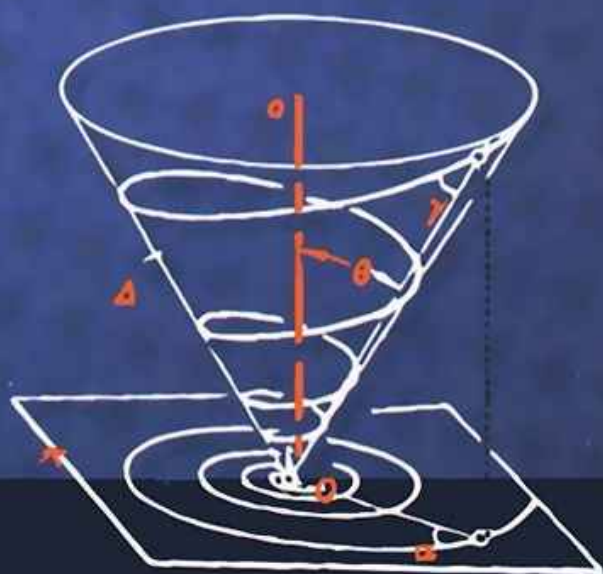


ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ

Д.О. Шклярский  
Н.Н. Ченцов  
И.М. Яглом

# ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

## ГЕОМЕТРИЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ



Д.О. Шклярский  
Н.Н. Ченцов  
И.М. Яглом

# ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ГЕОМЕТРИЯ  
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Издание третье



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2015

УДК 517  
ББК 22.317  
Ш 66

Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. **Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия).** — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-1623-7.

Пособие содержит задачи по стереометрии и задачи на разрезание и складывание фигур на плоскости и в пространстве. Ко всем задачам даны подробные решения и указания, которыми можно воспользоваться при самостоятельной работе. Некоторые условия задач снабжены пояснениями.

Для учащихся и преподавателей школ, гимназий, лицеев с углубленным изучением физико-математических дисциплин, для подготовки к конкурсным экзаменам в вузы, а также для лиц, занимающихся самообразованием.

Первое издание — 1954 г.

---

*ШКЛЯРСКИЙ Давид Оскарович*  
*ЧЕНЦОВ Николай Николаевич*  
*ЯГЛОМ Исаак Моисеевич*

## **ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)**

Редактор *В.Р. Игнатова*  
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*  
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 09.04.2015. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 17,6. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117342, Москва, ул. Бултерова, 17 Б  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в АО «ИПК «Чувашия»,  
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1623-7



9 785922 116237

---

ISBN 978-5-9221-1623-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2000, 2015

© Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов,  
И. М. Яглом, 2000, 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию . . . . .	4
Номера задач, предлагавшихся на московских математических олимпиадах . . . . .	7
<b>Задачи</b> . . . . .	8
1. Разные задачи по стереометрии . . . . .	8
2. Теория многогранников . . . . .	15
3. Правильные многогранники . . . . .	27
4. Разрезание и складывание фигур . . . . .	35
<b>Решения</b> . . . . .	45
<b>Ответы и указания</b> . . . . .	244

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга представляет собой третью часть сборника задач, составленного по материалам школьного математического кружка при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. Она содержит задачи по стереометрии и задачи на разрезание и складывание фигур на плоскости и в пространстве. Как и первые две части «Избранных задач и теорем элементарной математики», настоящая третья часть состоит из условий задач, ответов и указаний и, наконец, решений. Как решения, так и ответы и указания даны ко всем задачам книги. Кроме того, там, где это необходимо, условия задач снабжены пояснениями.

Эта книга рассчитана на школьников старших классов — участников математических кружков, на руководителей школьных математических кружков, а также на руководителей и участников кружков по элементарной математике в педагогических институтах. Значительную часть книги составляют «циклы» задач, связанных общей темой, причем задачи цикла вместе с их решениями дают более или менее законченную теорию излагаемого вопроса. Каждый такой цикл может служить темой одного-двух занятий математического кружка.

Содержание книги довольно разнообразно. Она состоит из четырех почти не связанных между собою разделов.

В разделе 1 собраны задачи повышенной трудности по школьному курсу стереометрии. Многие из этих задач предлагались на школьных математических олимпиадах в МГУ. Завершает раздел цикл задач по геометрии тетраэдра. По своему характеру задачи раздела 1 близки к задачам на доказательство и построения из «Задачника по геометрии» Б. Н. Делоне и О. К. Житомского, хотя в среднем и являются более трудными.

Раздел 2 посвящен общей теории многогранников. В него включен и цикл задач по теории измерения многогранных углов.

Задачи по теории правильных многогранников выделены в отдельный раздел 3. Здесь же излагается теория правильных звездчатых многогранников.

Несколько своеобразным является раздел 4, который содержит как планиметрические, так и стереометрические задачи.

Задачи цикла А носят вводный характер. Все они по своему содержанию доступны школьнику, окончившему 8-й класс, а некоторые из них доступны и шестикласснику. Цикл Б посвящен теореме о равносторонности равновеликих многоугольников. В цикле В рассматривается отчасти уже знакомая читателю по книге Б. А. Кордемского и Н. В. Русалева «Удивительный квадрат» (М.–Л., Гостехиздат, 1952) задача о разбиении прямоугольника на квадраты, а также некоторые примыкающие сюда вопросы. Наконец, цикл Г содержит задачи по теории зонэдров — выпуклых многогранников с центрально-симметричными гранями.

Задачи сборника не равноценны по своей трудности. Наряду с легкими задачами, представлены и более трудные (в тексте они отмечены звездочкой). Наконец, в книгу включено несколько очень трудных задач (в тексте они отмечены двумя звездочками). Читателю рекомендуется легкие задачи решать самостоятельно, заглядывая в указания лишь в случае неудачи. Если же задача отмечена звездочкой, то можно с самого начала посмотреть указание и только после этого приступить к решению задачи. Такого же порядка следует придерживаться и на занятиях кружка.

Задачи, объединенные в один цикл, следует решать в той последовательности, в какой они помещены в книге. Что же касается задач, отмеченных двумя звездочками, то не следует приступать к их решению, не ознакомившись с указаниями. Эти последние задачи при желании можно рассматривать также как «теорию», сразу читая решение задачи. Каждая из таких задач может служить темой самостоятельного доклада на занятии кружка после того, как ученики решили все близкие задачи. Следует отметить, что каждая задача сборника (кроме отмеченных двумя звездочками) была в свое время решена тем или иным школьником — участником школьного математического кружка при МГУ.

Авторы старались по возможности не дублировать имеющиеся сборники задач. Следует, однако, оговориться, что авторы намеренно внесли в книгу ряд задач и упражнений из курса элементарной геометрии Ж. Адамара; это относится, в частности, к циклу задач по геометрии тетраэдра из раздела I. Все решения задач были написаны заново.

Книга содержит большое количество чертежей. Значительная часть стереометрических чертежей выполнена в диметрии, там, где это необходимо, применялась триметрия. Авторы стремились давать наглядные чертежи-рисунки, поэтому на чертежах многогранники часто изображаются не как твердые тела, а как

«пустотелые» многогранные поверхности. При этом обычно одна из граней делается «прозрачной» — через нее видны линии и плоскости, проходящие внутри многогранника. На некоторых чертежах многогранники изображены «проволочными» — на этих чертежах дается только скелет из ребер. В книге приведены также шесть фотографий моделей правильных и почти правильных звездчатых многогранников.

Основная работа по подготовке этой книги выполнена Н. Н. Ченцовым. В книгу включено около десяти задач по стереометрии из рукописи Д. О. Шклярского. Все остальные задачи были подобраны совместно Н. Н. Ченцовым и И. М. Ягломом; последний принимал также значительное участие в работе над разделом 4.

В написании книги участвовали также И. С. Аршон (цикл «Зоноздры» и ряд задач раздела 1) и В. Г. Ашкинуге (окончательный вариант раздела 3 и другие задачи). Решения отдельных задач были написаны другими руководителями и участниками школьного математического кружка при МГУ.

А. И. Фетисов внимательно прочитал рукопись и сделал много существенных и ценных указаний, за что приносим ему свою глубокую благодарность.

Авторы также пользуются случаем выразить свою благодарность редактору книги А. З. Рывкину и иллюстратору В. А. Сапожникову, проведшим большую и трудную работу по редактированию и оформлению этой книги.

*Н. Ченцов*

**НОМЕРА ЗАДАЧ,  
ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА МОСКОВСКИХ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ**

Номер задачи	Олимпиада	Класс	Тип
2	IX (1946)	9–10	I
4	VII (1941)	9–10	II
5	III (1937)	9–10	I
6	XIV (1951)	9–10	II
7	V (1939)	9–10	II
12	XIV (1951)	9–10	II
13	I (1935)	9–10	II
15	XI (1948)	9–10	II
18	XV (1952)	10	II
20	XIV (1951)	7–8	II
21	X (1947)	9–10	II
22	XIII (1950)	9–10	II
27a	XI (1948)	9–10	I
27б	XIII (1950)	9–10	II
29	X (1947)	9–10	II
40	XV (1952)	10	I
82б	VI (1940)	7–8	II
93	XII (1949)	9–10	II
94	XVI (1953)	10	II
102б	VII (1941)	7–8	II
102в	VII (1941)	9–10	II
112	X (1947)	7–8	II



# ЗАДАЧИ

---

## 1. Разные задачи по стереометрии

**1.** Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника не превышает  $360^\circ$ .

**2.** В пространстве даны две пересекающиеся плоскости  $\tau$  и  $\sigma$ . На линии их пересечения взята точка  $A$ . Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости  $\tau$  и проходящих через точку  $A$ , наибольший угол с плоскостью  $\sigma$  образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей.

**3.** Доказать, что площадь ортогональной проекции плоского многоугольника равна площади этого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

**4.** В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые. Найти геометрическое место середин отрезков данной длины  $d$ , концы которых лежат на этих прямых.

**5.** По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка (один по первой, а другой по второй прямой). Доказать, что объем тетраэдра <sup>1)</sup> с вершинами в концах этих отрезков не зависит от положения последних.

**6.** В  $n$ -угольную пирамиду вписана сфера. Доказать, что если совместить все боковые грани пирамиды с плоскостью основания, повернув их вокруг соответствующих ребер основания (рис. 1), то все точки касания этих граней со сферой сольются в одну точку  $H$ , а вершины граней расположатся на одной окружности с центром в точке  $H$ .

---

<sup>1)</sup> В этой книге слово тетраэдр (по-гречески четырехгранник) всюду употребляется в значении — произвольная треугольная пирамида. Когда речь будет идти о правильном тетраэдре, т. е. о треугольной пирамиде, все грани которой являются равносторонними треугольниками, мы будем говорить: *правильный тетраэдр*.

**7.** Дана правильная пирамида. Из точки  $N$  ее основания (рис. 2) восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Доказать, что сумма отрезков от точки  $N$  до точек пересечения этого перпендикуляра с плоскостями всех боковых граней пирамиды не зависит от положения точки  $N$  в плоскости основания (на рис. 2 показаны лишь точки пересечения перпендикуляра с плоскостями граней  $SAB$ ,  $SBC$  и  $SCD$ ).

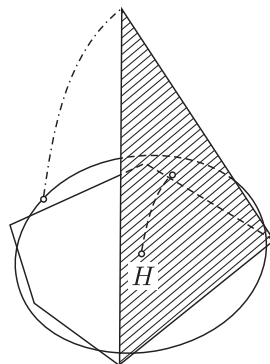


Рис. 1

**8.** а) Доказать, что если некоторое число прямых обладает тем свойством, что любые две из них пересекаются, то или все они проходят через одну общую точку, или все лежат в одной плоскости.

б) Доказать, что если некоторое число окружностей обладает тем свойством, что любые две из них пересекаются в двух точках, то или все окружности проходят через две общие точки, или все окружности лежат на одной сфере (или в одной плоскости).

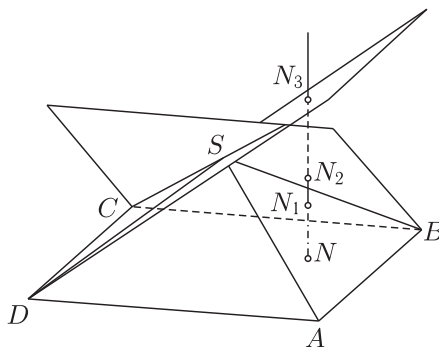


Рис. 2

**9\*.** Выпуклая ломаная длины  $d$  вращается вокруг прямой, проходящей через ее концы. Доказать, что площадь образовавшейся поверхности вращения не превосходит  $\frac{\pi d^2}{2}$ .

**10.** Найти геометрическое место центров кругов, образуемых при сечении данного шара  $U$  плоскостями, проходящими:

- через данную прямую  $a$ ;
- через данную точку  $H$ .

**11\***. Доказать, что если все сечения некоторого тела плоскостями, проходящими через данную фиксированную точку  $P$ , представляют из себя круги, то это тело является шаром.

Примечание. Утверждение задачи 11 является усилением следующей известной теоремы (см., например, Б.Н. Делоне и О.К. Житомирский, «Задачник по геометрии», задача 387): если все сечения некоторого тела плоскостями представляют из себя круги, то это тело является шаром.

**12.** Из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра на различные плоскости найти ту, которая имеет наибольшую площадь.

**13.** На поверхности куба найти точки, из которых данная диагональ куба видна под наименьшим углом <sup>1)</sup>.

**14.** Определить вид сечения куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно к его диагонали.

**15\*\*.** Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

**16\*.** Доказать, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.

**17.** Существуют ли отличные от куба многогранники, все грани которых являются равными между собой квадратами?

**18.** В куб, ребро которого равно  $a$ , поместить три круглых цилиндра высоты  $a$  и диаметра  $\frac{a}{2}$  так, чтобы они не могли перемещаться внутри куба.

**19\*.** Круглый цилиндр пересекается плоскостью  $\pi$ , не перпендикулярной к его образующим. Какую кривую даст линия пересечения цилиндра плоскостью при разворачивании поверхности цилиндра в плоскость?

Проекцией точки  $A$  из центра  $O$  на плоскость  $\sigma$  называется точка  $A'$  пересечения прямой  $OA$  с плоскостью  $\sigma$ . На рис. 3 изображены различные случаи расположения точки  $A$  относительно центра  $O$  и плоскости  $\sigma$ . Центральной проекцией какой-либо фигуры называется фигура, образованная проекциями точек первоначальной фигуры из данного центра  $O$ .

**20\*.** Какими фигурами может быть центральная проекция треугольника? (Предполагается, что центр проекции не лежит ни в плоскости проектирования, ни в плоскости треугольника.)

---

<sup>1)</sup> Концы самой диагонали при этом не принимаются в расчет.

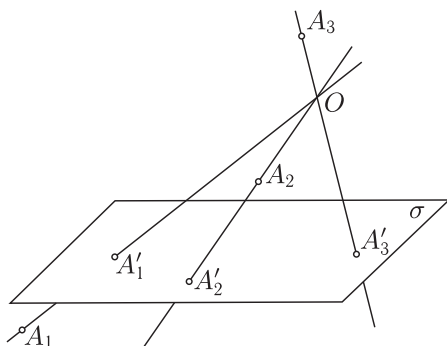


Рис. 3

**21\***.  $n$  проволочных треугольников расположены в пространстве так, что:

1°. Каждые два из них имеют одну общую вершину.

2°. В каждой вершине сходится одно и то же число  $k$  треугольников.

Найдите все значения  $k$  и  $n$ , при которых указанное расположение возможно.

**22.** Пространственный четырехугольник описан около сферы. Доказать, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

**23\***. а) Доказать, что всегда существует сфера, касающаяся всех сторон (или продолжений сторон) данного пространственного (не плоского) четырехугольника.

б) Доказать, что если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то можно построить бесчисленное множество сфер, касающихся сторон (или продолжений сторон) четырехугольника.

в) Среди всех сфер задачи 23 б) найти сферу наименьшего радиуса.

**24.** Можно ли пересечь прямой трехгранный угол плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник, равный данному треугольнику?

**25.** а) Доказать, что можно пересечь произвольный тетраэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

б) Можно ли пересечь произвольный тетраэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб?

в) Какое из всех сечений данного тетраэдра плоскостью, представляющих из себя параллелограмм, имеет наибольшую площадь?

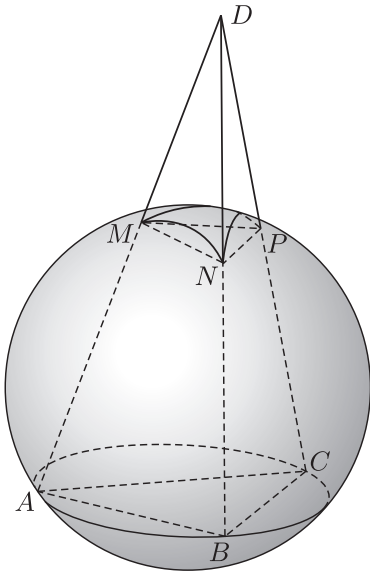


Рис. 4

**26.** Через какие-то три вершины данного тетраэдра  $ABCD$  проведена произвольная сфера, пересекающая ребра, исходящие из четвертой вершины в точках  $M$ ,  $N$  и  $P$  (рис. 4). Доказать, что форма треугольника  $MNP$  зависит только от тетраэдра  $ABCD$ , но не от радиуса сферы и не от того, через какие именно три вершины тетраэдра проводилась сфера (т.е. что все полученные таким образом треугольники  $MNP$  подобны между собой).

**27.** Даны две треугольные пирамиды  $ABCD$  и  $A'BCD$  с общим основанием  $BCD$ , причем точка  $A'$  находится внутри пирамиды  $ABCD$ .

а) Доказать, что сумма плоских углов при вершине  $A'$  пирамиды  $A'BCD$  больше суммы плоских углов при вершине  $A$  пирамиды  $ABCD$ .

б) Может ли сумма ребер пирамиды  $A'BCD$ , выходящих из вершины  $A'$  (т.е. ребер  $A'B$ ,  $A'C$ ,  $A'D$ ), быть больше суммы ребер пирамиды  $ABCD$ , выходящих из вершины  $A$  (ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ )?

---

**28\*.** Доказать, что если все двугранные углы тетраэдра острые, то и все плоские углы — острые.

**29\*.** Доказать, что если все четыре грани тетраэдра имеют одинаковую площадь, то они обязательно равны между собой.

**30.** а) Доказать, что четыре перпендикуляра, восстановленные к плоскостям граней тетраэдра из центров описанных около граней окружностей, пересекаются в одной точке (центре описанной сферы).

б) Вывести отсюда, что через две окружности, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в двух точках, можно провести сферу и притом только одну.

**31.** Биссектральной плоскостью двугранного угла называется плоскость, делящая этот угол пополам. Доказать, что

а) Три биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой. Эта прямая называется биссектрисой трехгранного угла.

б) Четыре биссектрисы трехгранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке (центре вписанной сферы).

**32.** а) Медианой тетраэдра называется прямая, соединяющая вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (центре тяжести тетраэдра).

б) Доказать, что три прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через точку пересечения его медиан.

**33.** Доказать, что если две высоты тетраэдра пересекаются, то и две другие высоты также пересекаются.

**34.** Тетраэдр, противоположные ребра которого попарно перпендикулярны, называется ортогональным.

Доказать, что

а) Если две пары противоположных ребер тетраэдра взаимно перпендикулярны, то третья пара ребер тоже взаимно перпендикулярна, т. е. такой тетраэдр является ортогональным.

б) Четыре высоты ортогонального тетраэдра пересекаются в одной точке.

в) Если три высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то этот тетраэдр ортогональный.

г) Если основание одной из высот тетраэдра есть ортоцентр (точка пересечения высот) соответствующей грани, то тетраэдр — ортогональный, и обратно.

д) В ортогональном тетраэдре общие перпендикуляры трех пар противоположных ребер проходят через точку пересечения высот.

**35.** Доказать, что

а) Плоскости, проходящие через каждое ребро трехгранного угла перпендикулярно к противоположной грани<sup>1)</sup>, пересекаются по одной прямой (высотной прямой трехгранного угла).

---

<sup>1)</sup> Мы предполагаем здесь, что у трехгранных углов нет ребер, перпендикулярных к противоположным граням. В противном случае любая плоскость, проходящая через ребро, перпендикулярное к противоположной грани, сама будет перпендикулярна к этой грани и, как легко проверить, трехгранный угол будет иметь тогда бесчисленное множество высотных прямых.

б) Если две высотные прямые тетраэдра пересекаются, то и две другие также пересекаются.

в) Если три высотные прямые тетраэдра пересекаются в одной точке, то и четвертая прямая также проходит через эту точку; в этом случае высотные прямые совпадают с высотами и тетраэдр является ортогональным (см. задачу 34).

**36.** Доказать, что суммы квадратов длин пар противоположных ребер ортогонального тетраэдра равны; обратно, если суммы квадратов длин пар противоположных ребер тетраэдра равны, то тетраэдр — ортогональный.

**37.** Доказать, что

а) Плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов соответствующих граней перпендикулярно к граням трехгранного угла, пересекаются по одной прямой (б и с с е к т о р н о й п р я м о й трехгранного угла).

б) Если две биссекторные прямые тетраэдра пересекаются, то и две другие также пересекаются.

в) Если три биссекторные прямые тетраэдра пересекаются в одной точке, то и четвертая биссекторная прямая также проходит через эту точку.

г) Если четыре биссекторные прямые тетраэдра пересекаются в одной точке, то суммы пар противоположных ребер равны; обратно, если суммы пар противоположных ребер тетраэдра равны, то четыре биссекторные прямые пересекаются в одной точке.

*Примечание.* Точка пересечения четырех биссекторных прямых тетраэдра одинаково удалена от всех его ребер и, следовательно, является центром сферы, касающейся всех ребер тетраэдра. Эта сфера называется *п о л у в п и с а н н о й* сферой тетраэдра (рис. 5).

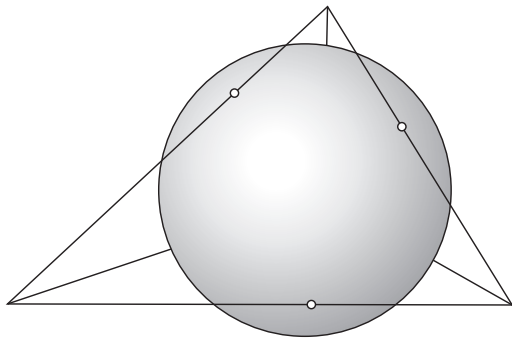


Рис. 5

**38\***. Доказать, что если сумма двух противоположных ребер тетраэдра равна сумме двух других его противоположных ребер, то равны также и суммы соответствующих двугранных углов.

**39.** Доказать, что если центры вписанной и описанной сфер тетраэдра совпадают, то все грани — равные треугольники.

**40.** Доказать, что центр вписанной в тетраэдр сферы лежит внутри тетраэдра, образованного точками касания.

## 2. Теория многогранников

Ниже помещается ряд задач по теории многогранников<sup>1)</sup>. Теория многогранников (главным образом теория выпуклых многогранников) составляет большой раздел математики со своими задачами и методами решения этих задач. Создателями этой теории являются один из первых русских академиков Л. Эйлер, французский математик начала XIX в. О. Коши, немецкий математик конца XIX в. Г. Минковский и советский ученый А. Д. Александров. Некоторые важные результаты из теории многогранников приведены в хорошей популярной книге Л. А. Люстернака «Выпуклые тела» (М.–Л., Гостехиздат, 1941); см. также подробную, очень интересную, но довольно трудную книгу А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (Л.–М., Гостехиздат, 1950).

**41.** а) Доказать, что у любого многогранника число граней с нечетным числом сторон четно (так, например, не может существовать 19-гранника, все грани которого являются треугольниками).

б) Доказать, что у любого многогранника число вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно.

**42.** а) У тетраэдра шесть ребер. Доказать, что многогранника с меньшим числом ребер не существует.

б) Доказать, что не существует многогранника, имеющего семь ребер, но существуют многогранники с любым большим числом ребер.

**43.** Доказать, что не существует 7-гранника, все грани которого — четырехугольники.

**44.** Доказать, что в любом выпуклом многограннике найдется либо треугольная грань, либо трехгранный угол.

Примечание. Уточнением этого результата служит теорема задачи 51.

---

<sup>1)</sup> Об определении многогранника см. замечание в конце настоящего раздела, с. 26.



**45.** Доказать, что не существует выпуклого многогранника, у которого:

- каждая грань имела бы более пяти сторон, или
- в каждой вершине сходилась бы более пяти ребер.

**46\*.** Пусть в некотором многограннике  $W$ , имеющем  $n$  граней, можно выделить  $k \geq \frac{n}{2}$  граней так, что никакие две из выделенных граней не являются смежными (т. е. не имеют общих сторон). Доказать, что в многогранник  $W$  нельзя вписать шар.

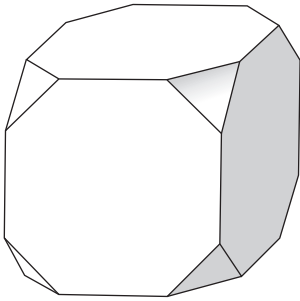


Рис. 6

Так, например, нельзя вписать шар ни в какой 14-гранник, который получается, если срезать 8 углов куба так, чтобы 8 получившихся треугольников не имели общих точек (рис. 6).

**47\*.** Пусть  $W$  — выпуклый многогранник,  $O$  — точка внутри  $W$ . Доказать, что существует многогранник  $W'$ , вершины которого лежат на перпендикулярах, опущенных из точки  $O$  на грани  $W$ , а грани перпендикулярны к прямым, соединяющим точку  $O$  с вершинами  $W$ . Ребра

многогранника  $W'$  перпендикулярны к соответствующим ребрам многогранника  $W$  (ребро многогранника  $W'$ , соединяющее какие-либо две его вершины, считается соответствующим ребру  $W$ , по которому граничат между собой грани  $W$ , соответствующие этим вершинам  $W'$ ).

Многогранники  $W$  и  $W'$  называются полярными многогранниками; очевидно, что они имеют одно и то же число ребер, а число граней каждого из них равно числу вершин другого.

Далее мы будем, не оговаривая этого особо, число граней, ребер и вершин рассматриваемого многогранника обозначать соответственно буквами  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{B}$ .

**48\*.** Теорема Эйлера. Доказать, что для любого выпуклого многогранника

$$\mathcal{T} - \mathcal{P} + \mathcal{B} = 2.$$

Будем говорить, что многогранник односвязен, если любой разрез разбивает его на две части. Так, многогранник, изображенный на рис. 7, а, получившийся, когда из куба вырезана пирамида, односвязный, а многогранник, изображенный на рис. 7, б, — не односвязный,

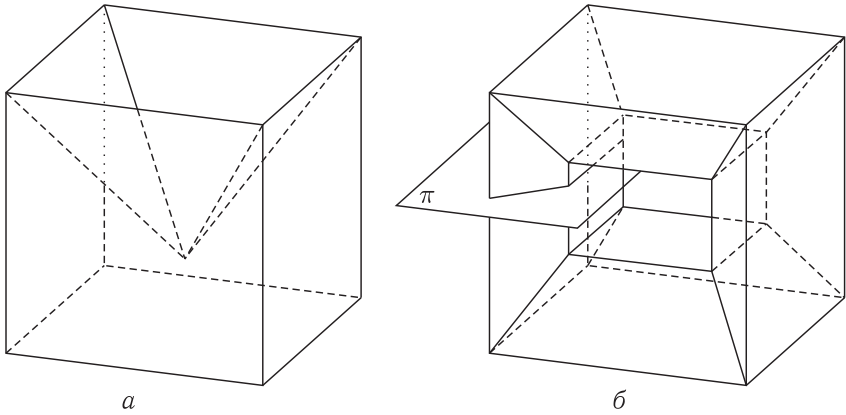


Рис. 7

так как если мы его разрежем, например, полуплоскостью  $\pi$ , то он не распадется на две части. Этот многогранник распадется, если мы сделаем на нем любые два разреза. По этой причине такой многогранник называется *д в у с в я з н ы м*. Вообще если наибольшее возможное число разрезов, которое не разбивает многогранник на части, равно  $p$ , то многогранник называется  $(p + 1)$ -с в я з н ы м. Число  $p$  называется *р о д о м* многогранника. Можно показать, что род многогранника равен числу «сквозных дыр» в нем; так, на рис. 8, *а-в* изображены многогранники соответственно родов 1, 2 и 3. Односвязные многогранники — это многогранники без «сквозных дыр».

**49\*\*.** Доказать формулу Эйлера

$$\mathcal{T} - \mathcal{P} + \mathcal{B} = 2$$

для односвязных многогранников (многогранников нулевого рода).

Можно показать, что для многогранника любого рода формула Эйлера имеет вид

$$\mathcal{T} - \mathcal{P} + \mathcal{B} = 2 - 2p$$

(ср., например, Ж. А д а м а р «Элементарная геометрия», ч. II, Учпедгиз, 1952, с. 215). Отсюда и из результата задачи 48 следует, в частности, что род выпуклого многогранника равен нулю, т. е. что всякий выпуклый многогранник односвязен.

**50.** Доказать, что в любом односвязном многограннике имеют место соотношения:

$$\text{а) } \frac{3}{2} \leq \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{T}} < 3; \quad \text{б) } \frac{3}{2} \leq \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B}} < 3.$$

**51.** Доказать, что в любом односвязном многограннике сумма числа треугольных граней и числа трехгранных углов не меньше 8.

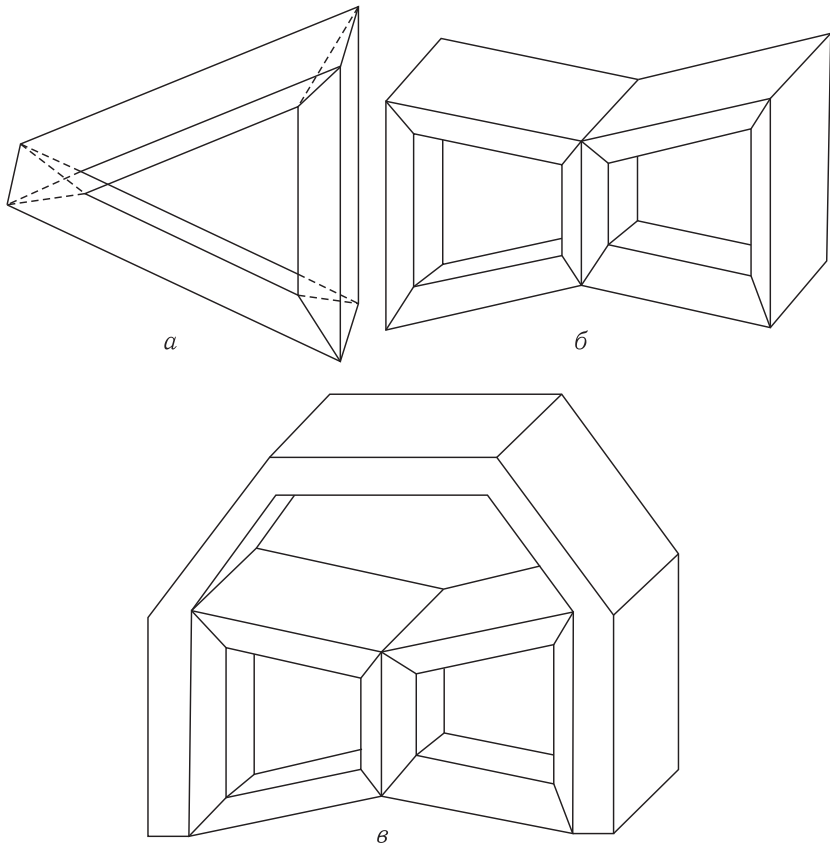


Рис. 8

**52.** Доказать, что односвязный многогранник обязательно имеет или треугольные, или четырехугольные, или пятиугольные грани. При этом:

а) если многогранник не имеет ни четырехугольных, ни пятиугольных граней, то он имеет, по крайней мере, четыре треугольные грани (так, например, правильный тетраэдр не имеет ни четырехугольных, ни пятиугольных граней, но зато он имеет четыре треугольные грани);

б) если многогранник не имеет ни треугольных, ни пятиугольных граней, то он имеет, по крайней мере, шесть четырехугольных граней (так, например, куб не имеет ни треугольных, ни пятиугольных граней, но зато он имеет шесть четырехугольных граней);

в) если многогранник не имеет ни треугольных, ни четырехугольных граней, то он имеет, по крайней мере, 12 пятиугольных граней (так, например, правильный додекаэдр не имеет ни треугольных, ни четырехугольных граней, но зато он имеет 12 пятиугольных граней).

Пусть дан некоторый многогранник и  $\mu$  — его грань. Под соседними с  $\mu$  гранями мы понимаем все грани, имеющие с  $\mu$  либо общее ребро, либо общую вершину.

**53.** Доказать, что у всякого выпуклого многогранника с достаточно большим числом граней, по крайней мере, одна грань имеет не менее шести соседних. Найти минимальное число  $N$  такое, что для всякого выпуклого многогранника с числом граней, не меньшим  $N$ , это утверждение справедливо.

**54.** а) Какое максимальное число граней может иметь выпуклый многогранник, если каждая его грань имеет не более четырех соседних?

б) Доказать, что тетраэдр — единственный выпуклый многогранник, каждая грань которого имеет три соседние грани.

Два многогранника называются имеющими один и тот же комбинаторный тип, если они имеют одинаковое число граней и грани обоих многогранников можно сопоставить между собой так, что двум граням одного многогранника, имеющим общее ребро (или общую вершину), отвечают грани другого многогранника, также имеющие общее ребро (или вершину).

Два многогранника одного комбинаторного типа имеют, очевидно, равное число граней, ребер и вершин, причем соответствующие грани имеют одинаковое число сторон и в соответствующих вершинах сходится одинаковое число ребер. При этом многогранники одинакового комбинаторного типа могут быть весьма различны по форме и размеру (см., например, рис. 9).

Теорема задачи 46 представляет интерес как пример предложения, в котором доказываются некоторые свойства всех многогранников, принадлежащих определенному комбинаторному типу. Именно, здесь доказывается существование таких комбинаторных типов, что ни в какой из многогранников этого типа нельзя вписать шар.

**55\*.** Найти все различные комбинаторные типы:

- а) четырехгранников;
- б) пятигранников;
- в) шестигранников.

Многогранник называется топологически правильным, если:

- 1°. Каждая его грань имеет одно и то же число ребер.
- 2°. В каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

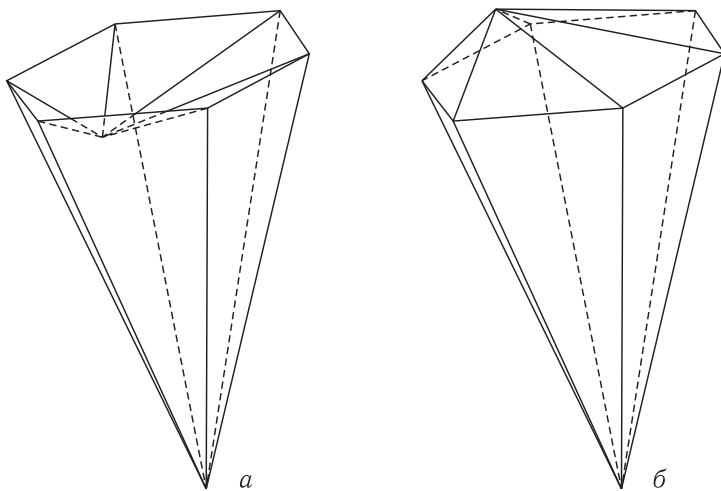


Рис. 9

**56.** Доказать, что существуют лишь пять типов топологически правильных (односвязных) многогранников.

Представим себе, что наш многогранник склеен из тонкой резины, причем ребра покрыты краской, чтобы сделать их более заметными. Теперь как-нибудь растянем и изогнем нашу модель, чтобы она перестала быть многогранником; при этом мы получим некоторую кривую поверхность и на ней сеть линий. Читатель мог заметить, что многие из теорем настоящего цикла задач остаются справедливыми и для такого «многогранника», под сетью «ребер» которого следует понимать сеть кривых, в которую перешла сеть ребер, под «гранями» — куски нашей поверхности, на которые ребра ее разделяют нашу поверхность, и под «вершинами» — точки, в которых сходится три или большее число граней (см., например, задачи 49–52). Свойства фигур, которые не меняются при подобных деформациях геометрических фигур (разгибаниях и растяжениях или сжатиях) изучает специальная математическая дисциплина — топология. Это название составлено из двух греческих слов — «топос» — место и «логос» — наука, так что оно означает — наука о положении. Топология — сравнительно молодая наука, ее стали рассматривать как отдельную дисциплину всего около 50 лет назад, хотя отдельные топологические задачи и теоремы были известны и значительно раньше (например, теорема Эйлера). В настоящее время топология нашла широкое приложение в других областях математики и в прикладных задачах и представляет из себя большую и важную математическую науку. Ведущую роль в этой науке играет московская топологическая школа, созданная П. С. Урысоном, П. С. Александровым и Л. С. Понтрягиным.

Многие теоремы топологии чрезвычайно наглядны и в то же время доказательство их весьма сложно. К числу их относится, например,

известная теорема Жордана о том, что всякий несамопересекающийся многоугольник разбивает плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю (читатель сможет заметить, что этой теоремой мы неявно пользовались при решении многих задач; см., например, решение задачи 113, б). Доказательство этой теоремы можно найти в книге А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (М.–Л., Гостехиздат, 1950), с. 69 и в примечаниях П. К. Рашевского к книге Д. Гильберта «Основания геометрии» (М.–Л., Гостехиздат, 1948), с. 406. В книге Гильберта и Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М.–Л., Гостехиздат, 1951) читатель сможет найти популярный очерк топологии. Для первоначального ознакомления с топологией можно рекомендовать маленькую книжку П. С. Александрова и В. А. Ефремовича «О простейших понятиях современной топологии», М.–Л., 1936; для более серьезного ознакомления с этой наукой — превосходную, но довольно трудную книгу тех же авторов «Очерк основных понятий топологии», М.–Л., ОНТИ, 1936. Некоторые интересные топологические задачи имеются в книге Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы», составляющей вып. 6 «Библиотеки математического кружка» (М.–Л., Гостехиздат, 1952).

Определяемые ниже понятия угла, измеренного по поверхности многогранника и дефекта многогранного угла, а также теоремы задач 57, а и б относятся к так называемой внутренней геометрии многогранников — области геометрии, изучающей взаимосвязи между величинами, которые могут быть измерены на поверхности многогранника.

Назовем дефектом (недостатком) многогранного угла дополнение суммы его плоских углов до  $4d$ . Дефект многогранного угла с вершиной  $S$  будем обозначать  $\text{def } S$ . В силу известной теоремы элементарной геометрии для любого выпуклого многогранного угла

$$\text{def } S > 0.$$

Пусть из какой-либо точки поверхности многогранника проведены на этой поверхности две прямые. Если обе прямые лежат в одной грани многогранника, то углом между этими прямыми, измеренным по поверхности многогранника, называется обычный угол между ними. Если же эти прямые лежат в разных гранях (рис. 10), то часть поверхности многогранника, заключенная между ними, разбивается ребрами многогранника на несколько плоских углов, каждый

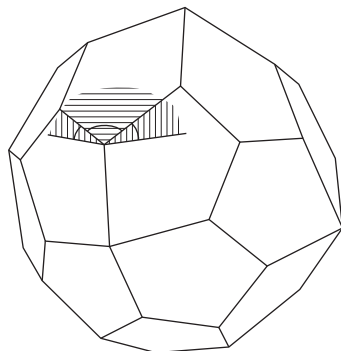


Рис. 10

из которых лежит в одной грани. В этом случае углом, измеренным по поверхности многогранника, называется сумма всех составляющих его углов, лежащих на гранях многогранников.

**57\*.** а) Теорема Гаусса – Бонне для многогранных поверхностей. На выпуклом многограннике построен некоторый  $m$ -угольник (рис. 11). Доказать, что сумма углов этого  $m$ -угольника, измеренная по поверхности многогранника<sup>1)</sup>, равна  $2d(m - 2)$  плюс сумма дефектов многогранных углов при вершинах многогранника, содержащихся внутри  $m$ -угольника.

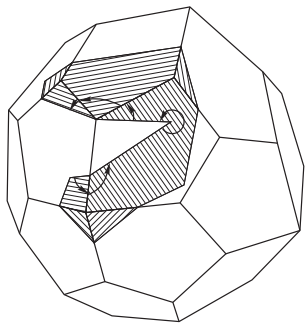


Рис. 11

б) Доказать, что сумма дефектов всех вершин выпуклого многогранника равна  $8d$ .

Из теоремы задачи 57 следует, что сумма всех плоских углов произвольного выпуклого многогранника с  $n$  вершинами равна  $4d(n - 2)$ <sup>2)</sup>.

Сумма дефектов всех вершин многогранника, содержащихся внутри построенного на его поверхности многоугольника, называется иногда избытком этого многоугольника.

**58\*\*.** а) Теорема Коши. Если два выпуклых многогранника одинаково составлены из соответственно равных граней, то либо эти многогранники равны, либо зеркально равны (т. е. каждый из них равен многограннику, симметричному второму относительно некоторой плоскости).

<sup>1)</sup> В силу односвязности выпуклого многогранника он разбивается многоугольником (который мы считаем, разумеется, несамопересекающимся) на две части, одну из которых мы назовем внутренней. Если вершина многоугольника лежит внутри грани, то углом многоугольника, измеренным по поверхности многогранника, называется обычный угол между сторонами, если же вершина лежит на ребре или в вершине многогранника, то углом называется сумма всех внутренних плоских углов с той же вершиной, лежащих на поверхности многогранника (рис. 11; см. определение, данное перед задачей).

<sup>2)</sup> Если рассматривать дважды взятый многоугольник как вырожденный многогранник (двугранник), то полученная теорема будет включать в себя как частный случай теорему о сумме углов многоугольника.

Отметим еще, что из того, что сумма всех плоских углов многогранника кратна  $4d$ , можно вывести новое доказательство теоремы Эйлера (задача 48).

Теорема задачи 57 справедлива для односвязных многогранников. Что же касается произвольного многогранника, то сумма всех его плоских углов равна  $4d(n - \chi)$ , где  $\chi = \mathcal{T} - \mathcal{P} + \mathcal{B}$  — эйлерова характеристика.

б) Теорема А. Д. Александрова. Если два выпуклых многогранника одинаково составлены из соответственно одноименных граней и соответственные плоские углы равны, то равны и соответственные двугранные углы.

Смысл теоремы Коши заключается в том, что выпуклый<sup>1)</sup> многогранник полностью определяется своими гранями, т. е. что если мыслить сочленения между гранями в ребрах многогранника шарнирными, то такой шарнирный многогранник будет жестким, т. е. его нельзя будет деформировать (в противоположность, например, тому, что многоугольник, число сторон которого больше трех, составленный из определенных отрезков, соединенных между собой в вершинах шарнирами, можно свободно изменить).

Теорема А. Д. Александрова является усилением теоремы Коши; из нее, например, следует, что все выпуклые многогранники, ограниченные шестью прямоугольниками, суть прямоугольные параллелепипеды. (Для доказательства достаточно сравнить такой многогранник с кубом.)

В физике часто бывает необходимо измерить какой-либо телесный угол, т. е. часть пространства, ограниченную некоторой (произвольной) конической поверхностью. Для этого строят сферу радиуса 1 с центром в вершине телесного угла (рис. 12). Площадь высекаемой телесным углом части, сферы и считается по определению величиной, или мерой, телесного угла. Таким образом, задача измерения телесных углов сводится к задаче нахождения площадей фигур, лежащих на сфере радиуса 1. Чтобы избежать необходимости рассматривать сферу именно радиуса 1, можно на каждой сфере установить свою единицу площади, положив площадь поверхности произвольной сферы, равной  $4\pi$  единицам (совершенно аналогично тому, как радианное измерение дуг вводит на каждой окружности свою единицу измерения, содержащуюся во всей этой окружности  $2\pi$  раз, а градусное измерение — единицу, содержащуюся в окружности 360 раз). Такая система измерения площадей на сфере играет для измерения телесных углов в точности ту же роль, что радианное измерение дуг для измерения углов в плоскости. Единичный телесный

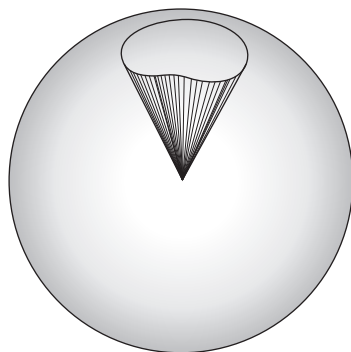


Рис. 12

<sup>1)</sup> Для невыпуклых многогранников теорема Коши не имеет места. Так, например, на рис. 9 изображены выпуклый и невыпуклый многогранники, одинаковым образом составленные из равных граней.



угол, т. е. угол, высекающий на сфере фигуру площади 1 (так же как и сама эта единица площади), называется при этом *стерадианом*.

В простейшем случае, когда рассматриваемый телесный угол является многогранным углом, соответствующая ему фигура на сфере будет ограничена дугами больших кругов. Такие фигуры носят название *сферических многоугольников*. Таким образом, всякому многогранному углу соответствует некоторый сферический многоугольник. Обратно, всякому сферическому многоугольнику соответствует многогранный угол, вершиной которого является центр сферы, а ребра проходят через вершины многоугольника.

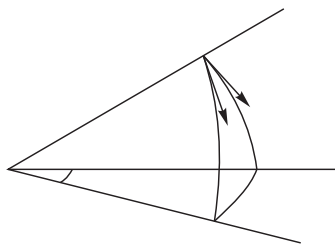


Рис. 13

При этом величины дуг, являющихся сторонами сферического многоугольника (измеренные в угловых единицах, например, в радианах) будут, очевидно, равны соответствующим плоским углам многогранного угла. Углы сферического многоугольника, т. е. углы между касательными к сторонам многоугольника, проведенным в его вершине, равны соответствующим двугранным углам многогранного угла. Действительно, касательные к сторонам многоугольника (рис. 13), перпендикулярны к радиусу сферы, проведенному в вершину многоугольника, т. е. к ребру многогранного угла. Следовательно, эти касательные образуют линейный угол соответствующего двугранного угла.

Из этих замечаний следует, что всякая теорема, относящаяся к сторонам, углам и площадям сферических многоугольников, т. е. всякая теорема внутренней геометрии сферы (ср. выше, с. 21), является в то же время теоремой о двугранных и телесных углах многогранных углов, и обратно.

Каждая из приводимых ниже задач состоит из двух соответствующих друг другу теорем: одной из теории сферических многоугольников и другой из теории многогранных углов. В силу установленной выше связи между сферическими многоугольниками и многогранными углами, каждый раз достаточно доказать только одну из теорем.

В соответствии с определенным выше понятием сферического многоугольника сферическим двугольником называется часть сферы, заключенная между дугами двух больших кругов (которые всегда пересекаются в диаметрально противоположных точках сферы).

**59. а)** Доказать, что площадь двугольника в выбранной системе единиц измеряется удвоенной величиной его угла (т. е. суммой двух его углов).

**б)** Доказать, что телесный угол двугранного угла измеряется (в стерадианах) удвоенным линейным углом (в радианах).

**60.** Доказать, что

а) Два сферических треугольника, симметричных друг другу относительно центра сферы, равновелики.

б) Два трехгранных угла, имеющих общую вершину и симметричных друг другу относительно этой вершины, равновелики.

**61\*.** Доказать, что

а) Площадь сферического треугольника измеряется (в стерадианах) избытком суммы его углов (в радианах) над  $\pi$ .

