 6.100, 13.33, 13.34 а), 16.4, 30.45
— описанный 2.79 б), 3.6, 3.8, 4.45 в), 6.1–6.14, 7.48, 17.5, 30.36
числа комплексные 29.20–29.38

Шестиугольник 1.45, 2.11, 2.20, 2.47, 3.67, 4.6, 4.28, 4.31, 5.88, 6.51–6.55, 6.95, 9.45 а), 9.76–9.78, 13.3, 14.6, 18.16, 18.17, 18.24, 18.25, 29.29 а), 30.42, 30.43

Эллипсы Штейнера с. 492; 29.37–29.38