б) Телесный угол трехгранного угла измеряется (в стерадианах) избытком суммы его двугранных углов (в радианах) над  $\pi$ .

**62.** Доказать, что

а) Площадь сферического многоугольника, имеющего  $n$  сторон, измеряется (в стерадианах) избытком суммы его углов (в радианах) над  $(n - 2)\pi$  (сферический избыток).

б) Телесный угол многогранного угла, имеющий  $n$  ребер, измеряется (в стерадианах) избытком суммы линейных углов (в радианах) над  $(n - 2)\pi$ .

Будем говорить, что многогранный угол  $SA'B'C' \dots N'$  является пополнительным по отношению к данному выпуклому многогранному углу  $SABC \dots N$ , если все его ребра перпендикулярны к соответствующим граням угла  $SABC \dots N$  и лежат по ту же сторону от их плоскостей, что и сам угол  $SABC \dots N$  (рис. 14, а).

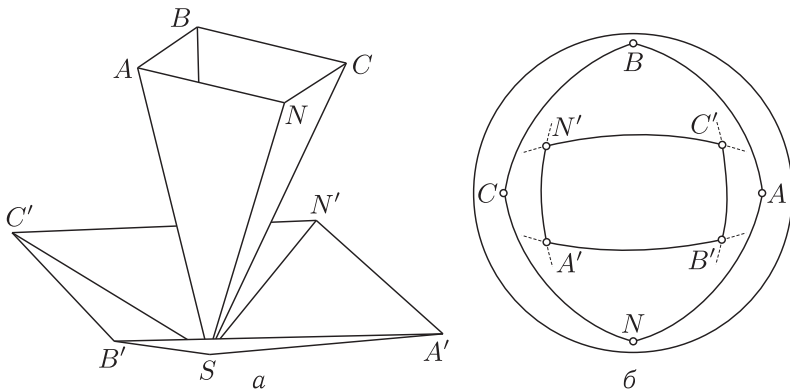


Рис. 14

Аналогично сферический многоугольник  $A'B'C' \dots N'$  называется полярным по отношению к данному выпуклому сферическому многоугольнику  $ABC \dots N$ , если все его вершины являются

полюсами<sup>1)</sup> для больших кругов соответствующих сторон многоугольника и лежат по ту же их сторону, что и сам многоугольник  $ABC \dots N$  (рис. 14, б).

**63.** а) Доказать, что если один из двух данных многогранных углов пополнительный по отношению к другому, то:

1°. Обратное, второй из них — пополнительный по отношению к первому.

2°. Телесный угол одного равняется дефекту другого (в выбранных нами единицах).

б) Доказать, что если один из двух данных сферических многоугольников полярный по отношению к другому, то:

1°. Обратное, второй из них — полярный по отношению к первому.

2°. Площадь одного равняется разности между  $\pi$  и периметром второго (если площади и периметры измерены в угловых единицах).

**64.** Найти величину телесного угла круглого конуса с углом  $\alpha$  при вершине.

**65.** Теорема о сумме углов тетраэдра. Доказать, что сумма телесных углов (в стерадианах) двугранных углов тетраэдра минус сумма телесных углов его трехгранных углов равна  $4\pi$ .

**66.** Опираясь на свойства телесных углов, дать новое доказательство теоремы Эйлера (задача 48) для выпуклых многогранников.

---

### Об определении многогранника

В задачах разделов 2 и 4 под многогранником мы понимаем обычно тело, ограниченное со всех сторон плоскостями. Придадим этому определению точный смысл. Для этого уточним сначала определение многоугольника. Будем называть многоугольником плоскую замкнутую ломаную, состоящую из конечного числа отрезков. Тогда каждый несамопересекающийся многоугольник разбивает плоскость на две области — внутреннюю, ограниченную и внешнюю, неограниченную. Внутренняя область вместе с многоугольником — ее контуром — образует многоугольную область, которую часто для краткости также называют многоугольником.

---

<sup>1)</sup> Напомним, что полюсами большого круга сферы называются концы диаметра, перпендикулярного к плоскости данного большого круга.

Пусть теперь имеется конечное число плоских несамопересекающихся многоугольников, и пусть эти многоугольники расположены в пространстве так, что каждая сторона любого из многоугольников является стороной еще одного и только одного многоугольника, причем эта система многоугольников не распадается на не связанные между собой части, т. е. любые два многоугольника системы являются связанными между собой цепью из наших многоугольников, в которой каждый предыдущий многоугольник цепи имеет общую сторону с последующими. Многоугольные области, соответствующие многоугольникам, образуют тогда замкнутую многогранную поверхность. Если эта поверхность не самопересекается, то она разбивает пространство на две области — внутреннюю и внешнюю. Внутренняя область вместе с ограничивающей ее многогранной поверхностью образует многогранник — тело. Только о таких многогранниках идет речь в задачах разделов 2 и 4. О более общем понятии многогранника см. вводные замечания к разделу 3.

Многогранник по определению называется **выпуклым**, если весь он лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней (т. е. целиком лежит в одном из полупространств, на которые разбивает пространство плоскость грани). Из этого определения следует, что все грани выпуклого многогранника — выпуклые многоугольники и что выпуклый многогранник как тело является пересечением соответствующих полупространств, определяемых плоскостями его граней. Отсюда же вытекает, что выпуклый многогранник является выпуклым телом в том смысле, что он содержит целиком отрезок, соединяющий любые две его точки.

### 3. Правильные многогранники

В задачах настоящего раздела развивается теория правильных многогранников. При этом из рассмотрения не исключаются и **самопересекающиеся** многогранники, которые ранее не рассматривались. Поэтому мы прежде всего точно определим все относящиеся сюда понятия.

Многоугольником будем называть любую плоскую замкнутую ломаную линию (стороны которой могут попарно иметь общие точки и кроме вершин; в этом случае многоугольник называется **самопересекающимся**).

Заметим, что фигура  $ABCDEF$ , изображенная на рис. 15, не является многоугольником, так как она образована не одной, а двумя замкнутыми ломаными линиями  $ABC$  и  $DEF$ . Такие фигуры называют иногда **составными** многоугольниками.

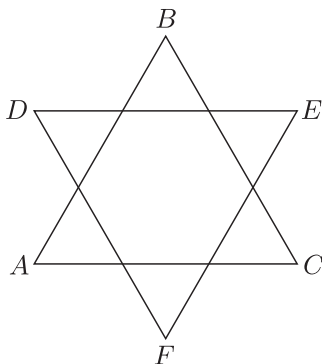


Рис. 15

Многоугольник называется *правильным*, если:

- 1) все его стороны равны,
- 2) все углы между соседними сторонами равны,
- 3) из каждых трех последовательных сторон первая и третья лежат по одну сторону от второй.

Условие 3 для несамопересекающихся многоугольников равносильно выпуклости.

Примером самопересекающегося правильного многоугольника может служить так называемый *правильный звездчатый пятиугольник* (пентаграмма; по-гречески пятилинейник)  $ABCDE$  (рис. 16)<sup>1)</sup>.

Аналогично многогранный угол (может быть самопересекающийся) называется *правильным*, если:

- 1) все его плоские углы равны,
- 2) все его двугранные углы равны,
- 3) из каждых трех последовательных граней первая и третья лежат по одну сторону от второй.

Примером самопересекающегося правильного многогранного угла может служить изображенный на рис. 17 *правильный звездчатый пятигранный угол*.

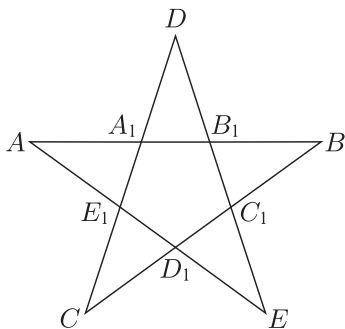


Рис. 16

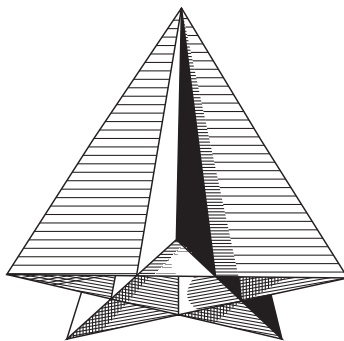


Рис. 17

Мы будем говорить, что два многоугольника (или два многогранных угла) имеют один и тот же вид, если они имеют одинаковое число сторон (граней) и стороны (грани) одного из них можно так сопоставить сторонам (граням) другого, чтобы двум сторонам (граням), исходящим из одной вершины (одного ребра), соответствовали стороны (грани), исходящие из одной вершины (одного ребра), а пересекающимся сторонам (граням) соответствовали пересекающиеся стороны (грани).

<sup>1)</sup> Для понимания дальнейшего полезно отметить, что совокупность прямых, являющихся сторонами многоугольника, не определяет однозначно этого многоугольника. Так, например, прямые, изображенные на рис. 16, определяют не только звездчатый пятиугольник  $ABCDE$ , но и правильный выпуклый пятиугольник  $A_1B_1C_1D_1E_1$ .

Многогранником называется совокупность конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника и расположенных в пространстве так, что:

1°. Каждая сторона одного из многоугольников является стороной еще одного и только одного многоугольника.

2°. Любые два данных многоугольника можно соединить цепью, состоящей из граней многогранника, в которой каждая предыдущая грань имеет общую сторону с последующей (ср. стр. 26).

Условие 1° требует, чтобы многогранник был поверхностью в обычном смысле слова, а условие 2° исключает из рассмотрения составные многогранники (аналогичные составным многоугольникам, см. выше).

Многогранник (не обязательно выпуклый) называется правильным (точнее, метрически правильным, в отличие от топологически правильного, см. определение на стр. 19), если все его многогранные углы — правильные и все его грани — правильные многоугольники.

**67. а)** Доказать, что в правильном многограннике равны между собой: все грани, все ребра, все плоские углы, все двугранные углы, все многогранные углы.

б) Доказать, что правильный многогранник можно совместить сам с собой так, чтобы любая его грань  $\mu_1$  и любое принадлежащее этой грани ребро  $m_1$  совпали соответственно с любой гранью  $\mu_2$  и принадлежащим ей ребром  $m_2$ .

Обратно, всякий многогранник, обладающий этим свойством, — правильный.

в) Доказать, что всякий правильный многогранник является и топологически правильным.

**68.** Доказать, что для любого правильного многогранника:

а) существует сфера, проходящая через все его вершины (описанная сфера, рис. 18, а);

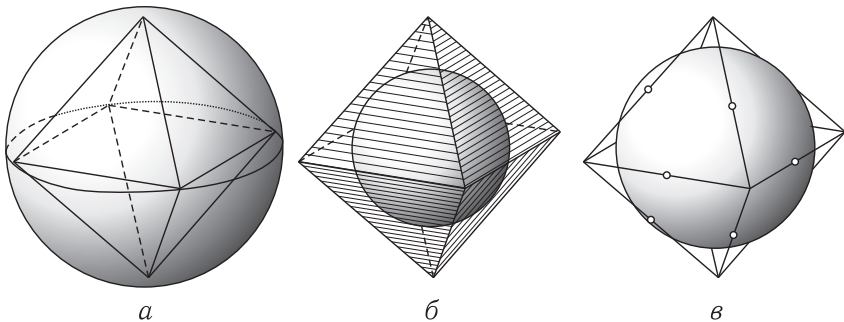


Рис. 18

- б) существует сфера, касающаяся всех его граней (вписанная сфера, рис. 18, б);  
 в) существует сфера, касающаяся всех его ребер (полувписанная сфера, рис. 18, в);  
 г) центры этих трех сфер совпадают.

Примечание. Общий центр описанной, вписанной и полувписанной сфер называется центром правильного многогранника.

**69\***. Доказать, что два правильных многогранника одного комбинаторного типа, имеющие грани и многогранные углы одного и того же вида, подобны <sup>1)</sup>.

**70\***. Пусть  $T$  — правильный многогранник. Проведем через середину каждого его ребра касательную к полувписанной сфере, перпендикулярную к этому ребру (т.е. повернем каждое ребро многогранника  $T$  на  $\frac{\pi}{2}$  вокруг радиуса полувписанной сферы).

Доказать, что

- а) Прямые, соответствующие сторонам одной грани многогранника  $T$ , пересекаются в одной точке (рис. 19, а).

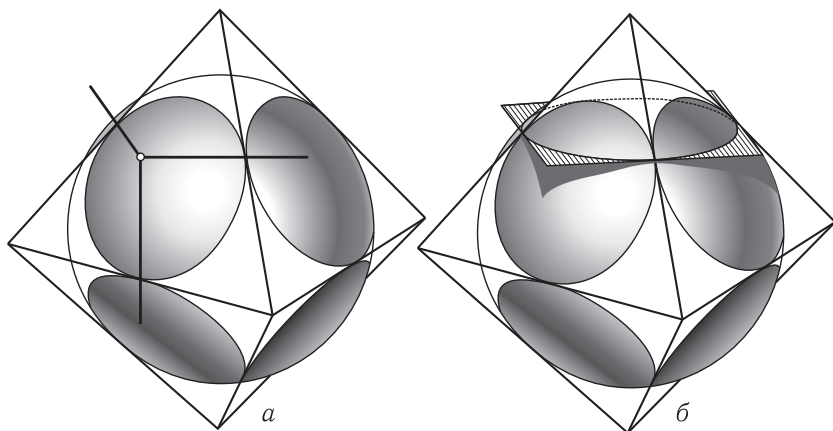


Рис. 19

- б) Прямые, соответствующие ребрам, исходящим из одной вершины многогранника  $T$ , лежат в одной плоскости (рис. 19, б).

<sup>1)</sup> Фигуры называются подобными, если 1) между их точками установлено взаимно однозначное соответствие; 2) углы, определяемые сходственными прямыми, равны.

Из результатов задач 70, а и б следует, что полученные прямые, соответствующие ребрам многогранника  $T$ , точки их пересечения, соответствующие граням многогранника  $T$ , и плоскости, соответствующие вершинам многогранника  $T$ , образуют систему ребер вершин и граней некоторого нового многогранника  $T'$  (рис. 20), называемого *взаимным* многограннику  $T$ . Из самого построения многогранника вытекает, что числа ребер, вершин и граней многогранника  $T'$  равны, соответственно, числам ребер, граней и вершин многогранника  $T$ .

**71.** Доказать, что многогранник, взаимный правильному, также является правильным.

Пусть правильный многогранник  $T_1$  взаимен многограннику  $T$ . Тогда правильный многогранник  $T_2$ , подобный многограннику  $T_1$ , называется многогранником, *двойственным* многограннику  $T$ . Двойственные многогранники являются частным случаем полярных многогранников (см. задачу 47).

**72.** а) Доказать, что во всяком правильном многограннике центры граней одного многогранного угла лежат в одной плоскости.

б) Пусть  $T$  — правильный многогранник. Доказать, что многогранник, вершинами которого служат центры граней многогранника  $T$ , ребрами — отрезки, соединяющие центры смежных граней  $T$ , а гранями — плоскости, проходящие через центры граней  $T$ , примыкающих к одной вершине (рис. 21), является правильным многогранником, двойственным многограннику  $T$ .

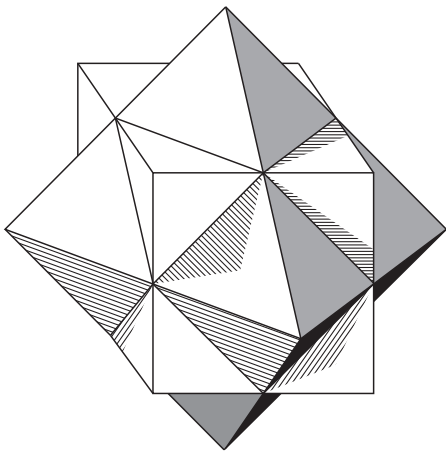


Рис. 20

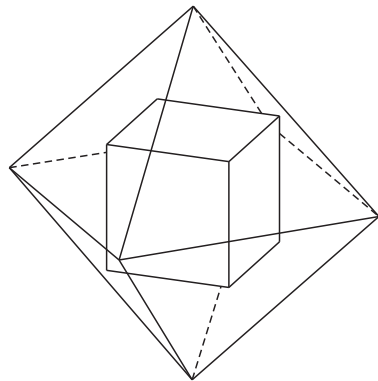


Рис. 21



**73.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — два двойственных правильных многогранника. Доказать, что если сферы, вписанные в многогранники  $T_1$  и  $T_2$ , равны, то описанные сферы также равны.

**74.** Найти все выпуклые правильные многогранники.

Пусть дан какой-нибудь правильный (вообще говоря, невыпуклый) многогранник  $T$ . Плоскости его граней делят пространство на несколько областей. Та из областей, в которой лежит центр многогранника, называется ядром этого многогранника.

**75.** Доказать, что ядро всякого правильного многогранника — выпуклый правильный многогранник с тем же числом граней и тем же числом сторон каждой грани, что у исходного многогранника.

Ядро выпуклого правильного многогранника, очевидно, совпадает с самим этим многогранником. Если  $T$  — невыпуклый правильный многогранник, то в силу задачи 75 ему соответствует некоторый выпуклый правильный многогранник с тем же числом граней и числом сторон у каждой грани — именно, его ядро  $T'$ . Следовательно, произвольный правильный многогранник имеет либо четыре треугольных грани (тетраэдр), либо шесть четырехугольных граней (гексаэдр), либо восемь треугольных граней (октаэдр), либо 12 пятиугольных (выпуклых или звездчатых) граней (додекаэдр), либо 20 треугольных граней (икосаэдр). При этом грани  $T$  лежат в тех же плоскостях, что грани  $T'$  и вид многогранника  $T$  определяется тем, какие из этих плоскостей будут определять смежные грани многогранника  $T$ . При этом представляются две возможности.

А. Смежными в  $T$  являются грани, смежные и в  $T'$ . Тогда ребра многогранников  $T$  и  $T'$  лежат на одних и тех же прямых и каждая грань многогранника  $T$  получается продолжением сторон соответствующей грани многогранника  $T'$ , т. е. многогранник  $T$  получается продолжением ребер  $T'$  (ср. с. 28). Грани  $T$  в этом случае необходимо звездчатые (если  $T$  не совпадает с  $T'$ ).

Б. Смежными в  $T$  являются грани, не смежные в  $T'$ . В этом случае  $T$  получается путем продолжения граней многогранника  $T'$ : для получения грани  $\mu$  многогранника  $T$ , лежащей в плоскости некоторой грани  $\mu'$  многогранника  $T'$ , грань  $\mu'$  должна быть продолжена до пересечения с плоскостями некоторых из не смежных с  $\mu'$  граней многогранника  $T'$ . Эти плоскости, очевидно, должны образовывать равные двугранные углы с  $\mu'$  и между собой, а их число должно быть равно числу сторон каждой грани многогранника  $T'$ . Грани  $T$  могут быть в этом случае как выпуклыми, так и звездчатыми.

**76.** а) Доказать, что существует только один тип правильно-го тетраэдра, именно правильный выпуклый тетраэдр.

б) Доказать, что существует только один тип правильного гексаэдра, именно правильный выпуклый гексаэдр, или куб.

в) Доказать, что существует только один тип правильного октаэдра, именно правильный выпуклый октаэдр.

**77\*.** а) Найти все возможные типы правильных додекаэдров.

б) Найти все возможные типы правильных икосаэдров.

Пересечение двух взаимных правильных многогранников называется почти правильным многогранником (рис. 22)<sup>1)</sup>.

Вершинами почти правильного многогранника являются общие середины ребер исходных взаимных многогранников, а каждая его грань получается из грани одного из исходных многогранников соединением середин смежных сторон. Очевидно, в каждой вершине почти правильного многогранника сходится ровно четыре ребра, а грани являются правильными многоугольниками двух типов — в соответствии с типом граней исходных взаимных многогранников. При этом к каждому ребру почти правильного многогранника примыкает по одной грани каждого из типов.

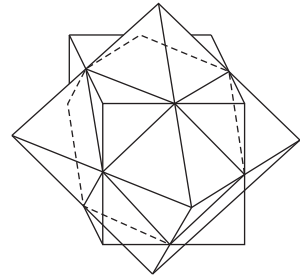


Рис. 22

**78.** Пусть число граней, ребер и вершин одного из двух взаимных правильных многогранников равно соответственно  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{B}$ , причем в каждой вершине этого многогранника сходится  $n$  ребер. Найти числа вершин соответствующего почти правильного многогранника.

**79.** а) Доказать, что все двугранные углы почти правильного многогранника равны.

б) Доказать, что все многогранные углы почти правильного многогранника равны.

**80.** Найти все почти правильные многогранники.

<sup>1)</sup> Многогранник называется равноугольно-полуправильным, или архимедовым, если его гранями служат правильные многоугольники различных типов, а его многогранные углы все равны между собой (см., например, Д. И. П е р е л к и н, Элементарная геометрия, ч. 2. Гостехиздат, 1949. С. 289). Примером такого многогранника может служить  $n$ -угольная призма с квадратными боковыми гранями. Как явствует из задачи 79, почти правильные многогранники — частный случай архимедовых (см. решение задачи 79). Однако они выделяются среди них своей правильностью. Так, например, у них равны и двугранные углы.

Теорией правильных многоугольников и многогранников начали интересоваться еще в древние века. Открытие пяти правильных многогранников, наряду с открытием иррациональных чисел и доказательством пифагоровой теоремы, приписывается Пифагору Самосскому (жил около 500 г. до н. э.). Пифагорейцы знали также разбиение плоскости на равные правильные многоугольники (см. задачу 81). Теории правильных многогранников придал законченный вид Евклид (300 г. до н. э.). В последней, тринадцатой книге своих «Начал» он «вычисляет» ребра правильных многогранников: тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра (т. е. указывает, как по диаметру описанного шара построить ребро данного правильного многогранника); приводит построения самих правильных многогранников, из которых вытекает, что названные пять правильных многогранников существуют в действительности, и, наконец, доказывает, что других правильных (выпуклых) многогранников существовать не может. Построение правильных многогранников как бы венчает труд Евклида, и под влиянием этого еще с давних пор стали включать в «Начала» в качестве четырнадцатой и пятнадцатой книг исследования позднейших авторов, также посвященные правильным многогранникам.

Правильными многогранниками интересовались и многие позднейшие математики, в том числе и Иоганн Кеплер. Кеплер первый заметил, что, наряду с правильными выпуклыми многогранниками, могут существовать правильные звездчатые, и нашел два таких многогранника. Еще два правильных звездчатых многогранника нашел французский математик XVIII века Пуансо. Наконец, О. Коши доказал, что четыремя многогранниками Кеплера – Пуансо исчерпываются все возможные правильные звездчатые многогранники. Теория Коши изложена в задачах 75, 76 и 77 настоящего раздела.

Интересные приложения получили правильные многогранники в алгебре. Более подробно об этом можно прочитать в книге Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», т. I, раздел Алгебра. ОНТИ, М.–Л., 1935 г. Укажем только, что Клейну удалось показать, что из геометрических свойств икосаэдра с необходимостью вытекает, что общее уравнение пятой степени не может быть решено в радикалах. (Первое доказательство теоремы о невозможности решения в радикалах общего уравнения пятой степени дал Н. Абель.)

Внимание математиков привлекли также правильные многогранники в пространствах с числом измерений, большим трех (точнее, следовало бы сказать правильные политопы, аналогично полигонам — многоугольникам и полиэдрам — многогранникам; употребителен также термин «ячейка»). Оказалось, что в четырехмерном пространстве существует шесть правильных выпуклых политопов, причем четырехмерный куб имеет специальное название — тессеракт; а в пространстве с числом измерений  $n \geq 5$  правильных политопов существует только три —  $n$ -мерный аналог тетраэдра,  $n$ -мерный аналог куба и  $n$ -мерный аналог октаэдра. Были найдены также все четырехмерные правильные звездчатые политопы. Две таблицы с важнейшими характеристиками правильных политопов приведены

в книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия». М.–Л., Гостехиздат, 1951. В качестве дополнительной литературы к этому разделу кроме упомянутой выше книги Гильберта и Кон-Фоссена можно также рекомендовать цикл статей по наглядной геометрии в журнале «Успехи математических наук», старая серия, вып. X, М.–Л., 1944, а также гл. XIX «Курса элементарной геометрии» Д. И. Перепелкина. Гостехиздат, М.–Л., 1949.

## 4. Разрезание и складывание фигур

### А. Вводные задачи

Условимся говорить, что из многоугольников данного вида устроен паркет, если вся плоскость покрыта без просветов и двойных покрытий многоугольниками, равными данному.

**81.** Из каких правильных многоугольников одного вида можно сложить паркет?

**82.** Доказать, что можно сложить паркет:

а) из треугольников, равных произвольно заданному треугольнику;

б) из четырехугольников, равных произвольно заданному четырехугольнику;

в) из шестиугольников, равных произвольно заданному центрально-симметричному шестиугольнику.

**83\*\*.** Доказать, что если число сторон выпуклого многоугольника  $M$  не меньше семи, то из многоугольников этого вида нельзя сложить паркет.

Остается ли это предложение справедливым, если не требовать выпуклости многоугольника  $M$ ?

Кроме треугольников, выпуклых четырехугольников и выпуклых центрально-симметричных шестиугольников существует целый ряд типов выпуклых пятиугольников и шестиугольников, из которых также можно сложить паркет. Однако перечислить все возможные типы и доказать, что других нет, довольно сложно.

---

**84.** Доказать, что всякий треугольник можно разрезать на четыре части и сложить из них два треугольника, подобных первоначальному.

**85.** Диагонали выпуклого 17-угольника, проведенные из одной вершины, разбивают его на 15 треугольников. Можно ли выпуклый 17-угольник разрезать на 14 треугольников?

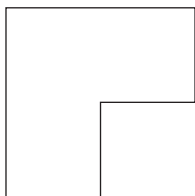
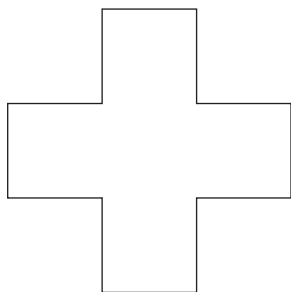


Рис. 23

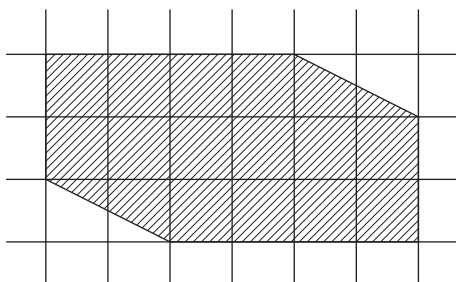
А невыпуклый 17-угольник? Каково наименьшее число треугольников, на которые можно разрезать 17-угольник?

**86.** Разрезать изображенную на рис. 23 фигуру, составленную из трех равных квадратов, на четыре равные части.

**87.** а) Как перекроить крест (рис. 24, а) в квадрат?



а



б

Рис. 24

б) Разрезать шестиугольник, изображенный на рис. 24, б, на две части, из которых можно сложить квадрат.

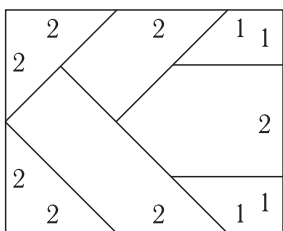


Рис. 25

**88.** Разрезать два данных квадрата на части так, чтобы из них можно было сложить один квадрат.

**89.** Как разрезать правильный треугольник на пять частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

**90\*.** Доказательство теоремы Пифагора, основанное на разрезании и складывании фигур. На сторонах произвольного

треугольника построены квадраты. Разрезать квадраты, построенные на катетах, на части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат, построенный на гипотенузе.

**91.** Известная игра «головоломка» заключается в следующем. Прямоугольная пластинка размером  $4 \times 5$  разрезана на семь частей так, как это изображено на рис. 25.

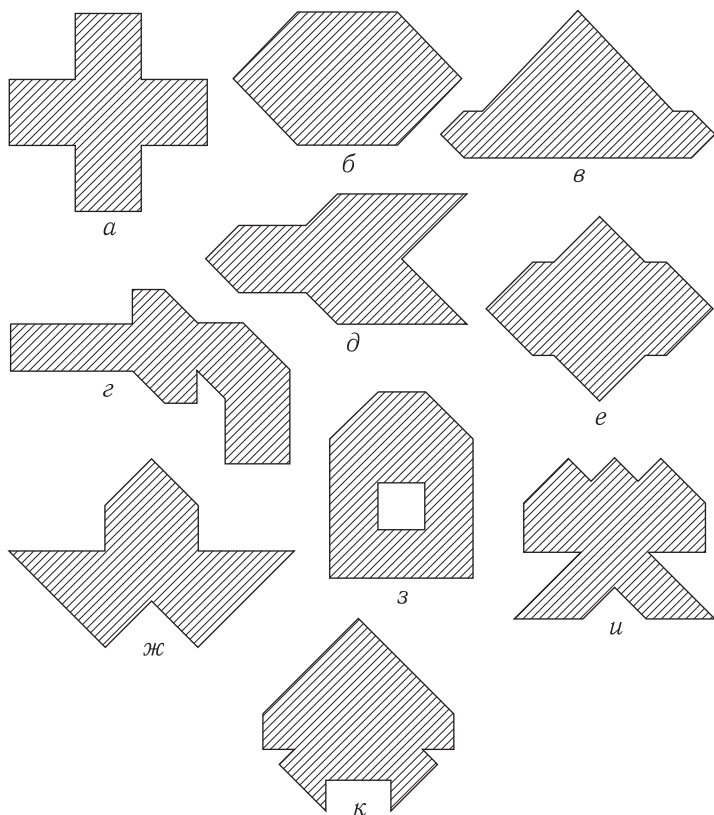


Рис. 26

Сложите из этих частей фигуры, изображенные на рис. 26 (все они взяты из приложенного к игре альбома, содержащего более 130 различных фигур).

**92.** Разрезать прямоугольный параллелепипед с отношением сторон  $8 : 8 : 27$  на четыре части, из которых можно сложить куб.

**93.** Разрезать куб на три равные пирамиды.

**94.** Из одинаковых кирпичиков, подобных изображенному на рис. 27, сложить выпуклый многогранник.

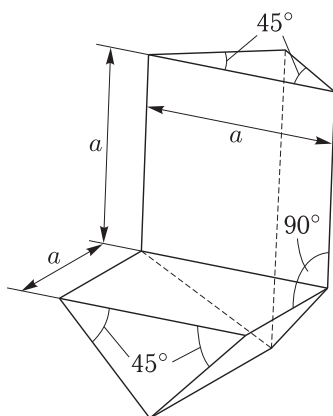


Рис. 27

## Б. Равновеликость и равноставленность

Два плоских многоугольника называются *равноставленными*, если эти многоугольники можно разбить на одинаковые многоугольные части. Так, например, многоугольники  $M_1$  и  $M_2$ , изображенные на рис. 28, являются равноставленными; тонкие линии на этом чертеже показывают, как можно осуществить разбиение  $M_1$  и  $M_2$  на равные многоугольники.

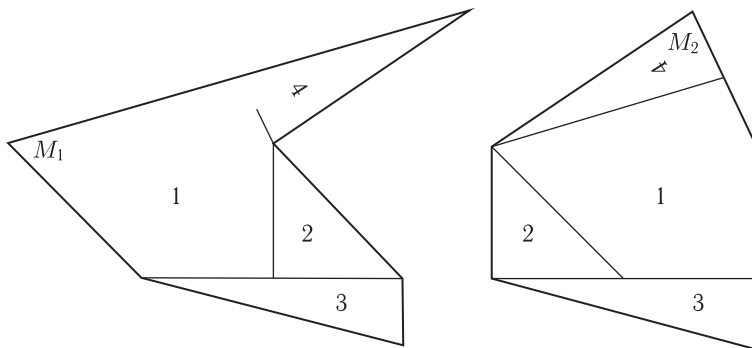


Рис. 28

Совершенно очевидно, что равноставленные многоугольники *равновелики*, т. е. имеют одинаковые площади. Возникает естественный вопрос, верно ли и обратное, т. е. каждые ли два многоугольника, имеющие равную площадь, можно составить из одинаковых многоугольников, лишь по-разному расположенных. В задаче 97 этот вопрос решается утвердительно.

**95.** Доказать, что два многоугольника, равноставленные порознь третьему, равноставлены между собой.

**96.** а) Доказать, что всякие два равновеликих прямоугольника равноставлены.

б) Доказать, что всякие два равновеликих треугольника равноставлены.

**97\*.** Теорема Больяи – Гервина. Доказать, что всякие два равновеликих многоугольника равноставлены.

Когда в курсе элементарной геометрии доказывают равенство площадей двух многоугольников, то используют два приема: либо разбивают оба многоугольника на соответственно равные более мелкие многоугольники (так поступают, например, когда доказывают, что треугольник равновелик прямоугольнику, одна из сторон которого равна большей стороне треугольника, а другая — половине высоты, опущенной на большую сторону); либо дополняют оба многоугольника

до двух равных многоугольников, прикладывая к каждому из них соответственно равные вспомогательные многоугольники (так поступают, доказывая, что параллелограмм равновелик прямоугольнику с теми же основанием и высотой). Как следует из теоремы задачи 97 (впервые доказанной еще в 1832 г. венгерским геометром Ф. Больяи; более простое доказательство той же теоремы было дано в 1833 г. немецким математиком Гервином), метод дополнения, по существу, оказывается ненужным, равновеликость многоугольников может быть доказана только путем разрезания и складывания. Поэтому вся теория площадей многоугольников может быть изложена при помощи одного метода разложения, так как задача измерения площади любой фигуры сводится к измерению стороны равновеликого ей квадрата. (Разумеется, это не относится к задаче измерения площади круга или иной криволинейной фигуры — здесь неизбежно приходится прибегать в той или иной форме к теории пределов. Читатель сможет без труда доказать, например, что круг нельзя разрезать на конечное число частей, из которых можно было бы сложить квадрат.)

Аналогично понятию равноставленных многоугольников можно ввести понятие равноставленных многогранников: два многогранника называются равноставленными, если их можно разбить на одинаковые многогранные части. Опять-таки очевидно, что равноставленные многогранники равновелики. Показать, однако, что равновеликие многогранники равноставлены, долгое время никому не удавалось. Наконец, в 1901 г. немецким математиком М. Деном было доказано, что, вообще говоря, дело обстоит не так; однако, рассуждения Дена были весьма сложными. Два года спустя очень изящное и сравнительно простое доказательство результата Дена было дано нашим геометром проф. В. Ф. Каганом. Читатель сможет познакомиться с этим доказательством по прекрасной популярной книжке В. Ф. Кагана «О преобразовании многогранников», ГТТИ, М.—Л., 1933.

Из результатов Дена—Кагана вытекает, что при выводе формул объемов многогранников недостаточно пользоваться методом разложения или методом дополнения; в частности, оказывается, что правильный тетраэдр и равновеликий ему куб не равноставлены, и в то же время их нельзя дополнить до равных или хотя бы равноставленных многогранников. Именно поэтому при выводе формулы объема пирамиды в курсе средней школы приходится прибегать к теории пределов.

Из теоремы Дена—Кагана следует, что равноставленность равновеликих многогранников является исключением: как правило, два равновеликих многогранника не будут равноставленными. В задачах 98–100 приведены некоторые примеры равновеликих многогранников, которые все же являются равноставленными.

**98.** Доказать, что

а) Равновеликие прямоугольные параллелепипеды равноставлены.

б) Равновеликие призмы равноставлены.



**99\***. Доказать, что два зеркально равных многогранника (см. задачу 58, с. 22) равносоставлены<sup>1)</sup>.

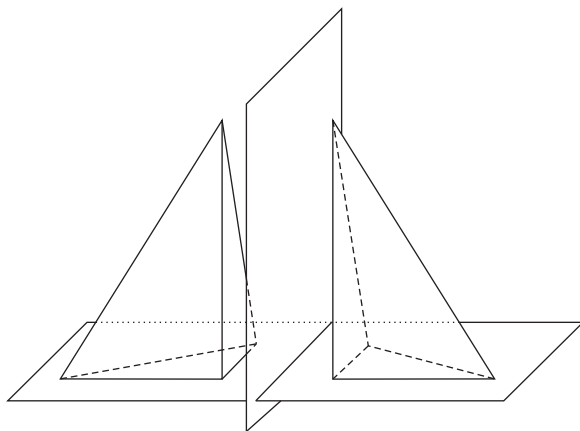


Рис. 29

**100\*\***. Доказать, что два равновеликих многогранника с центрально-симметричными гранями равносоставлены.

### **В. Разбиение прямоугольников на попарно различные квадраты<sup>2)</sup>**

**101**. Доказать, что если выпуклый многоугольник  $P$  можно сложить из конечного числа неперекрывающихся прямоугольников  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , то  $P$  есть прямоугольник.

**102\***. а) Доказать, что из 2, 3 или 4 попарно различных неперекрывающихся квадратов нельзя сложить прямоугольник.

- б) То же для случая пяти квадратов.
- в) То же для случая шести квадратов.
- г) То же для случая семи квадратов.
- д) То же для случая восьми квадратов.

<sup>1)</sup> Два зеркально равных тела (рис. 29), вообще говоря, нельзя совместить посредством движения (см., например, М. Я. Выгодский, Справочник до элементарной математики, Гостехиздат, 1954, с. 319).

<sup>2)</sup> Фигуры называются попарно различными, если среди них нет двух, равных между собой.

**103\***. а) Показать, что существуют девять попарно различных квадратов, из которых можно сложить некоторый прямоугольник.

б) Из 10 попарно различных квадратов сложить прямоугольник со сторонами 47 и 65.

в) Показать, что каково бы ни было число  $n$ , большее восьми, всегда можно найти  $n$  попарно различных квадратов, из которых можно сложить прямоугольник.

**104\***. Из 13 квадратов со сторонами 3, 5, 9, 11, 14, 19, 20, 24, 31, 33, 36, 39, 42 двумя различными способами сложить прямоугольник со сторонами 75 и 112.

**105\*\***. Доказать, что прямоугольник с отношением сторон 13 : 16 можно двумя различными способами сложить из попарно различных квадратов, причем ни один из квадратов, участвующих в первом разложении, не равен никакому из квадратов, участвующих во втором разложении.

**106\*\***. а) Доказать, что квадрат можно сложить из попарно различных квадратов.

б) Доказать, что каждый прямоугольник, стороны которого соизмеримы, можно сложить из попарно различных квадратов.

Примечание. Очевидно, что теорема задачи 106, б является значительным обобщением теоремы задачи 106, а.

В популярной книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп», М.–Л., Гостехиздат, 1949, тема 5, с. 9, утверждается, что неизвестно, можно ли разложить квадрат на попарно неравные квадраты. Результат задачи 106, а дает ответ на этот вопрос (теоремы задач 106, а и б были доказаны лишь в самое последнее время, после выхода в свет польского подлинника книги Штейнгауза).

**107\*\***. Доказать, что никакой прямоугольник, стороны которого несоизмеримы, не может быть составлен из попарно различных квадратов.

Теоремы задач 106, б и 107 могут, очевидно, быть сформулированы следующим образом: прямоугольник можно разрезать на попарно различные квадраты в том и только том случае, если его можно разрезать на равные квадраты.

**108\***. Доказать, что никакой выпуклый многоугольник нельзя сложить из двух или большего числа неперекрывающихся попарно различных правильных треугольников.

Можно было бы поставить задачу: какие выпуклые фигуры можно сложить из правильных пятиугольников или шестиугольников и т. д.

Однако легко видеть, что эта задача не содержательна: при  $n \geq 5$  ни из какого числа (большего или равного двум) правильных  $n$ -угольников, даже необязательно попарно различных, нельзя сложить никакого выпуклого многоугольника.

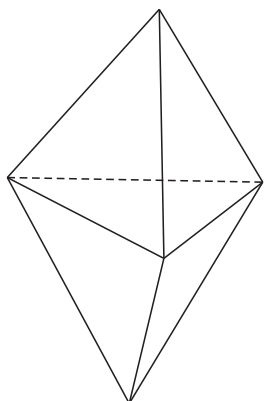


Рис. 30

**109.** Доказать, что никакой выпуклый многогранник нельзя сложить из двух или большего числа неперекрывающихся попарно различных

- а) кубов;
- б) правильных тетраэдров;
- в) правильных октаэдров;
- г) правильных икосаэдров;
- д) правильных додекаэдров.

**110\*.** а) Доказать, что единственным выпуклым многогранником, который можно сложить из некоторого числа (не меньшего двух) правильных тетраэдров (не обязательно попарно различных) является бипирамида, образованная двумя равными тетраэдрами, сложенными основаниями (рис. 30).

б) Доказать, что ни из какого числа (не меньшего двух) правильных октаэдров (не обязательно попарно различных) нельзя сложить никакого выпуклого многогранника.

**111.** а) Составить выпуклый многогранник из правильных тетраэдров и правильных октаэдров.

б) Заполнить пространство правильными тетраэдрами и правильными октаэдрами.

## Г. Разбиение многоугольников на параллелограммы и многогранников на параллелепипеды. Зонаэдры

**112.** Доказать, что никакой выпуклый 13-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

**113.** а) Доказать, что всякий выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы.

б) Каково наименьшее возможное число параллелограммов, на которые можно разбить центрально-симметричный выпуклый  $2k$ -угольник?

Примечание. Очевидно, что число сторон любого центрально-симметричного многоугольника четно, т.е. имеет вид  $2k$  (ибо все

стороны такого многоугольника можно разбить на пары равных и параллельных).

**114.** Доказать, что если для каждой стороны выпуклого многоугольника можно найти ей равную и параллельную сторону, то многоугольник имеет центр симметрии.

Верно ли это предложение для невыпуклых многоугольников?

**115.** Доказать, что если выпуклый многоугольник можно разбить на более мелкие многоугольники, каждый из которых имеет центр симметрии, то и сам многоугольник имеет центр симметрии.

Остается ли это предложение верным для невыпуклых многоугольников?

Примечание. Из теорем задач 113, а и 115 в частности следует, что выпуклый многоугольник в том и только том случае можно разбить на параллелограммы, если он имеет центр симметрии.

**116\*\*.** Теорема А. Д. Александрова. Если в выпуклом многограннике все грани имеют центры симметрии, то и сам многогранник имеет центр симметрии.

Остается ли эта теорема справедливой и для невыпуклых многогранников?

**117\*.** Доказать, что всякий выпуклый многогранник с центрально-симметричными гранями можно разбить на параллелепипеды.

**118.** Доказать, что если выпуклый многогранник можно разбить на более мелкие многогранники с центрально-симметричными гранями, то все грани большого многогранника тоже имеют центры симметрии.

Остается ли верным это предложение и для невыпуклых многогранников?

Примечание. Из теорем задач 117 и 118 в частности следует, что выпуклый многогранник в том и только том случае можно разбить на параллелепипеды, если все грани этого многогранника имеют центры симметрии.

**119.** Доказать, что если все грани выпуклого многогранника — параллелограммы, то число граней многогранника равняется произведению двух последовательных чисел.

Можно доказать, что и обратно, если целое число  $n$  равно произведению двух последовательных целых чисел, то существует выпуклый  $n$ -гранник, все грани которого являются параллелограммами.

Из приведенных задач видно, что многогранники с центрально-симметричными гранями (такие многогранники иногда называются *зоноэдрами*) в каком-то смысле можно рассматривать как пространственные аналоги центрально-симметричных многоугольников (ср., например, задачи 113, а и 117, 115 и 118, решения задач 114 и 116).

Зонаэдры имеют ряд важных приложений в кристаллографии. Впервые такие многогранники начал изучать знаменитый русский кристаллограф, основатель математической кристаллографии Е. С. Федоров (1853–1919 гг.). Его исследования были продолжены в работах Б. Н. Делоне и А. Д. Александрова, получивших ряд новых важных результатов по теории выпуклых многогранников и по математической теории структурного анализа кристаллов.

Очень интересным вопросом из теории зонаэдров, близким к задачам, разбираемым в этом цикле, является вопрос о параллелоэдрах, т. е. о многогранниках, которые могут в параллельном расположении полностью заполнять пространство (примерами параллелоэдров могут служить параллелепипед или шестиугольная призма с центрально-симметричным основанием; см. рис. 31, а и б).

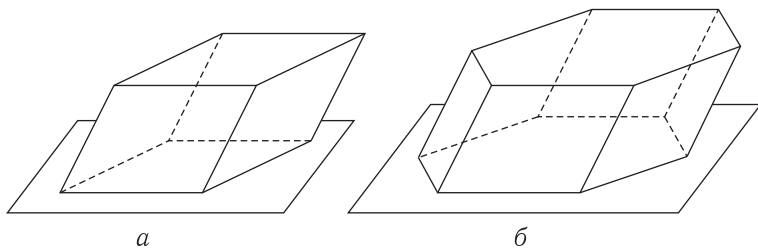


Рис. 31

Можно показать, что все параллелоэдры обязательно должны являться зонаэдрами. Принадлежащее Б. Н. Делоне изящное решение вопроса о параллелоэдрах (определение пяти возможных типов параллелоэдров) см. в одном из последних разделов «Задачника по геометрии» Б. Н. Делоне и О. К. Житомирского (М.–Л., Гостехиздат, 1952) и в более полном изложении — в книге А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (М.–Л., Гостехиздат, 1950).

## РЕШЕНИЯ

---

1. Пусть  $ABCD$  — произвольный пространственный четырехугольник,  $BD$  — его диагональ (рис. 32). Сравним сумму углов четырехугольника  $ABCD$  с суммой углов треугольников  $ABD$  и  $BCD$ , которая составляет  $4d$ . Рассмотрим трехгранные углы  $DABC$  и  $BACD$  соответственно с вершинами  $D$  и  $B$ . По известному свойству трехгранного угла

$$\angle ADC \leq \angle ADB + \angle BDC$$

(причем равенство будет только в случае совпадения всех трех плоскостей  $ADB$ ,  $ADC$  и  $BCD$ ),

$$\angle ABC \leq \angle ABD + \angle DBC.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB &\leq \angle ABD + \angle DBC + \\ &+ \angle BCD + \angle BDC + \angle ADB + \angle DAB = 4d, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

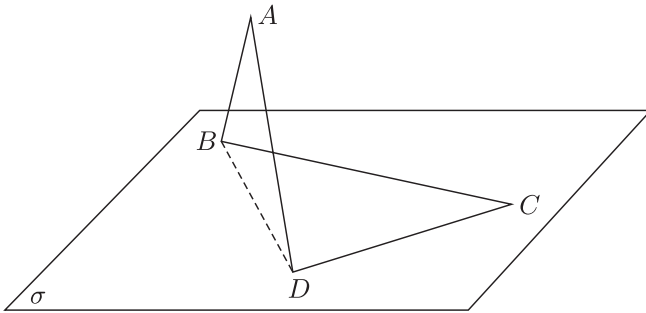


Рис. 32

2. Угол между прямой и плоскостью и угол между прямой и перпендикуляром к этой плоскости в сумме составляют  $90^\circ$ . Поэтому среди прямых, лежащих в плоскости  $\tau$  и проходящих через точку  $A$ , надо найти ту, которая образует наименьший угол с прямой  $AK$ ,  $AK \perp \sigma$  (рис. 33).

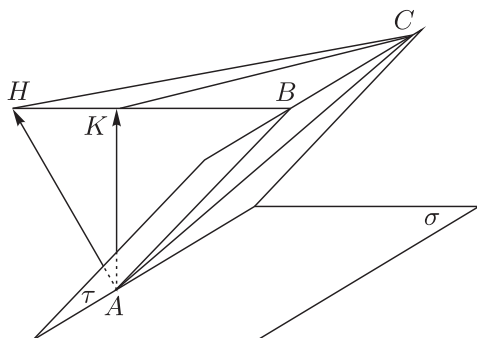


Рис. 33

Восставим перпендикуляр  $AH$  к плоскости  $\tau$ . По свойству трехгранного угла

$$\angle CAK \geq \angle CAN - \angle KAN,$$

причем знак равенства достигается лишь, если все три ребра лежат в одной плоскости. Таким образом,  $\angle CAK$  будет наименьшим, если прямая  $AC$  лежит в плоскости  $KAN$ . Но плоскость  $KAN$ , очевидно, перпендикулярна к плоскостям  $\sigma$  и  $\tau$  и, следовательно, к линии их пересечения. Значит, и прямая  $AB$ , образующая с плоскостью  $\sigma$  наибольший угол, перпендикулярна к линии пересечения плоскостей.

Примечание. Заметим, что попутно мы доказали теорему: Из всех углов, которые образует наклонная с прямыми плоскости, наименьшим будет угол между наклонной и ее проекцией.

**3.** Докажем требуемое утверждение для треугольника. Пусть треугольник  $ABC$  ортогонально проектируется на плоскость  $\alpha$  в треугольник  $A'B'C'$ , а плоскость треугольника  $ABC$  пересекается с плоскостью  $\alpha$  по прямой  $m$  (рис. 34). Через вершины треугольника  $ABC$  проведем прямые, параллельные прямой  $m$ . Средняя из них ( $AD$  на рис. 34) разбивает треугольник  $ABC$  на два треугольника —  $ABD$  и  $ACD$  с общим основанием  $AD \parallel m$ . Это основание проектируется в отрезок  $A'D' = AD$ . Высота же  $BH$  треугольника  $ABD$  перпендикулярна к  $m$ , поэтому она образует со своей проекцией угол, равный углу  $\varphi$  между плоскостями  $ABC$  и  $\alpha$ .

Таким образом,

$$S_{\triangle A'B'D'} = \frac{1}{2} A'D' \cdot B'H' = \frac{1}{2} AD \cdot BH \cdot \cos \varphi = S_{\triangle ABD} \cdot \cos \varphi.$$

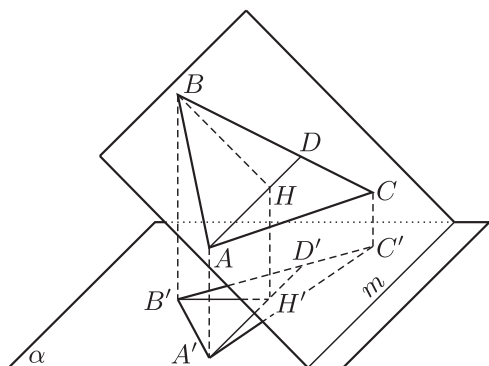


Рис. 34

Аналогично,

$$S_{\triangle A'C'D'} = S_{\triangle ACD} \cdot \cos \varphi.$$

Сложив эти равенства, получим

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы теперь доказать наше утверждение для произвольного многоугольника, достаточно разбить его на треугольники и к каждому из них применить доказанную теорему.

**4.** Проведем плоскость  $\sigma$ , параллельную данным прямым  $l$  и  $m$  и равноудаленную от них (рис. 35). Рассмотрим проекции  $l_1$  и  $m_1$  данных прямых  $l$  и  $m$  на плоскость  $\sigma$  и проекцию  $CD$  одного из рассматриваемых отрезков  $AB$  данной длины  $d$ . Имеем  $AC = BD$  и  $AC \parallel BD$ . Поэтому  $ADBC$  — параллелограмм. Середина  $M$  отрезка  $AB$  будет серединой и диагонали  $CD$ . В прямоугольном треугольнике  $СAM$  длина гипотенузы  $AM$  равна  $\frac{d}{2}$ , а  $AC = \frac{h}{2}$ , где  $h$  — длина общего перпендикуляра к прямым  $m$  и  $l$ . Поэтому длина  $CM$  равна  $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$ , т. е. не зависит от положения отрезка  $AB$ . Следовательно, отрезок  $CD$  также сохраняет постоянную длину. Таким образом, нужно найти в плоскости  $\sigma$  геометрическое место середин отрезка  $CD$  длины  $\sqrt{d^2 - h^2}$ , концы которого скользят по паре перпендикулярных прямых  $l_1$  и  $m_1$ . Но в прямоугольном треугольнике  $СOD$  (где  $O$  — точка пересечения прямых  $l_1$  и  $m_1$ ) медиана  $MO$  равна половине гипотенузы  $CD$  и, следовательно, длина медианы



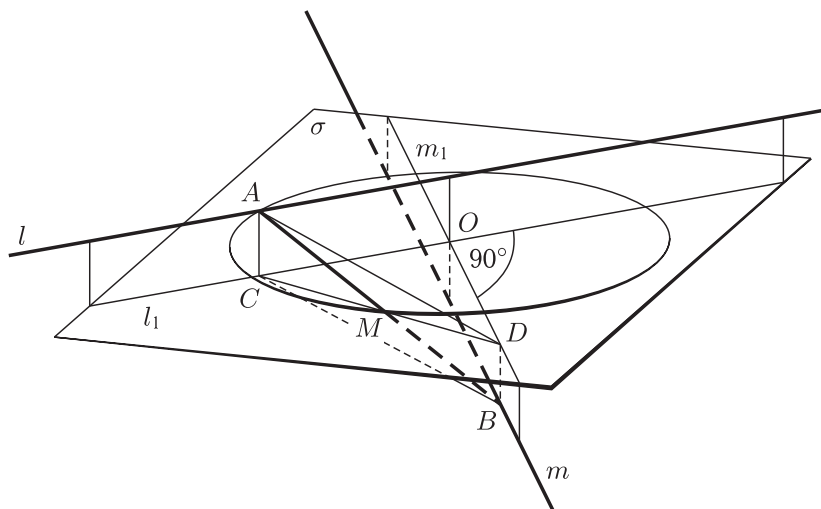


Рис. 35

постоянна, т.е. искомое геометрическое место есть окружность в плоскости  $\sigma$  с центром в точке  $O$  и радиусом  $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$ .

Проводя построение в обратном порядке, убеждаемся, что любая точка рассматриваемой окружности является серединой некоторого отрезка  $AB$  длины  $d$ , концы которого лежат на прямых  $l$  и  $m$ .

**5.** Пусть отрезки  $AB$  и  $CD$  скользят соответственно по прямым  $l_1$  и  $l_2$ . Через  $l_2$  проведем плоскость  $\pi$ , параллельную  $l_1$  (рис. 36).

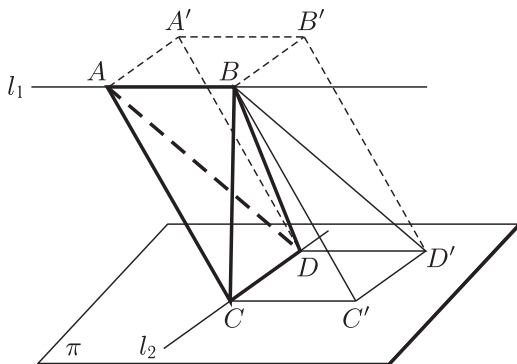


Рис. 36

В плоскости  $\pi$  через точки  $C$  и  $D$  проведем прямые, параллельные прямой  $l_1$ , и отложим на них отрезки  $CC'$  и  $DD'$ , равные  $AB$ . Объем тетраэдра  $ABCD$  равен разности между объемом клина  $ABCC'D'D$  и объемом пирамиды  $BCC'D'D$ ; последние же два объема не зависят от положения отрезков  $AB$  и  $CD$  на прямых  $l_1$  и  $l_2$ . В самом деле, объем пирамиды  $BCC'D'D$  измеряется одной третью произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V_{BCC'D'D} = \frac{1}{3} h \cdot AB \cdot CD \cdot \sin \varepsilon,$$

где  $h$  — длина общего перпендикуляра к прямым  $l_1$  и  $l_2$ , а  $\varepsilon$  — угол между этими прямыми. Объем клина  $ABCC'D'D$  равен

$$V_{ABCC'D'D} = \frac{1}{2} h \cdot AB \cdot CD \cdot \sin \varepsilon,$$

так как клин  $ABCC'D'D$  составляет половину параллелепипеда  $AA'B'BCDD'C'$ . Окончательно получаем

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= V_{ABCC'D'D} - V_{BCC'D'D} = \\ &= \frac{1}{2} h \cdot AB \cdot CD \cdot \sin \varepsilon - \frac{1}{3} h \cdot AB \cdot CD \cdot \sin \varepsilon = \\ &= \frac{1}{6} h \cdot AB \cdot CD \cdot \sin \varepsilon \end{aligned}$$

и, следовательно, объем тетраэдра не зависит от положения отрезков на прямых.

**6.** Пусть  $O$  — центр сферы, вписанной в пирамиду  $SABCDE$ ,  $H$  и  $P$  — соответственно точки касания сферы с основанием пирамиды и с некоторой ее боковой гранью  $SAB$  (рис. 37). В таком случае  $OH$  перпендикулярно к плоскости основания, а следовательно, и к прямой  $AB$ ;  $OP$  перпендикулярно к плоскости  $SAB$ , а следовательно, и к прямой  $AB$ . Отсюда вытекает, что плоскость  $POH$  перпендикулярна к  $AB$ . Обозначим через  $M$  точку пересечения этой плоскости с  $AB$ ; тогда  $MP \perp AB$  и  $MH \perp AB$ . Кроме того,  $MP = MH$  как две касатель-

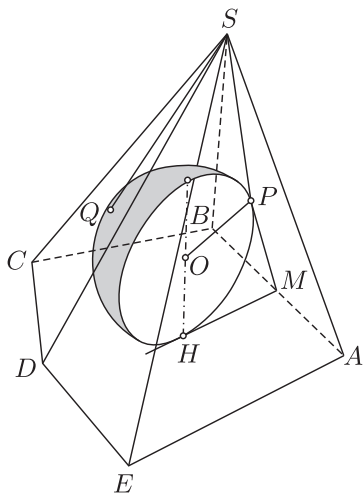


Рис. 37

ные к шару, проведенные из одной точки  $M$ . Таким образом, если совместить грань  $SAB$  с плоскостью основания, повернув ее вокруг прямой  $AB$ , то отрезок  $MP$  совпадет с  $MH$  и точка  $P$  попадет в точку  $H$ . Это доказывает первое утверждение задачи.

Второе утверждение сразу следует из первого и из того, что если  $Q$  есть точка касания сферы с другой боковой гранью пирамиды, то  $PS = QS$  как касательные, проведенные к сфере из одной точки  $S$ .

**7.** Пусть  $N_1$  (рис. 38) — точка пересечения перпендикуляра  $NN_1$  к основанию пирамиды с ее гранью  $SAB$ . Опустим из  $N$  перпендикуляр  $NM$  на ребро  $AB$ . Тогда  $N_1M \perp AB$  и  $\angle N_1MN = \varphi$  есть угол наклона грани  $SAB$  к плоскости основания; следовательно,  $NN_1 = NM \cdot \operatorname{tg} \varphi$ . Так как пирамида правильная, то угол  $\varphi$  для всех граней одинаков. Поэтому искомая сумма отрезков равна сумме расстояний от точки  $N$  до всех ребер основания пирамиды, умноженной на  $\operatorname{tg} \varphi$ . Таким образом, достаточно доказать, что эта последняя сумма расстояний не зависит от положения точки  $N$ .

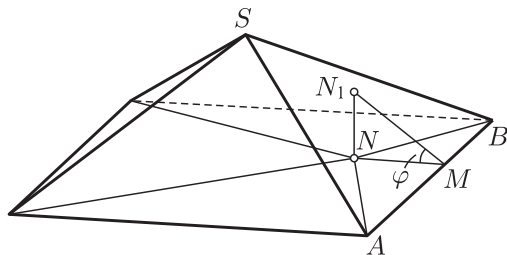


Рис. 38

Соединим точку  $N$  со всеми вершинами основания пирамиды. Тогда площадь треугольника  $NAB$  равна  $\frac{1}{2} AB \cdot NM = \frac{1}{2} a \cdot NM$ , где  $a$  — сторона правильного многоугольника. Сумма площадей всех таких треугольников равна площади  $Q$  многоугольника. Следовательно, сумма всех перпендикуляров равна  $\frac{2Q}{a}$ , т. е. не зависит от положения точки  $N$ .

**8.** а) Если все прямые проходят через одну общую точку, то утверждение задачи выполнено. Если же это не так, то найдутся три прямые  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , не имеющие общей точки. Проведем через прямые  $l_1$  и  $l_2$  плоскость  $\pi$ . Тогда прямая  $l_3$  имеет с плоскостью  $\pi$  две общие точки — точку пересечения

с  $l_1$  и точку пересечения с  $l_2$ . Следовательно,  $l_3$  целиком лежит в плоскости  $\pi$ .

Покажем, что любая другая прямая  $l_4$  (в случае, если число прямых более трех) также лежит в этой плоскости. Действительно,  $l_4$  имеет с каждой из прямых  $l_1, l_2, l_3$  общую точку. Среди этих трех точек найдется по крайней мере две различные, так как в противном случае прямые  $l_1, l_2$  и  $l_3$  пересекались бы в одной точке, что противоречит нашему предположению. Поэтому прямая  $l_4$  должна иметь с плоскостью  $\pi$  по крайней мере две общие точки, и, следовательно, также лежать в ней. Этим теорема доказана.

б) Если все окружности проходят через две общие точки, то утверждение задачи выполнено.

Допустим теперь, что все окружности не имеют двух общих точек. Тогда найдутся три окружности  $C_1, C_2$  и  $C_3$ , которые не будут иметь двух общих точек. Проведем через окружности  $C_1$  и  $C_2$  сферу (или плоскость, если они лежат на плоскости; см. задачу 30, б). Рассмотрим точки пересечения окружности  $C_3$  с окружностями  $C_1$  и  $C_2$ . Пусть окружность  $C_1$  пересекает окружность  $C_3$  в точках  $M$  и  $N$  (по условию точки  $M$  и  $N$  не совпадают). Далее могут представиться три возможности: 1° окружность  $C_2$  также проходит через точки  $M$  и  $N$ ; 2° окружность  $C_2$  проходит через одну из точек  $M$  или  $N$  и второй раз пересекает окружность  $C_3$  в третьей точке  $P$ ; 3° окружность  $C_2$  пересекает окружность  $C_3$  в точках  $P$  и  $Q$ , отличных от  $M$  и  $N$ . Случай 1° отпадает, так как мы предположили, что окружности  $C_1, C_2, C_3$  не имеют двух общих точек. Но и в случаях 2° и 3° окружность  $C_3$  пересекается с окружностями  $C_1$  и  $C_2$  по меньшей мере в трех различных точках; таким образом, окружность  $C_3$  имеет по крайней мере три общие точки со сферой (или с плоскостью), проведенной через окружности  $C_1$  и  $C_2$ , и, следовательно, лежит на этой сфере.

Покажем, что любая другая окружность  $C_4$  (в случае, если число окружностей более трех) также лежит на этой сфере. Действительно, она имеет с каждой из окружностей  $C_1, C_2, C_3$  по паре общих точек, причем обе точки каждой пары не совпадают. Среди этих шести точек найдутся по крайней мере три различные, ибо если бы таких точек было только две, то эта пара была бы общей для трех первых окружностей, что противоречит нашему предположению. Поэтому любая четвертая окружность должна иметь со сферой по крайней мере три общие точки и, следовательно, также лежать на ней. Этим теорема доказана.

Замечание. Решения задач 8, а и б можно объединить в одно, причем задача 8, а будет частным случаем задачи 8, б. Для этого надо ввести фиктивную бесконечно удаленную точку и считать прямой окружностью бесконечно большого радиуса. Тогда в новой терминологии прямые будут называться окружностями, а плоскости — сферами, проходящими через фиктивную точку. При этом две пересекающиеся прямые будут всегда пересекаться в двух точках — в обычной точке пересечения и в фиктивной.

9. Пусть  $A_1A_2\dots A_n$  — данная ломаная,  $A_1A_n$  — прямая, проходящая через ее концы,  $B$  — точка, делящая пополам периметр ломаной (рис. 39). Отрезок, которому принадлежит точка  $B$ , пусть будет  $A_iA_{i+1}$ .

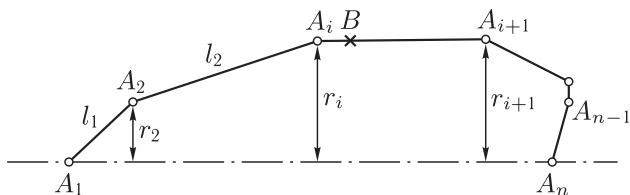


Рис. 39

Поверхность вращения ломаной может состоять из конусов, усеченных конусов и, может быть, цилиндров (конусы и усеченные конусы в частном случае могут вырождаться в круги и кольца) (рис. 40). Площадь боковой поверхности любого такого тела выражается общей формулой  $S_j = \pi l_j(r_{j+1} + r_j)$ , где  $l_j$  — длина образующей  $A_jA_{j+1}$ , а  $r_j$  и  $r_{j+1}$  — расстояния от точек  $A_j$  и  $A_{j+1}$  до оси вращения. Обозначим через  $\rho_j$  длину ломаной  $A_1A_2\dots A_j$ . Тогда, очевидно,  $\rho_j > r_j$ . Так как

$$l_j = \rho_{j+1} - \rho_j,$$

то площадь  $S_j$  поверхности, получаемой при вращении отрезка  $A_jA_{j+1}$ , равна

$$S_j = \pi l_j(r_{j+1} + r_j) \leq \pi l_j(\rho_{j+1} + \rho_j) = \pi (\rho_{j+1}^2 - \rho_j^2). \quad (*)$$

Рассмотрим площадь поверхности вращения ломаной  $A_1B$ . Она равна сумме площадей  $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$  и площади, получаемой при вращении отрезка  $A_iB$ . Сложим почленно неравенства (\*). Выражения, стоящие в правых частях этих неравенств, суть площади круговых колец, внутренний и внешний радиусы которых соответственно равны  $\rho_j$  и  $\rho_{j+1}$ . Поэтому площадь рассмотренной части поверхности не превосходит площади круга

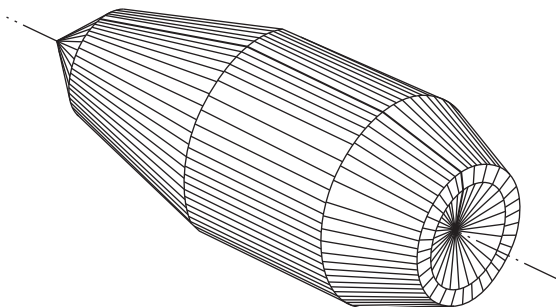


Рис. 40

радиуса  $\frac{d}{2}$  (рис. 41), которая равна  $\frac{\pi d^2}{4}$ . Точно так же получаем, что площадь поверхности вращения ломаной  $BA_{i+1} \dots A_{n-1}A_n$  также меньше  $\frac{\pi d^2}{4}$ , поэтому площадь всей поверхности не превосходит  $\frac{\pi d^2}{2}$ , что и требовалось доказать.

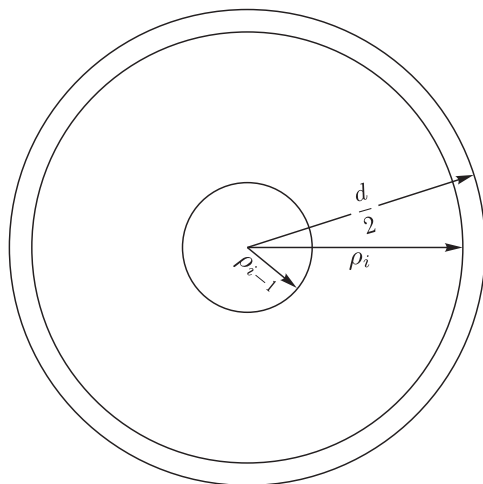


Рис. 41

**Замечание 1.** Наше утверждение справедливо и для невыпуклых ломаных; только в этом случае пришлось бы, вообще говоря, рассматривать также и самопересекающиеся поверхности.

**Замечание 2.** Площадь поверхности равна  $\frac{\pi d^2}{2}$  только в том случае, когда вся ломаная лежит на прямой, перпендикулярной к оси

вращения (тогда все неравенства превращаются в равенства), но в таком случае сама ломаная вырождается в дважды покрытый отрезок.

Однако, рассматривая ломаные вида  $A_1A_2A_3$ , где  $A_1A_2 = A_2A_3$  и  $A_1A_3$  достаточно мало (рис. 42), мы сможем получить поверхность рассматриваемого вида, площадь которой сколь угодно мало отличается от  $\frac{\pi d^2}{2}$ .

**10.** а) Пусть  $O$  — центр шара,  $O_\alpha$  — центр круга, полученного при сечении шара  $U$  плоскостью  $\alpha$ , проходящей через данную прямую  $a$  (рис. 43). Проведем  $OH \perp a$  и соединим  $O$  с  $O_\alpha$ . По известному свойству шара  $OO_\alpha$  перпендикулярно к плоскости  $\alpha$ . По теореме о трех перпендикулярах  $O_\alpha H \perp a$ . Из этого следует, что все прямые  $O_\alpha H$  (при разных плоскостях  $\alpha$ ) расположены в одной плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $H$  перпендикулярно к прямой  $a$ . Кроме того, все углы  $OO_\alpha H$  — прямые, следовательно, все искомые центры расположены на заключенной внутри шара  $U$  части окружности  $K$ , лежащей в плоскости  $\pi$  и имеющей отрезок  $OH$  своим диаметром.

Пусть, обратно,  $O_\alpha$  — точка на указанной дуге. Проведем через прямую  $a$  и точку  $O_\alpha$  плоскость  $\alpha$ ;  $OO_\alpha$  расположена в плоскости  $\pi \perp \alpha$  и перпендикулярна к прямой  $O_\alpha H$  пересечения плоскостей  $\pi$  и  $\alpha$ . Следовательно,  $OO_\alpha \perp \alpha$ , т.е.  $O_\alpha$  — центр круга, полученного сечением шара  $U$  плоскостью  $\alpha$ . Таким образом, дуга

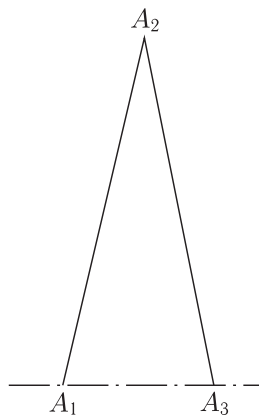


Рис. 42

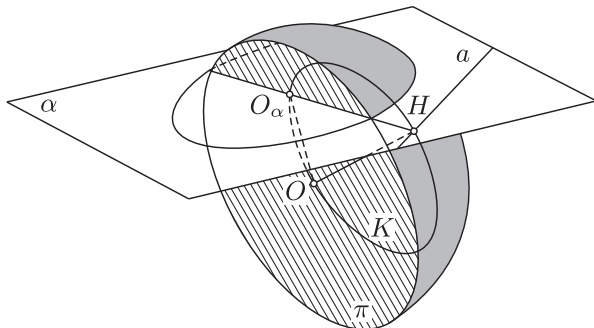


Рис. 43

окружности  $K$ , лежащая внутри сферы  $U$ , и является искомым геометрическим местом.

б) Сохраним те же обозначения. Тогда легко видеть, что аналогично задаче а) все углы  $OO_\alpha H$ , где  $H$  — данная точка, — прямые. Поэтому все центры исследуемых сечений расположены на части сферы  $S$ , заключенной внутри шара  $U$  и имеющей отрезок  $OH$  своим диаметром.

Обратно, пусть  $O_\alpha$  — точка на указанной части этой сферы. Тогда  $O_\alpha$  — центр сечения шара  $U$  плоскостью  $\alpha$ , проходящей через  $H$  и перпендикулярной к  $OO_\alpha$ . Такая плоскость существует, ибо точка  $O_\alpha$  находится на сфере  $S$ , следовательно,  $OO_\alpha \perp O_\alpha H$ .

**11.** Воспользуемся следующей леммой. Пусть в пространстве даны две пересекающиеся в двух точках окружности  $K$  и  $K_1$  и пусть  $P$  — точка на их общей хорде  $AB$  (или на ее продолжении). Тогда если точка  $M$  не лежит в плоскости ни одного из кругов, то найдется плоскость  $\alpha$ , проходящая через прямую  $MP$  и имеющая с окружностями  $K$  и  $K_1$  не менее трех общих точек.

Действительно, через точку  $M$  и какую-нибудь точку  $C$  на хорде  $AB$  проведем произвольную плоскость  $\pi$ , не совпадающую с плоскостью  $MAB$  (рис. 44). Эта плоскость пересечет круги  $K$  и  $K_1$  по некоторым хордам  $a$  и  $a_1$ . Очевидно, в плоскости  $\pi$  найдется луч  $MX$ , пересекающий  $a$  и  $a_1$  в точках  $E$  и  $E_1$  внутри кругов  $K$  и  $K_1$ . Плоскость  $\alpha$ , проходящая через  $P$  и  $MX$ , удовлетворяет всем нашим условиям. В самом деле, она проходит через точку  $E$  внутри круга  $K$  и точку  $E_1$  внутри круга  $K_1$  и, следовательно, пересекает каждую окружность в двух точках. Всего получаем четыре точки пересечения. В частном случае, когда точка  $P$  совпадает с  $A$  или  $B$ , две точки пересечения совпадут с точкой  $P$  и в плоскости  $\alpha$  будут лежать только три точки окружностей  $K$  и  $K_1$ .

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Проведем два произвольных сечения  $K$  и  $K_1$  рассматриваемого тела, пересекающиеся в двух точках; по условию  $K$  и  $K_1$  — окружности. Согласно теореме задачи 30, б через эти две окружности проходит одна и только одна сфера  $S$ . Мы утверждаем, что все точки исследуемой поверхности принадлежат сфере  $S$ .

Действительно, допустим противное, т. е. что некоторая точка  $M$  поверхности не есть точка сферы. Проведем плоскость  $\alpha$ , пересекающую не менее чем в трех точках окружности  $K$  и  $K_1$  и проходящую через  $M$  и  $P$ . Точки пересечения  $\alpha$  с  $K$  и  $K_1$  суть точки исследуемой поверхности и в то же время точки сферы  $S$ . Поэтому окружность  $K_\alpha$  сечения поверхности плоскостью  $\alpha$



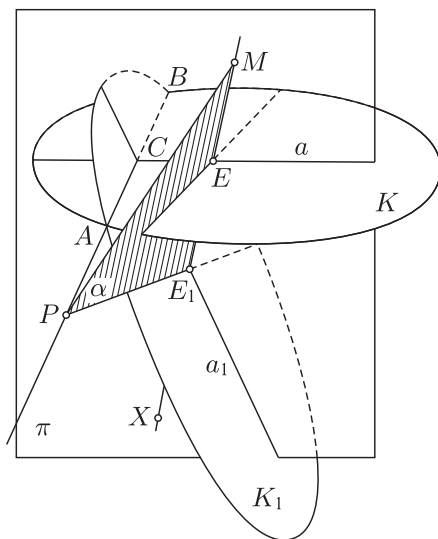


Рис. 44

проходит через три точки сферы и, следовательно, целиком принадлежит ей. Но это противоречит существованию в плоскости  $\alpha$  точки  $M$  поверхности, не принадлежащей сфере  $S$ .

Обратно, любая точка шара есть точка нашего тела. Действительно, допустим противное. Аналогично предыдущему, через точку шара, не принадлежащую телу, проведем плоскость  $\alpha$ . Тогда сечение тела плоскостью  $\alpha$  будет состоять из круга, из которого выкинута некоторая точка (или группа точек), что противоречит условию.

**12.** Проекция любого многогранника есть многоугольник, вершины которого являются проекциями вершин многогранника. Так как у тетраэдра четыре вершины, то в зависимости от выбора плоскости проекций его проекция может быть либо треугольником, либо четырехугольником. (Отрезком или точкой она быть не может, так как правильный тетраэдр — не плоская фигура.) Рассмотрим оба эти случая.

1°. Правильный тетраэдр проектируется в треугольник, совпадающий с проекцией одной из его граней, например  $ABC$  (рис. 45). Пусть вершины  $A, B, C$  грани проектируются в вершины  $A', B', C'$  проекции. По известной формуле для площади проекции (теорема задачи 3) имеем

$$S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью грани и плоскостью проекции. Площадь проекции будет наибольшей, когда  $\cos \varphi = 1$ ,  $\varphi = 0$  (т. е. когда плоскость грани  $ABC$  параллельна плоскости проекции). В этом случае

$$S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где  $a$  — ребро тетраэдра.

2°. Правильный тетраэдр проектируется в четырехугольник (рис. 46). Известна формула для площади четырехугольника:  $S = \frac{1}{2}bc \sin \psi$ , где  $b$  и  $c$  — диагонали четырехугольника, а  $\psi$  — угол между ними. Но диагонали четырехугольника являются проекциями ребер тетраэдра  $ABCD$ . Поэтому  $b = a \cos \theta_1$  и  $c = a \cos \theta_2$ , где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы ребер с плоскостью проекции. Площадь  $S = \frac{1}{2} a^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \psi$  будет наибольшей при  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \sin \psi = 1$ , т. е. при  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ,  $\psi = \frac{\pi}{2}$ .

Чтобы получить такую проекцию тетраэдра наибольшей площади, построим куб со стороной  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  и впишем в него правильный тетраэдр с ребром  $a$  (рис. 47). Очевидно, что проекцией этого тетраэдра на любую грань куба будет квадрат. Угол между его диагоналями прямой, а сами диагонали равны ребрам тетраэдра. Таким образом, наибольшая площадь четырехугольной проекции тетраэдра равна  $\frac{a^2}{2}$ . Это больше, чем  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , т. е. чем наибольшая площадь его треугольной проекции.

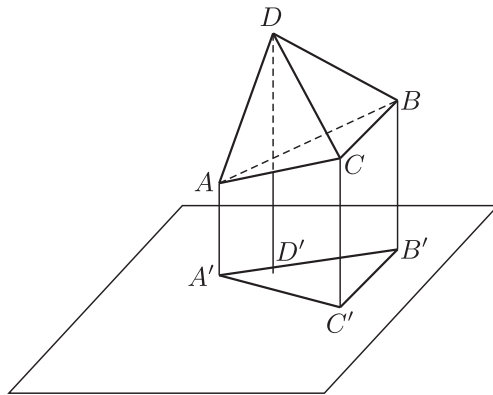


Рис. 45

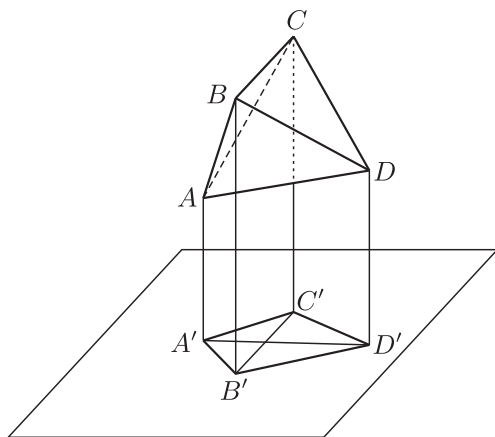


Рис. 46

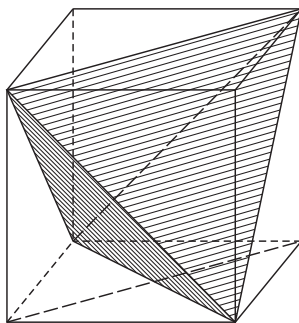


Рис. 47

Итак, из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра наибольшую площадь имеет квадрат, получающийся при проектировании тетраэдра на плоскость, параллельную любым двум его скрещивающимся ребрам.

**13.** Опишем вокруг куба сферу (рис. 48). Ее диаметром будет данная диагональ. Из всех точек сферы эта диагональ видна под углом  $90^\circ$ . Действительно, проведя плоскость через произвольную точку сферы и диагональ, получим в пересечении ее со сферой окружность, диаметр которой — диагональ куба — виден из любой точки окружности под углом  $90^\circ$ . Так как из любой точки внутри окружности диаметр окружности виден под углом большим  $90^\circ$ , то и из любой точки внутри проведенной сферы диагональ куба видна под углом большим  $90^\circ$ . Но на сфере, кроме концов диагонали, лежит еще шесть вершин куба; очевидно, они и являются искомыми точками.

**14.** Куб — выпуклый шестигранник, имеющий центр симметрии. Поэтому любое сечение его плоскостью, проходящей через его центр, есть выпуклый центрально-симметричный многоугольник, имеющий не более шести сторон. С другой стороны, при вращении куба вокруг его диагонали на  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  и  $360^\circ$  он совмещается сам с собой (это выражают, говоря, что диагональ куба есть его ось симметрии третьего порядка). Последнее утверждение вытекает из того, что диагональ куба расположена совершенно одинаково по отношению к каждой из граней трехгранного угла, через вершину которого она проходит. Отсюда

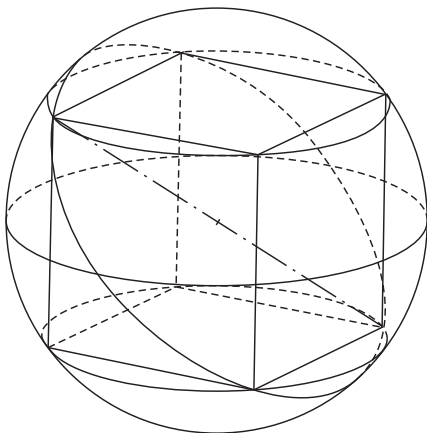


Рис. 48

следует, что и рассматриваемое сечение куба совмещается само с собой при повороте вокруг диагонали куба на  $120^\circ$  и на  $240^\circ$ .

Таким образом, наше сечение есть центрально-симметричный многоугольник, совмещающийся сам с собой при повороте вокруг центра на  $120^\circ$  и на  $240^\circ$ . Но так как по определению центра симметрии многоугольник совмещается сам с собой при повороте вокруг центра на  $180^\circ$ , то он совместится сам с собой и при повороте вокруг центра на угол  $180^\circ + 240^\circ = 420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ , а следовательно, и при повороте на  $60^\circ$ . Отсюда следует, что наш многоугольник совмещается сам с собой при поворотах вокруг центра на  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$  и  $360^\circ$ . Какая-нибудь сторона  $a$  многоугольника переходит при этих поворотах соответственно в стороны  $b, c, d, e, f, a$ ; следовательно, число сторон многоугольника не меньше шести. Но так как оно не может быть и больше шести, оно в точности равно шести. Далее, так как все стороны и углы многоугольника совмещаются при поворотах, то они равны и, значит, наше сечение есть правильный шестиугольник (рис. 49). В силу симметрии своего положения он проходит через середины шести ребер куба, не проходящих через концы данной его диагонали.

**15.** Докажем сначала, что если в куб можно поместить окружность радиуса  $R$ , то ее можно поместить так, чтобы ее центр совпал с центром куба.

Пусть  $O$  — центр куба и  $S_1$  — какая-то окружность радиуса  $R$ , лежащая внутри куба (рис. 50). Построим окружность  $S_2$ , центрально-симметричную окружности  $S_1$  относительно точки  $O$ . В силу того, что  $O$  — центр симметрии куба,

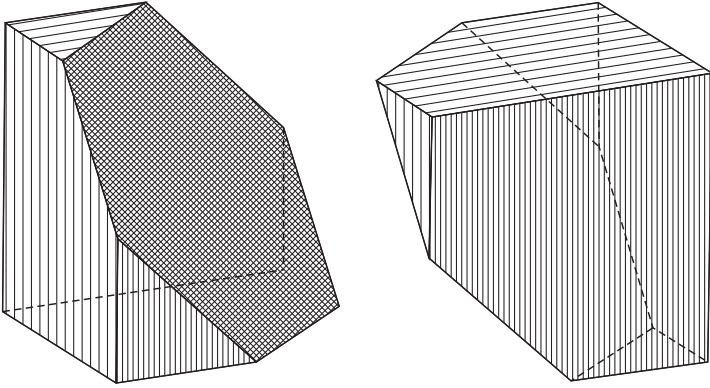


Рис. 49

окружность  $S_2$  будет тоже целиком лежать внутри куба, причем ее плоскость  $\alpha_2$  будет параллельна плоскости  $\alpha_1$  окружности  $S_1$ .

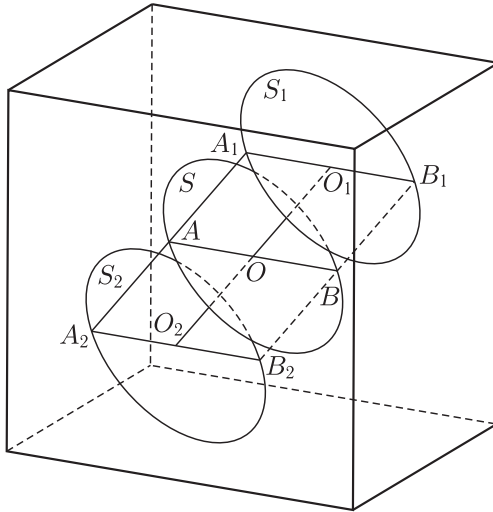


Рис. 50

Покажем теперь, что окружность  $S$  радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , параллельной плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , также будет лежать внутри куба.

Действительно, пусть  $A$  — произвольная точка окружности  $S$ . Проведем плоскость  $O_1AO_2$ , где  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Эта плоскость проходит через точку  $O$ , так как отрезок  $O_1O_2$  проходит через  $O$ . Она пересекается

с плоскостями  $\alpha_1$ ,  $\alpha$  и  $\alpha_2$  по прямым, проходящим через центры соответствующих окружностей. Обозначим диаметры окружностей  $S_1$ ,  $S$  и  $S_2$ , лежащие в плоскости  $O_1AO_2$ , соответственно через  $A_1B_1$ ,  $AB$  и  $A_2B_2$ ; пусть при этом точки  $A_1$ ,  $A$  и  $A_2$  лежат по одну сторону от  $O_1O_2$ . Очевидно, точка  $O$  — центр симметрии пар точек  $A_1$  и  $B_2$ ,  $A_2$  и  $B_1$ . Значит, четырехугольник  $A_1B_1B_2A_2$  есть параллелограмм и  $AB$  — его средняя линия. Поэтому  $A$  — середина отрезка  $A_1A_2$ , а  $B$  — середина  $B_1B_2$ , но так как  $A_1$  и  $A_2$  лежат внутри куба, то и все точки отрезка  $A_1A_2$ , в том числе и точка  $A$ , лежат внутри него. Но  $A$  есть произвольная точка окружности  $S$ ; следовательно, вся эта окружность лежит внутри куба. Этим наше утверждение доказано.

Теперь мы можем рассматривать только окружности с центром в центре куба. Пусть некоторая такая окружность радиуса  $R$  лежит внутри куба со стороной  $a$ . Построим на этой окружности, как на экваторе, шар.

Если радиус окружности достаточно мал (меньше половины стороны куба), то весь шар будет целиком лежать внутри куба. Поэтому любая другая окружность с тем же центром и того же радиуса также будет лежать внутри куба, так как она будет большей окружностью нашего шара. Если же радиус окружности будет больше половины стороны, то тогда вне куба окажется шесть равных шаровых сегментов — «шапочек» (рис. 51).

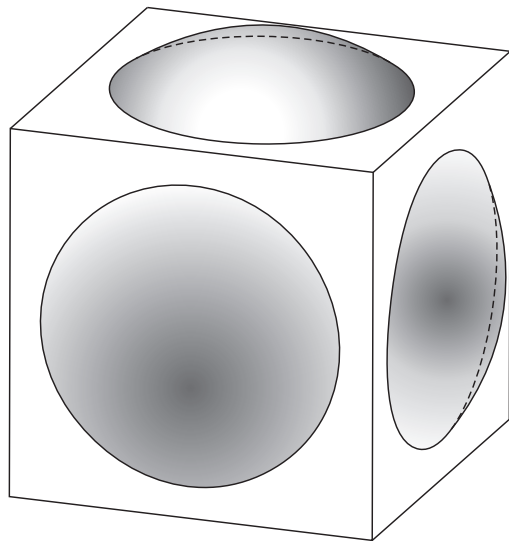


Рис. 51

Центрами окружностей, лежащих в основаниях шапочек, будут, очевидно, центры граней, а радиусы этих окружностей будут равны

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что чем больше будет  $R$ , тем больше будет и  $r$ .

Построим конусы, вершины которых будут находиться в центре  $O$  куба, а направляющими будут служить окружности, лежащие в основании шапочек. Эти конусы вырежут в шаре шесть шаровых секторов. Если плоскость какого-нибудь большого круга нашего шара пересекает хотя бы один сектор, то сама окружность в некоторой части проходит по шапочке, и, значит, частично лежит вне куба. Поэтому для того, чтобы поместить в куб окружность радиуса  $R$ , надо суметь провести плоскость, не пересекающую ни один сектор. Покажем теперь, что окружность радиуса  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$  еще можно поместить в куб, именно, она будет лежать в сечении куба, являющемся правильным шестиугольником (см. предыдущую задачу), а никакую окружность большего радиуса в куб поместить нельзя.

Ясно, что имеет смысл рассматривать только те окружности, плоскости которых не проходят через перпендикуляры к граням куба. Действительно, в этом случае радиус окружности не может превышать расстояния  $\frac{a}{2}$  от центра куба до какой-либо грани. Поэтому исключим из рассмотрения все такие плоскости. Теперь каждая плоскость делит шестерку лучей — перпендикуляров к граням куба, проведенных через центр куба, на две группы (лучи, лежащие по какую-нибудь одну сторону от плоскости). При этом если какой-либо луч лежит по одну сторону от плоскости, то луч, ему противоположный, лежит по другую сторону; поэтому каждая плоскость делит шестерку перпендикуляров на две группы по три луча в каждой группе.

Пусть, например,  $AEND$ ,  $AEFB$  и  $EFGH$  суть грани куба, перпендикуляры  $OL$ ,  $OM$  и  $ON$  к которым лежат по одну и ту же сторону плоскости  $\alpha$  (рис. 52).

Рассмотрим подробнее положение окружности  $S$  радиуса  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ , расположенной в плоскости  $\alpha$ , перпендикулярной к диагонали  $CE$  куба. Эта окружность вписана в правильный шестиугольник  $PQRSTU$  и, значит, касается всех шести граней куба. Поэтому ее плоскость касается образующих  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  секторов шапочек  $L$ ,  $M$  и  $N$ .





пересекает хотя бы одну из шапочек, если радиус шара больше  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

Мы рассмотрели случай, когда шар пересекается с плоскостью каждой грани по окружности, лежащей внутри самой грани. Если же радиус шара будет больше чем  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ , то шапочки пересекут друг друга и наша модель приобретет вид шара с восемью выступающими углами куба. Однако наши выводы и в этом случае останутся в силе, так как в доказательстве мы нигде не накладывали условия непересечения шапочек.

Итак, мы доказали, что в куб нельзя поместить окружность, радиус которой больше, чем  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ . Заметим, что в куб можно поместить четыре несовпадающие окружности радиуса  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$  (по числу диагоналей куба).

**16.** Возьмем за ось отверстия диагональ куба. Если мы спроектируем куб на плоскость, перпендикулярную к диагонали, то в силу симметрии ребра куба, не имеющие общих концов с этой диагональю, спроектируются в стороны правильного шестиугольника (этот шестиугольник и будет всей проекцией куба), а остальные ребра — в радиусы (рис. 53). Как известно, сторона правильного шестиугольника равна радиусу. Если ребро куба равно  $a$ , то его диагональ по теореме Пифагора будет равна  $a\sqrt{3}$ . Поэтому косинус угла между диагональю и примыкающим ребром равен  $\frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Значит, косинус угла между ребром и плоскостью, перпендикулярной к диагонали, будет равен  $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , откуда радиус, а значит, и сторона шестиугольника равны  $a\frac{\sqrt{6}}{3}$ . Апофема шестиугольника будет  $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Но радиус квадрата со стороной  $a$  тоже равен  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно, мы легко сможем поместить квадрат в шестиугольник так, чтобы он лежал целиком внутри (см. рис. 53). Поэтому если согласно чертежу мы сделаем отверстие квадратного сечения, направив его ось по диагонали, то при этом мы не затронем шестерки средних ребер. В это сквозное отверстие (рис. 54) как раз пройдет куб со стороной  $a$ . Это дает положительный ответ на вопрос задачи. Более того, можно сделать такое отверстие, через

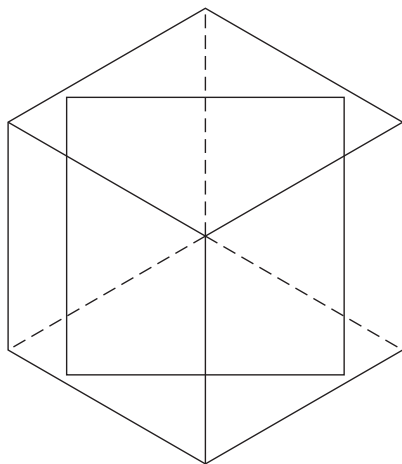


Рис. 53

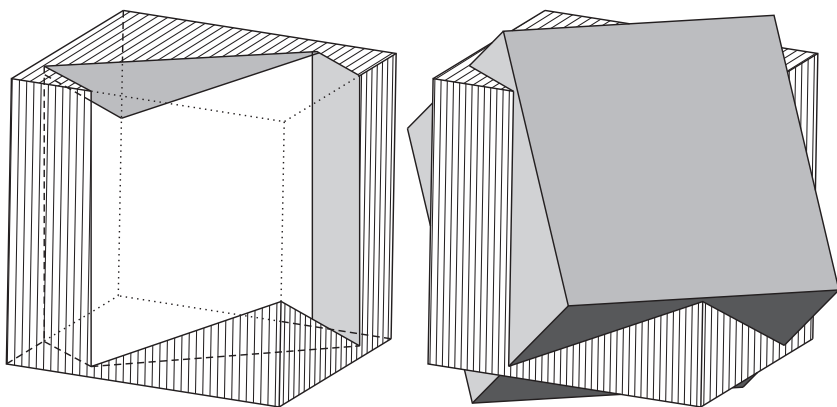


Рис. 54

которое прошел бы даже несколько больший куб. Определить максимальный размер такого куба мы предоставляем читателю.

**17.** Существует бесчисленное множество невыпуклых многогранников, удовлетворяющих условию задачи. Примером может служить многогранник, изображенный на рис. 55. Однако никаких отличных от куба выпуклых многогранников с равными квадратными гранями не существует. Действительно, число  $n$  граней выпуклого многогранного угла с плоскими углами, равными  $90^\circ$ , должно удовлетворять неравенству  $n \cdot 90^\circ < 360^\circ$ , откуда следует, что число граней равно трем, т.е. у выпуклого многогранника, удовлетворяющего условию задачи, все многогранные

углы — прямые трехгранные. Но если многогранник выпуклый и у него все грани — равные многоугольники и все многогранные углы равны, то он правильный (метрически правильный; см. определение на с. 29). Значит, этот многогранник — куб.

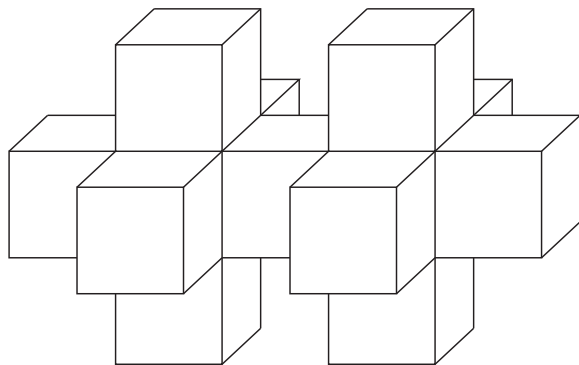


Рис. 55

**Примечание.** Имеет место следующее предложение. Пусть дано несколько сортов граней. Все грани одного сорта равны между собой. Удобно представлять себе эти грани вырезанными из картона. Предположим, что граней каждого сорта у нас бесконечно много. Однако из этого запаса граней можно склеить лишь конечное число неравных друг другу выпуклых многогранников. Доказательство этого предложения основывается на оценке, которая выводится из задач 57, б и 58, а; мы его приводить не будем.

Как показывает задача 17, для невыпуклых многогранников это утверждение не имеет места.

**18.** Легко доказать, что если основания цилиндра лежат на гранях куба, то направление оси цилиндра будет неизменным при всех его перемещениях внутри куба.

Рассмотрим возможные перемещения двух цилиндров, помещенных в куб, как указано на рис. 56.

При любых перемещениях их оси останутся взаимно перпендикулярными, так как они взаимно перпендикулярны в начальном положении. Спроектируем эти оси на нижнее основание куба. При этом их общий перпендикуляр спроектируется в точку их пересечения. Так как две прямые, перпендикулярные к двум соседним сторонам квадрата и проходящие внутри квадрата, пересекаются внутри него, то, следовательно, общий перпендикуляр двух цилиндров проходит внутри куба и, значит, пересекает оба цилиндра. Так как радиусы цилиндров равны  $\frac{a}{4}$ , то расстояние

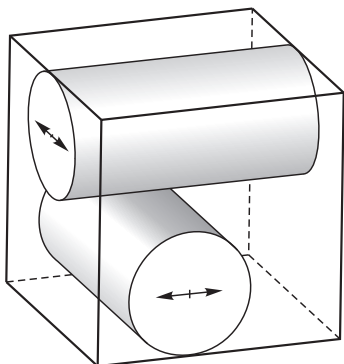


Рис. 56

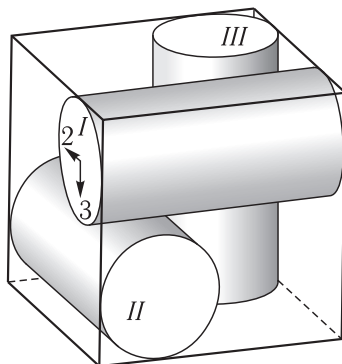


Рис. 57

между их осями не может быть меньше  $\frac{a}{2}$ . С другой стороны, оно не может быть больше  $\frac{a}{2}$ , так как оба цилиндра расположены в полосе ширины  $a$  между двумя параллельными плоскостями. Поэтому цилиндры могут перемещаться только в направлениях, указанных на рис. 56 стрелками, скользя основаниями и одной образующей по граням куба, а диаметрально противоположной образующей по другому цилиндру.

Если мы поместим три цилиндра так, как указано на рис. 57, то они не смогут перемещаться внутри куба.

В самом деле, цилиндр *II* позволяет перемещаться цилиндру *I* только в направлении 2, а цилиндр *III* позволяет ему перемещаться только в направлении 3. Так как допустимые направления не совпадают, то цилиндр *I* жестко закреплен цилиндрами *II* и *III*. Аналогично рассматривается положение цилиндров *II* и *III*.

**19.** Будем считать радиус цилиндра равным  $r$ . Пусть  $O$  — точка пересечения оси цилиндра с плоскостью  $\pi$ . Проведем через  $O$  плоскость, перпендикулярную к оси. В сечении получится круг  $\Phi$  радиуса  $r$  с центром в  $O$ , который пересечется с исходной секущей плоскостью по некоторому диаметру  $MN$  (рис. 58). Пусть теперь  $A$  — произвольная точка сечения  $\pi$ . Пусть образующая цилиндра, проходящая через точку  $A$ , пересекает окружность  $\Phi$  в точке  $B$ . Опустим из точки  $B$  перпендикуляр  $BC$

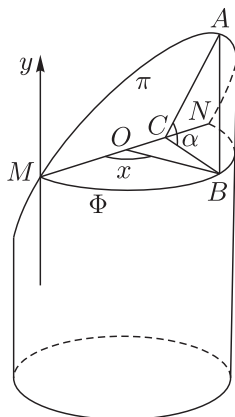


Рис. 58

на диаметр  $MN$ . Так как любая образующая цилиндра перпендикулярна к плоскости поперечного сечения, то  $AB \perp BC$  и, по известной теореме,  $AC \perp MN$ . Следовательно,  $\angle ACB$  является линейным углом двугранного угла между плоскостью сечения  $\pi$  и плоскостью круга  $\Phi$ . Обозначим его через  $\alpha$ . Обозначим еще угол  $MOB$  через  $x$  (в радианной мере). Тогда  $AB = BC \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot r \sin x$ .

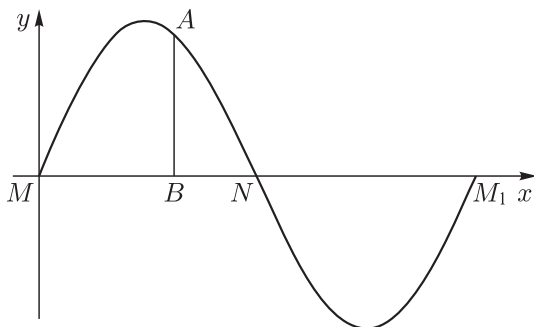


Рис. 59

Развернем теперь цилиндр на плоскость. Окружность  $\Phi$  при этом перейдет в отрезок  $\overline{MNM_1}$ , перпендикулярный к образующей цилиндра, дуга  $\overline{MB}$  — в отрезок  $MB$  длины  $xr$  (рис. 59). Если мы выберем прямую  $MN$  за ось абсцисс, а образующую, проходящую через точку  $M$ , за ось ординат, и в качестве масштаба по обеим осям примем  $r$ , то линия сечения будет изображать график функции  $y = k \sin x$ , где  $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Таким образом, линия сечения в развертке имеет вид синусоиды, точнее говоря, синусоидальной кривой.

**20.** Обозначим плоскость проекций буквой  $\sigma$ , вершины проектируемого треугольника буквами  $A, B, C$  и центр проекций буквой  $S$ . Рассмотрим «полный» трехгранный угол  $SABC$ ,

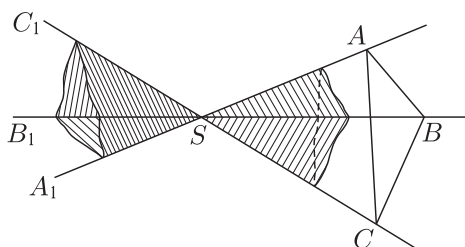


Рис. 60

состоящий из двух вертикальных трехгранных углов, ребрами которых являются прямые  $A_1A$ ,  $B_1B$  и  $C_1C$  (рис. 60). Все проектирующие прямые будут заключены внутри этого трехгранного угла. Поэтому вид проекции определяется тем, как плоскость  $\sigma$  пересекает этот «полный» угол.

Рассмотрим все представляющиеся случаи.

1) Плоскость  $\sigma$  параллельна двум<sup>1)</sup> ребрам и пересекает третье. В проекции получается угол (рис. 61, а).

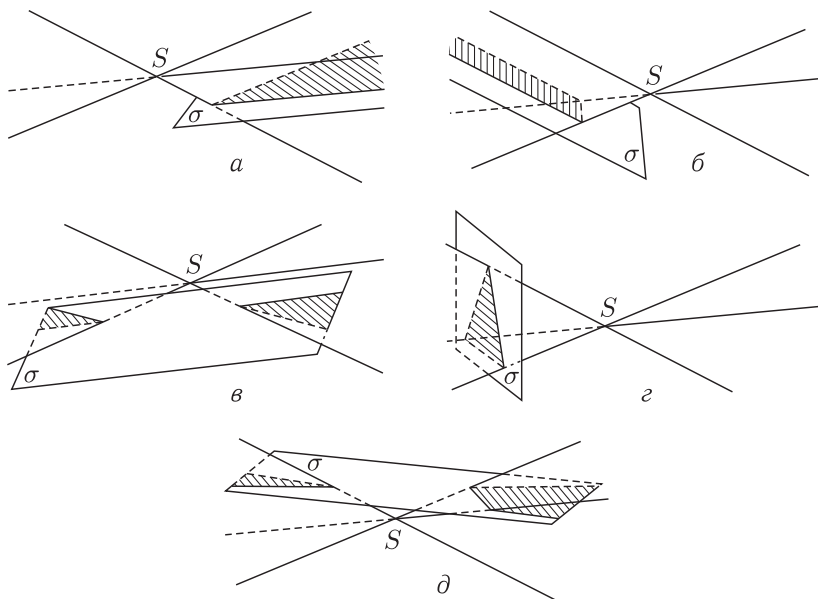


Рис. 61

2) Плоскость  $\sigma$  параллельна одному ребру и пересекает два других, причем оба — с одной стороны от вершины  $S$ . В проекции получается полоса, ограниченная двумя параллельными и пересекающей их третьей прямой (рис. 61, б).

3) Плоскость  $\sigma$  параллельна одному ребру и пересекает два других, причем по разные стороны от вершины  $S$ . В проекции получаются два угла, у которых сторона одного служит продолжением стороны другого, а две другие стороны параллельны и направлены в разные стороны (рис. 61, в).

<sup>1)</sup> Случай, когда плоскость  $\sigma$  параллельна всем трем ребрам, мы отбрасываем, так как в этом случае прямые  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  лежали бы в одной плоскости  $ABC$ , параллельной  $\sigma$ , а по условию точка  $S$  не лежит в плоскости  $ABC$ .

4) Плоскость  $\sigma$  пересекает все три ребра, причем все три — с одной стороны от вершины  $S$ . В проекции получается треугольник (рис. 61,  $z$ ).

5) Плоскость  $\sigma$  пересекает все три ребра, причем два — с одной стороны от вершины  $S$ , а одно — с другой. В проекции получается так называемый несобственный треугольник (рис. 61,  $d$ ).

Мы разобрали все возможные случаи пересечения плоскости  $\sigma$  с «полным» трехгранным углом и тем самым классифицировали все проекции треугольника. Строгое доказательство этой классификации предоставляем читателю.

Рассмотрим теперь два возможных случая вырождения: а) случай, когда точка  $S$  лежит в плоскости  $ABC$ ; б) случай, когда точка  $S$  лежит в плоскости  $\sigma$ . Для этого нам придется обобщить понятие проекции. Условимся проекцией точки  $K$  из центра  $S$  на плоскость  $\sigma$  называть 1) точку пересечения прямой  $SK$  с плоскостью  $\sigma$ , если прямая  $SK$  пересекается с  $\sigma$ ; 2) всю прямую  $SK$ , если она лежит в плоскости  $\sigma$ ; 3) говорить, что точка  $K$  не имеет проекции, если прямая  $SK$  параллельна  $\sigma$ .

В первом случае проекциями треугольника могут быть: 1) отрезок (рис. 62,  $a$ ); 2) «несобственный отрезок» (рис. 62,  $b$ ); 3) луч

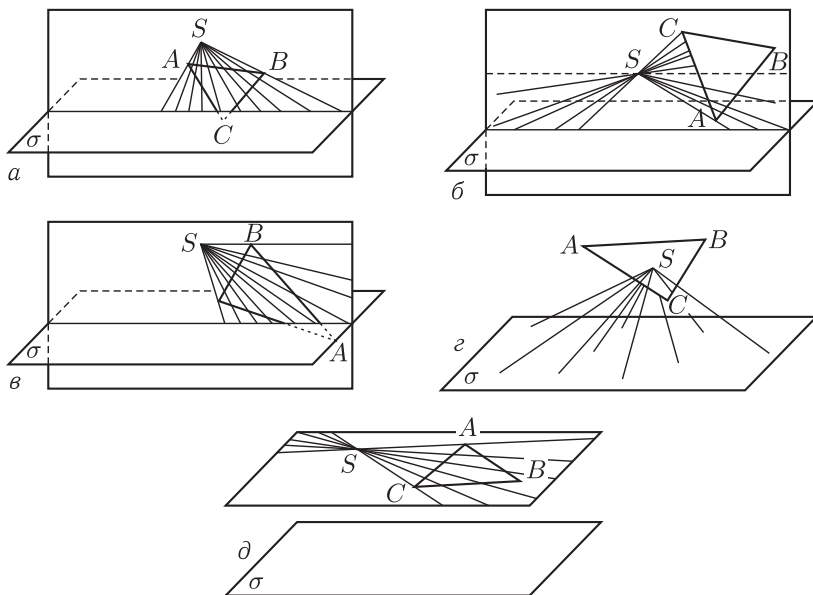


Рис. 62

(рис. 62, в); 4) вся плоскость  $\sigma$  (рис. 62, з); 5) проекции не существует (рис. 62, д).

Во втором случае возможные проекции будут: 1) точка (рис. 63, а); 2) двойной угол (рис. 63, б, в); 3) прямая (рис. 63, з); 4) вся плоскость  $\sigma$  (рис. 63, д).

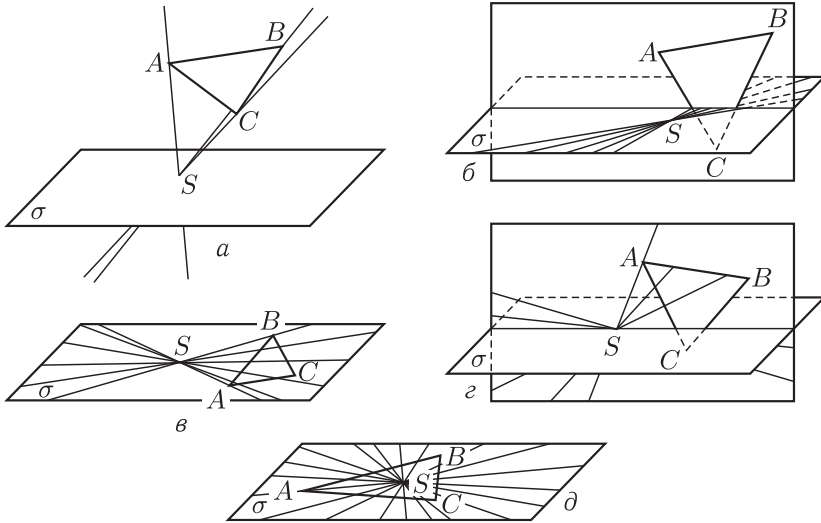


Рис. 63

**21.** Обозначим через  $k$  число треугольников, сходящихся в одной вершине, и докажем, что  $k \leq 3$ . Действительно, предположим, что  $k > 3$ . Будем нумеровать наши треугольники римскими цифрами, а их вершины — арабскими цифрами. Рассмотрим один из треугольников, например, треугольник  $I$ ; вершины его обозначим цифрами 1, 2 и 3. Так как мы считаем, что  $k > 3$ , то к вершине 1 треугольника  $I$  примыкают по крайней мере еще три треугольника, которые занумеруем цифрами  $II$ ,  $III$  и  $IV$  (рис. 64) (если  $k > 4$ , то к вершине 1 примыкают еще какие-то треугольники помимо  $II$ ,  $III$  и  $IV$ , но они нас не будут интересовать). Пусть теперь  $V$  — какой-то треугольник, примыкающий к вершине 2 треугольника  $I$ . Треугольник  $V$  отличен от треугольников  $II$ ,  $III$  и  $IV$  (иначе он имел бы с треугольником  $I$  две общие вершины, а именно 1 и 2). По условию задачи каждый из треугольников  $I$ ,  $II$  и  $III$  имеет с треугольником  $V$  одну общую вершину (как и любой другой из наших треугольников). Эта общая вершина ни в одном из этих трех случаев не может совпадать с вершиной 2 (иначе один из треугольников  $II$ ,  $III$



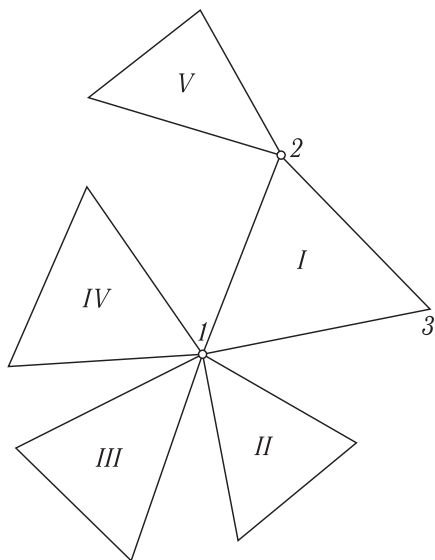


Рис. 64

и  $IV$  имел бы с треугольником  $I$  две общие вершины, а именно вершины  $1$  и  $2$ ). Так как помимо вершины  $2$  треугольник  $V$  имеет еще только две вершины, то по крайней мере два из треугольников  $II$ ,  $III$  и  $IV$  соприкасаются с треугольником  $V$  в одной и той же вершине. Но тогда эти два треугольника имеют две общие вершины: вершину  $1$  и одну из вершин треугольника  $V$ . Так как наличие двух общих вершин у двух треугольников запрещается условиями задачи, то, следовательно,  $k > 3$  быть не может.

Итак,  $k$  может быть равно лишь  $1$ ,  $2$  или  $3$ .

Случай  $k = 1$  совершенно не интересен; в этом случае имеется всего лишь один треугольник (иначе каждая пара треугольников должна была бы иметь общую вершину и  $k$  не могло бы равняться  $1$ ).

Заметим, что тем не менее мы должны считать один треугольник решением задачи (условие  $1^\circ$  здесь также можно считать выполненным, так как никаких двух треугольников просто не существует).

Рассмотрим теперь более интересные случаи, когда  $k = 2$  или  $k = 3$ .

Пусть  $I$  есть, как и прежде, один из наших треугольников, имеющий вершины  $1$ ,  $2$  и  $3$ . К каждой из этих вершин примыкает еще по  $(k - 1)$  треугольников, причем все эти  $3(k - 1)$  треугольников, очевидно, различны (если бы совпали два треугольника,

примыкающие к двум вершинам треугольника  $I$ , то это означало бы, что треугольник  $I$  имеет с одним из наших треугольников две общие вершины, что невозможно). Далее, помимо этих  $3(k-1)$  треугольников и треугольника  $I$  никаких других треугольников быть не может; иначе существовали бы треугольники, не имеющие общих вершин с треугольником  $I$ . Таким образом, при  $k=2$  общее число треугольников может быть равно только:  $n = 3 \cdot 1 + 1 = 4$  (рис. 65, а), а при  $k=3$  — только  $n = 3 \cdot 2 + 1 = 7$  (рис. 65, б).

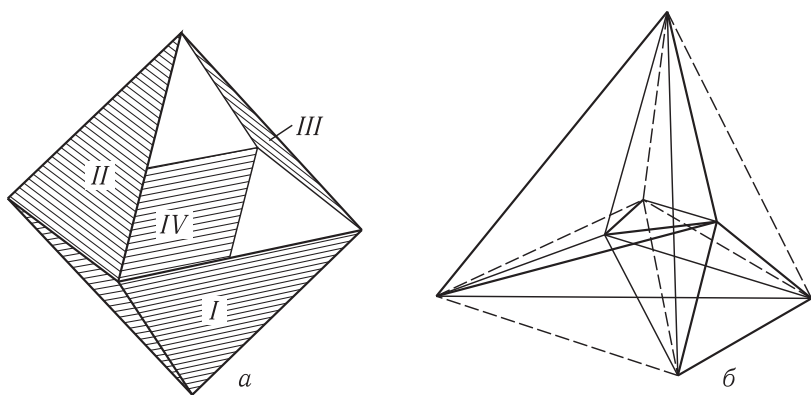


Рис. 65

**22.** Пусть четырехугольник  $ABCD$  описан около сферы и  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — точки касания прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно (рис. 66, а).

По свойству касательных к шару имеем

$$AK = AN, \quad BK = BL, \quad CL = CM, \quad DM = DN.$$

Проведем через точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  плоскость  $\sigma$  (рис. 66, б). Плоскость  $\sigma$ , очевидно, пересекает отрезок  $AD$  в некоторой точке  $N'$ , ибо точки  $A$  и  $D$  лежат от нее по разные стороны.

Допустим, что  $N'$  не совпадает с  $N$ . Как известно, равные наклонные, проведенные из одной точки, образуют с плоскостью равные углы, а бóльшая наклонная образует меньший угол. Обозначим угол между  $AB$  и  $\sigma$  через  $\varphi$ ; тогда угол между  $BC$  и  $\sigma$  также равен  $\varphi$  в силу равенства  $BK = BL$ ; точно так же угол между  $CD$  и  $\sigma$  равен  $\varphi$  (ибо  $CL = CM$ ).

Покажем теперь, что точка  $N'$  совпадает с  $N$ . Допустим, что это не так; пусть, например,  $AN' < AN$  и, следовательно,  $DN' > DN$ . Тогда из сравнения  $AK$  и  $AN'$  получим, что угол  $AD$

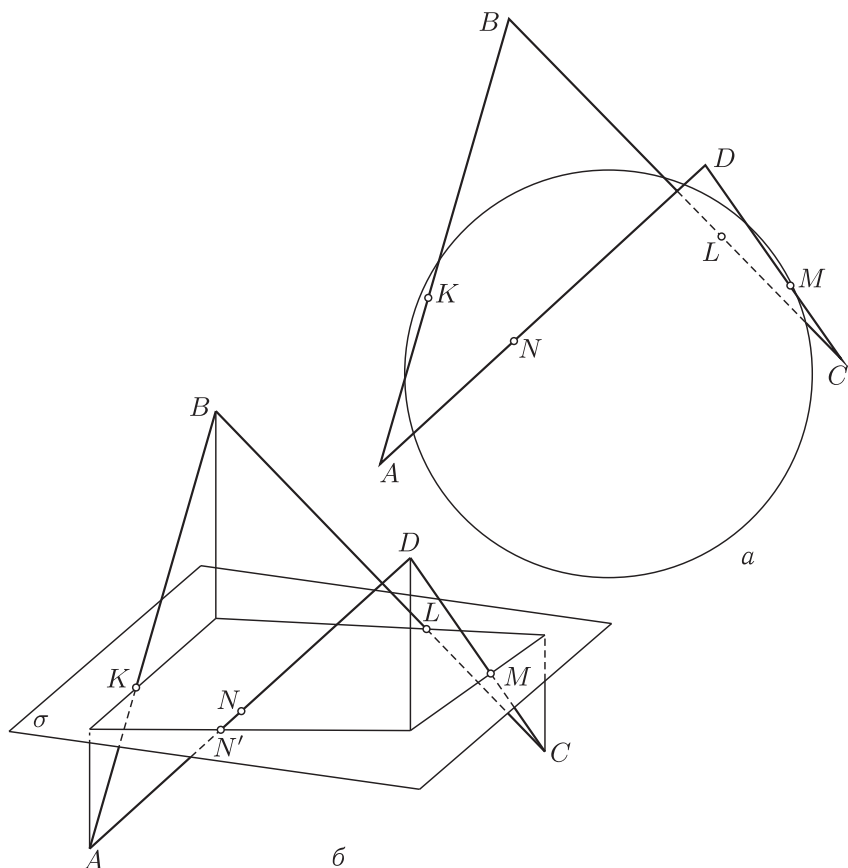


Рис. 66

с плоскостью  $\sigma$  больше  $\varphi$ . С другой стороны, из сравнения  $DM$  и  $DN'$  заключаем, что этот угол должен быть меньше  $\varphi$ . Точно так же приходим к противоречию, положив  $AN' > AN$ .

Следовательно, плоскость  $LMK$  пересекает  $AD$  в самой точке  $N$ , и таким образом точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

**23.** а) Пусть  $ABCD$  — данный пространственный четырехугольник. Задача, очевидно, сводится к нахождению точки  $O$ , одинаково удаленной от четырех прямых  $AB, BC, CD$  и  $DA$ . Геометрическим местом точек пространства, одинаково удаленных от двух пересекающихся прямых  $l$  и  $m$ , являются две плоскости, проходящие через биссектрисы  $b_1$  и  $b_2$  углов, образованных прямыми  $l$  и  $m$ , и перпендикулярные к плоскости этих

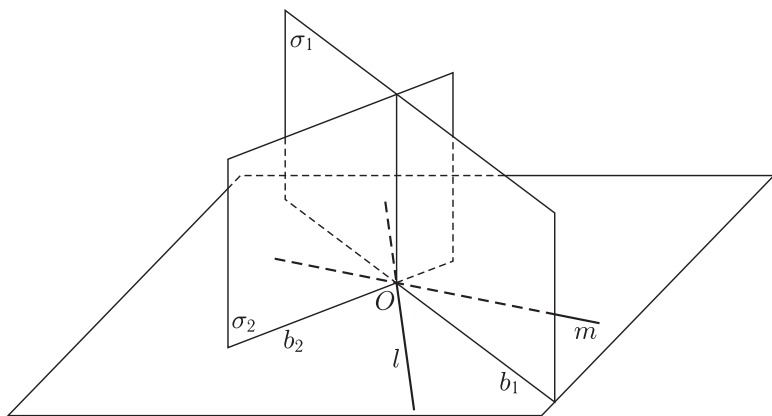


Рис. 67

прямых (рис. 67). Каждую из этих плоскостей будем называть *биссектральной плоскостью* плоского угла.

Возьмем внутренние биссектральные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  углов  $DAB$  и  $ABC$  (рис. 68) (т.е. плоскости, проходящие через биссектрисы внутренних углов четырехугольника  $ABCD$ ). Заметим при этом, что сторона угла не может быть перпендикулярна к биссектральной плоскости. В самом деле, тогда сторона составляла бы с биссектрисой угол в  $90^\circ$ , сам угол равнялся бы  $180^\circ$  и четырехугольник вырождался бы в треугольник, т.е. в плоскую фигуру.

Докажем, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются. Действительно, если бы  $\alpha$  и  $\beta$  были параллельны, то плоскость  $DAB$ , перпендикулярная к плоскости  $\alpha$ , была бы перпендикулярна и к плоскости  $\beta$ . В таком случае плоскости  $DAB$  и  $ABC$ , перпендикулярные к плоскости  $\beta$ , пересекались бы по прямой  $AB$ , неперпендикулярной к  $\beta$ , что возможно только, если плоскости  $DAB$  и  $ABC$  совпадают, т.е. если  $ABCD$  — плоский четырехугольник.

Таким образом, плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  должны пересекаться по некоторой прямой  $m$ , все точки которой одинаково удалены от прямых  $DA$ ,  $AB$  и  $BC$ .

Пусть теперь  $\gamma$  и  $\gamma'$  — биссектральные плоскости прямых  $BC$  и  $CD$ . Прямая  $m$  должна пересекать хотя бы одну из этих плоскостей. В самом деле, допустим, что это не так, т.е. что прямая  $m$  параллельна обеим плоскостям  $\gamma$  и  $\gamma'$ , а следовательно, и прямой  $CC'$  их пересечения. Тогда плоскость  $\beta$  параллельна прямой  $CC'$  — перпендикуляру к плоскости  $BCD$  и, следовательно, сама перпендикулярна к этой плоскости.

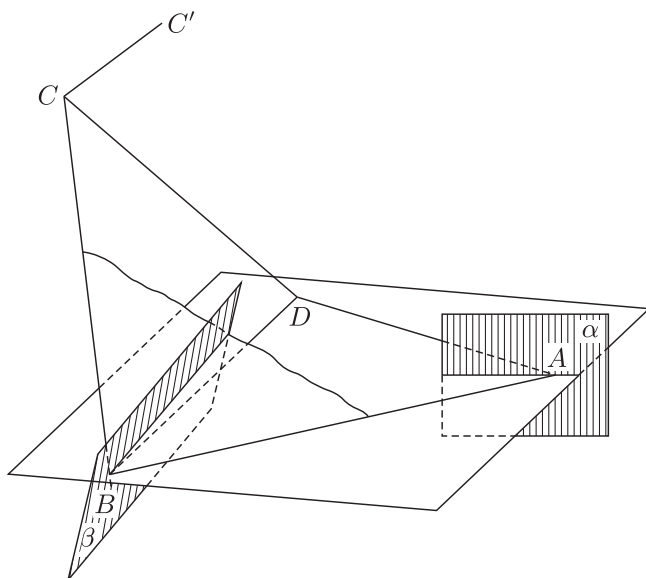


Рис. 68

Таким образом, плоскость  $\beta$ , перпендикулярная как к плоскости  $ABC$ , так и к плоскости  $B CD$ , должна быть перпендикулярна к прямой  $BC$  их пересечения, что, как уже указывалось выше, невозможно. Следовательно, на прямой  $m$  должна существовать точка  $O$ , одинаково удаленная от прямых  $BC$  и  $CD$ . Эта точка, очевидно, и будет центром искомой сферы.

Легко заметить, что в общем случае эта сфера — не единственная. Выбирая по одной плоскости из каждой пары  $\alpha$  и  $\alpha_1$ ,  $\beta$  и  $\beta_1$ ,  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , мы получаем тройку плоскостей, пересекающихся, вообще говоря, в одной точке, которая будет равноудалена от всех четырех прямых. Всего таким образом получаем в общем случае восемь сфер, касающихся всех четырех прямых; в случае пространственного четырехугольника хотя бы одна из этих сфер, как мы показали, заведомо существует. Если какие-нибудь три биссектральные плоскости пересекаются по прямой, то искомым сфер будет бесконечно много.

В случае плоского четырехугольника такой сферы в собственном смысле слова может и не существовать. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять прямоугольник с отношением сторон  $1 : 2$ . (Рассматривая этот четырехугольник как предельный случай пространственного, мы можем сказать, что нашу сферу  $O$  здесь заменяет плоскость самого прямоугольника.)

Замечание. Легко видеть, что если рассматриваемая сфера касается самих сторон четырехугольника, а не их продолжений, то суммы противоположных сторон четырехугольника должны быть равны. Поэтому в общем случае хотя бы одна точка касания лежит не на самой стороне четырехугольника, а на ее продолжении.

б) Первое решение. Пусть  $u$  четырехугольника  $ABCD$ , неважно, плоского<sup>1)</sup> или пространственного, суммы противоположных сторон равны. Для определенности мы будем считать, что  $BC$  — бо́льшая сторона (или одна из них, если их несколько) и  $CD \geq AB$ . В силу того, что стороны связаны соотношением

$$AB + CD = BC + DA,$$

они располагаются по величине следующим образом:

$$BC \geq CD \geq AB \geq AD$$

(заметим, что из равенства  $BC = CD$  следует  $AB = AD$  и обратно).

Отложим на стороне  $AB$  отрезок  $AE = AD$ , а на стороне  $CB$  отрезок  $CF = CD$  (рис. 69, а). Имеем

$$BE = AB - AD = BC - CD = BF.$$

Таким образом, треугольники  $EAD$ ,  $DCF$  и  $FBE$  равнобедренные. Поэтому биссектриса  $AL$  треугольника  $DAE$  перпендикулярна к стороне  $DE$  и делит ее пополам. Прямая  $DE$  лежит в плоскости  $DAB$ , перпендикулярной к биссектральной плоскости  $\alpha$  угла  $A$  и, кроме того,  $DE$  перпендикулярна к линии  $AL$  — прямой пересечения плоскостей. Отсюда следует, что  $DE \perp \alpha$ .

Предположим сначала, что  $AB > AD$  (строго больше) и, следовательно,  $CB > CD$ . Тогда точки  $E$  и  $F$  не совпадают с точкой  $B$  и через вершины треугольника  $DEF$  проходит единственная плоскость  $\pi$ . Так как она проходит через  $DE$ , то она перпендикулярна к плоскости  $\alpha$  и линия их пересечения перпендикулярна к  $DE$ . Так как  $L$  — середина отрезка  $DE$ , то отсюда следует, что плоскость  $\alpha$  проходит через центр  $O$  описанной около треугольника  $DEF$  окружности.

В  $\triangle DEF$  прямая  $LO$  (рис. 69, б) — перпендикуляр к середине стороны. Аналогично показывается, что биссектральные плоскости  $\beta$  и  $\gamma$  углов  $B$  и  $C$  перпендикулярны к плоскости  $\pi$

<sup>1)</sup> Заметим, что четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, не может быть самопересекающимся, так как сумма пересекающихся сторон самопересекающегося четырехугольника всегда больше суммы непересекающихся сторон.

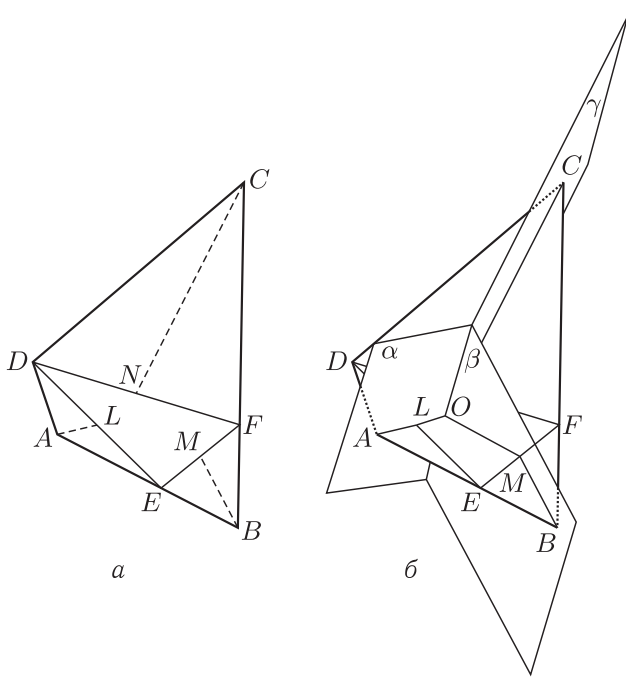


Рис. 69

и пересекаются с  $\pi$  по прямым  $MO$  и  $NO$ , где  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $EF$  и  $FD$ .

Отсюда вытекает, что все три плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  проходят через перпендикуляр  $OO'$ , восставленный из точки  $O$  к плоскости  $\pi$ . Любая точка этого перпендикуляра будет, очевидно, одинаково удалена от прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , т. е. будет центром сферы, «касающейся» всех сторон четырехугольника  $ABCD$ .

Нам осталось разобрать случай, когда  $AB = AD$  и  $CB = CD$ . В этом случае  $\triangle DEF$  вырождается в отрезок  $DB$  и точки  $L$  и  $N$  совпадают. Тогда плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  также совпадают, так как через точку на прямой можно провести единственную плоскость, перпендикулярную к этой прямой. И в этом случае геометрическим местом точек, равноудаленных от прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , будет прямая — линия пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Второе решение.** В случае пространственного четырехугольника можно показать, что существуют сферы, касающиеся самих сторон, а не их продолжений. Такой будет, например, сфера, касающаяся сторон четырехугольника и одной из его

диагоналей. Мы будем доказывать не это утверждение, а следующую, почти равносильную ему лемму: в четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, можно вписать, и притом единственным образом, сферу, касающуюся трех его сторон и одной диагонали, причем она обязательно будет касаться и четвертой стороны.

Действительно, пусть у четырехугольника  $ABCD$  (рис. 70)  $AB + CD = AD + BC$ ,  $AD$  — четвертая сторона и  $AC$  — данная диагональ. Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон  $\triangle ABC$ , будет перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , восставленный из центра  $O_1$  вписанной в  $\triangle ABC$  окружности.

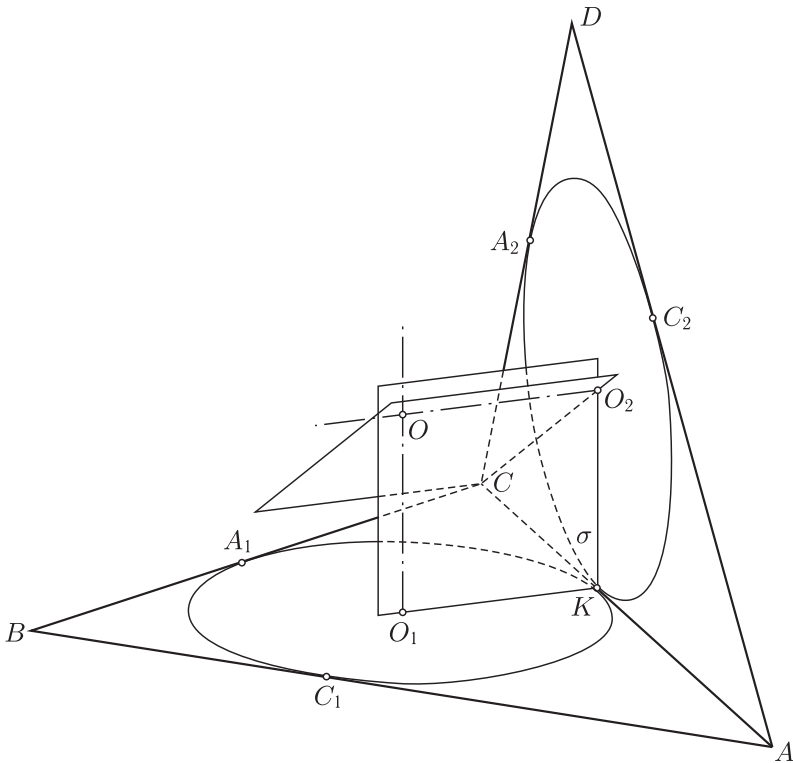


Рис. 70

Точно так же геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон  $\triangle ADC$ , будет перпендикуляр к плоскости  $ADC$ , восставленный из центра  $O_2$  вписанной в  $\triangle ADC$  окружности. Эти окружности касаются стороны  $AC$  соответственно в точках  $K_1$



и  $K_2$ . По свойству касательных к окружности имеем

$$\begin{aligned} K_1A + K_1C &= AC, & K_1A - K_1C &= AB - CB; \\ K_2A + K_2C &= AC, & K_2A - K_2C &= AD - CD. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_1A = \frac{AC + AB - CB}{2}, \quad K_2A = \frac{AC + AD - CD}{2}.$$

Так как  $AB - CB = AD - CD$ , то и  $K_1A = K_2A$ , т. е. точки  $K_1$  и  $K_2$  сливаются в одну точку  $K$ . Если через эту точку мы проведем плоскость  $\sigma \perp AC$ , то она будет перпендикулярна к плоскостям  $ABC$  и  $ADC$  и пересекаться с ними по радиусам  $O_1K$  и  $O_2K$  соответственно. В таком случае перпендикуляры  $O_1O$  и  $O_2O$  будут лежать в плоскости  $\sigma$ . Так как, по предположению, четырехугольник  $ABCD$  не плоский, то плоскости  $ABC$  и  $ADC$  не параллельны и, значит, перпендикуляры  $O_1O$  и  $O_2O$  пересекаются в некоторой точке  $O$ . Эта точка равноудалена от сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  и сторон  $AD$ ,  $DC$  и  $AC$ , т. е. одинаково удалена от всех пяти сторон. Таким образом, в наш четырехугольник можно вписать сферу  $S$ , касающуюся всех его сторон и одной из диагоналей.

Рассмотрим теперь произвольную сферу, касающуюся сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и диагонали  $AC$ . Ее центр должен лежать на пересечении перпендикуляра  $O_1O$  и биссектральной плоскости  $CO_2O$  угла  $ACD$ . Перпендикуляр  $O_1O$  не может быть параллельным плоскости  $CO_2O$ ; поэтому прямая  $O_1O$  имеет с плоскостью  $CO_2O$  единственную общую точку, совпадающую, очевидно, с определенной ранее точкой  $O$ . Следовательно, построенная выше сфера  $S$  — единственная, касающаяся сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  и диагонали  $AC$  четырехугольника  $ABCD$ . Таким образом, оба утверждения леммы доказаны. Дальнейшее доказательство аналогично приведенному в первом решении.

Согласно задаче 22 точки касания лежат в одной плоскости  $\pi$ , причем стороны четырехугольника образуют с ней равные углы. Поэтому биссектральные плоскости углов четырехугольника будут перпендикулярны к  $\pi$ . Так как они все имеют общую точку  $O$ , то они будут пересекаться по прямой, проходящей через  $O$  перпендикулярно к  $\pi$ , которая и будет геометрическим местом центров вписанных сфер.

в) Очевидно, что минимум расстояния от произвольной точки прямой  $OO'$  до прямой  $AB$  будет достигаться на общем перпендикуляре к этим прямым. Читатель, внимательно изучивший

решения задач 22 и 23, а и б, легко докажет, что плоскости, проходящие через точки касания сфер, параллельны между собой, и что если спроектировать на одну из таких плоскостей наш четырехугольник, то радиус вписанной в эту проекцию окружности будет равен минимальному радиусу касательной сферы.

**24. Первое решение.** Пусть в сечении прямого трехгранного угла  $S$  произвольной плоскостью получается треугольник  $ABC$ , стороны которого  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  (рис. 71). По теореме Пифагора из треугольников  $BSC$ ,  $ASC$ ,  $ASB$  имеем

$$SC^2 + SB^2 = a^2, \quad SA^2 + SC^2 = b^2, \quad SA^2 + SB^2 = c^2.$$

Решая эту систему относительно  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} SA &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}, \\ SB &= \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, \\ SC &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Следовательно, должно быть

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0, \quad a^2 + c^2 - b^2 > 0, \quad a^2 + b^2 - c^2 > 0, \quad (**)$$

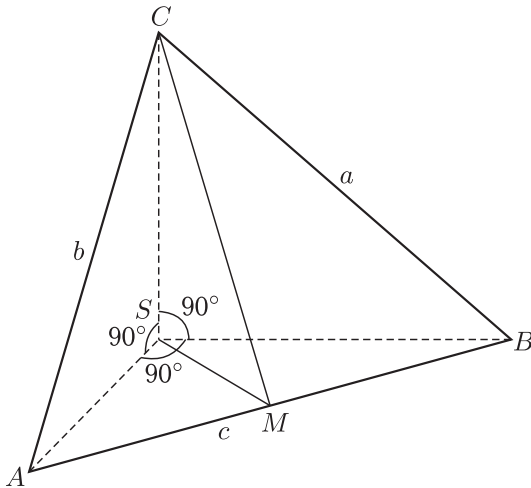


Рис. 71

т. е. в треугольнике  $ABC$  квадрат любой стороны меньше суммы квадратов двух других сторон, откуда следует, что треугольник  $ABC$  остроугольный.

Обратно, при любых числах  $a$ ,  $b$  и  $c$ , удовлетворяющих соотношениям (\*\*), равенства (\*) определяют точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что стороны  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Так как соотношения (\*\*) выполнены для сторон любого остроугольного треугольника, то всякий остроугольный треугольник может быть получен в сечении трехгранного угла  $S$  некоторой плоскостью и притом единственным образом (если указано, на каком ребре угла должна лежать каждая вершина треугольника). Построение такого сечения сводится к построению отрезков  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$ , определяемых формулами (\*).

Второе решение. В треугольнике  $ABC$  проведем медиану  $CM$  и соединим точку  $M$  с вершиной трехгранного угла  $S$  (см. рис. 71). В  $\triangle ASB$  точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$ . Следовательно,  $SM = \frac{AB}{2}$ . Построим теперь прямоугольный треугольник  $SCM$  по катету  $SM$ , равному половине стороны  $AB$ , и по гипотенузе, равной медиане  $CM$ . Отложим другой катет построенного треугольника на одном из ребер трехгранного угла. Тогда получим вершину  $C$ . Точно так же построим вершины  $A$  и  $B$ . Построение всегда возможно, если гипотенуза больше катета, т. е. если в  $\triangle ABC$  каждая медиана больше половины стороны, к которой она проведена.

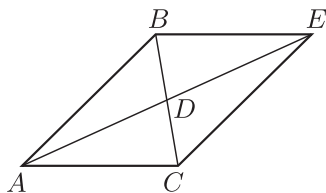


Рис. 72

Покажем, что медиана  $AD$  треугольника  $ABC$  больше половины стороны  $BC$  тогда и только тогда, когда  $\angle A$  острый. В самом деле, дополнив треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABEC$  (рис. 72) и рассматривая треугольники  $ABC$  и  $AEC$  с двумя соответственно равными сторонами ( $AC$  общая,  $AB = CE$ ), найдем, что неравенство  $AE > BC$ , а следовательно, и равносильное ему неравенство  $AD > \frac{1}{2}BC$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\angle ACE > \angle CAB$ , т. е. когда  $\angle CAB < 90^\circ$ .

Итак, в случае остроугольного треугольника построение всегда возможно и притом единственным образом, если отвлечься от роли ребер. Если решение задачи существует, то оно обладает указанными выше свойствами и, значит, получается при нашем построении. Если бы решения задачи не существовало, мы не

смогли бы заранее утверждать, что наше построение не даст все-таки некоторого другого треугольника. Поясним это примером. Известно (см. задачу 144, в из части 2), что если существует треугольник наименьшего периметра, вписанный в данный треугольник, то это высотный треугольник. Но если исходный треугольник — тупоугольный, то решения нет, однако построить его высотный треугольник мы можем. Но мы доказали другим способом (см. первое решение), что в случае остроугольного треугольника решение всегда есть. Таким образом, строя треугольник нашим способом, мы всегда получим верный ответ.

**Третье решение.** Пусть  $\triangle ABC$  — искомый (рис. 73). Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, является сфера, построенная на данном отрезке, как на диаметре (см., например, решение задачи 13). Поэтому точка  $S$  должна лежать на пересечении трех сфер, построенных, как на диаметрах, соответственно на  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ .

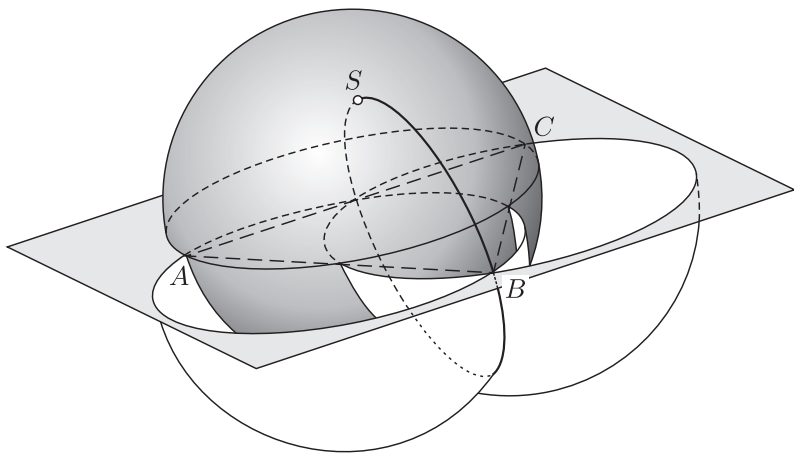


Рис. 73

Таким образом, на сторонах данного  $\triangle ABC$  как на диаметре строим сферы. Эти три сферы пересекутся в двух точках. Действительно, две сферы пересекаются по окружности, а окружность и сфера пересекаются, вообще говоря, в двух точках. В силу симметрии построения относительно плоскости  $ABC$  построенные точки будут также симметричны относительно нее. Очевидно, что если точка пересечения существует, то она является решением задачи (если у трехгранного угла все три плоских угла прямые, то он прямой трехгранный угол — октант).

Поэтому, исследовав возможность такого построения, мы узнаем, в каких случаях решение существует и в каких не существует.

**25.** а) Пусть  $ABCD$  — произвольный тетраэдр и  $AC$  и  $BD$  — его противоположные ребра (рис. 74, а). Пересечем тетраэдр какой-либо плоскостью  $\alpha$ , параллельной ребрам  $AC$  и  $BD$ . Полученный в сечении четырехугольник  $PQRS$  будет параллелограммом. В самом деле, так как плоскость  $ABC$  проходит через прямую  $AC \parallel \alpha$  и пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $PQ$ , то  $PQ \parallel AC$ . Аналогично  $RS \parallel AC$ , т. е.  $PQ \parallel RS$ . Точно так же  $QR \parallel PS \parallel BD$ .

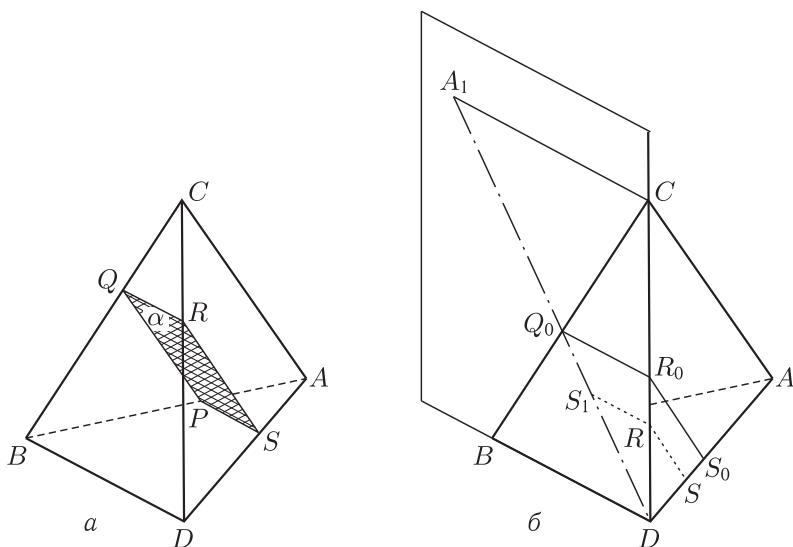


Рис. 74

Обратно, если сечение тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$  есть параллелограмм  $PQRS$ , вершины  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  которого лежат соответственно на ребрах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , то из  $PQ \parallel RS$  следует, что прямая  $AC$  пересечения плоскостей  $ABC$  и  $ADC$  параллельна  $PQ$  и  $RS$ , т. е.  $AC \parallel \alpha$ . Аналогично, из  $QR \parallel PS$  следует, что  $BD \parallel \alpha$ .

Таким образом, в любом тетраэдре существует бесконечно много сечений, являющихся параллелограммами. Эти сечения разбиваются на три семейства в зависимости от выбора «направляющей» пары противоположных ребер тетраэдра.

б) Покажем, что в каждом семействе сечений найдется ромб. Рассмотрим, например, семейство сечений, параллельных

ребрам  $AC$  и  $BD$  (см. рис. 74, а). Как показано в решении задачи а),  $SR \parallel AC$ , а  $RQ \parallel DB$ . Проведем плоскость грани  $DBC$  и отложим в этой плоскости отрезок  $CA_1$ ,  $CA_1 \parallel DB$ ,  $CA_1 = AC$  (рис. 74, б).

Тогда, как легко показать из подобия соответствующих треугольников, прямая  $DA_1$  будет геометрическим местом точек  $S_1$  таких, что  $RS_1 \parallel DB$  и  $RS_1 = SR$ , где  $SR \parallel AC$  и  $S$  лежит на ребре  $AD$ . Поэтому смежные стороны параллелограмма данного семейства будут равны (и, следовательно, сам параллелограмм будет ромбом) в том и только в том случае, когда сечение пройдет через точку  $Q_0$  — точку пересечения прямой  $DA_1$  с ребром  $BC$ . Из подобия треугольников  $\triangle DAC \sim \triangle DS_0R_0$  и  $\triangle CDB \sim \triangle CR_0Q_0$  следует, что

$$\frac{CR_0}{DR_0} = \frac{AC}{BD}.$$

Но так как плоскость сечения параллельна ребрам  $AC$  и  $BD$ , то она делит в том же отношении и все остальные ребра (на рис. 74, б это видно по отношению к ребрам  $AD$  и  $BC$ ).

Таким образом, чтобы сечение было ромбом, необходимо и достаточно, чтобы отрезки ребра, на которые его делит плоскость сечения, были пропорциональны к прилежащим направляющим ребрам.

в) Площадь произвольного рассматриваемого сечения равна  $PS \cdot SR \cdot \sin \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — угол между направляющими ребрами семейства.

Величина  $\sin \varepsilon$  — постоянная, а величины  $PS$  и  $SR$  — переменные, причем связанные условиями:

$$AS = \frac{AD}{BD} \cdot PS, \quad (1)$$

$$SD = \frac{AD}{AC} \cdot SR. \quad (2)$$

Эти условия удобно объединить в одно следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} AS + SD = AD &= \frac{AD}{BD} \cdot PS + \frac{AD}{AC} \cdot SR, \\ 1 &= \frac{PS}{BD} + \frac{SR}{AC}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Обозначим для краткости  $PS = x$ ;  $SR = y$ ;  $BD = a$ ;  $AC = b$ . Тогда наша задача сведется к нахождению наибольшего значения

произведения  $xy$ , где переменные  $x$  и  $y$  связаны соотношением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3')$$

По известной теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см., например, ч. I, издание 1950 г., задача 216)

$$\sqrt{\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}} \leq \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{2} = \frac{1}{2},$$

причем  $\sqrt{\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}} = \frac{1}{2}$  — только в том случае, когда  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}$ .

Таким образом, величина  $\sqrt{\frac{xy}{ab}}$ , а следовательно, и величина  $xy$  достигают наибольшего значения, когда

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что искомое сечение наибольшей площади (в данном семействе параллелограммов) есть параллелограмм, вершинами которого являются середины ребер тетраэдра.

Максимум произведения  $xy$  при условии  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  можно найти и геометрически. Пусть в прямоугольном треугольнике  $LMN$  катет  $LM$  равен  $a$ , а катет  $MN$  равен  $b$  (рис. 75, а). Для любой точки  $K$  на гипотенузе  $LN$  имеем

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle LMN} &= S_{\triangle LKM} + S_{\triangle NKM}, \\ \frac{1}{2} ab &= \frac{1}{2} ay + \frac{1}{2} bx, \end{aligned} \right\} \quad (3'')$$

где  $y$  и  $x$  — перпендикуляры соответственно  $KG$  на катет  $LM$  и  $KH$  на  $MN$ .

Произведение  $xy$  выражает площадь прямоугольника  $KHMG$ , а условие (3''), очевидно, равносильно условию (3'). Покажем, что прямоугольник  $KHMG$  имеет наибольшую площадь, если  $K$  совпадает с серединой  $K_0$  гипотенузы  $LN$  (рис. 75, б). С этой целью рассмотрим любую другую точку  $K$  гипотенузы  $LN$ ; для определенности будем считать, что  $K$  лежит на отрезке  $LK_0$

$$\begin{aligned} S_{K_0H_0MG_0} - S_{KHMG} &= [S_{\triangle LMN} - (S_{\triangle LG_0K_0} + S_{\triangle NH_0K_0})] - \\ &\quad - [S_{\triangle LMN} - (S_{\triangle LGK} + S_{\triangle NHK})] = \\ &= (S_{\triangle NHK} - S_{\triangle NH_0K_0}) - (S_{\triangle LG_0K_0} - S_{\triangle LGK}). \end{aligned}$$

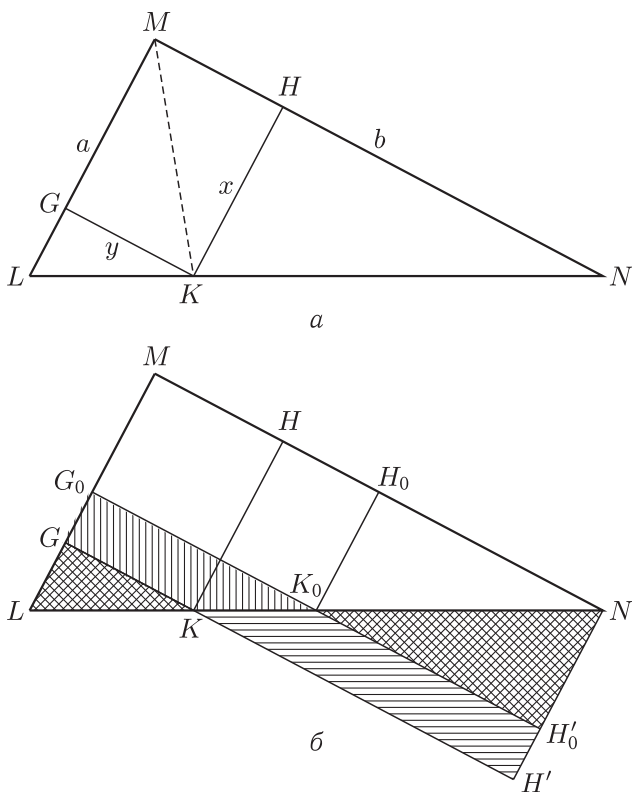


Рис. 75

Дополним  $\triangle K_0H_0N$  и  $\triangle KHN$  до прямоугольников. Очевидно,  $\triangle NK_0H_0 = \triangle NK_0H'_0$  и  $\triangle NKH = \triangle NKH'$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S_{K_0H_0MG_0} - S_{KHMG} &= \\ &= (S_{\triangle NH'K} - S_{\triangle NH'_0K_0}) - (S_{\triangle LG_0K_0} - S_{\triangle LGK}) = \\ &= S_{K_0KH'H'_0} - S_{K_0KGG_0} > 0, \end{aligned}$$

так как  $K_0G_0 = K_0H'_0$ , а  $KG < KH'$ .

**26.** Рассмотрим два треугольника  $MNP$  и  $M'N'P'$  (рис. 76), полученных, как указано в условии задачи. Очевидно, найдутся две вершины, принадлежащие соответственно первому и второму треугольникам, которые лежат на одном ребре тетраэдра  $ABCD$  ( $N$  и  $N'$  на рис. 76). Докажем, что в таком случае  $\angle MNP = \angle M'N'P'$ . Действительно, четырехугольник  $MNBA$



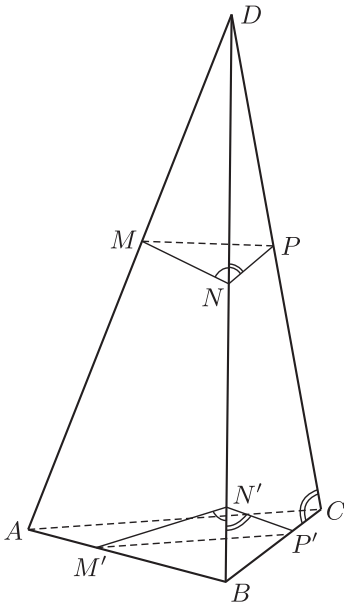


Рис. 76

углам (см. выше), поэтому

$$\frac{M'N'}{BN'} = \frac{AD}{BA};$$

$\triangle BN'M' \sim \triangle BDC$ , поэтому

$$\frac{N'P'}{BN'} = \frac{DC}{BC};$$

отсюда получаем, что

$$\frac{M'N'}{N'P'} = \frac{AD \cdot BC}{BA \cdot CD}.$$

Аналогично найдем, что и

$$\frac{MN}{DN} = \frac{BA}{AD}; \quad \frac{MP}{DN} = \frac{BC}{CD}; \quad \frac{MN}{PN} = \frac{AD \cdot BC}{BA \cdot CD},$$

т. е. окончательно  $\frac{N'M'}{P'N'} = \frac{NM}{PN}$ ; следовательно,

$$\triangle MNP \sim \triangle M'N'P'.$$

вписан в круг, получившийся при пересечении сферы, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , с плоскостью грани  $ABD$ ; отсюда следует, что  $\angle DNM = \angle BAD$ . Из рассмотрения четырехугольника  $M'N'DA$  точно так же находим  $\angle BN'M' = \angle BAD$ . Следовательно,  $\angle DNM = \angle BN'M'$ . Рассматривая грань  $BDC$ , аналогично получаем, что и  $\angle DNP = \angle BN'P'$ .

Рассмотрим трехгранные углы  $N'$  и  $N$  (именно  $N'M'BP'$  и  $NMDP$ ). У них общий двугранный угол с ребром  $BD$  и равные плоские углы, прилежащие к нему. Отсюда следует равенство и третьих плоских углов, т. е.

$$\angle MNP = \angle M'N'P'.$$

Далее,  $\triangle BM'N' \sim \triangle BAD$  по двум

**27. а)** Докажем сначала требуемое предложение для случая, когда точка  $A'$  расположена на ребре тетраэдра  $ABCD$ .

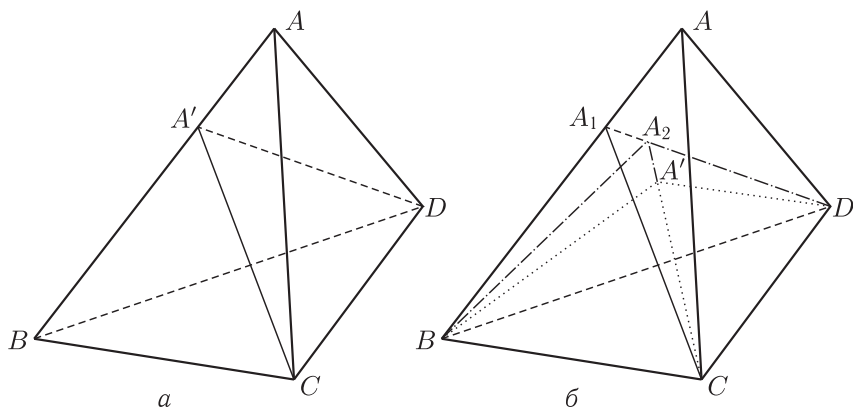


Рис. 77

Предположим, например, что точка  $A'$  находится на ребре  $AB$  (рис. 77, а). Надо доказать, что

$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB.$$

Из рассмотрения треугольников  $AA'C$  и  $AA'D$  следует

$$\angle BA'C = \angle BAC + \angle ACA'; \quad \angle BA'D = \angle BAD + \angle ADA',$$

так что требуемое неравенство принимает вид

$$\angle ACA' + \angle CA'D + \angle ADA' > \angle CAD.$$

Заменим  $\angle CA'D$  на  $180^\circ - \angle A'CD - \angle A'DC$  и  $\angle CAD$  на  $180^\circ - \angle ACD - \angle ADC$ , перенесем члены, имеющие знак «минус», в другую часть неравенства; получим

$$\angle ACA' + \angle ACD + \angle ADC + \angle ADA' > \angle A'CD + \angle A'DC.$$

Последнее же неравенство является очевидным, так как согласно известному свойству трехгранных углов

$$\angle ACA' + \angle ACD > \angle A'CD, \quad \angle ADC + \angle ADA' > \angle A'DC.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть точка  $A'$  находится внутри пирамиды  $ABCD$  (рис. 77, б). Обозначим через  $A_1$  точку пересечения плоскости  $CDA'$  с ребром  $AB$  и рассмотрим пирамиды  $ABCD$  и  $A_1BCD$ ; в силу только что доказанного

$$\angle BA_1C + \angle CA_1D + \angle DA_1B > \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB.$$

Далее, пусть  $A_2$  — точка пересечения  $CA'$  и  $A_1D$ . Рассмотрим пирамиды  $A_1BCD$  и  $A_2BCD$ ; в силу доказанного

$$\angle BA_2C + \angle CA_2D + \angle DA_2B > \angle BA_1C + \angle CA_1D + \angle DA_1B.$$

Наконец, из рассмотрения пирамид  $A_2BCD$  и  $A'BCD$  следует

$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BA_2C + \angle CA_2D + \angle DA_2B.$$

Сопоставляя между собой последние три неравенства, мы и убеждаемся, что

$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB.$$

б) Может. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим треугольную пирамиду  $ABCD$ , изображенную на рис. 78. Угол  $A$  — октант, т. е. прямой трехгранный угол. Боковые ребра выбраны так, что  $AC = AD = a$ ,  $AB = 3a$  ( $a$  — произвольный отрезок). В таком случае сумма  $AB + AC + AD$  содержит одно длинное ребро  $AB$  и два коротких ребра  $AC$  и  $AD$ . Теперь предположим, что точка  $A'$  выбрана внутри пирамиды достаточно близко к вершине  $B$ , например,  $A'B = a$ . В таком случае сумма  $A'B + A'C + A'D$  содержит два длинных ребра  $A'D$  и  $A'C$  и только одно короткое ребро  $A'B$ . Подсчет этих сумм дает:

$$\begin{aligned} AB + AC + AD &= 5a, \\ A'B + A'C + A'D &= (1 + 2\sqrt{5})a > 5a. \end{aligned}$$

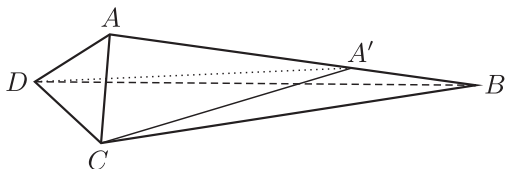


Рис. 78

Можно придумать и много других примеров, доказывающих возможность неравенства  $A'B + A'C + A'D > AB + AC + AD$ .

**28.** Докажем сначала вспомогательное утверждение: если все двугранные углы выпуклого трехгранного угла — острые, то и все плоские углы острые. (Можно доказать это утверждение, не предполагая заранее выпуклости трехгранного угла, но тогда доказательство усложняется.)

Пусть  $SABC$  — данный выпуклый трехгранный угол. Все его плоские углы меньше  $180^\circ$ , так как выпуклый трехгранный угол

лежит внутри каждого своего двугранного угла. Двугранные углы  $B(SA)C$  и  $B(SC)A$  острые, поэтому проекция  $SH$  ребра  $SB$  лежит между лучами  $SA$  и  $SC$ , т. е. внутри грани  $SAC$  (рис. 79, а). Так как  $\angle ASC < 180^\circ$ , то, по крайней мере, либо  $\angle ASH < 90^\circ$ , либо  $\angle CSH < 90^\circ$ . Для определенности будем считать, что  $\angle ASH < 90^\circ$ .

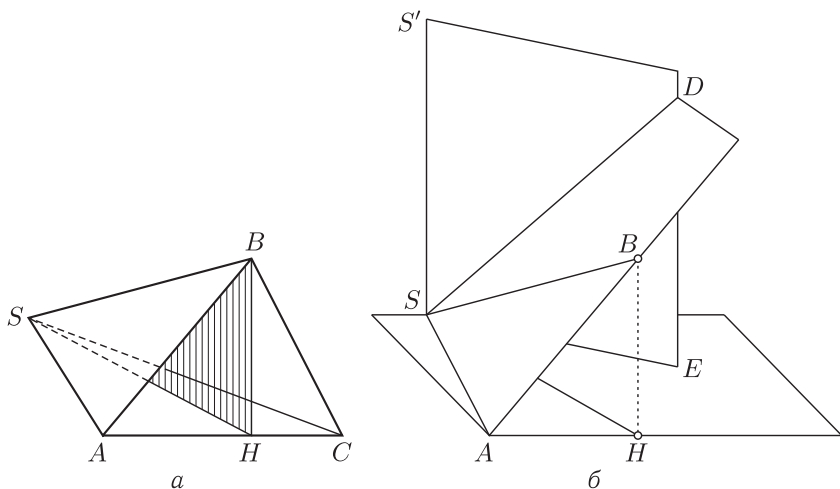


Рис. 79

Через точку  $S$  проведем плоскость  $S'SE$  перпендикулярно к прямой  $AS$  (рис. 79, б). Очевидно, трехгранный угол  $SABH$  лежит внутри прямого двугранного угла  $AS'SE$ . Продолжим грань  $SBA$  до пересечения с плоскостью  $S'SE$  по прямой  $SD$ . Так как  $AS \perp S'SE$ , то  $AS \perp SD$ , но  $\angle ASB$  лежит внутри (прямого)  $\angle ASD$ . Следовательно,  $\angle ASB$  — острый.

Если все рассуждения, которые мы проводили, исходя из того, что  $\angle ASC < 180^\circ$ , провести, опираясь на то, что  $\angle ASB < 90^\circ$ , то мы получим, что и  $\angle ASC < 90^\circ$  и  $\angle BSC < 90^\circ$ .

Переходим к доказательству теоремы, сформулированной в условии задачи. Каждый плоский угол тетраэдра входит в какой-то его трехгранный угол, все двугранные углы которого по условию острые. Поэтому каждый плоский угол такого тетраэдра — тоже острый.

**29.** Пусть  $ABCD$  (рис. 80) тетраэдр, удовлетворяющий условиям задачи. Проведем через  $AB$  плоскость  $\pi$ , параллельную  $CD$ . Пусть  $C'$  и  $D'$  — проекции точек  $C$  и  $D$  на плоскость  $\pi$  и  $E$  — точка пересечения отрезков  $AB$  и  $C'D'$ .

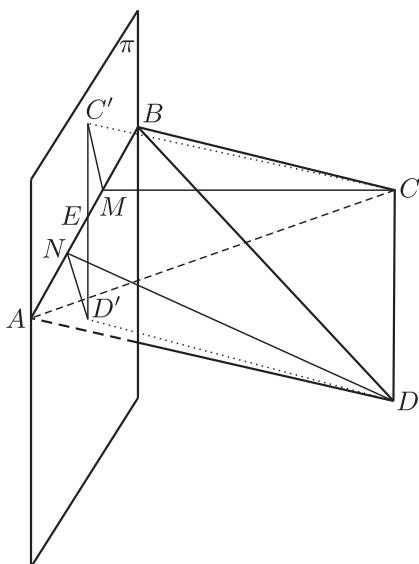


Рис. 80

Опустим из точек  $C'$  и  $D'$  перпендикуляры на отрезок  $AB$ . Обозначим основания этих перпендикуляров соответственно через  $M$  и  $N$ . Тогда по теореме о трех перпендикулярах отрезки  $CM$  и  $DN$  перпендикулярны к  $AB$  и, следовательно, являются высотами соответственно в треугольниках  $ABC$  и  $ABD$ . Так как по условию площади последних равны и сторона  $AB$  у них общая, то  $CM = DN$ .

Теперь из прямоугольных треугольников  $CC'M$  и  $DD'N$ , у которых  $CM = DN$  и  $CC' = DD'$ , следует, что  $C'M = D'N$ . Отсюда, в свою очередь, мы получаем равенство прямоугольных треугольников  $MEC'$  и  $NED'$  (по катету и острому углу); следовательно,  $E$  есть середина отрезка  $C'D'$ .

Так как в наших рассуждениях ребра  $AB$  и  $CD$  тетраэдра равноправны, то проекция стороны  $AB$  на плоскость, проходящую через  $CD$  и параллельную  $AB$  (т.е. параллельную плоскости  $\pi$ ) будет делиться отрезком  $CD$  пополам, откуда следует, что проекция отрезка  $CD$  на плоскость  $\pi$  будет делить пополам отрезок  $AB$ , т.е. что  $AE = EB$ . Так как, кроме того,  $C'E = ED'$ , то отсюда следует, что  $AC'BD'$  — параллелограмм, т.е.  $AC' = BD'$  и  $AD' = C'B$ . Поэтому  $AC = BD$  и  $CB = AD$ .

Повторяя те же рассуждения для другой пары ребер (отличной от  $AB$  и  $CD$ ), мы также получим, что  $AB = CD$ . Отсюда сразу следует утверждение задачи.

**30.** а) Каждый из рассматриваемых перпендикуляров есть, очевидно, геометрическое место точек, равноудаленных от вершин соответствующей грани. Проведем через середину отрезка  $A_1A_4$  плоскость  $\pi$ , перпендикулярную к этому отрезку (рис. 81). Очевидно, эта плоскость не параллельна перпендикуляру к грани  $A_1A_2A_3$  и поэтому пересекает его в некоторой точке  $O$ . Эта точка равноудалена от вершин  $A_1$  и  $A_4$  и вершин  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , т. е. она равноудалена от всех четырех вершин. Поэтому она лежит на перпендикуляре к любой грани, восстановленном из центра описанной около этой грани окружности.

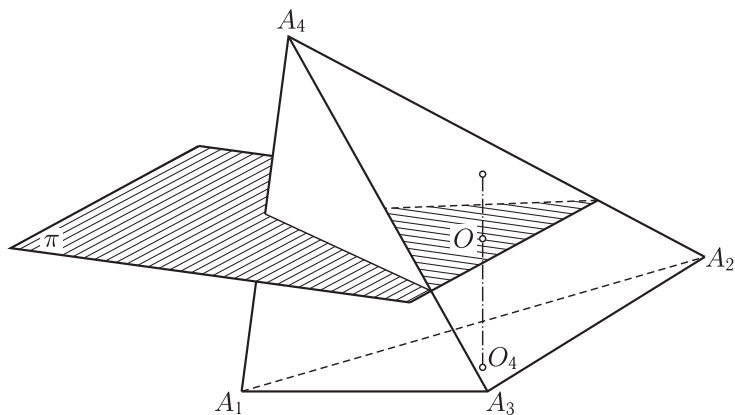


Рис. 81

Ясно, что если провести сферу с центром в  $O$  и радиусом равным, например,  $OA_1$ , то она пройдет через все четыре вершины. Таким образом, наше утверждение полностью доказано.

б) Пусть окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , не лежащие в одной плоскости, пересекаются в точках  $A$  и  $B$  (рис. 82) и пусть  $C$  и  $D$  — произвольные точки, лежащие соответственно на окружностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Тогда сфера, описанная около тетраэдра  $ABCD$ , будет проходить через окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , описанные около треугольников  $ABC$  и  $ABD$ . Обратно, всякая сфера, проходящая через окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , будет описанной сферой тетраэдра  $ABCD$ . Отсюда и следуют оба утверждения задачи.

**31.** а) Докажем, что биссектральная плоскость является геометрическим местом точек, лежащих внутри двугранного угла и равноудаленных от его граней.

Действительно, возьмем произвольную точку  $K$  внутри угла  $AB$  (рис. 83) и опустим на грани перпендикуляры  $KH_1$



будет геометрическим местом внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от граней

$$SA_1A_2 \text{ и } SA_3A_1; \quad SA_1A_2 \text{ и } SA_2A_3,$$

т. е. равноудаленных от всех трех граней.

Таким образом, биссектральная плоскость  $\beta_3$  — геометрическое место точек, равноудаленных от граней  $SA_2A_3$  и  $SA_3A_1$ , также проходит через эту прямую  $b$ .

б) Как показано в решении задачи а), биссектриса трехгранного угла есть геометрическое место точек, лежащих внутри этого угла и одинаково удаленных от его граней. Следовательно, достаточно доказать существование внутри данного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  точки, одинаково удаленной от всех его граней. Эта точка и будет, очевидно, центром сферы, касающейся всех граней тетраэдра — вписанной сферы. Но точка  $O$  пересечения, например, биссектрисы  $b_1$  многогранного угла  $A_1$  и биссектральной плоскости  $\beta_{34}$  двугранного угла  $A_3A_4$  (рис. 85) будет одинаково удалена как от граней  $A_1A_2A_3$ ,  $A_1A_2A_4$ ,  $A_1A_3A_4$ , так и от граней  $A_1A_3A_4$ ,  $A_2A_3A_4$ ; следовательно, точка  $O$  и будет искомой.

**32.** а) Покажем, что любые две медианы, например,  $A_1M_1$  и  $A_3M_3$  произвольного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ , пересекаются (рис. 86, а). Через вершины  $A_1$  и  $A_3$  тетраэдра и через точку  $D_{24}$  — середину ребра  $A_2A_4$  — проведем плоскость  $A_1D_{24}A_3$ . Она пересечется с плоскостью  $A_2A_3A_4$  по медиане  $A_3D_{24}$  треугольника  $A_2A_3A_4$  и с плоскостью грани  $A_1A_2A_4$  по медиане  $A_1D_{24}$  этой грани. Основания  $M_1$  и  $M_3$  медиан  $A_1M_1$  и  $A_3M_3$  тетраэдра лежат соответственно на медианах  $A_3D_{24}$  и  $A_1D_{24}$  граней тетраэдра, т. е. в плоскости  $A_1D_{24}A_3$ . Поэтому сами медианы  $A_1M_1$  и  $A_3M_3$  лежат в одной плоскости и, очевидно, обязательно пересекаются. Так как все четыре медианы не лежат

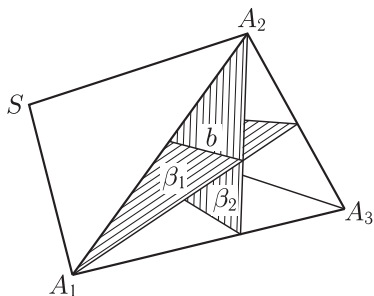


Рис. 84

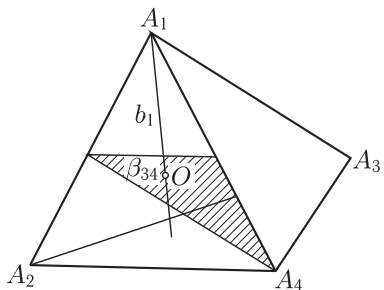


Рис. 85



в одной плоскости, то согласно задаче 8, а они все пересекаются в одной точке. Более того, можно показать, что каждая из них делится точкой пересечения  $K$  в отношении  $1 : 3$ . Для этого рассмотрим  $\triangle A_1 D_{24} A_3$  (рис. 86, б). Так как центр тяжести треугольника делит медиану в отношении  $1 : 2$ , то

$$D_{24} M_1 : D_{24} A_3 = D_{24} M_3 : D_{24} A_1 = 1 : 3.$$

Отсюда следует, что  $\triangle M_1 M_3 D_{24} \sim \triangle A_3 A_1 D_{24}$ .  $M_1 M_3 \parallel A_3 A_1$  и  $M_1 M_3 : A_3 A_1 = 1 : 3$ . Поэтому

$$\triangle A_1 A_3 K \sim \triangle M_1 M_3 K$$

и, следовательно,

$$M_1 K : A_1 K = M_3 K : A_3 K = M_1 M_3 : A_3 A_1 = 1 : 3,$$

что и требовалось доказать.

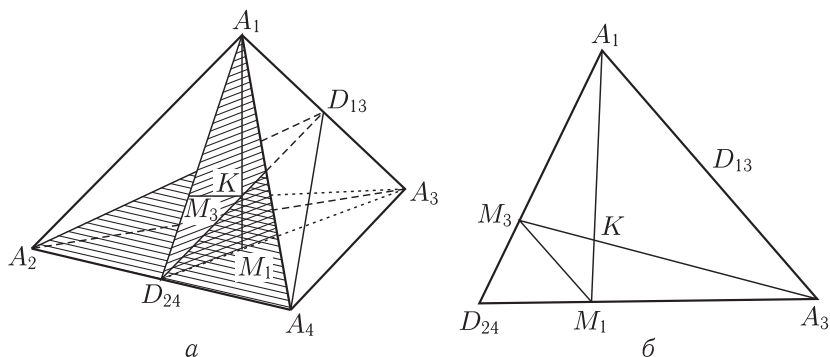


Рис. 86

Заметим, что из условия пересечения двух любых медиан тетраэдра и из полученного только что соотношения снова вытекает, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (независимо от теоремы задачи 8, а и, следовательно, от того факта, что вершины тетраэдра не лежат в одной плоскости). Таким образом, наша теорема остается верной и в том случае, когда тетраэдр вырождается в плоский четырехугольник. В этом случае она устанавливает положение центра тяжести этого четырехугольника. Обобщив этот результат, можно установить центр тяжести пятиугольника, шестиугольника и т. д.

б) Покажем, например, что прямая  $D_{13} D_{24}$ , соединяющая середины ребер  $A_1 A_3$  и  $A_2 A_4$ , проходит через точку  $K$  (см. рис. 86, а). Проведем плоскость  $A_2 D_{13} A_4$ . Так как ребра  $A_1 A_3$  и  $A_2 A_4$  не лежат в одной плоскости, то плоскости  $A_1 D_{24} A_3$  и  $A_2 D_{13} A_4$  не сов-

падают. Прямая  $D_{13}D_{24}$  лежит, очевидно, и в той и в другой плоскости и, следовательно, является линией их пересечения. Точка  $K$  является точкой пересечения медиан  $A_1M_1$  и  $A_2M_2$ . Но, как показано в решении задачи а), медиана  $A_1M_1$  лежит в плоскости  $A_1D_{24}A_3$ , а медиана  $A_2M_2$  лежит в плоскости  $A_2D_{13}A_4$ . Поэтому точка  $K$  их пересечения лежит как в плоскости  $A_1D_{24}A_3$ , так и в плоскости  $A_2D_{13}A_4$ , а значит, лежит на прямой  $D_{13}D_{24}$  — линии их пересечения.

**33.** Пусть в тетраэдре  $ABCD$  высоты  $DH_4$  и  $BH_2$  пересекаются (рис. 87). Тогда через них можно провести плоскость  $\alpha$ , которая пройдет также через ребро  $BD$ . Эта плоскость перпендикулярна одновременно к двум плоскостям  $ABC$  и  $ADC$ , так как проходит через перпендикулярные к ним прямые  $DH_4$  и  $BH_2$ . Вследствие этого плоскость  $\alpha$  перпендикулярна к линии пересечения плоскостей  $ABC$  и  $ADC$ , т. е.  $\alpha \perp AC$ .

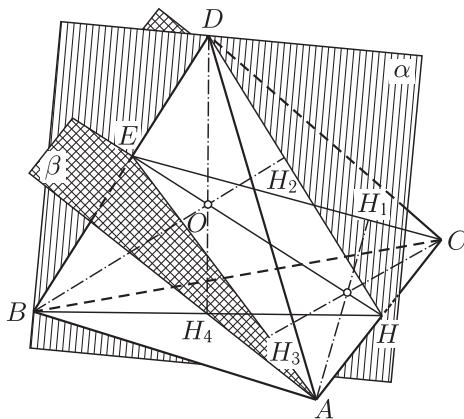


Рис. 87

Следовательно,  $BD \perp AC$ .

Обратно, если в тетраэдре существует плоскость  $\alpha$ , проходящая через одно ребро, например  $BD$ , и перпендикулярная к противоположащему ребру  $AC$ , то высоты  $BH_2$  и  $DH_4$  пересекаются, так как целиком принадлежат этой плоскости.

Далее, если два ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны, то плоскость, проходящая через одно из ребер и общий перпендикуляр этой пары ребер, перпендикулярна ко второму ребру. Следовательно, так как  $BD \perp AC$ , то найдется плоскость  $\beta \perp BD$ , проходящая через  $AC$ , вследствие чего высоты  $AH_1$  и  $CH_3$  также пересекаются.

**34.** а) Пусть в тетраэдре  $ABCD$  (рис. 88)  $AB \perp CD$  и  $AC \perp BD$ . Опустим из вершины  $D$  высоту  $DH_4$  на плоскость треугольника  $ABC$ . Тогда  $BH_4$  — проекция ребра  $BD$  на плоскость  $ABC$ , а  $CH_4$  — проекция ребра  $CD$  на ту же плоскость. На основании теоремы о трех перпендикулярах и условий задачи отсюда следует, что  $CH_4$  и  $BH_4$  — две высоты треугольника  $ABC$ . Так как высоты треугольника пересекаются в одной точке, то  $AH_4$  тоже высота, т.е.  $AH_4 \perp CB$ . Но  $AH_4$  — проекция ребра  $AD$ , а потому по теореме о трех перпендикулярах  $CB \perp AD$ .

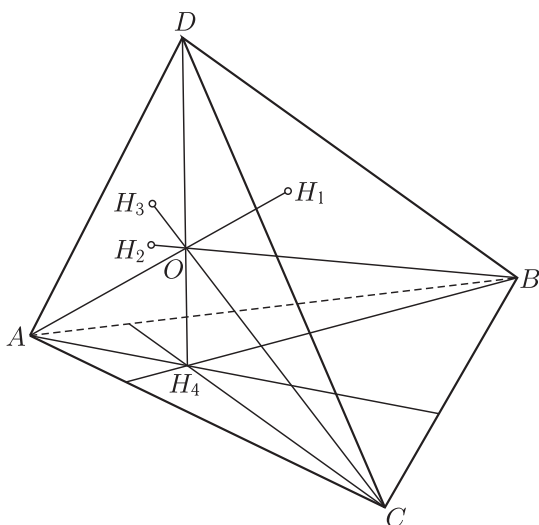


Рис. 88

б) Заметим, что никакие три высоты тетраэдра, например  $BH_2$ ,  $CH_3$  и  $DH_4$ , не лежат в одной плоскости, так как в противном случае ребра  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  тетраэдра должны были бы быть параллельными (перпендикулярными к плоскости, в которой лежат три рассматриваемые высоты). Из решения задачи 33 следует, что две высоты тетраэдра пересекаются в том и только в том случае, когда у него имеется пара противоположных перпендикулярных ребер. Следовательно, в ортогональном тетраэдре четыре высоты попарно пересекаются. Отсюда и из задачи 8, а следует требуемое утверждение. Если какая-нибудь из высот  $CH_3$  и  $DH_4$  не проходила бы через общую точку  $O$  высот  $AH_1$  и  $BH_2$ , то она имела бы с их плоскостью  $AOB$  две различные общие точки и, следовательно, лежала бы в ней. В силу сделанного замечания

это невозможно, поэтому высоты  $CH_3$  и  $DH_4$  также проходят через точку  $O$ .

в) Выбирая любую из трех пар пересекающихся высот, доказываем, что соответствующая пара противоположных ребер перпендикулярна. Это и значит, что тетраэдр ортогональный.

г) Если основание  $H_4$  высоты  $DH_4$  (см. рис. 88) — ортоцентр грани  $ABC$ , то  $AH_4$ ,  $BH_4$  и  $CH_4$  — высоты треугольника  $ABC$ . Следовательно,  $AH_4 \perp BC$ ,  $BH_4 \perp CA$ ,  $CH_4 \perp AB$ . Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что  $AD \perp BC$ ,  $BD \perp CA$  и  $CD \perp AB$ . Обратное утверждение следует из задачи а).

д) Пусть  $O$  — точка пересечения высот ортогонального тетраэдра  $ABCD$ . Проведем плоскость  $BOD$  (см. рис. 87). Как показано в решении задачи 33, эта плоскость перпендикулярна к ребру  $AC$ . В свою очередь, плоскость  $AOC$  перпендикулярна к  $BD$ . Линия их пересечения — общий перпендикуляр ребер  $AC$  и  $BD$ . Очевидно, этот перпендикуляр проходит через точку  $O$ , так как она лежит и в плоскости  $BOD$  и в плоскости  $AOC$ . Аналогично доказываем, что общие перпендикуляры двух других пар противоположных ребер также проходят через точку  $O$ .

**35.** а) Пусть в трехгранном угле  $SABC$  через каждое ребро проведена плоскость перпендикулярно к противоположной грани. Пусть плоскости  $\beta$  и  $\gamma$ , проходящие через ребра  $SB$  и  $SC$  перпендикулярно к граням  $SAC$  и  $SAB$  соответственно, пересекаются по прямой  $SH$  (рис. 89). Пусть, далее,  $SC'$  — пересечение плоскости  $\gamma$  с плоскостью  $SAB$ ,  $SB'$  — пересечение плоскости  $\beta$  с плоскостью  $SAC$ . При этом точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  мы считаем выбранными на ребрах трехгранного угла так, чтобы было  $AB \perp SC'$ ,  $AC \perp SB'$ , а точки  $C'$  и  $B'$  берем соответственно на  $AB$  и  $AC$ . Тогда  $CC' \perp AB$ . Действительно,

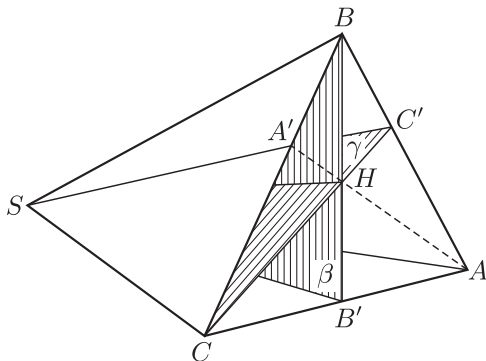


Рис. 89

плоскость  $SAB$  перпендикулярна к плоскости  $\gamma$  и, следовательно, прямая  $AB$ , проведенная в плоскости  $SAB$  перпендикулярно к линии пересечения обеих плоскостей, перпендикулярна к плоскости  $\gamma$ , а значит, и к любой прямой этой плоскости. Точно так же найдем, что  $BB' \perp AC$ . Прямые  $CC'$  и  $BB'$  пересекаются в ортоцентре  $H$  треугольника  $ABC$ . Так как плоскость  $ABC$  проходит через прямую  $AB$  — перпендикуляр к плоскости  $\gamma$ , то плоскости  $ABC$  и  $\gamma$  перпендикулярны. Аналогично доказываем, что плоскость  $ABC$  перпендикулярна к плоскости  $\beta$  и к прямой  $SH$  — линии пересечения плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$ . Проведем через точки  $A$  и  $H$  прямую  $AA'$  — третью высоту треугольника  $ABC$ . Так как  $HA' \perp BC$ , то и наклонная  $SA' \perp BC$ . Значит, прямая  $BC$ , перпендикулярная к прямым  $SA'$  и  $AA'$  плоскости  $SAA'$ , перпендикулярна к самой плоскости  $SAA'$ . Отсюда находим, что плоскость  $SAA'$  перпендикулярна к плоскости  $SBC$ , в которой лежит прямая  $BC$ .

б) Пусть высотные прямые  $DH_4$  и  $BH_2$  пересекаются в точке  $O$  (см. рис. 87). Рассмотрим определяемую ими плоскость  $\alpha$ . Так как плоскость, проведенная через высотную прямую и ребро, перпендикулярна к грани, противоположащей этому ребру, то плоскость  $\alpha$  перпендикулярна как к грани  $ACD$ , так и к грани  $ABC$ , а значит, и к их общему ребру  $AC$ . Это значит, что  $AC \perp \alpha$  и, следовательно,  $BD$  и  $AC$  взаимно перпендикулярны.

Обратно, если это имеет место, то высотные прямые  $DH_4$  и  $BH_2$  и высотные прямые  $CH_3$  и  $AH_1$  пересекаются, так как  $DH_4$  и  $BH_2$  целиком лежат в плоскости  $\alpha$ , проходящей через  $BD$  перпендикулярно к  $AC$ , а  $CH_3$  и  $AH_1$  целиком лежат в плоскости  $\beta$ , проходящей через  $AC$  перпендикулярно к  $BD$ .

в) Применяя рассуждения, тождественные изложенным в решении задачи 34, в, и пользуясь решением задачи б, найдем, что рассматриваемый тетраэдр — ортогональный и высотные прямые совпадают с его высотами; значит, если три высотные прямые пересекаются в точке  $O$ , то четвертая также проходит через эту точку.

**36.** Пусть  $ABCD$  — тетраэдр и пусть плоскость  $\alpha$ , проведенная через ребро  $DB$  перпендикулярно к ребру  $CA$ , пересекает его в точке  $H$ , а плоскость  $\beta$ , проведенная через ребро  $AC$  перпендикулярно к ребру  $BD$ , пересекает ребро  $BD$  в точке  $E$  (см. рис. 87). Из треугольников  $ADH$  и  $BCH$  имеем

$$\begin{aligned} AD^2 &= AH^2 + DH^2, & BC^2 &= CH^2 + BH^2, \\ AD^2 + BC^2 &= AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2. \end{aligned}$$

Аналогично, из треугольников  $ABH$  и  $BCH$ :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2, & DC^2 &= CH^2 + DH^2, \\ AB^2 + DC^2 &= AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2. \end{aligned}$$

Таким образом  $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ . Рассматривая треугольники с одной вершиной в точке  $E$ , выводим, что

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2.$$

Обратное утверждение без труда получается аналогичным путем.

**37.** а) Пусть  $SABC$  (рис. 90) — данный трехгранный угол. Плоскость  $\alpha$ , проходящая через биссектрису  $Sa$  угла  $BSC$  перпендикулярно к плоскости  $SBC$ , является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от лучей  $SB$  и  $SC$  или их продолжений<sup>1)</sup>. Точно так же плоскость  $\beta$ , проходящая через биссектрису  $Sb$  угла  $ASC$  перпендикулярно к плоскости  $SAC$ , является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от лучей  $SA$  и  $SC$  или от их продолжений. Отсюда следует, что все точки прямой пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  должны быть одинаково удалены от лучей  $SA$  и  $SB$  или их продолжений, т. е. должны принадлежать плоскости  $\gamma$ , проходящей через биссектрису  $Sс$  угла  $ASB$ .

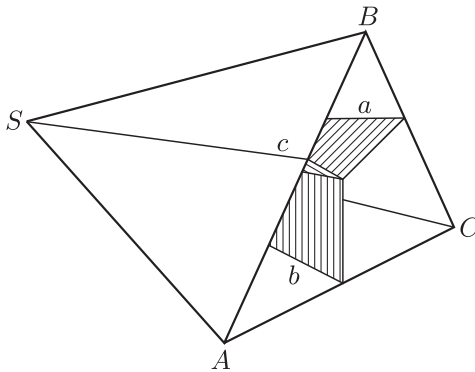


Рис. 90

<sup>1)</sup> Это выражение означает, что  $\alpha$  есть геометрическое место точек, которые одинаково удалены от прямых  $SB$  и  $SC$  и проекции которых на эти прямые лежат либо обе на лучах  $SB$  и  $SC$ , либо обе на лучах, дополнительных к ним.

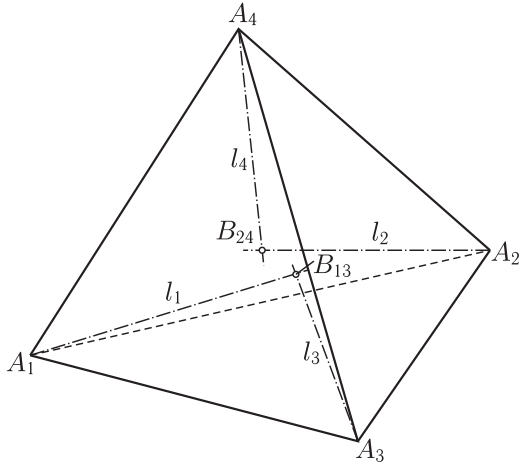


Рис. 91

б) Пусть в тетраэдре  $A_1A_2A_3A_4$  (рис. 91) биссекторные прямые  $l_1$  трехгранного угла  $A_1A_2A_3A_4$  и  $l_3$  угла  $A_3A_2A_1A_4$  пересекаются в точке  $B_{13}$ . Это значит, в частности, что точка  $B_{13}$  равноудалена от прямых  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ ,  $A_1A_4$  и  $A_1A_2$ ,  $A_3A_1$  и  $A_3A_4$ , т.е. является центром вписанной в четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  сферы, касающейся также диагонали  $A_1A_3$ . Точка  $B_{13}$  по построению лежит на прямой пересечения биссектральных плоскостей  $\beta_{213}$  и  $\beta_{132}$  плоских углов  $A_2A_1A_3$  и  $A_1A_3A_2$ , т.е. на перпендикуляре к плоскости  $A_1A_2A_3$ , восставленном в центре вписанной в  $\triangle A_1A_2A_3$  окружности. Значит, точки касания лежат на самих отрезках  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_1A_3$ . Аналогично доказываем это и для отрезков  $A_3A_4$  и  $A_4A_1$ .

Как указано в замечании на с. 77, отсюда следует, что суммы противоположных сторон четырехугольника  $A_1A_2A_3A_4$  равны, т.е.  $A_1A_2 + A_3A_4 = A_2A_3 + A_1A_4$ .

Но в этом случае согласно второму решению задачи 23, б существует сфера, вписанная в четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  и касающаяся диагонали  $A_2A_4$ . Центр этой сферы должен быть равноудален от отрезков  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_1$  и  $A_2A_4$  и, следовательно, должен лежать как на биссекторной прямой  $l_2$  трехгранного угла  $A_2$ , так и на биссекторной прямой  $l_4$  трехгранного угла  $A_4$ . Таким образом, прямые  $l_2$  и  $l_4$  должны пересекаться в некоторой точке  $B_{24}$ .

в) Пусть биссекторные прямые  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда биссекторная прямая  $l_4$  пересекает каждую из прямых  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ . В самом деле, так как, например, прямые  $l_1$

и  $l_2$  пересекаются, то на основании задачи б) прямая  $l_4$  должна пересекаться с  $l_3$ . Следовательно, прямые  $l_1, l_2, l_3, l_4$  попарно пересекаются. Так как они не лежат в одной плоскости, то в силу задачи 8, а они должны проходить через одну точку.

г) В решении задачи б) было доказано, что если две биссекторные прямые тетраэдра, например  $l_1$  и  $l_3$  (см. рис. 91), пересекаются, то суммы соответствующих ребер равны, т. е.

$$A_1A_4 + A_2A_3 = A_1A_2 + A_3A_4.$$

Применяя аналогичные рассуждения к биссекторным прямым  $l_1$  и  $l_2$ , получаем

$$A_1A_4 + A_2A_3 = A_1A_3 + A_2A_4.$$

Таким образом, утверждение задачи доказано.

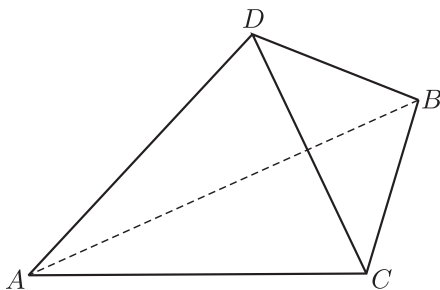


Рис. 92

Пусть теперь в тетраэдре  $ABCD$  (рис. 92)

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC. \quad (*)$$

Из первых двух равенств в применении к четырехугольнику  $ABDC$  следует, что существует сфера  $S$ , касающаяся всех сторон этого четырехугольника и одной его диагонали, например,  $BC$  (см. второе решение задачи 23, б). Как показывают два последних равенства (\*), в четырехугольнике  $ACBD$  суммы противоположных сторон тоже равны. Следовательно, сфера  $S$ , касающаяся трех сторон  $BD, CB, AC$  и диагонали  $CD$  этого четырехугольника, в силу того же второго решения задачи 23, б должна касаться и четвертой его стороны  $AD$ . Таким образом, сфера  $S$  касается всех ребер тетраэдра. Следовательно, центр сферы  $S$  одинаково удален от всех ребер, т. е. должен лежать на всех биссекторных прямых.

**38.** Пусть в тетраэдре  $A_1A_2A_3A_4$  (рис. 93)

$$A_1A_3 + A_2A_4 = A_1A_4 + A_3A_2.$$



Тогда биссекторные прямые, выходящие из вершин  $A_3$  и  $A_4$ , пересекаются в некоторой точке  $H$ . Обозначим соответственно через  $P, Q, R$  и  $S$  проекции точки  $H$  на грани  $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_3$  и  $A_1A_2A_4$ , а через  $A_{ik}$  — проекцию  $H$  на ребро  $A_iA_k$  (именно,  $A_{13}$  — проекция  $H$  на  $A_1A_3$  и т. д.). Тогда на основании теоремы о трех перпендикулярах

$$PA_{23} \perp A_2A_3, \quad PA_{24} \perp A_2A_4, \quad QA_{13} \perp A_1A_3, \quad QA_{14} \perp A_1A_4.$$

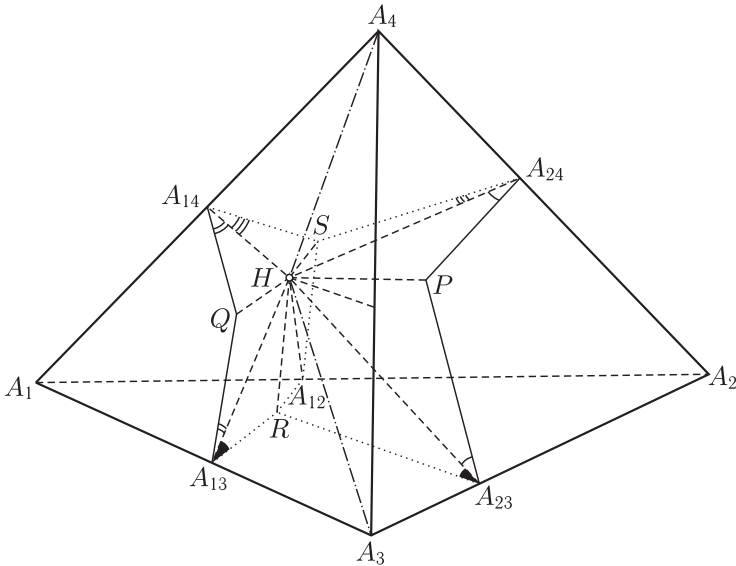


Рис. 93

Далее,  $\triangle HA_{23}P = \triangle HA_{24}P$ , так как сторона  $HP$  — общая и  $HA_{23} = HA_{24}$ , ибо точка  $H$ , лежащая на биссекторных прямых углов  $A_3$  и  $A_4$ , одинаково удалена от всех ребер трехгранных углов  $A_3$  и  $A_4$ , точно также  $\triangle HA_{13}Q = \triangle HA_{14}Q$ . Отсюда находим

$$\angle HA_{23}P = \angle HA_{24}P, \quad \angle HA_{13}Q = \angle HA_{14}Q.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\angle HA_{23}P + \angle HA_{14}Q = \angle HA_{24}P + \angle HA_{13}Q. \quad (*)$$

Аналогично получим

$$RA_{23} \perp A_2A_3, \quad RA_{13} \perp A_1A_3, \quad SA_{14} \perp A_1A_4, \quad SA_{24} \perp A_2A_4.$$

Далее, точно так же  $\triangle HRA_{13} = \triangle HRA_{23}$ ,  $\triangle HSA_{14} = \triangle HSA_{24}$ . Следовательно,

$$\angle HA_{13}R = \angle HA_{23}R, \quad \angle HA_{14}S = \angle HA_{24}S,$$

откуда

$$\angle HA_{23}R + \angle HA_{14}S = \angle HA_{24}S + \angle HA_{13}R. \quad (**)$$

Сложив равенства (\*) и (\*\*), найдем

$$\angle RA_{23}P + \angle QA_{14}S = \angle SA_{24}P + \angle RA_{13}Q,$$

что и требовалось доказать (входящие в последнее равенство углы являются линейными углами рассматриваемых двугранных углов).

**39.** Пусть центр описанной сферы тетраэдра совпадает с центром вписанной. Тогда плоскости всех граней равноудалены от этого центра. Поэтому все окружности, получающиеся при сечении описанной сферы плоскостями граней, равны. Но в равных окружностях равные хорды стягивают равные дуги, и углы, опирающиеся на равные дуги, равны. Поэтому у любых двух граней плоские углы, лежащие против общего ребра, равны. Введем следующие обозначения (рис. 94):

$$\angle BAC = \angle BDC = \alpha, \quad \angle ABD = \angle ACD = \alpha',$$

$$\angle ABC = \angle ADC = \beta, \quad \angle BCD = \angle BAD = \beta',$$

$$\angle ACB = \angle ADB = \gamma, \quad \angle CBD = \angle CAD = \gamma'.$$

Имеем следующие соотношения:

$$\text{из } \triangle ABC \quad \alpha + \beta + \gamma = 2d, \quad (1)$$

$$\text{из } \triangle ABD \quad \alpha' + \beta' + \gamma = 2d, \quad (2)$$

$$\text{из } \triangle BCD \quad \alpha + \beta' + \gamma' = 2d, \quad (3)$$

$$\text{из } \triangle ACD \quad \alpha' + \beta + \gamma' = 2d. \quad (4)$$

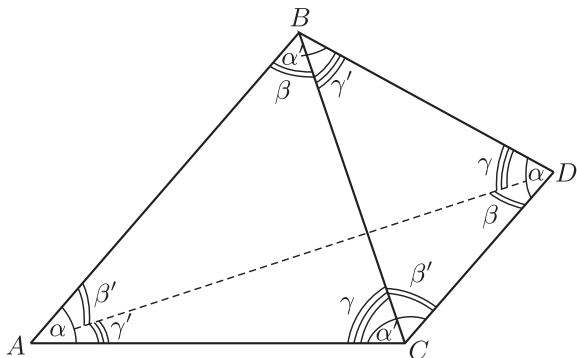


Рис. 94

Приравнивая (1) и (2), получаем

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$$

из соотношений (3) и (4)

$$\alpha - \beta = \alpha' - \beta'.$$

Отсюда

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'.$$

Таким образом во всех треугольниках углы соответственно равны. Но так как каждые два треугольника имеют по одной общей стороне, то любые две грани равны между собой и, значит, все они равны между собой.

**40.** Докажем предварительно следующее утверждение. Если в трехгранный угол  $SABC$  вписана сфера  $O$ , и  $A', B', C'$  — точки касания этой сферы с соответствующими гранями трехгранного угла, то плоскость  $A'B'C'$  перпендикулярна к прямой  $SO$  и пересекает ее внутри отрезка  $SO$  (рис. 95; на нем трехгранный угол  $SABC$  не показан).

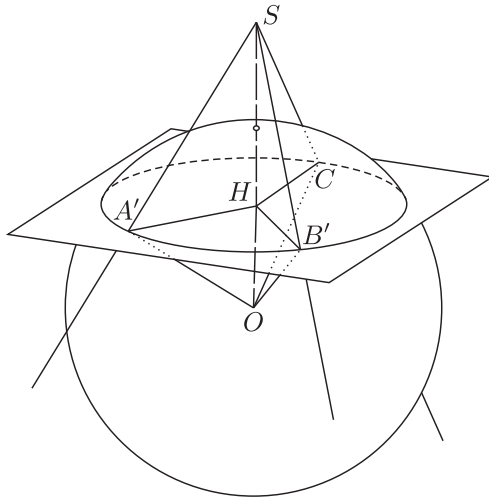


Рис. 95

В самом деле, рассмотрим треугольники  $SA'O$ ,  $SB'O$  и  $SC'O$ . Имеем:

$$\angle SA'O = \angle SB'O = \angle SC'O = 90^\circ,$$

так как это углы между касательными и радиусами, проведенными в точку касания,

$$OA' = OB' = OC' = r,$$

где  $r$  — радиус сферы. Поэтому эти треугольники равны.

Значит, основание  $H$  высот, опущенных из вершин прямых углов на гипотенузу  $OS$ , будет общим, и все высоты будут лежать в плоскости, перпендикулярной к  $OS$  и проходящей через точку  $H$ . Но через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну плоскость. Точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат «внутри» разных граней и, следовательно, не лежат на одной прямой. Поэтому плоскость  $A'B'C'$  перпендикулярна к прямой  $SO$  и пересекает ее в точке  $H$  — внутренней точке отрезка  $SO$ , разделяя тем самым точки  $O$  и  $S$ .

Отсюда уже легко вытекает утверждение задачи. Пусть  $ABCD$  — данный тетраэдр,  $O$  — центр вписанной сферы,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  — точки касания (рис. 96). Точка  $O$  лежит по ту же сторону от плоскости каждой грани тетраэдра  $A'B'C'D'$ , что и сам тетраэдр. А это и значит, что точка  $O$  лежит внутри тетраэдра.

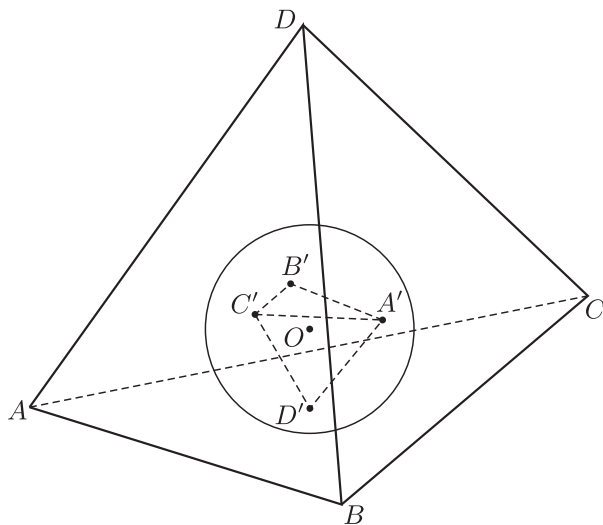


Рис. 96

**41.** а) Подсчитаем число сторон каждой грани нашего многогранника, сложим все полученные числа и обозначим найденную сумму через  $N$ . Очевидно, число  $N$  четно или нечетно в зависимости от того, четно или нечетно число граней с нечетным

числом сторон. С другой стороны, число  $N$  всегда должно быть четно. Действительно,  $N$  равно удвоенному числу ребер нашего многогранника, ибо всякое ребро принадлежит двум граням и таким образом при подсчете числа сторон всех граней учитывается дважды. Отсюда и следует требуемое утверждение.

б) Решение получается из решения предыдущей задачи заменой всюду слова «грань» словом «вершина» и слов «сторона грани» словами «ребро, исходящее из вершины».

**42.** а) Пусть  $W$  — некоторый многогранник и  $\mu$  — какая-то его грань. Поскольку наименьшее число сторон многоугольника равно трем — то  $\mu$  имеет по крайней мере три стороны. Далее, поскольку наш многогранник не сводится к единственной грани  $\mu$ , найдется вершина  $A$ , лежащая вне плоскости этой грани. В каждой вершине многогранника сходится не менее трех ребер; следовательно, по крайней мере три ребра имеют концы в  $A$ . Эти три ребра отличаются от ребер, являющихся сторонами грани  $\mu$ . Следовательно, общее число ребер многогранника  $W$  не меньше шести.

б) Допустим, что существует многогранник  $W$  с семью ребрами. Тогда все грани его обязательно являются треугольниками. Действительно, если бы некоторая грань  $\mu$  многогранника  $W$  имела больше трех вершин, то так как в каждой вершине грани  $\mu$  должно сходиться не менее трех ребер, из которых только два служат сторонами грани  $\mu$ , то по крайней мере одно ребро, примыкающее к каждой вершине грани  $\mu$ , не служит стороной  $\mu$ . Следовательно, в этом случае число ребер многогранника  $W$  должно было бы быть не меньше восьми. Таким образом все грани нашего многогранника  $W$  должны быть треугольниками. Пусть теперь  $N$ , как и в задаче 41, а, означает сумму числа сторон всех граней многогранника. Поскольку все грани  $W$  — треугольники, число  $N$  должно быть кратно трем. Но, с другой стороны (см. ту же задачу), число  $N$  равно удвоенному числу ребер  $W$ , т. е.  $N = 14$ ; таким образом, мы видим, что  $N$  не кратно трем. Полученное противоречие и показывает, что многогранника с семью ребрами не существует.

Остается показать, что существуют многогранники с любым числом ребер, большим семи. Построить такие многогранники очень просто. Для четного  $n$  таким многогранником служит пирамида, основание которой имеет  $\frac{n}{2}$  сторон (рис. 97, а). Пусть теперь  $n$  есть нечетное число, не меньшее девяти. Пусть  $W$  — пирамида с основанием, имеющим  $\frac{n-3}{2}$  сторон. Эта пирамида

имеет  $n - 3$  ребра. Если мы отсечем от нее уголок около одной из вершин основания плоскостью, пересекающей лишь основание и две боковые грани, примыкающие к нашей вершине, то полученный многогранник будет иметь ровно  $n - 3 + 3 = n$  ребер (рис. 97, б).

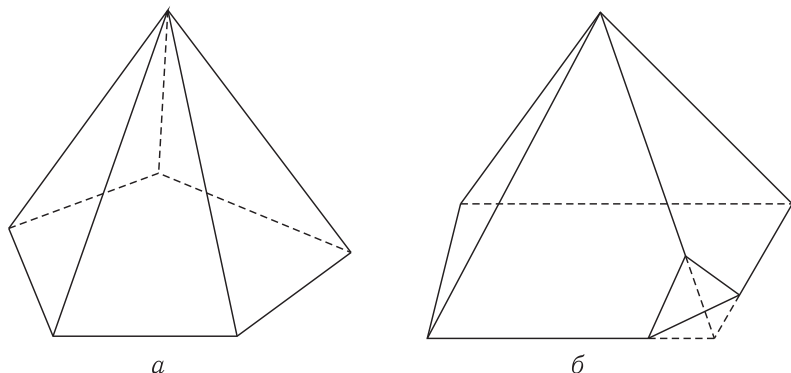


Рис. 97

**43.** Заметим, прежде всего, что если две грани многогранника имеют два общих ребра или общее ребро и не принадлежащую этому ребру общую вершину, то они лежат в одной плоскости. Такие многогранники мы считать многогранниками не будем и из рассмотрения исключаем<sup>1)</sup>.

Допустим теперь, что существует семигранник  $W$ , каждая грань которого является четырехугольником. Покажем, что хотя бы в одной его вершине должно сходиться не менее четырех ребер. В самом деле, так как каждой из семи граней многогранника  $W$  принадлежит по четыре ребра и каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то общее число ребер многогранника должно быть равно  $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ . Если бы в каждой вершине многогранника  $W$  сходилось ровно три ребра, то, так как каждое ребро соединяет две вершины, число вершин многогранника  $W$  должно было бы равняться  $\frac{14 \cdot 2}{3} = 9\frac{1}{3}$ , что, разумеется, невозможно.

Таким образом, в некоторой вершине  $A$  многогранника  $W$  сходится не менее четырех ребер и, следовательно, граней.

<sup>1)</sup> Без этой оговорки утверждение задачи неверно: легко построить пример многогранника, имеющего семь четырехугольных граней, лежащих в одной плоскости.

Обозначим эти грани  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ . Грани  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ , имеющие общую вершину  $A$ , не могут в силу сделанного в начале замечания иметь общих ребер, не прилегающих к вершине  $A$ . Но каждая из граней  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$  имеет по два таких ребра. Следовательно, не менее восьми ребер, принадлежащих граням  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ , должны принадлежать не более чем трем оставшимся граням многогранника  $W$ . Эти ребра образуют пространственный многоугольник  $\Phi$ , обладающий, очевидно, тем свойством, что из любых трех последовательных его сторон две принадлежат одной и той же грани  $\alpha_i$ . Отсюда следует, что каждой из оставшихся граней многогранника  $W$  может принадлежать не более двух сторон многоугольника  $\Phi$ . В самом деле, если бы некоторая грань  $\beta$  содержала, например, три стороны многоугольника  $\Phi$ , то, так как  $\beta$  — четырехугольник, а любые три стороны четырехугольника являются последовательными сторонами, эти три стороны должны были бы быть последовательными сторонами многоугольника  $\Phi$ . Следовательно, грань  $\beta$  имела бы два общих ребра с одной из граней  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ , что, как указывалось выше, невозможно.

Таким образом, каждая из оставшихся граней содержит не больше двух сторон многоугольника  $\Phi$ , т. е. все эти грани могут содержать не больше шести сторон этого многоугольника. Полученное противоречие и доказывает невозможность существования семигранника с четырехугольными гранями.

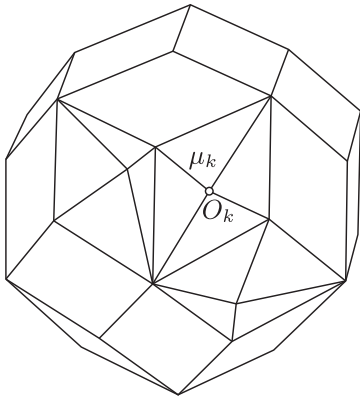


Рис. 98

**44.** Допустим, что существует многогранник  $W$ , не имеющий ни треугольных граней, ни трехгранных углов. Обозначим через  $\mathcal{B}$  число вершин этого многогранника. Выберем внутри каждой грани  $\mu_k$  точку  $O_k$  и соединим ее со всеми вершинами грани  $\mu_k$  (рис. 98). Тогда все грани разобьются на треугольники. Из каждой вершины исходит не менее четырех ребер, каждое ребро соединяет две вершины; следовательно, общее число ребер не меньше  $\frac{4\mathcal{B}}{2} = 2\mathcal{B}$ . Так как к каждому ребру прилежат два треугольника — по одному на двух

сторонах, то общее число граней не меньше  $\mathcal{B}$ . С другой стороны, по теореме Эйлера  $\mathcal{B} - \mathcal{R} + \mathcal{F} = 2$ , где  $\mathcal{R}$  — число ребер,  $\mathcal{F}$  — число граней. Подставляя  $\mathcal{R} \geq 2\mathcal{B}$  и  $\mathcal{F} \geq \mathcal{B}$ , получаем  $\mathcal{B} - 2\mathcal{B} + \mathcal{B} \geq 2$ , что невозможно. Следовательно, такого многогранника не существует.

смежных гранях, то общее число треугольников не меньше  $4\mathcal{B}$  и, следовательно, сумма всех их углов

$$S \geq 2d \cdot 4\mathcal{B} = 8d\mathcal{B}.$$

Пусть  $\mathcal{T}$  — число граней многогранника  $W$ , а  $S_1$  — сумма всех его плоских углов. Тогда сумма  $S$  углов всех полученных треугольников равна  $S_1 + 4d\mathcal{T}$ , так как на каждой грани  $\mu_k$  кроме внутренних углов мы имеем углы при точках  $O_k$ , причем сумма их при каждой точке  $O_k$  равна  $4d$ . Будем обозначать через  $A_k$  сумму внутренних углов грани  $\mu_k$ , тогда  $S_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_{\mathcal{T}}$ . Далее, так как все грани по меньшей мере четырехугольники, то

$$A_1 \geq 4d,$$

$$A_2 \geq 4d,$$

.....

$$A_{\mathcal{T}} \geq 4d.$$

Сложив почленно все эти неравенства, получим

$$S_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_n \geq 4d\mathcal{T}.$$

Отсюда и из  $S_1 + 4d\mathcal{T} \geq 8d\mathcal{B}$  имеем  $2S_1 \geq 8d\mathcal{B}$ , т. е.

$$S_1 \geq 4d\mathcal{B}.$$

С другой стороны, так как  $W$  — выпуклый многогранник, сумма плоских углов при каждой его вершине меньше  $4d$  и, следовательно, сумма всех плоских углов многогранника  $W$

$$S_1 < 4d\mathcal{B}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

**45.** а) Как было замечено в решении предыдущей задачи, сумма  $S_1$  всех плоских углов выпуклого многогранника строго меньше  $4d\mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B}$  — число вершин. С другой стороны, если бы существовал многогранник, все грани которого имели бы не менее шести сторон, то сумма его плоских углов необходимо превышала бы  $4d\mathcal{B}$ . Чтобы показать это, разобьем все грани способом, указанным в решении предыдущей задачи. Мы получим выпуклый «многогранник» с  $\mathcal{B} + \mathcal{T}$  «вершинами» (из них  $\mathcal{T}$  вершин не являются вершинами исходного многогранника). Сумма всех плоских углов его не превосходит  $4d(\mathcal{B} + \mathcal{T})$ , так как сумма углов при каждой «вершине» не превосходит  $4d$ . С другой стороны, к каждой «вершине» примыкает не менее шести треугольников



(рис. 99), а так как каждый треугольник имеет три «вершины», то общее число треугольников не менее чем

$$\frac{6(\mathcal{B} + \mathcal{T})}{3} = 2(\mathcal{B} + \mathcal{T}).$$

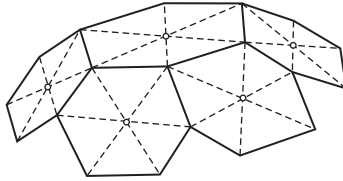


Рис. 99

Следовательно, сумма углов всех треугольников

$$S_1 \geq 2(\mathcal{B} + \mathcal{T})2d = 4d\mathcal{B} + 4d\mathcal{T}.$$

Так как сумма углов при точках внутри граней равна  $4d\mathcal{T}$ , то сумма плоских углов исходного многогранника

$$S = S_1 - 4d\mathcal{T} \geq 4d\mathcal{B}.$$

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

б) Предположив существование многогранника, у которого в каждой вершине сходится не менее шести ребер, мы приходим к противоречию с теоремой задачи а). Действительно, срезав плоскостями все его углы, как показано на рис. 100, мы, очевидно, получим многогранник, у которого каждая грань имеет не менее шести сторон.

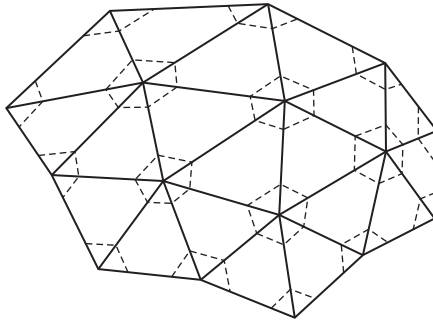


Рис. 100

**46.** Докажем, что в многогранник, изображенный на рис. 6 (с. 16), нельзя вписать сферу; доказательство теоремы в общем

случае почти не отличается от нижеизложенного. Предположим, что это не так, т. е. что в наш 14-гранник, имеющий восемь треугольных и шесть восьмиугольных граней, вписан некоторый шар. Точку касания каждой грани с вписанным шаром соединим со всеми вершинами этой грани (рис. 101), тем самым каждая грань разобьется на треугольники, основаниями которых будут ребра многогранника, а противоположными вершинами — точки касания граней многогранника с шаром. При этом каждому треугольнику, получившемуся в результате разбиения треугольной грани, соответствует смежный с ним треугольник, лежащий на восьмиугольной грани. Назовем треугольниками первого рода все треугольники разбиения, лежащие на треугольных гранях многогранника, треугольниками второго рода — смежные с ними треугольники, лежащие на восьмиугольных гранях, и треугольниками третьего рода — остальные треугольники разбиения (на рис. 101 заштрихованы треугольники второго рода).

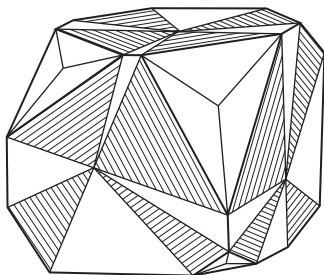


Рис. 101

Каждый треугольник первого рода равен смежному с ним треугольнику второго рода, так как они имеют общую сторону — ребро многогранника, а остальные их стороны попарно равны как касательные к сфере, проведенные из одной точки — вершины многогранника. Отсюда следует, что сумма углов при вершинах (т. е. при точках касания) во всех треугольниках первого рода равна такой же сумме в треугольниках второго рода.

Сумма углов при вершинах треугольников второго рода, лежащих на одной грани, меньше чем  $4d$ , так что сумма углов при вершинах всех треугольников второго рода меньше, чем  $4d \cdot 6 = 24d$ . Сумма же углов при вершинах всех треугольников первого рода равна  $4d \cdot 8 = 32d$ . Полученное противоречие и доказывает теорему.

Точно так же доказывается теорема и в общем случае; предположив, что в  $n$ -гранник, в котором можно выделить  $k > \frac{n}{2}$  граней так, что среди выделенных граней нет соседних, можно вписать шар, мы придем к заключению, что  $k \cdot 4d < (n - k)4d$ , что противоречит условию  $k \geq \frac{n}{2}$ .

**47.** Сопоставим каждой вершине  $A$  многогранника  $W$  плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную к прямой  $OA$ , расположенную с той же стороны от точки  $O$ , что и вершина  $A$ , и такую, что расстояние от  $O$  до  $\alpha$  обратно пропорционально длине  $OA$ , т. е. равно  $\frac{R^2}{OA}$ , где  $R$  есть какой-то фиксированный отрезок. Пересечение плоскостей, соответствующих по описанному закону всем вершинам многогранника  $W$ , и определит многогранник  $W'$ .

Докажем прежде всего, что ребра многогранника  $W'$  перпендикулярны к соответствующим ребрам многогранника  $W$ . Пусть  $A$  и  $B$  суть две соседние вершины многогранника  $W$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — грани многогранника  $W'$ , соответствующие точкам  $A$  и  $B$ , и  $l$  — прямая пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 102).

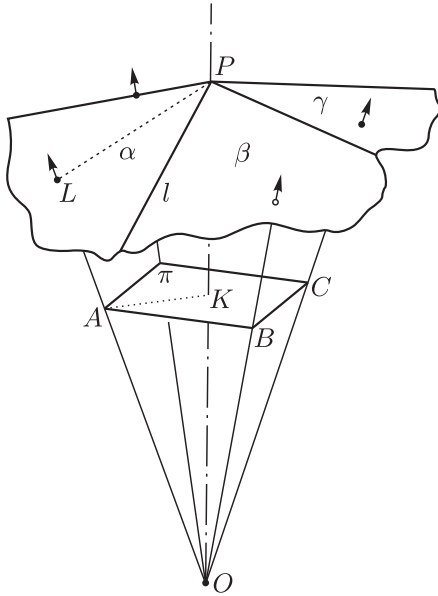


Рис. 102

Так как  $OA \perp \alpha$  и  $OB \perp \beta$ , то прямая  $l$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярна к прямым  $OA$  и  $OB$ , а следовательно, и к плоскости  $OAB$ , откуда  $l \perp AB$ .

Покажем теперь, что вершины многогранника  $W'$  лежат на перпендикулярах, опущенных из точки  $O$  на соответствующие грани многогранника  $W$ . Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — вершины многогранника  $W$ , принадлежащие одной грани  $\pi$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — грани многогранника  $W'$ , соответствующие вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$

многогранника  $W$ , и  $P$  — точка пересечения трех плоскостей  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , т. е. вершина  $W'$ , отвечающая грани  $\pi$  многогранника  $W$  (см. рис. 102).

Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $OK$  на плоскость  $\pi$ , и пусть  $P'$  есть точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью  $\alpha$ . Пусть далее  $L$  — точка пересечения  $OA$  с плоскостью  $\alpha$  (напомним, что  $OA \perp \alpha$ ). Прямоугольные треугольники с общим острым углом  $OKA$  и  $OP'L$  подобны; следовательно,

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OL}{OP'}$$

и

$$OP' = \frac{OA \cdot OL}{OK} = \frac{R^2}{OK}.$$

Точно так же доказываем, что если  $P''$  и  $P'''$  суть соответственно точки пересечения плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$  с прямой  $OK$ , то

$$OP'' = OP''' = OP' = \frac{R^2}{OK},$$

откуда следует, что все три точки  $P'$ ,  $P''$  и  $P'''$  совпадают между собой и, следовательно, совпадают с точкой  $P$ ; это и доказывает, что точка  $P$  лежит на прямой  $OK$ . Отсюда, между прочим, следует, что общий перпендикуляр соответствующей пары ребер проходит через точку  $O$ .

Нам осталось еще доказать, что получившаяся фигура является выпуклым многогранником. Известно, что многогранник является выпуклым, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости любой своей грани (можно даже принять это свойство в качестве определения выпуклого многогранника). Достаточно показать, что этим свойством обладают его вершины. В самом деле, отсюда будет следовать, что этим свойством будут обладать и точки ребер, так как если концы отрезка лежат по одну сторону плоскости, то и все точки его лежат по ту же сторону. Применяя это рассуждение к внутренним точкам граней, а затем и к внутренним точкам самого многогранника, убеждаемся в правильности сделанного утверждения.

Пусть теперь  $\pi$  — произвольная грань многогранника  $W$  и  $A$  — произвольная его вершина. Покажем, что точка  $P$ , соответствующая плоскости  $\pi$ , лежит по ту же сторону плоскости  $\alpha$ , что и точка  $O$ . Так как от изменения константы  $R$  наш многогранник только подобно изменяется, то для удобства будем считать  $R = OP$ , чтобы точка  $P$  была основанием перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на плоскость  $\pi$ . Проведем плоскость  $OPA$  (рис. 103). Многогранник  $W$  — выпуклый, поэтому вершина  $A$

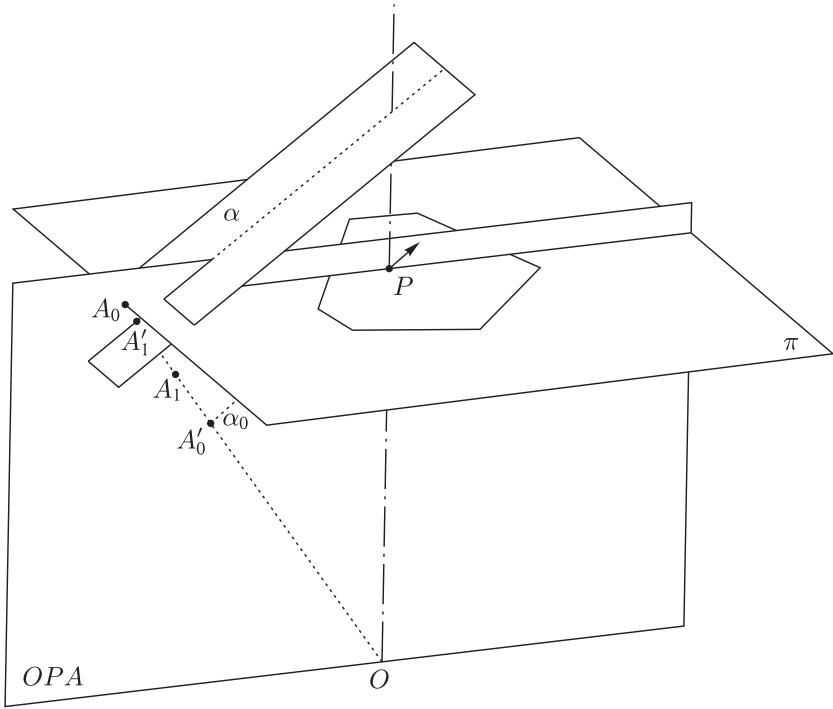


Рис. 103

лежит либо в самой плоскости  $\pi$  (что на рис. 103 соответствует положению точки  $A_0$ ), либо лежит по ту же сторону от плоскости  $\pi$ , что и точка  $O$  (что на рис. 103 соответствует положению точки  $A_1$ ). Так как плоскость  $\alpha$  перпендикулярна к прямой  $OA$ , то линия ее пересечения (на рисунке она тоже обозначена буквой  $\alpha$ ) с плоскостью  $OPA$  также перпендикулярна к  $OA$ . Но если точка  $A$  занимает положение  $A_0$ , то, как нетрудно проверить из подобия треугольников  $OPA_0$  и  $OA'_0P$ , линия  $\alpha_0$  будет проходить через точку  $P$  (это мы уже знали раньше). Если же она занимает положение  $A_1$  ( $OA_1 < OA_0$ ), то линия  $\alpha_1$  пересечет прямую  $OA$  в точке  $A'_1$  ( $OA'_1 > OA'_0$ ). Поэтому в последнем случае точка  $P$  заведомо лежит по ту же сторону плоскости грани, что и точка  $O$ . Этим доказательство заканчивается.

**48.** Пусть  $W$  — произвольный выпуклый многогранник. Рассмотрим сферу  $S$ , имеющую центр внутри многогранника  $W$ , и столь большого радиуса, что весь многогранник  $W$  лежит внутри этой сферы. Спроектируем наш многогранник на сферу из ее центра (рис. 104). Тогда на сфере получится сеть, стороны

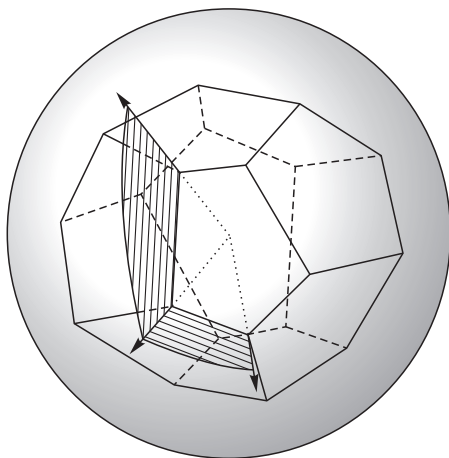


Рис. 104

которой будут соответствовать ребрам многогранника  $W$ , узлы — вершинам  $W$ , а куски сферы, на которые сеть ее разбивает — граням  $W$ .

Таким образом, нам достаточно доказать формулу  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$  для произвольной сети на сфере.

Заметим прежде всего, что наша формула справедлива для сети, состоящей из единственного узла. В этом случае  $\mathcal{B} = \mathcal{T} = 1$ ,  $\mathcal{P} = 0$  и, следовательно,  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$ . Будем теперь последовательно чертить нашу сеть, проводя каждый раз по одной дополнительной стороне, примыкающей притом к уже вычерченной части сети. Посмотрим, как будет при этом меняться выражение  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$ . Возможны следующие случаи.

1°. У прибавляемой стороны  $l$  одна из вершин лежит в узле уже построенной сети, а вторая вершина вообще не лежит на сети (рис. 105, а). В этом случае от прибавления стороны к сети число  $\mathcal{T}$  остается без изменений, а числа  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{B}$  возрастают каждое на 1. Таким образом, величина  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$  не меняется.

2°. У прибавляемой стороны  $l$  одна из вершин лежит в узле уже построенной сети, а другая — вершина  $A$  — на стороне, но не в узле (рис. 105, б). В этом случае число кусков плоскости, на которые она разбивается сетью, возрастает на единицу, прибавляется один новый узел, т.е.  $\mathcal{B}$  возрастает на 1, а число сторон возрастает на 2 (прибавляется сторона  $l$ , и, кроме того, одна из сторон сети разбивается вершиной  $A$  на две). Таким образом, и в этом случае величина  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$  не меняется.

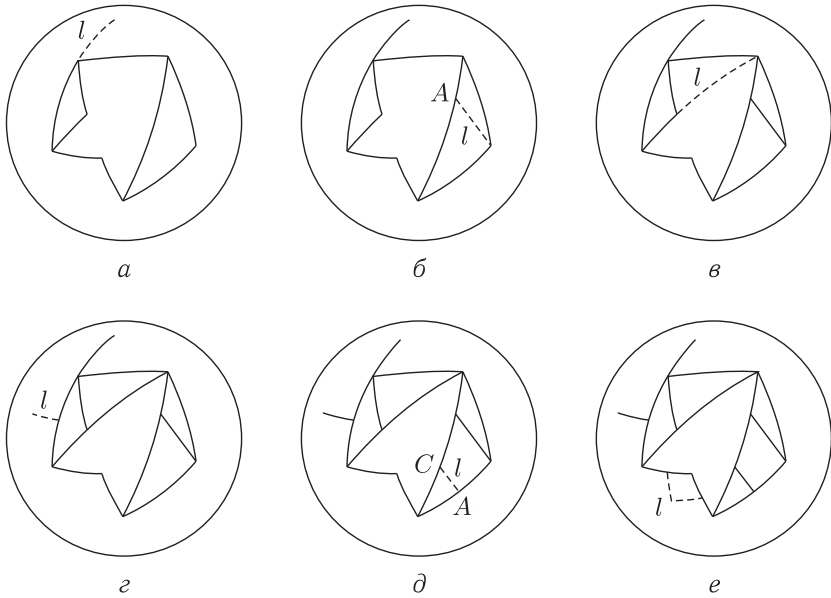


Рис. 105

3°. У прибавляемой стороны  $l$  обе вершины лежат в узлах уже прежде вычерченной сети. В этом случае число  $\mathcal{B}$  не меняется, а каждое из чисел  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{T}$  возрастает на 1 и  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$  снова остается неизменным (рис. 105, *в*).

4°. У прибавляемой стороны  $l$  одна из вершин лежит на стороне (но не в узле) прежней сети, а вторая вообще не принадлежит сети (рис. 105, *г*). Число  $\mathcal{T}$  при таком прибавлении стороны остается неизменным, число  $\mathcal{P}$  возрастает на 2 (сама сторона  $l$  и дополнительно сторона, возникающая от деления одной из сторон на две). Число  $\mathcal{B}$  также возрастает на 2, ибо вершины стороны  $l$  образуют новые узлы. Итак, и в этом случае число  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$  не меняется.

5°. У прибавляемой стороны  $l$  обе вершины лежат на сторонах первоначальной сети, но ни одна не попадает в узел сети (рис. 105, *д* и *е*).

При этом появляется два новых узла  $A$  и  $C$  — концы стороны  $l$ , т.е. число  $\mathcal{B}$  возрастает на 2, появляется один новый кусок, т.е.  $\mathcal{T}$  возрастает на 1, и, наконец, появляется 3 новые стороны, одной из них служит сама сторона  $l$ . Действительно, если оба конца  $l$  лежат на одной и той же стороне сети, то эта сторона разбивается двумя новыми узлами  $A$  и  $C$  на три части (рис. 105, *е*). Если же концы  $l$  лежат на разных сторонах прежней

сети, то каждая из этих сторон превращается появившимся на ней новым узлом в две (рис. 105,  $\delta$ ). Таким образом в обоих случаях число  $\mathcal{P}$  возрастает на 3. Итак, и при таком присоединении новой стороны выражение  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$  также не меняет своего значения.

Мы рассмотрели всевозможные случаи прибавления к имеющейся сети новой стороны. Оказалось, что при этом число  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}$  всегда остается неизменным. А так как для сети, состоящей из единственного узла, это число есть 2, то и для всякой сети оно также есть 2. Теорема Эйлера доказана.

**49.** Как и в предыдущей задаче, воспользуемся тем, что ребра многогранника образуют некоторую сеть на его поверхности. Эта сеть разбивает поверхность многогранника на области — грани, а ребра многогранника являются отрезками границ областей. Это разбиение многогранника можно рассматривать как «карту» на его поверхности. Заметив это, станем доказывать формулу  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$  для произвольной карты на поверхности односвязного многогранника. С каждой такой картой связывается так называемая двойственная ей карта<sup>1)</sup>. Она строится следующим образом. Внутри каждой области выбирается по точке «столицы области». Затем соединяются точки, лежащие в смежных областях, так, чтобы при этом линия соединения пересекала только общую границу этих областей в точке, отличной от вершины. Очевидно, что число областей  $\mathcal{T}$  исходной карты по построению равно числу узлов  $\mathcal{B}'$  двойственной карты. Каждой границе между областями соответствует пересекающая ее линия, соединяющая соответствующие узлы. Таким образом,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ .

Рассмотрим теперь произвольный узел исходной карты. Очевидно, что линии, соединяющие «столицы» смежных областей, ограничивают область, внутри которой лежит наш узел; при этом внутри этой области второй карты других узлов первой карты нет. Поэтому  $\mathcal{B} = \mathcal{T}'$ .

Таким образом, первая карта будет, в свою очередь, двойственна второй, так как внутри области второй карты у нас будет только одна «столица» и границы первой карты соединяют эти столицы, пересекая только общую столицу. Таким образом, мы получаем, что целый ряд теорем относительно граней, ребер и вершин многогранника, имеющих место также для любых карт,

---

<sup>1)</sup> Более подробно о двойственной карте см. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский. Математические беседы. Библиотека математического кружка, вып. 6. Гостехиздат, 1952. С. 28.



остается справедливым при замене в ее формулировке слова «грань» на слово «вершина» и обратно. (Ср., например, задачи 41, 44, 45.)

Воспользовавшись двойственной картой, мы сведем нашу задачу к рассмотрению сетей, задающих эти карты.

Будем называть *деревом* любую сеть (мы рассматриваем только нераспадающиеся сети), которая не содержит никакой замкнутой линии (рис. 106, *a*).

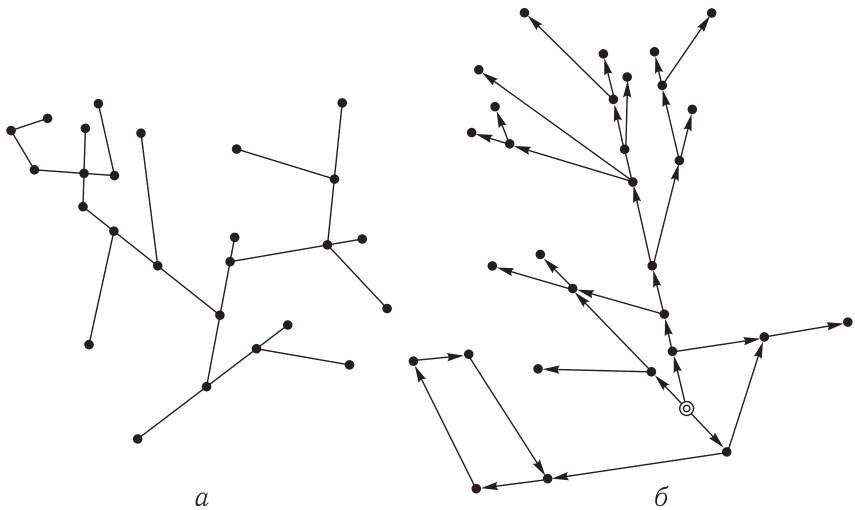


Рис. 106

Докажем важную лемму.

Для любой нераспадающейся сети справедливо неравенство  $\mathcal{P} \geq \mathcal{B} - 1$ , причем знак равенства имеет место только для дерева.

Для доказательства осуществим следующую конструкцию. Возьмем произвольный узел  $A$ . Выбрав один отрезок, исходящий из узла, поставим ему в соответствие другой его конец, затем последовательно проделаем такое же сопоставление с остальными отрезками, исходящими из узла. Затем перейдем к отрезкам, имеющим концы в уже сопоставленных узлах, и т. д.

Каждому отрезку при этом ставится в соответствие только один узел (именно, конец этого отрезка), но некоторым узлам (узел  $A$  мы пока не рассматриваем) сопоставлено более одного

отрезка<sup>1)</sup> (рис. 106, б). Отсюда  $\mathcal{P} \geq \mathcal{B} - 1$ . Более того, в случае дерева, очевидно, имеем равенство  $\mathcal{P} = \mathcal{B} - 1$ . С другой стороны, если будет хотя бы одна замкнутая цепочка отрезков, то наша конструкция хотя бы одному узлу поставит в соответствие по крайней мере два отрезка (см. рис. 106, б). Таким образом, в этом случае  $\mathcal{P} > \mathcal{B} - 1$ .

Перейдем теперь к доказательству формулы Эйлера. Легко видеть, что каждую сеть можно превратить в дерево. Для этого надо выкинуть из сети те отрезки, которым при подсчете ребер (см. лемму) ставились в соответствие уже сопоставленные ранее узлы. Очевидно, что все замкнутые границы при этом распадутся и все области сольются в одну. Обозначим через  $D$  полученное при этом дерево, а через  $D'$  совокупность отрезков двойственной сети, пересекающихся с выкинутыми границами. Покажем, что если сеть была расположена на поверхности односвязного многогранника, то  $D'$  будет дерево.

Действительно,  $D'$  не распадается на части, так как иначе дерево  $D$  разбивало бы поверхность многогранника на куски, т. е. содержало бы замкнутую линию. С другой стороны,  $D'$  не содержит замкнутой линии, так как разрез делил бы поверхность многогранника, а вместе с ним и дерево  $D$  по меньшей мере на две части, что противоречит тому, что  $D$  состоит из одного куска. Поэтому мы имеем  $\mathcal{B}' = \mathcal{T}$  (по свойству двойственных карт). Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — число отрезков соответственно первого и второго дерева. По построению  $L_1 + L_2 = \mathcal{P}$ . В то же время по доказанной выше лемме имеем

$$L_1 = \mathcal{B} - 1,$$

$$L_2 = \mathcal{B}' - 1.$$

Сложив последние равенства и сделав соответствующие преобразования, получаем

$$\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2,$$

что и требовалось показать.

На рис. 107, а, б изображены «деревья» для куба и октаэдра.

**50.** а) Каждая грань многогранника содержит не менее трех ребер. Каждое ребро принадлежит двум граням. Отсюда следует, что

$$\mathcal{P} \geq \frac{3}{2} \mathcal{T}.$$

---

<sup>1)</sup> Стрелка на рисунке отмечает узел, ставящийся в соответствие отрезку. Узел сопоставляется отрезкам.

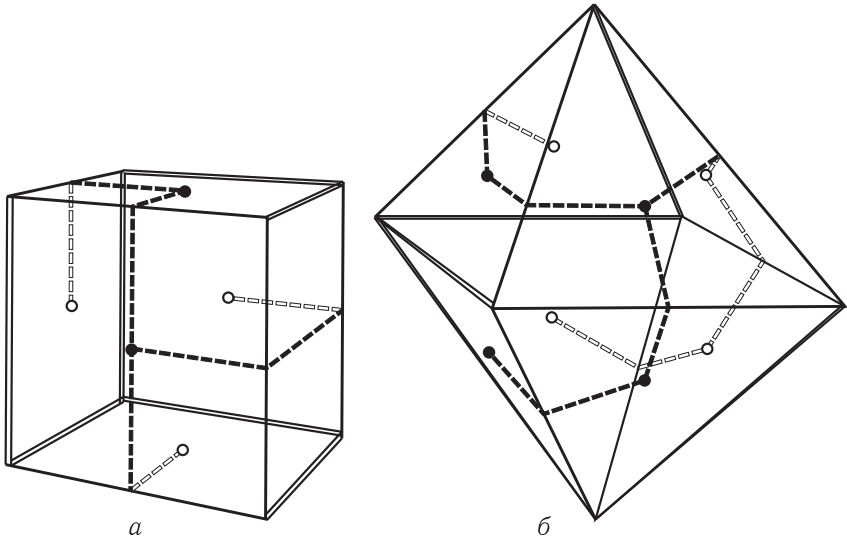


Рис. 107

Аналогично, что так как каждое ребро соединяет две вершины, а каждая вершина принадлежит не менее чем трем ребрам, то  $\mathcal{P} \geq \frac{3}{2} \mathcal{B}$ . Из формулы Эйлера следует теперь, что

$$\frac{2}{3} \mathcal{P} - \mathcal{P} + \mathcal{T} \geq \mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2,$$

откуда

$$\mathcal{P} - 3\mathcal{T} \leq -6 \quad (*)$$

и, следовательно,

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{T}} \leq 3 - \frac{6}{\mathcal{T}} < 3. \quad (**)$$

Из соотношений (\*) и (\*\*) и следуют требуемые неравенства.

б) Аналогично из доказанного выше неравенства  $\mathcal{P} \geq \frac{3}{2} \mathcal{T}$  и из формулы Эйлера получим

$$\mathcal{B} - \mathcal{P} + \frac{2}{3} \mathcal{P} \geq 2,$$

откуда, как и выше, следуют доказываемые соотношения.

**51.** Будем обозначать через  $\mathcal{T}_3$  число треугольных граней многогранника, через  $\mathcal{T}_4$  — четырехугольных,  $\mathcal{T}_5$  — пятиугольных и т.д. Тогда общее число граней будет  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \dots$ . Каждую треугольную грань ограничивают три ребра, четырех-

угольную — четыре и т. д. Подсчитав общее число ребер, лежащих на треугольных, четырехугольных и т. д. гранях, получим

$$3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + \dots = 2\mathcal{P},$$

ибо каждое ребро мы посчитали дважды — как принадлежащее обоим разделяемым им граням.

Обозначим через  $\mathcal{B}_3$  число трехгранных углов, через  $\mathcal{B}_4$  — четырехгранных и т. д. Тогда  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_5 + \dots$

Как и выше, находим

$$3\mathcal{B}_3 + 4\mathcal{B}_4 + 5\mathcal{B}_5 + \dots = 2\mathcal{P}.$$

Напишем теорему Эйлера в виде

$$4\mathcal{B} + 4\mathcal{T} = 2\mathcal{P} + 8 + 2\mathcal{P}.$$

Заменим  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{T}$  через их выражения, и выразим  $2\mathcal{P}$  один раз через  $\mathcal{B}$ , а другой через  $\mathcal{T}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} 4(\mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_5 + \dots) + 4(\mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 + \dots) &= \\ &= 8 + (3\mathcal{B}_3 + 4\mathcal{B}_4 + \dots) + (3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + \dots). \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, находим:

$$\mathcal{B}_3 + \mathcal{T}_3 = 8 + (\mathcal{B}_5 + \mathcal{T}_5) + 2(\mathcal{B}_6 + \mathcal{T}_6) + 3(\mathcal{B}_7 + \mathcal{T}_7) + \dots;$$

так как каждое из чисел  $\mathcal{B}_i$  и  $\mathcal{T}_j$  в правой части равенства или больше нуля, или равно нулю, то  $\mathcal{B}_3 + \mathcal{T}_3 \geq 8$ .

**52.** Пусть данный односвязный многогранник имеет  $\mathcal{T}_3$  треугольных,  $\mathcal{T}_4$  — четырехугольных,  $\mathcal{T}_5$  — пятиугольных граней и т. д. ( $\mathcal{T}_3 \geq 0$ ,  $\mathcal{T}_4 \geq 0$ ,  $\mathcal{T}_5 \geq 0$ , ...). В таком случае общее число  $\mathcal{T}$  граней равно

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 + \mathcal{T}_6 + \mathcal{T}_7 + \mathcal{T}_8 + \dots$$

Как и в решении задачи 51, имеем

$$3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + 6\mathcal{T}_6 + 7\mathcal{T}_7 + 8\mathcal{T}_8 + \dots = 2\mathcal{P}.$$

Подставим теперь полученные выражения для  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{P}$  в соотношение Эйлера  $\mathcal{B} = \mathcal{P} - \mathcal{T} + 2$ ; получим

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{1}{2}(3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + 6\mathcal{T}_6 + 7\mathcal{T}_7 + 8\mathcal{T}_8 + \dots) - \\ &\quad - (\mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 + \mathcal{T}_6 + \mathcal{T}_7 + \mathcal{T}_8 + \dots) + 2. \quad (*) \end{aligned}$$

Далее, каждая треугольная грань многогранника имеет три вершины, четырехугольная — четыре, пятиугольная — пять и т. д.

Подсчитав общее количество вершин, принадлежащих всем треугольным, четырехугольным и т. д. граням, получим

$$3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + 6\mathcal{T}_6 + 7\mathcal{T}_7 + 8\mathcal{T}_8 + \dots \geq 3\mathcal{B},$$

так как каждая вершина многогранника считается в этой сумме не меньше трех раз (каждая вершина принадлежит по крайней мере трем граням).

Сравнивая это соотношение с равенством (\*), получим

$$\begin{aligned} 3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + 6\mathcal{T}_6 + 7\mathcal{T}_7 + 8\mathcal{T}_8 + \dots &\geq \\ &\geq 3\left[\frac{1}{2}(3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + 6\mathcal{T}_6 + 7\mathcal{T}_7 + 8\mathcal{T}_8 + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - (\mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 + \mathcal{T}_6 + \mathcal{T}_7 + \mathcal{T}_8 + \dots) + 2\right], \end{aligned}$$

или после упрощения

$$3\mathcal{T}_3 + 2\mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 - \mathcal{T}_7 - 2\mathcal{T}_8 - \dots \geq 12,$$

т. е.

$$3\mathcal{T}_3 + 2\mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 \geq 12.$$

Сумма утроенного числа треугольных граней, удвоенного числа четырехугольных граней и числа пятиугольных граней произвольного многогранника не может быть меньше 12. Отсюда непосредственно вытекают все утверждения задачи.

**53.** Пусть у некоторого выпуклого многогранника  $W$  число соседей каждой грани меньше шести, т. е. не превышает пяти.

Легко видеть, что в каждой вершине такого многогранника может сходиться не более пяти ребер (а значит, и граней). Чтобы показать это, рассмотрим любую грань многогранного угла. Эта грань имеет не менее трех сторон. По двум из них, прилежащим к вершине рассматриваемого угла, примыкают грани этого угла, а по остальным — еще какие-то грани. Если бы в вершине многогранного угла сходилась шесть или более ребер, то с нашей гранью соседствовало бы пять или более граней угла и еще по меньшей мере одна грань, т. е. число ее соседей было бы не менее шести, что противоречит сделанному предположению. Покажем, что если в некоторых вершинах многогранника  $W$  сходится более трех ребер, то  $W$  можно заменить многогранником  $W_1$ , у которого в каждой вершине сходится ровно три ребра и число соседей у каждой грани также не больше пяти. Для этого срежем плоскостями все вершины, в которых сходится четыре или более

ребер, так, чтобы секущие плоскости пересекали только грани соответствующего угла (рис. 108). При этом появятся новые грани, у которых согласно сделанному выше замечанию будет четыре или пять сторон. Так как все вновь образовавшиеся многогранные углы будут трехгранными, то новые грани будут иметь не более чем по 5 соседей. Число же соседей у каждой грани может только уменьшиться. Действительно, если в одной из вершин грани многогранника  $W$  сходились четыре или пять граней, то общее с этой гранью ребро могли иметь лишь две из них, следовательно, по крайней мере

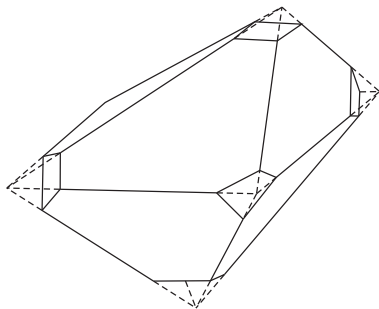


Рис. 108

одна грань из числа сходящихся в этой вершине граничила с первой гранью лишь по вершине. После срезания эта грань (или несколько таких граней) перестала быть соседней, зато стала соседствовать одна (и только одна) новая грань. Таким образом, число соседей у старых граней не возросло.

Итак, мы перешли от многогранника  $W$  к многограннику  $W_1$ , причем число соседей у каждой грани не увеличилось, число граней только возросло, и в каждой вершине  $W_1$  сходится ровно три ребра. Пусть теперь  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{T}$  означают число вершин, ребер и граней многогранника  $W_1$ . Поскольку в каждой вершине сходится три ребра и каждое ребро имеет концы в двух вершинах, то

$$\mathcal{P} = \frac{3}{2} \mathcal{B}. \quad (*)$$

По предположению, каждая грань многогранника  $W$  имела не более пяти соседей, так что каждая грань  $W_1$  имеет также не более пяти соседей и, следовательно, не более пяти вершин. Поэтому сумма чисел вершин всех граней не превосходит  $5\mathcal{T}$ . Так как при этом каждая вершина многогранника учитывается трижды, то имеет место неравенство

$$\mathcal{B} \leq \frac{5}{3} \mathcal{T}. \quad (**)$$

Воспользуемся теперь теоремой Эйлера, согласно которой  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$ . Учитывая соотношения (\*) и (\*\*), получаем следовательно  $\mathcal{B} - \frac{3}{2} \mathcal{B} + \mathcal{T} = 2$  или  $\mathcal{T} = \frac{\mathcal{B}}{2} + 2$  и, далее,  $\mathcal{T} \leq \frac{5}{6} \mathcal{T} + 2$ ,

откуда

$$\mathcal{T} \leq 12.$$

Таким образом, число граней многогранника  $W_1$ , а следовательно и  $W$ , не превосходит 12, т.е. всякий многогранник, каждая грань которого имеет не более пяти соседних, содержит не больше 12 граней. В то же время у додекаэдра ровно 12 граней и каждая из них имеет по пять соседей. Итак, искомое число  $N$  равно 12.

**54.** а) Пусть  $W$  — выпуклый многогранник, каждая грань которого имеет не более четырех соседних. Так же, как и в решении предшествующей задачи, преобразуем многогранник  $W$  в многогранник  $W_1$ , у которого будет не меньше граней, чем у многогранника  $W$ , максимальное число соседей грани будет не больше, чем у многогранника  $W$ , и в каждой его вершине будет сходиться ровно три ребра. Тогда для многогранника  $W_1$  имеет место равенство  $\mathcal{P} = \frac{3}{2}\mathcal{T}$ . Далее, поскольку по условию каждая грань имеет не более чем четыре вершины, а в каждой вершине сходится ровно три грани, мы имеем  $\mathcal{B} \leq \frac{4}{3}\mathcal{T}$ . По теореме Эйлера  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$  или  $\mathcal{B} - \frac{3}{2}\mathcal{B} + \mathcal{T} = 2$ , откуда следует  $\mathcal{T} \leq 2 + \frac{4}{6}\mathcal{T}$  или  $\mathcal{T} \leq 6$ . Итак, число граней многогранника, удовлетворяющего требованиям задачи, не превосходит шести. С другой стороны, куб имеет ровно шесть граней и каждая его грань имеет ровно четырех соседей. Таким образом, искомое число равно 6.

б) Если у выпуклого многогранника  $W$  каждая грань имеет три соседних грани, то все грани  $W$  суть треугольники и в каждой вершине  $W$  сходится ровно три грани. Поэтому  $\mathcal{P} = \frac{3}{2}\mathcal{T}$  и  $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ . По формуле Эйлера находим  $\mathcal{T} - \frac{3}{2}\mathcal{T} + \mathcal{T} = 2$  и, следовательно,  $\mathcal{B} = \mathcal{T} = 4$ ,  $\mathcal{P} = 6$ . Отсюда уже легко следует, что  $W$  есть тетраэдр (см., например, задачу 42, а).

**55.** а) Так как все грани многогранника не могут сходиться в одной вершине, то четырехгранник не может иметь вершин, в которых сходится более трех граней. Далее, если  $A$  есть какой-либо трехгранный угол четырехгранника, то, кроме трех граней, сходящихся в  $A$ , многогранник может иметь еще только одну грань, которая должна пересекать все три ребра, выходящих из  $A$ . Таким образом, единственный возможный комбинаторный тип четырехгранника представляет треугольная пирамида (тетраэдр) (рис. 109).

б) Пятигранник может иметь, очевидно, только трехгранные или четырехгранные углы. Если пятигранник имеет четырехгранный угол  $A$ , то, кроме четырех плоскостей, сходящихся в  $A$ , он может иметь еще только одну грань, пересекающую все четыре ребра, исходящие из  $A$ . Таким образом, мы приходим к четырехугольной пирамиде (рис. 110,  $a$ ).

Предположим теперь, что пятигранник имеет только трехгранные углы. Пусть  $A$  есть какой-то трехгранный угол многогранника. Кроме трех граней, сходящихся в  $A$ , пятигранник имеет еще две грани; одна из них должна пересекать два из ребер, проходящих через  $A$ , а вторая — одно. Таким образом, мы приходим к трехгранной пирамиде с отрезанной вершиной, или, что безразлично, поскольку нас интересует лишь комбинаторный тип многогранника, к трехугольной призме (рис. 110,  $b$ ).

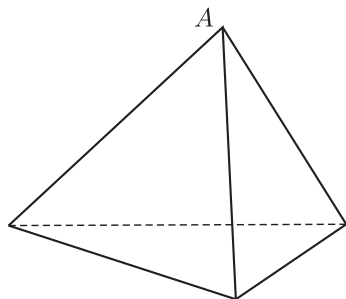


Рис. 109

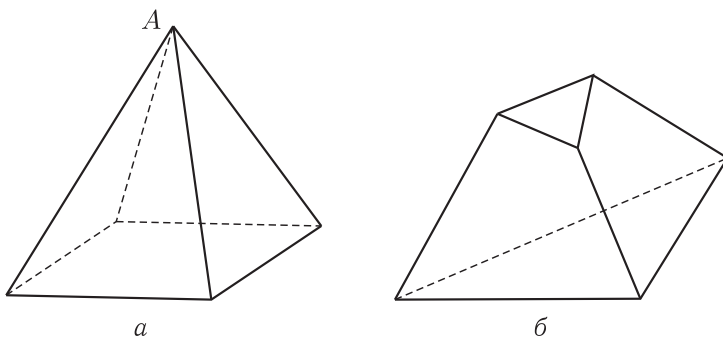


Рис. 110

в) Шестигранник может иметь трехгранные, четырехгранные или пятигранные углы. Если шестигранник имеет пятигранный угол  $A$ , то, кроме пяти граней, сходящихся в  $A$ , он может иметь только одну грань, пересекающую все ребра, исходящие из  $A$ . Таким образом мы приходим к пятиугольной пирамиде (рис. 111,  $a$ ).

Пусть теперь шестигранник не имеет пятигранных углов и имеет четырехгранный угол  $A$ . В таком случае кроме граней, сходящихся в  $A$ , шестигранник имеет еще две грани. При этом



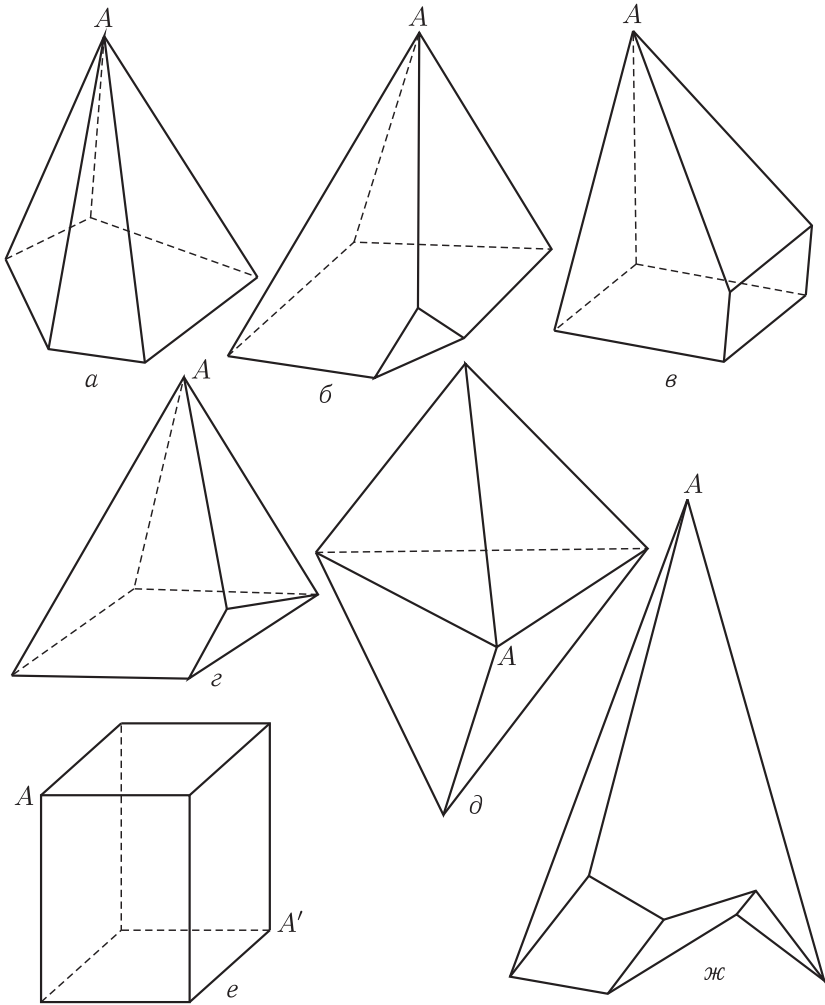


Рис. 111

возможно, что одна из этих граней пересекает одно из ребер, исходящих из  $A$ , а вторая — остальные три (четырёхугольная пирамида со срезанным углом при основании; рис. 111, б). Может случиться, что каждая из граней, не проходящих через  $A$ , пересекает два из ребер, исходящих из  $A$  (рис. 111, в). Кроме этого, возможно, что одна из двух не проходящих через  $A$  граней пересекает два из выходящих из  $A$  ребра, а вторая — три (в этом случае шестигранник будет иметь два четырёхгранных угла; рис. 111, г) или что каждая из этих плоскостей пересекает три

выходящих из  $A$  ребра (в этом случае шестигранник имеет три четырехгранных угла и будет иметь тот же комбинаторный тип, что и треугольная бипирамида, рис. 111,  $\partial$ ).

Наконец, предположим, что шестигранник имеет только трехгранные углы. Кроме трех граней, сходящихся в некоторой вершине  $A$ , многогранник имеет еще три грани. При этом может случиться, что каждая из трех граней многогранника, не проходящих через  $A$ , пересекает по одному из ребер, исходящих из  $A$ ; эти три грани сходятся в вершине  $A'$  многогранника, «противоположной»  $A$  (четыреугольная призма; см. рис. 111,  $e$ ), или что одна из этих трех граней пересекает два ребра, исходящих из  $A$ , вторая — одно ребро, а третья грань вовсе не пересекает исходящих из  $A$  ребер (рис. 111,  $ж$ ).

Таким образом, мы нашли семь различных комбинаторных типов шестигранников (рис. 111); нетрудно видеть, что никакие другие комбинаторные типы шестигранников невозможны.

*Примечание.* Число различных комбинаторных типов  $n$ -гранников очень быстро растет с ростом  $n$  (оставаясь, однако, конечным для каждого данного  $n$ ). Так показано, что имеется всего 34 различных комбинаторных типа семигранников и 257 различных комбинаторных типов восьмигранников. Ни для какого  $n$ , большего 8, число различных комбинаторных типов  $n$ -гранников не подсчитано.

### 56. Рассмотрим возможные случаи.

1°. Гранями топологически правильного многогранника являются треугольники. В этом случае число его ребер

$$\mathcal{P} = \frac{3}{2} \mathcal{T}$$

и по теореме Эйлера (см. задачу 48) мы имеем

$$\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = \mathcal{B} - \frac{3}{2} \mathcal{T} + \mathcal{T} = \mathcal{B} - \frac{1}{2} \mathcal{T} = 2,$$

откуда

$$\mathcal{T} = 2\mathcal{B} - 4.$$

Если в каждой вершине многогранника сходится по три грани, то (поскольку каждая грань имеет три вершины)  $\mathcal{T} = \mathcal{B}$  и, следовательно,

$$\mathcal{T} = \mathcal{B} = 4, \quad \mathcal{P} = 6.$$

Это — многогранник типа тетраэдра (рис. 112,  $a$ ).

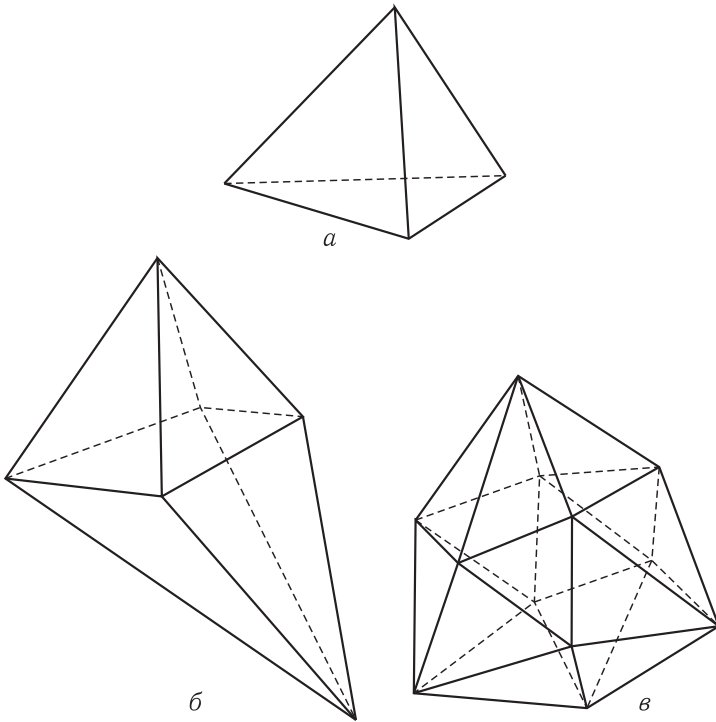


Рис. 112

Если в каждой вершине сходится по четыре грани, то  $\mathcal{B} = \frac{3}{4} \mathcal{T}$  и, следовательно,  $\mathcal{T} = \frac{3}{2} \mathcal{B} - 4$ , откуда

$$\mathcal{T} = 8, \quad \mathcal{B} = 6, \quad \mathcal{P} = 12.$$

Это — случай октаэдра (рис. 112, б).

Если, далее, в каждой вершине многогранника сходится по пять граней, то  $\mathcal{B} = \frac{3}{5} \mathcal{T}$ , откуда  $\mathcal{T} = \frac{6}{5} \mathcal{B} - 4$ . Итак, в этом случае

$$\mathcal{T} = 20, \quad \mathcal{B} = 12, \quad \mathcal{P} = 30.$$

Это — случай икосаэдра (рис. 112, в).

Покажем теперь, что более чем по пять треугольных граней в каждой вершине сходиться не может. В самом деле, в этом случае мы имели бы  $\mathcal{B} \leq \frac{3}{6} \mathcal{T} = \frac{1}{2} \mathcal{T}$ , что противоречит соотношению  $2\mathcal{B} - \mathcal{T} = 4 > 0$ .

Итак, существует лишь три типа топологически правильных многогранников с треугольными гранями.

2°. Гранями топологически правильного многогранника являются четырехугольники. В этом случае  $\mathcal{P} = 2\mathcal{T}$  и формула Эйлера дает  $\mathcal{B} - 2\mathcal{T} + \mathcal{T} = 2$  или

$$\mathcal{B} = \mathcal{T} + 2.$$

Если в каждой вершине сходится по три грани, то  $\mathcal{B} = \frac{4}{3}\mathcal{T}$ , и мы имеем

$$\mathcal{T} = 6, \quad \mathcal{B} = 8, \quad \mathcal{P} = 12.$$

Это — случай многогранника того же комбинаторного типа, что и куб (рис. 113).

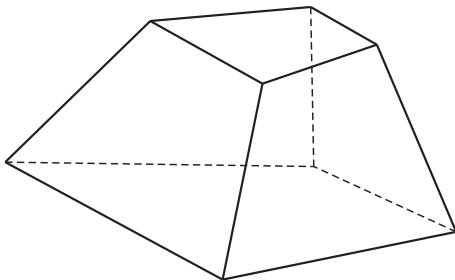


Рис. 113

Более трех граней в каждой вершине сходиться не может, так как в этом случае было бы  $\mathcal{B} \leq \mathcal{T}$ , что противоречит равенству  $\mathcal{B} = \mathcal{T} + 2$ . Таким образом, существует лишь один тип топологически правильных многогранников с четырехугольными гранями.

3°. Гранями топологически правильного многогранника являются пятиугольники. В этом случае мы имеем  $\mathcal{P} = \frac{5}{2}\mathcal{T}$  и теорема Эйлера дает  $\mathcal{B} - \frac{5}{2}\mathcal{T} + \mathcal{T} = 2$ , или

$$2\mathcal{B} = 3\mathcal{T} + 4.$$

Если в каждой вершине многогранника сходится по три грани, то  $\mathcal{B} = \frac{5}{3}\mathcal{T}$ , следовательно,

$$\mathcal{T} = 12, \quad \mathcal{B} = 20, \quad \mathcal{P} = 30.$$

Это — случай додекаэдра (рис. 114). Если бы в каждой вершине многогранника сходилась более чем по три грани, то  $\mathcal{B} \leq \frac{5}{4} \mathcal{T}$ , откуда  $2\mathcal{B} \leq \frac{5}{2} \mathcal{T}$ , что противоречило бы равенству  $2\mathcal{B} = 3\mathcal{T} + 4$ ;

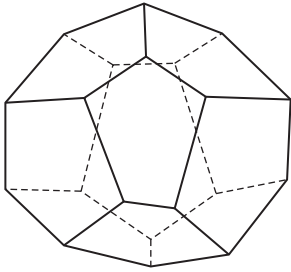


Рис. 114

мы получаем  $10\mathcal{T} \geq 12\mathcal{T} + 16$ , что невозможно. Итак, случай, когда в каждой вершине сходится по четыре или более пятиугольных граней, исключен.

Покажем теперь, что не существует топологически правильных многогранников, грани которых имеют по шесть или более ребер. Одно доказательство этого (даже более общего) предложения было уже приведено выше (см. решение задачи 45, а); мы здесь приведем доказательство, опирающееся на теорему Эйлера.

Действительно, пусть  $n$  — число ребер каждой грани; тогда  $\mathcal{P} = \mathcal{T} \cdot \frac{n}{2}$ . По теореме Эйлера  $\mathcal{B} - \frac{n}{2} \mathcal{T} + \mathcal{T} = 2$ . В каждой вершине сходится не менее трех граней, поэтому  $\mathcal{B} \leq \frac{n}{3} \mathcal{T}$ . Мы получаем  $\frac{n}{3} \mathcal{T} - \frac{n}{2} \mathcal{T} + \mathcal{T} \geq 2$ , откуда следует

$$\mathcal{T} \left(1 - \frac{n}{6}\right) \geq 2.$$

Следовательно,  $1 - \frac{n}{6} > 0$ , т. е.  $n < 6$ , что и требовалось доказать.

**57. а)** Доказательство будем вести методом математической индукции, по числу вершин многогранника, заключенных внутри многоугольника  $T$ . Пусть внутри многоугольника с  $m$  сторонами нет ни одной вершины многогранника (рис. 115). Если данный многоугольник расположен в одной грани многогранника, теорема очевидна. Если же многоугольник не лежит в одной грани, то диагоналями, лежащими на ребрах многогранника, он разбивается на многоугольники, каждый из которых лежит в плоскости одной грани. Если число этих диагоналей равно  $k$ , то они разбивают многоугольник на  $(k + 1)$  многоугольник  $T_1, T_2, \dots, T_{k+1}$ . Пусть число сторон каждого из них будет соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_{k+1}$ . Тогда, очевидно,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1} = m + 2k.$$

Сумма углов многоугольника  $T$  равна сумме углов многоугольников  $T_1, T_2, \dots, T_{k+1}$ . Подсчитаем эту последнюю сумму:

$$\begin{aligned} 2m_1d - 4d + 2m_2d - 4d + \dots + 2m_{k+1}d - 4d &= \\ &= 2(m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1})d - 4d(k+1) = \\ &= 2(m + 2k)d - 4d(k+1) = 2md - 4d, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

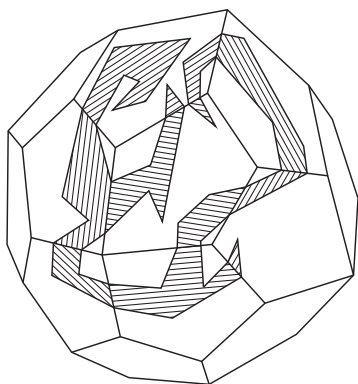


Рис. 115

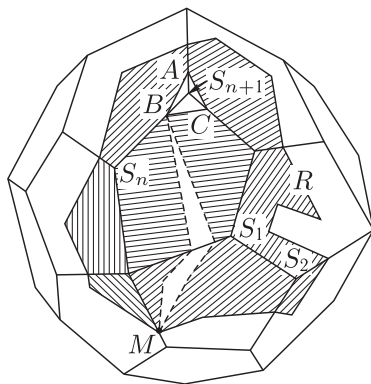


Рис. 116

Предположим, что теорема доказана для любого многоугольника, внутри которого заключено  $n$  вершин многогранника. Покажем, что она справедлива и для любого многоугольника  $R$ , внутри которого заключена  $(n+1)$  вершина  $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}$ . Пусть многогранный угол  $S_{n+1}$  имеет  $p$  граней, а значит, и  $p$  ребер. Выберем на каждом ребре этого угла по точке и последовательно соединим их (рис. 116). Затем соединим произвольную вершину  $B$  образовавшегося  $m$ -угольника с какой-нибудь вершиной  $M$  исходного  $m$ -угольника ломаной, не проходящей через вершины многогранника и лежащей вне построенного  $p$ -угольника. Обозначим число ее сторон через  $k$ . Очевидно, что можно те же точки  $M$  и  $B$  соединить второй ломаной с таким же числом сторон, которая проходила бы рядом с первой, не пересекая ее, причем внутри образованного этими ломаными многоугольника не было бы ни одной вершины многогранника.

При этом  $m$ -угольник разбивается на три части:  $p$ -угольник вокруг вершины  $S_{n+1}$ ,  $2k$ -угольник, образованный ломаными, соединяющими  $M$  с  $B$ , и остающийся  $(m+2k+p)$ -угольник, внутри которого заключены остальные  $n$  внутренних вершин многогранника.

Для того чтобы получить искомую сумму, надо из суммы всех углов трех многоугольников вычесть полные углы при внутренних вершинах ломаных и вершинах  $p$ -угольника. Так как они все лежат на гранях или на ребрах, не совпадая с вершинами многогранника, то полный угол вокруг каждой равен  $4d$ . С другой стороны, сумма углов  $p$ -угольника равна сумме всех углов образовавшихся треугольников минус сумма всех плоских углов при вершине  $S_{n+1}$ , что по определению дефекта равно  $4d - \text{def } S_{n+1}$ . Внутри  $2k$ -угольника нет вершин многогранника, поэтому сумма его углов равна  $(2k - 2)2d$ . Сумма углов  $(m + 2k + p)$ -угольника по предположению индукции равна

$$(m + 2k + p - 2) \cdot 2d + \text{def } S_1 + \text{def } S_2 + \dots + \text{def } S_n.$$

Используя все это, получаем, что сумма углов многоугольника  $R$  равна

$$\begin{aligned} & (m + 2k + p - 2) \cdot 2d + (2k - 2) \cdot 2d + \\ & + [p \cdot 2d - (4d - \text{def } S_{n+1})] - 2(k - 1) \cdot 4d - p \cdot 4d + \\ & \quad + \text{def } S_1 + \text{def } S_2 + \dots + \text{def } S_n = \\ & = (m - 2) \cdot 2d + \text{def } S_1 + \text{def } S_2 + \dots + \text{def } S_n + \text{def } S_{n+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

б) Первое решение. Построим на какой-нибудь грани произвольный треугольник  $ABC$  (рис. 117). Тогда поверхность многогранника разобьется на треугольник  $ABC$  и его внешнюю часть, которую мы обозначим « $ABC$ » (треугольник в кавычках). Сумма углов треугольника  $ABC$  равна  $2d$ . Сумма углов «треугольника  $ABC$ » по предыдущей задаче равна  $2d$  плюс сумма дефектов всех вершин многогранника, заключенных внутри него, т. е. попросту  $2d + \Delta$ , где  $\Delta$  — сумма всех дефектов многогранника.

Очевидно, что сумма всех углов треугольника  $ABC$  и «треугольника  $ABC$ » равна  $3 \cdot 4d$ . Таким образом,  $2d + 2d + \Delta = 12d$ , откуда  $\Delta = 8d$ .

Второе решение. Подсчитаем сумму  $\Sigma$  плоских углов выпуклого многогранника, имеющего  $\mathcal{P}$  ребер и  $\mathcal{T}$  граней, которые мы будем обозначать  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\mathcal{T}}$ . Имеем  $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{\mathcal{T}}$ , где  $\sigma_i$  — сумма внутренних углов грани  $\mu_i$ . Далее имеем  $\sigma_i = (n_i - 2)2d$ , где  $n_i$  — число сторон грани  $\mathcal{T}_i$ . Итак,

$$\Sigma = (n_1 + n_2 + \dots + n_{\mathcal{T}}) \cdot 2d - 2\mathcal{T} \cdot 2d.$$

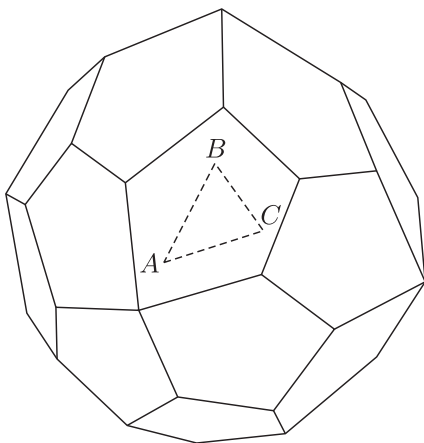


Рис. 117

Так как  $n_1 + n_2 + \dots + n_{\mathcal{T}} = 2\mathcal{P}$ , то

$$\Sigma = (2\mathcal{P} - 2\mathcal{T})2d.$$

Далее, сумма дефектов  $\Delta = 4d\mathcal{B} - \Sigma$ . Поэтому

$$\Delta = 4d\mathcal{B} - 2d(2\mathcal{P} - 2\mathcal{T}) = (\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T}) \cdot 4d.$$

Но по теореме Эйлера  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$ , следовательно,

$$\Delta = 8d,$$

что и требовалось доказать.

Обратно, зная из первого решения, что  $\Delta = 8d$ , получаем  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$ , т.е. новое доказательство теоремы Эйлера для выпуклого многогранника.

**58. а)** Докажем предварительно следующее утверждение. Пусть выпуклый многогранный угол преобразуется в выпуклый же так, что величины его плоских углов не меняются. Будем обозначать знаком «+» те двугранные углы, которые при этом увеличились, знаком «-» те углы, которые уменьшились, и знаком «0» — углы, оставшиеся неизменными. Тогда при последовательном обходе граней угла будет не менее четырех перемен знака. В силу взаимно однозначного соответствия между многогранными углами и сферическими многоугольниками, указанного на с. 24, эта теорема должна следовать из аналогичной теоремы для выпуклых сферических многоугольников. В задаче 9, б части 2 настоящей книги доказана эта же теорема,



но только для плоских многоугольников. Несколько видоизменив это доказательство, мы докажем наше утверждение.

Основная трудность заключается в доказательстве следующей леммы. Пусть выпуклые сферические ломаные  $A_1A_2\dots A_n$  и  $A'_1A'_2\dots A'_n$  имеют соответственно равные стороны. Если хотя бы один внутренний угол ломаной  $A'_1A'_2\dots A'_n$  строго больше соответствующего угла ломаной  $A_1A_2\dots A_n$ , а все остальные внутренние углы не меньше соответствующих углов ломаной  $A_1A_2\dots A_n$ , то расстояние  $A'_1A'_n$  между концами ломаной  $A'_1A'_2\dots A'_n$  строго больше соответствующего расстояния  $A_1A_n$ .

Для доказательства проведем через точки  $A_1$  и  $A_n$  большой круг  $A_1A_n$  (он единственный, так как если ломаная  $A_1A_2\dots A_n$  — выпуклая, то расстояние между ее концами меньше большого полукруга и ее концы  $A_1$  и  $A_n$  не могут быть диаметрально противоположными точками). От середины «отрезка»  $A_1A_n$  отложим в обе стороны по четверти большого круга. Получим два полюса  $O_1$  и  $O_2$ . Они, очевидно, находятся вне выпуклого многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$ .

Через полюсы  $O_1$  и  $O_2$  проведем опорный полукруг к ломаной, т. е. полукруг, имеющий с ломаной общие точки, но не пересекающий ее. Это можно сделать, так как наша ломаная — выпуклая. Пусть опорный полукруг проходит через вершину  $A_k$  (и, может быть, еще через вершину  $A_{k+1}$ ), и пусть строго увеличивающийся угол лежит в части  $A_1\dots A_k$ . Будем проектировать ломаную  $A_1A_2\dots A_n$  на полукруг  $O_1O_2$  параллелями (рис. 118). В силу выпуклости многоугольник  $A_1A_2\dots A_n$  целиком лежит в полусфере, определяемой кругом  $O_1O_2$ . В качестве полюсов системы параллелей мы выбираем точки  $O_1$  и  $O_2$ .

Очевидно, что только дуги меридианов, проходящих через полюсы  $O_1$  и  $O_2$ , проектируются на полукруг  $O_1O_2$  не искажаясь. Величина проекции дуги любого другого большого круга меньше величины самой дуги. Выберем на полукруге  $O_1O_2$  в качестве положительного направление от  $O_1$  к  $O_2$ . Тогда дуга  $A_1A_n$ , равная своей проекции, равна алгебраической сумме проекций дуг  $A_1A_2, \dots, A_{k-1}A_k, \dots, A_{n-1}A_n$ . Увеличим теперь  $\angle A_2$  до величины  $\angle A'_2$ . Очевидно, что меридиан точки  $A_2$  лежит ближе к «начальному» меридиану  $O_1A_kO_2$ , чем меридиан точки  $A_1$ . В то же время две окружности на сфере могут пересекаться только в двух точках, симметричных относительно линии центров. Поэтому при увеличении  $\angle A_2$  точка  $A_1$  пойдет по окружности внутрь круга, определявшегося параллелью точки  $A_1$ . Поэтому новая точка  $A_1^{(2)}$  будет лежать на более левой параллели,

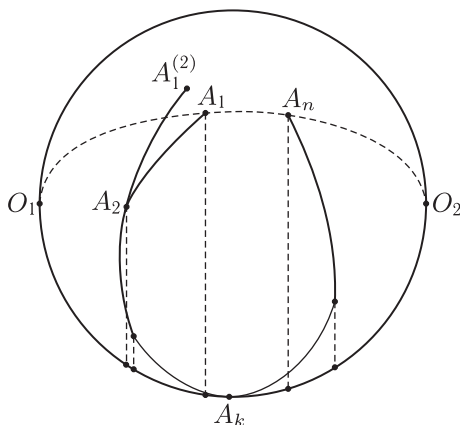


Рис. 118

чем точка  $A_1$  (см. рис. 118), так как очевидно, что дуга  $A_2A_1$  заведомо не может повернуться далее направления  $A_2O_1$ . Затем увеличим  $\angle A_3$  и повернем ломаную  $A_3A_2A_1^{(2)}$  как целое. Проекция точки  $A_1^{(3)}$  будет лежать еще левее и т. д.

Точно такую же операцию проделаем с ломаной  $A_k \dots A_n$ . Наконец, увеличим  $\angle A_k$ , поворачивая обе половины ломаной, но так, чтобы дуги  $A_{k-1}A_k$  и  $A_kA_{k+1}$  не вышли из полусферы. При этом ломаная  $A_1A_2 \dots A_n$  преобразуется в ломаную  $A'_1A'_2 \dots A'_n$ . Так как один угол был строго увеличен, то проекция  $\overline{A'_1}$  точки  $A'_1$  лежит левее проекции  $\overline{A_1}$  точки  $A_1$ , а проекция  $\overline{A'_n}$  не левее  $\overline{A_n}$ . Таким образом,  $A_1A_n = \overline{A_1A_n} < \overline{A'_1A'_n} \leq A'_1A'_n$ , что и требовалось.

Перейдем к доказательству вспомогательного утверждения. Пусть выпуклый сферический многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  преобразуется в многоугольник  $A'_1A'_2 \dots A'_n$ , и  $\angle A_1$  при этом увеличивается.

Докажем, что есть по крайней мере одна перемена знака. Действительно, в противном случае «отрезок»  $A_2A_3$  должен быть меньше «отрезка»  $A'_2A'_3$ , так как к ломаным  $A_3 \dots A_nA_1A_2$  и  $A'_3 \dots A'_nA'_1A'_2$  применима только что доказанная лемма.

Аналогично показывается, что не может быть двух перемен знака (очевидно, их обязательно четное число). Действительно, пусть их будет только два. Пусть

$$\begin{aligned} \angle A_1 < \angle A'_1, \quad \angle A_2 \leq \angle A'_2, \quad \dots, \quad \angle A_{k-1} \leq \angle A'_{k-1}, \\ \angle A_k > \angle A'_k, \quad \angle A_{k+1} \geq \angle A'_{k+1}, \quad \dots, \quad \angle A_n \geq \angle A'_n. \end{aligned}$$

Возьмем точку  $P$  на сторонах  $A_n A_1$  и  $A'_n A'_1$  и точку  $Q$  на сторонах  $A_{k-1} A_k$  и  $A'_{k-1} A'_k$ . Применяя лемму к ломаным  $PA_1 \dots A_{k-1} Q$  и  $P'A'_1 \dots A'_{k-1} Q'$ , получаем  $PQ < P'Q'$ ; применяя ту же лемму к ломаным  $PA_n \dots A_k Q$  и  $P'A'_n \dots A'_k Q'$ , получаем  $PQ > P'Q'$ . Это противоречие и доказывает вспомогательное утверждение.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть  $W$  и  $W'$  — два многогранника с соответственно равными гранями. Отметим знаком «+» ребра  $W$ , двугранные углы которых меньше соответствующих двугранных углов  $W'$ , а знаком «-» — те ребра, у которых двугранные углы больше соответствующих двугранных углов  $W'$ . Отмеченные ребра образуют сеть на поверхности многогранника. Пусть  $\alpha_0$  — число узлов сети,  $\alpha_1$  — число линий сети и  $\alpha_2$  — число областей. Легко показать, что  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$ . Действительно, для сети, образованной всеми ребрами выпуклого многогранника, справедлива теорема Эйлера  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$ . Будем последовательно «стирать» ребра, не отмеченные ни плюсом, ни минусом. Все ребра образуют связную сеть. Отмеченные ребра могут образовать сеть, состоящую из нескольких несвязанных между собой частей. «Стирать» мы будем так, чтобы каждое оставшееся неотмеченное ребро было связано с отмеченными ребрами. (Так, например, на рис. 119 нужно стереть или ребро  $a$  или ребро  $b$ , но нельзя стирать ребро  $d$ .) Очевидно, это всегда возможно. При этом могут представиться три случая.

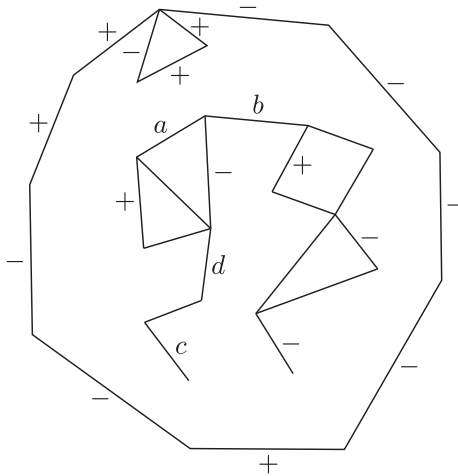


Рис. 119

1) В оба узла — концы стертого ребра — подходят другие ребра (отмеченные или еще не стертые неотмеченные, все равно), причем при стирании ребра две области сливаются в одну (ребро  $a$  на рис. 119). Очевидно, эйлерова характеристика при этом не меняется.

2) В оба конца стертого ребра подходят другие ребра, но стертая ребро проходило в одной области (ребро  $b$  на рис. 119). Очевидно, эйлерова характеристика при этом возрастает на единицу, а в самой сети отделяется еще одна часть.

3) В один конец стертого ребра сходятся еще ребра, другой конец свободный. При этом исчезают одно ребро и один узел, поэтому эйлерова характеристика не меняется (ребро  $c$  на рис. 119).

Во всех трех разобранных случаях эйлерова характеристика не уменьшается. Случай, когда у стираемого ребра оба конца свободны, невозможен по принятому нами способу стирания. (Заметим, что мы доказали следующую теорему: для сети на поверхности выпуклого многогранника справедливо соотношение  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 + k$ , где  $k$  — число связных частей сети.)

Обозначим через  $M$  число пар соседних ребер, отмеченных разными знаками.

Из каждого узла согласно вспомогательному утверждению исходит по крайней мере четыре такие пары. Таким образом,

$$M \geq 4\alpha_0. \quad (1)$$

С другой стороны, подсчитаем число перемен знака при обходе каждой грани. При таком обходе после каждого перехода  $+ -$  обязательно будет переход  $- +$ , т. е. число перемен знака будет четно. Следовательно, при обходе области с  $m$  сторонами число перемен знака будет не больше  $m$ , если  $m$  четно, и не больше  $m - 1$ , если  $m$  нечетно. Так как в каждом узле сходятся по меньшей мере четыре ребра, то каждая пара соседних ребер будет сосчитана только один раз. Поэтому общее число  $M$  перемен знака не может превосходить

$$M \leq 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + 6a_7 + 8a_8 + \dots, \quad (2)$$

где через  $a_k$  обозначено число  $k$ -сторонних областей. Поэтому справедливо неравенство

$$4\alpha_0 \leq 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + \dots \quad (3)$$

Вспользуемся теперь теоремой Эйлера

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \geq 2, \quad (4)$$

$$\alpha_0 - 2 \geq \alpha_1 - \alpha_2. \quad (4')$$

Но очевидно, что

$$\alpha_2 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots \quad (5)$$

В то же время

$$2\alpha_1 = 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + \dots, \quad (6)$$

так как, подсчитав число сторон каждой области и сложив все эти числа, мы, очевидно, сосчитаем каждое ребро два раза. Подставив эти значения в неравенство

$$4\alpha_0 - 8 \geq 4\alpha_1 - 4\alpha_2, \quad (7)$$

получим

$$4\alpha_0 - 8 \geq 2a_3 + 4a_4 + 6a_5 + \dots + (2k - 4)a_k + \dots \quad (8)$$

Вычитая из неравенства (8) неравенство (3), получаем

$$-8 \geq 2a_5 + 2a_6 + 4a_7 + 4a_8 + \dots$$

Слева стоит отрицательное число, справа — число положительное или ноль, если все области трех- и четырехсторонние. Получившееся противоречие показывает, что предположение о существовании отмеченных ребер неверно. Поэтому все двугранные углы многогранника  $W$  равны соответствующим двугранным углам многогранника  $W'$ . Но так как грани этих многогранников равны, то это значит, что равны сами многогранники.

б) Доказательство этой теоремы содержится в решении предыдущей задачи. Действительно, соответствующие друг другу многогранные углы обоих многогранников имеют соответственно равные плоские углы. Поэтому к двугранным углам многогранников применима вся теория, развитая в решении предыдущей задачи. Если бы нашлись не равные друг другу соответственные двугранные углы, то ребра этих углов образовали бы сеть на поверхности многогранников. Применив к сети на поверхности одного из многогранников теорему Эйлера, мы пришли бы к противоречию. Этим завершается доказательство нашей теоремы. Все это подробно проделано в предыдущем решении. Доказав теорему А. Д. Александрова, мы воспользовались тем, что в условии теоремы Коши говорится о многогранниках с соответственно равными гранями (т.е. соответственно равными плоскими углами и соответственно равными ребрами). Равенство таких многогранников очевидно, так как два многогранника с соответственно равными гранями и с соответственно равными двугранными углами равны.

**59**<sup>1)</sup>. а) Доказательство основывается на двух замечаниях:

1°. Два двуугольника, имеющие равные углы, равны и, следовательно, равновелики.

2°. Площадь двуугольника  $C$ , угол которого равен сумме углов двуугольников  $A$  и  $B$ , равна сумме площадей двуугольников  $A$  и  $B$ . Действительно, приложив соответствующим образом  $A$  к  $B$ , мы получим двуугольник, равный  $C$ .

Дальше рассуждения идут по обычной схеме — рассматриваем случаи соизмеримых и несоизмеримых с  $2\pi$  углов, совершенно так же, как при определении длины отрезка или измерении двугранных углов.

Так как двуугольник с углом  $2\pi$  имеет площадь  $4\pi$  (это вся сфера) и площади двуугольников пропорциональны углам, то переводной коэффициент равен  $\frac{4\pi}{2\pi} = 2$ , т. е. площадь двуугольника с углом  $\alpha$  равна  $2\alpha$  или  $\alpha + \alpha$ , так как оба его угла, очевидно, равны.

**60**<sup>2)</sup>. а) Если данные симметричные сферические треугольники — равнобедренные, то они равны, так как могут быть совмещены движением на сфере (рис. 120). Доказательство этого факта принципиально не отличается от аналогичного доказательства для плоских треугольников.

Пусть теперь  $ABC$  и  $A'B'C'$  — произвольные симметричные сферические треугольники. Проведем через вершины данного

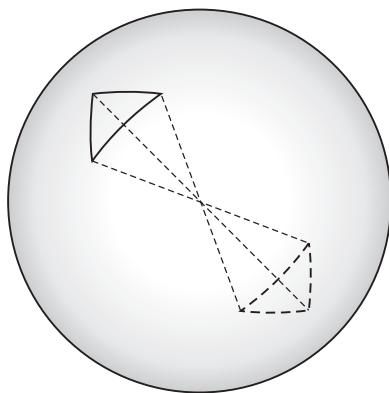


Рис. 120

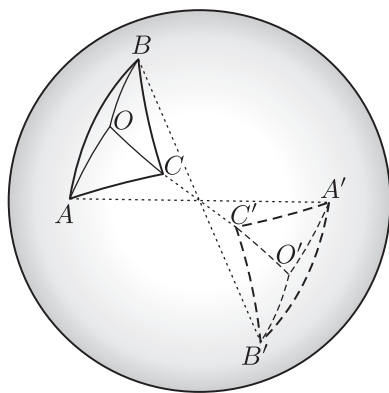


Рис. 121

<sup>1)</sup> В соответствии с замечанием на с. 24 здесь приводится лишь решение задачи а).

<sup>2)</sup> См. подстрочное примечание на с. 141.

сферического треугольника  $ABC$  окружность, которая будет, очевидно, лежать на поверхности сферы. Из центра сферы через центр этой окружности проведем радиус, пересекающий сферу в некоторой точке  $O$  — эпицентре окружности  $ABC$ . В силу равенства хорд  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  равны и соответствующие дуги  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Поэтому треугольник  $ABC$  разложился на алгебраическую сумму треугольников  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COA$  (рис. 121).

Выполнив аналогичное построение для треугольника  $A'B'C'$ , мы разложим его на равнобедренные треугольники  $A'O'B'$ ,  $B'O'C'$ ,  $C'O'A'$ , симметричные и, следовательно, равные соответственно треугольникам  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COA$ . Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  равновелики.

**61** <sup>1)</sup>. а) Пусть  $ABC$  — некоторый сферический треугольник,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — соответственно его углы, а  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — точки, диаметрально противоположные точкам  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 122). Тогда двуугольник  $AA'$  состоит из треугольников  $ABC$  и  $BCA'$ , поэтому

$$S_{AA'} = S_{ABC} + S_{BCA'},$$

точно так же

$$S_{BB'} = S_{ABC} + S_{ACB'},$$

$$S_{CC'} = S_{ABC} + S_{ABC'}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$S_{AA'} + S_{BB'} + S_{CC'} = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{ACB'} + S_{ABC'} + 2S_{ABC}.$$

Но  $S_{ABC'} = S_{A'B'C}$ , так как треугольники  $ABC'$  и  $A'B'C$  симметричны и потому равновелики. Отсюда

$$S_{AA'} + S_{BB'} + S_{CC'} = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{A'B'C} + 2S_{ABC}. \quad (*)$$

Но треугольники  $ABC$ ,  $BCA'$ ,  $CAB'$  и  $A'B'C$  в сумме составляют полусферу, определяемую большим кругом  $AB$ . Так как

$$S_{AA'} = 2\alpha, \quad S_{BB'} = 2\beta, \quad S_{CC'} = 2\gamma$$

(см. задачу 59, а), то из (\*) получаем

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi + 2S_{ABC},$$

откуда

$$S_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

что и требовалось доказать.

<sup>1)</sup> См. подстрочное примечание на с. 141.

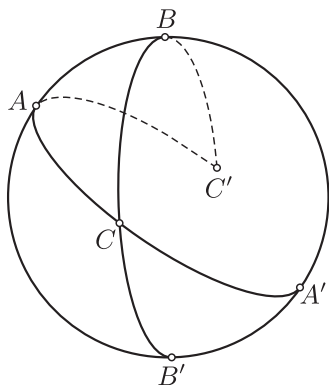


Рис. 122

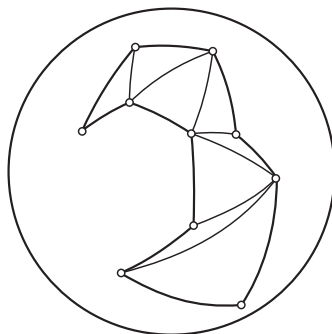


Рис. 123

**62**<sup>1)</sup>. а) Всякий сферический многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники (рис. 123). Доказательство этого факта проводится почти аналогично доказательству для плоского случая, приведенному в решении задачи 8, а части 2.

Действительно, доказательство для плоского случая опирается лишь на то, что через две точки проходит одна прямая и что если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает и другую. Поэтому оно дословно переносится и на случай сферического многоугольника.

Очевидно, диагонали разобьют  $n$ -угольник на  $(n - 2)$ -треугольника. Площадь каждого треугольника равна избытку его углов над  $\pi$ , а площадь всего  $n$ -угольника равна избытку суммы всех этих углов над  $(n - 2)\pi$ , т.е. избытку суммы всех углов многоугольника над суммой углов плоского многоугольника с тем же числом сторон.

**Примечание.** Можно усмотреть связь между этой задачей и задачей 57. Дефект угла характеризует, насколько поверхность многогранника отклоняется в смысле внутренних свойств от плоскости. Действительно, назовем «кругом» радиуса  $r$  геометрическое место точек, удаленных от центра не более чем на  $r$ . Тогда площадь достаточно маленького круга с центром на грани равна, очевидно,  $\pi r^3$ , круга с центром на ребре —  $\pi r^2$ , а круга с центром в вершине  $S$  —  $(\pi - \frac{1}{2} \text{def } S) r^2$ . Сумма дефектов куска многогранной поверхности характеризует его кривизну в целом, или, как говорят, его интегральную кривизну. Сумма углов многоугольника тем больше, чем больше его интегральная кривизна. Но поверхность шара искривлена равномерно.

<sup>1)</sup> См. подстрочное примечание на с. 141.



Ясно, что интегральная кривизна пропорциональна площади. Поэтому следовало ожидать, что площадь сферического многоугольника, ограниченного дугами больших кругов, которые играют на сфере роль прямых, пропорциональна избытку его углов.

**63** <sup>1)</sup>. б) 1°. Пусть многогранный угол  $SA'B'C' \dots N'$  — дополнительный к выпуклому углу  $SABC \dots N$ . Требуется доказать, что каждое ребро угла  $SABC \dots N$  перпендикулярно к грани угла  $SA'B'C' \dots N'$  и лежит по ту же сторону от этой грани, что и угол  $SA'B'C' \dots N'$  (рис. 124).

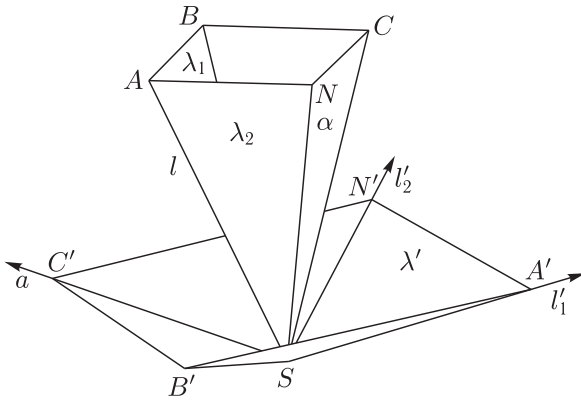


Рис. 124

Пусть  $l$  — произвольное ребро угла  $SABC \dots N$ , а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — пересекающиеся по ребру  $l$  грани этого угла. Тогда ребра  $l'_1$  и  $l'_2$  угла  $SA'B' \dots N'$ , перпендикулярные соответственно к  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяют грань  $\lambda'$  угла  $SA'B' \dots N'$ , перпендикулярную к  $l$ .

Остается только показать, что весь угол  $SA'B' \dots N'$  лежит с той же стороны от грани  $\lambda'$ , что и ребро  $l$ . Предположим, что некоторое ребро  $a'$  угла  $SA'B' \dots N'$  лежит по другую сторону грани  $\lambda$ . Тогда угол между лучами  $l$  и  $a'$  будет тупым и ребра  $a$  и  $l$  будут лежать по разные стороны от плоскости грани  $\alpha$  угла  $SAB \dots N$ , перпендикулярной к ребру  $a'$ , что противоречит определению угла  $SA'B' \dots N'$ . Отсюда следует, что угол  $SA'B' \dots N'$  выпуклый и угол  $SABC \dots N$  — дополнительный к  $SA'B' \dots N'$ .

2°. Пусть грань угла  $SA'B' \dots N'$  имеет ребрами лучи  $l'_1$  и  $l'_2$ , перпендикулярные к смежным граням  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  исходного угла. Тогда угол, образованный лучами, по которым плоскость  $\lambda'$

<sup>1)</sup> В соответствии с замечанием на с. 24 здесь приводится лишь решение задачи б).

пересекается с плоскостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , будет, очевидно, линейным углом двугранного угла  $\lambda_1\lambda_2$ . Из определения дополнительного угла следует, что сумма этого угла с плоским углом угла  $SA'B' \dots N'$ , лежащим в грани  $\lambda'$ , равна  $\pi$ . Поэтому плоские углы дополнительного угла дополняют двугранные углы исходного до  $\pi$ . Таким образом, если двугранные углы исходного угла  $S$  равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , то плоские углы дополнительного угла будут  $\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2, \dots, \pi - \alpha_n$ . По определению телесный угол  $S$  равен  $\mu S = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi$ , а дефект  $\bar{S}$

$$\begin{aligned} \text{def } \bar{S} &= 2\pi - [(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \dots + (\pi - \alpha_n)] = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**64.** Рассмотрим круглый конус с вершиной  $S$ , осью  $SO$  и углом  $\alpha$  при вершине. Возьмем какую-нибудь точку  $O$  на оси  $SO$  конуса внутри него и опустим из  $O$  перпендикуляр на какую-нибудь из образующих (рис. 125). Все остальные перпендикуляры на образующие можно получить вращением построенного перпендикуляра вокруг оси  $SO$ . Поэтому все перпендикуляры на образующие лежат на конусе с вершиной  $O$ , осью  $OS$  и углом при вершине  $\pi - \alpha$ . Впишем в конус  $S$  правильный многогранный угол  $S_n$ . Пусть его грани пересекают конус  $S$  по образующим  $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ .

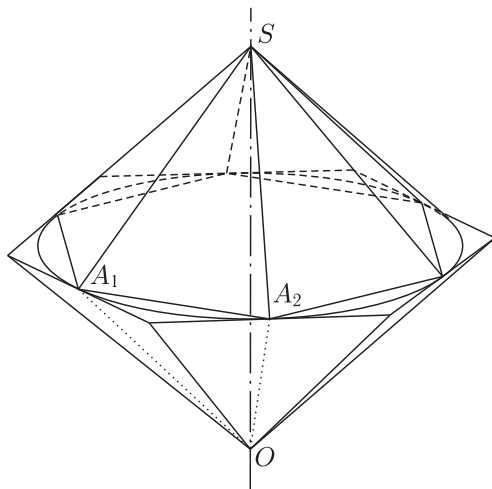


Рис. 125

Затем построим правильный многогранный угол  $O_n$ , грани которого будут касаться конуса  $O$  по образующим  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ .

Легко видеть, что многогранный угол  $OA_1A_2\dots A_n$  будет симметричен углу, пополнительному к многогранному углу  $S_n$ , так как его ребра перпендикулярны к граням угла  $S_n$ , но направлены в обратную сторону.

По предыдущей задаче  $\mu S_n = \text{def } O_n$ , где через  $O_n$  мы обозначили многогранный угол  $OA_1A_2\dots A_n$ . Будем неограниченно увеличивать  $n$ , тогда  $S_n$  будет все ближе подходить к конусу  $S$ , а  $O_n$  — к конусу  $O$ . Поэтому, переходя к пределу, будем иметь  $\mu S = \text{def } O$ , подразумевая под  $\text{def } O$  недостаток угла развертки конуса до  $2\pi$ .

Если угол при вершине конуса  $S$  равен  $\alpha$ , то угол при вершине конуса  $O$  равен  $\pi - \alpha$ . Пусть образующая конуса  $O$  равна  $l$ , тогда площадь боковой поверхности конуса  $O$  равна  $\pi l^2 \sin \frac{\pi - \alpha}{2}$ . С другой стороны, площадь развертки боковой поверхности конуса  $O$  равна  $\frac{\varphi}{2} l^2$ , где  $\varphi$  — угол развертки в радианах. Поэтому  $\varphi = 2\pi \sin \frac{\pi - \alpha}{2}$ . Следовательно,

$$\mu S = \text{def } O = 2\pi - \varphi = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

**65.** Телесный угол трехгранного угла равен сумме его двугранных углов минус  $\pi$ .

Поэтому сумма всех телесных углов трехгранных углов тетраэдра равна удвоенной сумме всех его двугранных углов минус  $4\pi$ . Но так как телесный угол двугранного угла измеряется удвоенным линейным, то сумма всех телесных углов двугранных углов тетраэдра равна удвоенной сумме линейных углов. Отсюда и следует утверждение задачи.

**66.** Возьмем точку внутри многогранника и соединим ее со всеми вершинами (рис. 126, а). Подсчитаем сумму телесных углов, образовавшихся при точке  $O$  многогранных углов. Сумма двугранных углов при каждом ребре  $OD_i$  ( $D_i$  — вершина многогранника) равна  $2\pi$ , поэтому сумма всех двугранных углов равна  $2\pi B$ . Сумму всех плоских углов каждой грани найдем, взяв внутри каждой грани по точке и разбив их на треугольники, у которых основаниями являются ребра, а вершинами — выбранные точки (рис. 126, б). Таких треугольников будет  $2P$  (к каждому ребру примыкает два треугольника). Сумма всех их углов будет  $2P \cdot \pi = 2\pi \cdot P$ . Чтобы получить сумму всех плоских

углов, надо отбросить  $2\pi\mathcal{T}$ , так как в первую сумму вошли суммы углов при точках, выбранных внутри граней. Окончательно получаем

$$4\pi = 2\pi \cdot \mathcal{B} - (2\pi \cdot \mathcal{P} - 2\pi \cdot \mathcal{T}),$$

или, сократив на  $2\pi$ ,

$$2 = \mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T},$$

что и требовалось доказать.

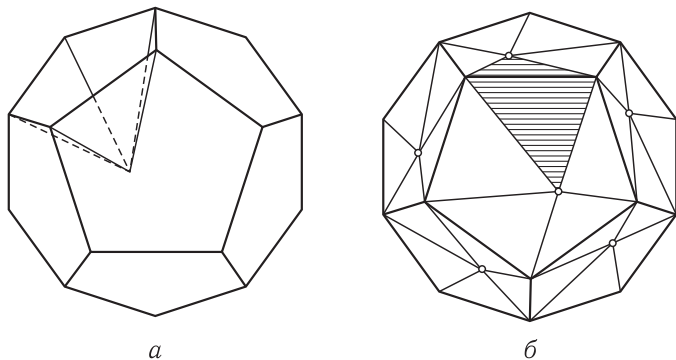


Рис. 126

**67.** а) По определению правильного многогранника ребра, принадлежащие любой одной грани, равны между собой. Так как каждое ребро принадлежит двум граням, то ребра любой грани должны быть равны ребрам всех смежных с ней граней, а значит, и смежных с этими смежными и т. д. Следовательно, все ребра правильного многогранника равны между собой.

Далее, все плоские углы одной грани или одного многогранного угла равны между собой. Следовательно, плоские углы любого многогранного угла равны плоским углам всех многогранных углов, имеющих с этим углом общую грань, а значит, и плоским углам многогранных углов, имеющих общие грани с этими последними углами, и т. д. Отсюда, как и выше, вытекает, что все плоские углы правильного многогранника равны между собой.

Аналогично, из того, что каждый двугранный угол принадлежит двум многогранным и все двугранные углы одного многогранного угла равны, следует, что все двугранные углы правильного многогранника равны.

Теперь из равенства всех ребер и плоских углов правильного многогранника вытекает равенство всех его граней, а из равенства плоских и двугранных углов — равенство многогранных углов.

б) Заметим прежде всего, что все грани правильного многогранника, смежные с какой-либо одной его гранью, лежат по одну сторону от нее. В самом деле, пусть  $\mu$  — любая грань правильного многогранника,  $A$  — какая-нибудь вершина этой грани. Так как многогранный угол  $A$  — правильный, то обе грани  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , примыкающие к  $\mu$  по ребрам, исходящим из вершины  $A$ , лежат по одну сторону от грани  $\mu$ . Переходя последовательно от одной вершины грани  $\mu$  к другой, мы и получим требуемое утверждение.

Пусть теперь  $T$  — правильный многогранник,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — две его произвольные грани,  $m_1$  и  $m_2$  — произвольные ребра, принадлежащие соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Так как  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — равные правильные многоугольники, то  $\mu_1$  можно совместить с  $\mu_2$  так, чтобы  $m_1$  совпало с  $m_2$ . Произведем это совмещение таким образом, чтобы грани, смежные с  $\mu_1$ , и грани, смежные с  $\mu_2$ , оказались по одну и ту же сторону от граней  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Тогда в силу равенства всех двугранных углов и всех граней многогранника  $T$  грани, смежные с  $\mu_2$ , совпадут с гранями, смежными с  $\mu_1$ . Точно так же совпадут грани, смежные с этими последними, и т. д. Таким образом, многогранник  $T$  совместится сам с собой.

Если, наоборот, многогранник  $T$  можно совместить с самим собой так, чтобы любая его грань и любое принадлежащее ей ребро совпали соответственно с произвольной гранью и любым принадлежащим ей ребром, то все грани, все ребра и все двугранные плоские углы многогранника равны. Отсюда следует, что все грани многогранника  $T$  — правильные многоугольники и все многогранные углы также правильны, т. е.  $T$  — правильный многогранник.

в) Требуемое утверждение следует из равенства всех граней и многогранных углов правильного многогранника.

**68.** а) Первое решение. С помощью рис. 127 можно легко доказать, что перпендикуляры к двум соседним граням  $\alpha$  и  $\beta$  правильного многогранника  $T$ , восставленные в центрах этих граней, пересекаются в некоторой точке  $O$  на расстоянии  $a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  от своих оснований, где  $a$  — апофема грани многогранника  $T$ , а  $\varphi$  — его двугранный угол. Отсюда уже легко вытекает, что перпендикуляры к остальным граням, восставленные в их центрах, также проходят через точку  $O$ .

Второе решение. Пусть  $MN$  — общее ребро граней  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $A$  и  $B$  соответственно центры  $\alpha$  и  $\beta$ . Около каждой из граней  $\alpha$  и  $\beta$  можно описать по окружности, которые пересекутся

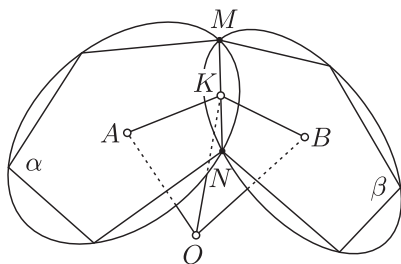


Рис. 127

в точках  $M$  и  $N$ . Согласно задаче 30, б через две окружности, пересекающиеся в двух точках, можно провести одну и только одну сферу  $\Phi$ , на которой будут лежать все вершины граней  $\alpha$  и  $\beta$ . В самом деле, повернем грань  $\alpha$  в ее плоскости так, чтобы ребро  $MN$  совпало с каким-нибудь другим. Согласно задаче 67, б многогранник  $T$  совместится сам с собой, причем грань  $\beta$  совместится с некоторой гранью  $\gamma$ , смежной с  $\alpha$ .

Очевидно, окружность, описанная около многоугольника грани  $\alpha$ , совместится сама с собой. Значит, вся сфера  $\Phi$  при этом поворачивалась вокруг некоторого своего диаметра. Поэтому она тоже совпала сама с собой. Следовательно, все вершины грани  $\gamma$ , так же как и вершины грани  $\beta$ , лежат на сфере  $\Phi$ .

Приведенные выше рассуждения показывают, что если вообще у какой-то грани  $\alpha_1$  правильного многогранника  $T$  (не обязательно нашей исходной грани  $\alpha$ ) все вершины лежат на некоторой сфере  $\Phi$ , а все вершины грани  $\beta_1$ , смежной с гранью  $\alpha_1$ , также лежат на этой же сфере  $\Phi$ , то все вершины любой грани  $\gamma_1$ , смежной с  $\alpha_1$ , также лежат на сфере  $\Phi$ .

Покажем теперь, что все вершины произвольной грани  $\delta$  многогранника  $T$  лежат на сфере  $\Phi$ . По определению многогранника грани  $\alpha$  и  $\delta$  можно соединить цепочкой граней  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \delta$ , где каждая последующая грань смежна с предыдущей. Переходя от грани к грани, убеждаемся, что все вершины этих граней, в том числе и грани  $\delta$ , лежат на сфере  $\Phi$ . Поэтому сфера  $\Phi$  будет описанной сферой многогранника  $T$ .

б) Как было показано в первом решении задачи а), точка  $O$  равноудалена от всех граней (на расстояние  $a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , где  $a$  — апофема грани, а  $\varphi$  — двугранный угол многогранника). Поэтому в многогранник можно вписать сферу радиуса

$$r = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

в) Рассмотрим отрезок  $OK$  (см. рис. 127), где  $K$  — середина общего ребра  $MN$  граней  $\alpha$  и  $\beta$ . Имеем  $OK \perp MN$  и

$$OK = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Поэтому точка  $O$  равноудалена от всех ребер и будет также центром сферы, касающейся всех ребер многогранника. Радиус этой сферы

$$\rho = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

г) Доказательство см. в решениях задач а), б) и в).

**69.** Установим предварительно некоторые факты, относящиеся к правильным многоугольникам. Как известно, около всякого правильного многоугольника можно описать окружность (доказательство этого утверждения, приведенное в учебнике Киселева для выпуклых многоугольников, остается верным и для звездчатых). При этом, как легко видеть, вершины многоугольника разбивают окружность на равные дуги. Пусть теперь  $AB$  —

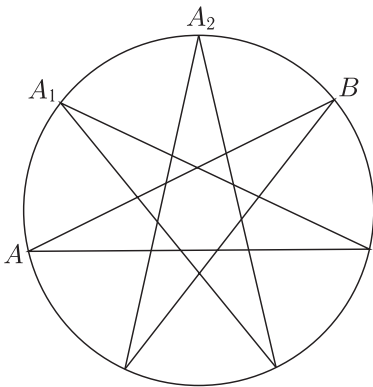


Рис. 128

какая-нибудь сторона правильного многоугольника  $\Phi$  и пусть на меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой  $AB$ , расположено (кроме  $A$  и  $B$ )  $k$  вершин  $A_1, A_2, \dots, A_k$  многоугольника  $\Phi$  (рис. 128). Так как из каждой вершины  $A_1, A_2, \dots$  выходят две стороны многоугольника  $\Phi$ , пересекающие сторону  $AB$ , то  $AB$  пересекается с  $2k$  сторонами. Следовательно, число  $k$  должно быть одним и тем же для всех правильных многоугольников одного вида.

Пусть теперь  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — правильные  $n$ -угольники, имеющие один и тот же вид. Из сделанных выше замечаний вытекает, что стороны обоих многоугольников стягивают в соответствующих описанных окружностях  $C_1$  и  $C_2$  одинаковые дуги, равные  $\frac{2\pi}{n}(k+1)$ . Следовательно, при подобном преобразовании, переводящем окружность  $C_1$  в  $C_2$ , многоугольник  $\Phi_1$  переходит в многоугольник, равный  $\Phi_2$ .

Таким образом, правильные многоугольники одного вида всегда подобны между собой.

Пусть теперь  $T_1$  и  $T_2$  — два правильных многогранника одного комбинаторного типа, у которых и грани, и многогранные углы имеют один и тот же вид. Тогда в силу сказанного выше грани одного из них подобны граням другого и, следовательно, линейные углы обоих многогранников равны. Обозначим каждый из этих углов через  $\alpha$ .

Рассмотрим теперь многогранные углы при каких-либо вершинах  $A_1$  и  $A_2$  многогранников  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 129); покажем, что эти углы равны. Для этого через центры  $O_1$  и  $O_2$  данных многогранников проведем плоскости, перпендикулярные соответственно к  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$ . В сечении с гранями рассматриваемых углов эти плоскости дают правильные многоугольники одного и того же вида (так как многогранные углы  $A_1$  и  $A_2$  имеют, по предположению, один и тот же вид). Следовательно, мы получили две правильные пирамиды с подобными многоугольниками в основаниях и с одинаковыми плоскими углами  $\alpha$  при вершинах. Обозначим через  $a_1$  и  $a_2$  боковые ребра полученных пирамид, через  $b_1$  и  $b_2$  — стороны их оснований и через  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы описанных около этих оснований окружностей. Пусть, как и выше, сторона  $b_1$  правильного многоугольника стягивает дугу  $\frac{2\pi}{n}(k+1)$ . Тогда  $b_1 = 2r_1 \sin \frac{\pi}{n}(k+1)$ . С другой стороны,  $b_1 = 2a_1 \sin \frac{\alpha}{2}$ . Следовательно,

$$a_1 \sin \frac{\alpha}{2} = r_1 \sin \frac{\pi}{n}(k+1).$$

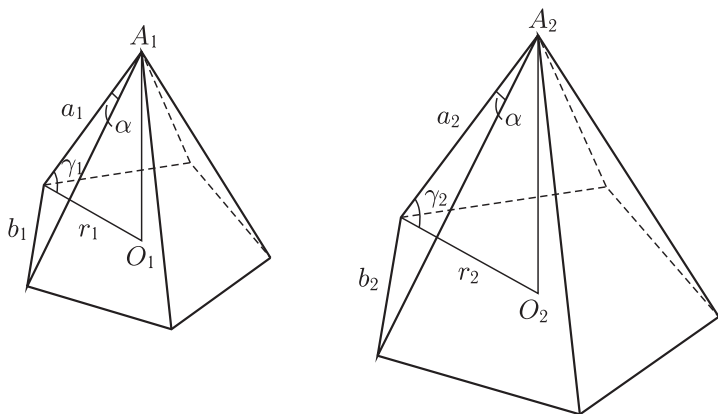


Рис. 129



Аналогично

$$a_2 \sin \frac{\alpha}{2} = r_2 \sin \frac{\pi}{n} (k+1),$$

откуда

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2}.$$

Если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы, образованные боковыми ребрами полученных пирамид с плоскостями оснований, то

$$\cos \gamma_1 = \frac{r_1}{a_1}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{r_2}{a_2},$$

откуда

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Если теперь с помощью подобного преобразования совместить основания пирамид, то их боковые ребра в силу последнего равенства также совпадут, а следовательно, совпадут и многогранные углы  $A_1$  и  $A_2$ . Таким образом, многогранники  $T_1$  и  $T_2$  имеют равные многогранные углы. Отсюда и из подобия граней уже легко следует подобие многогранников  $T_1$  и  $T_2$ .

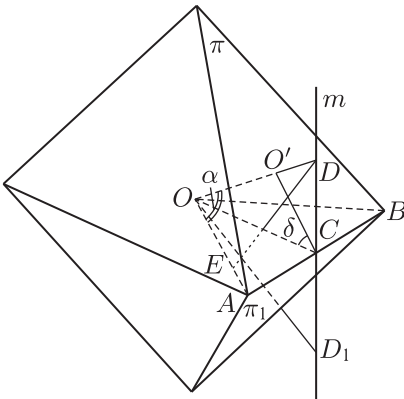


Рис. 130

**70.** а) Из результата задачи 68, в следует, что все радиусы полувписанной сферы, проведенные из центра к серединам ребер, образуют с прилегающими гранями одинаковые углы  $\delta = \frac{\varphi}{2}$ , где  $\varphi$  — двугранный угол многогранника  $T$ .

Пусть  $\pi$  — произвольная грань многогранника  $T$ ,  $AB$  — какая-нибудь ее сторона,  $C$  — середина  $AB$  и  $m$  — касательная к полувписанной сфере, проведенная через точку  $C$ , перпендикулярно к  $AB$  (рис. 130). Обозначим через  $O$

и  $O'$  центры соответственно многогранника  $T$  и грани  $\pi$ . Тогда, как нетрудно видеть,  $OC \perp AB$  и  $O'C \perp AB$ , т.е.  $AB$  перпендикулярно к плоскости  $OO'C$ . Отсюда и из того, что  $m \perp AB$ , следует, что прямая  $m$  лежит в плоскости  $OO'C$ . Пусть  $D$  — точка пересечения  $m$  с  $OO'$ . Обозначив радиус полувписан-

ной сферы через  $\rho$ , получим из треугольника  $OCD$  (так как  $\angle ODC = \angle OCO' = \delta$ )

$$OD = \frac{\rho}{\cos \delta}.$$

Отсюда следует, что все прямые, соответствующие сторонам грани  $\pi$ , пересекаются с  $OO'$  и между собой в одной точке  $D$ , что и требовалось доказать.

б) Пользуясь теми же обозначениями, что при решении задачи а), отметим, что  $\angle O'OA$  (см. рис. 130) не зависит от того, какую из вершин грани  $\pi$  мы брали в качестве  $A$ , или какую из граней, примыкающих к вершине  $A$ , мы рассматривали в качестве  $\pi$ . (Это следует хотя бы из задачи 67 б.) Положим  $\angle DOA = \angle O'OA = \alpha$ . Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $DE$  на прямую  $OA$ . Тогда

$$OE = OD \cdot \cos \alpha = \frac{\rho \cos \alpha}{\cos \delta}.$$

Отсюда следует, что положение точки  $E$  не изменится, если вместо  $\pi$  рассматривать любую другую грань многогранника  $T$ , примыкающую к вершине  $A$ .

Пусть, в частности,  $\pi_1$  — вторая грань, примыкающая к ребру  $AB$ , и  $D_1$  — точка, соответствующая грани  $\pi_1$ . Тогда проекции точек  $D$  и  $D_1$  на прямую  $OA$  совпадают, т. е.  $D$  и  $D_1$  лежат в одной плоскости  $\tau$ , перпендикулярной к  $OA$ . Следовательно, и вся прямая  $m$  лежит в плоскости  $\tau$ .

Проведя те же рассуждения для любого другого ребра, выходящего из вершины  $A$ , мы, очевидно, придем к той же плоскости  $\tau$ . Отсюда сразу следует требуемое утверждение.

Примечание. Из решения задач а) и б) видно, что (для выпуклого правильного многогранника) взаимный многогранник является частным случаем полярного многогранника (см. с. 16).

**71.** Пусть  $T'$  — многогранник, взаимный правильному многограннику  $T$ . Пусть также  $\alpha'$  и  $\beta'$  — произвольные грани многогранника  $T'$ ,  $l'$  и  $m'$  — произвольные стороны граней  $\alpha'$  и  $\beta'$ , а  $A$ ,  $B$ ,  $l$  и  $m$  — соответственно вершины и ребра многогранника  $T$ , соответствующие  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $l'$ ,  $m'$ . Так как многогранник  $T$  правильный, его можно совместить с самим собой так, чтобы ребро  $l$  совпало с  $m$ , а вершина  $A$  — с  $B$ . Тогда  $T'$  также совместится с самим собой, причем  $\alpha'$  совпадет с  $\beta'$ , а  $l'$  — с  $m'$ . Отсюда в силу задачи 67, б и следует правильность  $T'$ .

**72.** а) Доказательство проводится так же, как доказательство задачи 70, б: если  $O$  — центр многогранника,

то центры  $O_1, O_2, \dots, O_n$  граней, примыкающих к вершине  $A$ , лежат в плоскости, перпендикулярной к  $OA$  и отстоящей от  $O$  на расстоянии, равном  $r \cdot \cos \alpha$ , где  $r$  — радиус вписанной сферы, а  $\alpha$  — угол, образованный каждой из прямых  $OO_1, OO_2, \dots, OO_n$  с прямой  $OA$  (рис. 131).

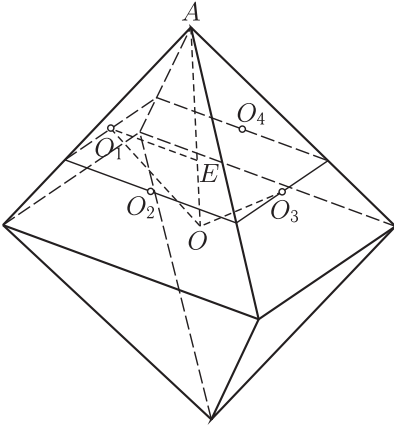


Рис. 131

б) Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры двух смежных граней  $\pi_1$  и  $\pi_2$  многогранника  $T$ ,  $D_1$  и  $D_2$  — соответствующие граням  $\pi_1$  и  $\pi_2$  вершины многогранника  $T'$ , взаимного многограннику  $T$  (рис. 132). Если  $O$  — центр многогранника  $T$ , то

$$OO_1 = OO_2, \quad OD_1 = OD_2$$

и

$$\angle O_1OO_2 = \angle D_1OD_2;$$

следовательно, треугольник  $O_1OO_2$  подобен треугольнику  $D_1OD_2$  и коэффициент подобия равен

$$\frac{OD_1}{OO_1} = \frac{\rho}{r \cos \delta},$$

где  $r$  и  $\rho$  — радиусы соответственно вписанной и полувписанной сфер, а  $\delta$  — половина двугранного угла многогранника  $T$ . Отсюда следует, что многогранник  $T'$  получается из многогранника  $T_1$  растяжением с коэффициентом  $\frac{\rho}{r \cos \delta}$ .

**73.** Пусть  $R_1, r_1, \rho_1$  — радиусы соответственно описанной, вписанной и полувписанной сфер многогранника  $T_1$ . Пусть, далее,  $T'$  — многогранник, взаимный  $T_1$ , и  $R', r'$  — соответственно радиусы описанной и вписанной сфер многогранника  $T'$ . Тогда

$$R' = \frac{\rho_1}{\cos \delta},$$

$$r_1 = \rho_1 \cos \delta,$$

где  $\delta$  — половина двугранного угла многогранника  $T_1$  (рис. 133; на нем  $R' = OD$ ,  $\rho_1 = OC$  и  $r_1 = OO_1$ ). Отсюда

$$R' \cdot r_1 = \rho_1^2.$$

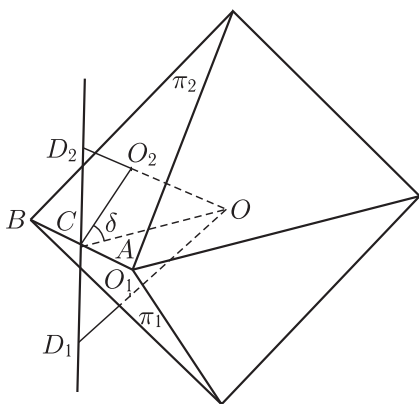


Рис. 132

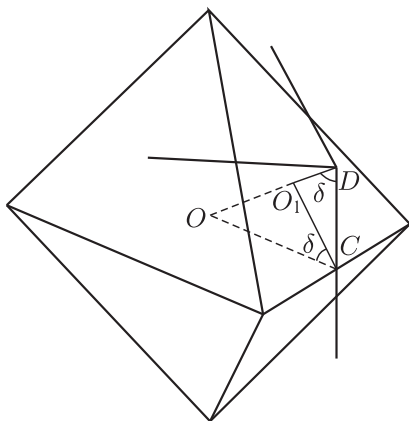


Рис. 133

С другой стороны, многогранник  $T_1$  можно рассматривать как взаимный многограннику  $T'$ . Тогда последнее соотношение примет вид:

$$R_1 \cdot r' = \rho_1^2.$$

Таким образом,

$$R_1 \cdot r' = R' \cdot r_1,$$

откуда

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R'}{r'},$$

т. е. радиусы вписанных и описанных сфер двух взаимных многогранников пропорциональны.

Пусть, далее,  $T_2$  — многогранник, подобный  $T'$ , и  $R_2, r_2, \rho_2$  — радиусы соответственно описанной, вписанной и полувписанной сфер многогранника  $T_2$ . Тогда, так как

$$\frac{R_2}{r_2} = \frac{R'}{r'},$$

то

$$\frac{R_2}{r_2} = \frac{R_1}{r_1}.$$

Если теперь  $r_1 = r_2$ , то из последнего равенства следует, что  $R_1 = R_2$ , что и требовалось доказать.

**74.** Пусть в каждой вершине правильного выпуклого многогранника сходится  $n$  ребер и каждая грань имеет  $k$  сторон. Тогда плоский угол многогранника равен  $2d \cdot \frac{k-2}{k}$  и по известной

теореме о выпуклых многогранных углах должно выполняться неравенство

$$2d \cdot n \frac{k-2}{k} < 4d.$$

Отсюда получаем

$$\frac{n}{k} (k-2) < 2$$

или

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Все возможные пары чисел, удовлетворяющие этому неравенству, легко найти. Действительно, по смыслу задачи  $n \geq 3$  и  $k \geq 3$ . Но хотя бы одно из чисел  $\frac{1}{n}$  и  $\frac{1}{k}$  должно быть больше  $\frac{1}{4}$ , т. е. или  $n$  или  $k$  должно быть равно 3. Поэтому могут быть лишь следующие решения:  $k = 3, n = 3, 4, 5$  и  $n = 3, k = 3, 4, 5$ .

Заметим, что если два выпуклых правильных многогранника соответствуют одному и тому же решению неравенства (\*), то их плоские углы равны и число ребер, сходящихся в одной вершине, одинаково для обоих многогранников. Отсюда, как показано в решении задачи 58, б, вытекает равенство их двугранных и, следовательно, многогранных углов, так что эти многогранники подобны. Таким образом, каждое решение неравенства (\*) определяет вид правильного многогранника, точнее, определяет многогранник, как говорят, с точностью до подобия.

Итак, в соответствии с решениями неравенства (\*) имеем следующие виды правильных выпуклых многогранников.

1.  $n = 3, k = 3$  — правильный тетраэдр (рис. 134, а). Тетраэдр имеет четыре вершины, четыре треугольных грани, шесть ребер, сходящихся по три в каждой вершине.

2.  $n = 3, k = 4$  — правильный гексаэдр, или куб (рис. 134, б). Он имеет восемь вершин, шесть четырехугольных граней и 12 ребер, сходящихся по три в каждой вершине.

3.  $n = 3, k = 5$  — правильный выпуклый додекаэдр (рис. 134, в). Додекаэдр имеет 20 вершин, 12 пятиугольных граней и 30 ребер, сходящихся по три в каждой вершине.

4.  $n = 4, k = 3$  — правильный октаэдр (рис. 134, г). Октаэдр имеет шесть вершин, восемь треугольных граней и 12 ребер, сходящихся по четыре в каждой вершине.

5.  $n = 5, k = 3$  — правильный выпуклый икосаэдр (рис. 134, д). Икосаэдр имеет 12 вершин, 20 треугольных граней и 30 ребер, сходящихся по пять в каждой вершине.

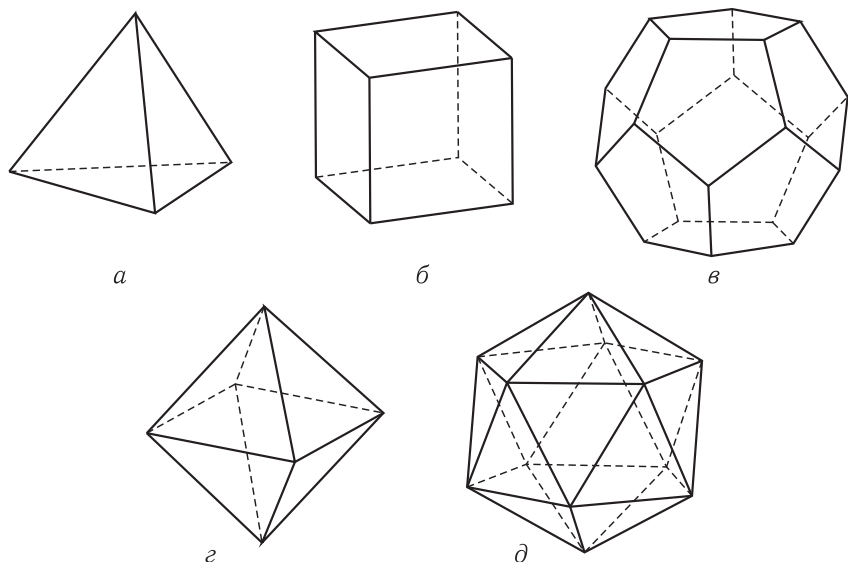


Рис. 134

Нам осталось показать, что многогранники с такими  $k$  и  $n$  действительно существуют.

Рассмотрим сначала правильные многогранники, у которых  $n = 3$ .

Докажем, например, существование правильного додекаэдра. Очевидно, существует и притом только один трехгранный угол, у которого все плоские углы равны углу правильного пятиугольника. Его двугранные углы равны некоторому вполне определенному углу  $\varphi$ .

Заметив это, приложим друг к другу три равных правильных пятиугольника  $I$ ,  $II$  и  $III$  так, чтобы они образовали такой угол (рис. 135, *a*). Тогда трехгранный угол  $C$  равен трехгранному углу  $B$  по двум плоским углам и двугранному углу между ними. Следовательно, мы можем приложить правильный пятиугольник  $IV$  так, чтобы его угол стал плоским углом трехгранного угла  $C$ . Затем мы сможем приложить таким же образом к ребру  $DE$  пятиугольник  $V$  (рис. 135, *б*) и к ребру  $EA$  пятиугольник  $VI$  (на рис. не показан). Легко видеть, что он сомкнется с пятиугольником  $II$ , так как его двугранный угол тоже равен  $\varphi$ .

В образовавшиеся «зубцы» первого «пояса» вставим еще пять пятиугольников. Легко видеть, что они образуют следующий пояс (рис. 135, *в*). Их свободные стороны образуют правильный пятиугольник. Приложим к одной его стороне под углом  $\varphi$

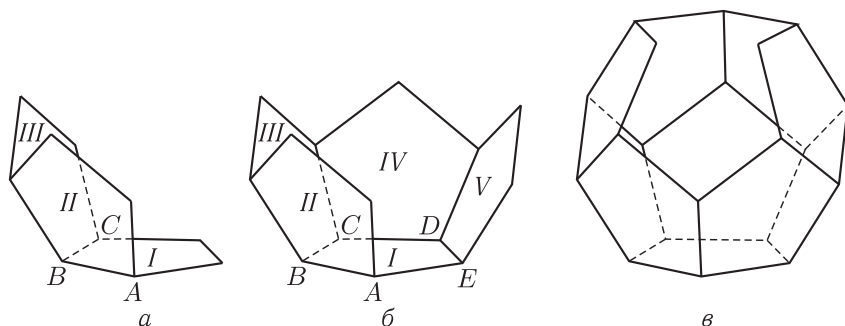


Рис. 135

пятиугольник *III*. Очевидно, что его стороны совпадают со сторонами пятиугольника «пояса» и т. д., поэтому наша многогранная поверхность замкнется<sup>1)</sup>.

Так же разбирается случай тетраэдра и куба (гексаэдра).

Построим теперь многогранник, взаимный додекаэдру. В силу задачи 69 он должен быть правильным выпуклым многогранником с 20 гранями, т. е. правильным икосаэдром. Чтобы получить октаэдр, надо проделать ту же операцию с кубом.

Попутно мы установили, что кубу взаимен октаэдр, а додекаэдру — икосаэдр. Тетраэдру, очевидно, взаимен снова тетраэдр.

**75.** По определению, ядро правильного многогранника лежит по одну сторону от любой своей грани; поэтому ядро является выпуклым многогранником. Каждая грань ядра может лежать только в плоскости грани исходного многогранника; в силу выпуклости ядра в одной плоскости не может лежать более одной его грани. Поэтому у ядра граней не больше, чем в исходном многограннике. С другой стороны, их не может быть меньше, так как вписанная в исходный многогранник сфера (которая, очевидно, целиком лежит внутри ядра) имеет точки касания на всех гранях исходного многогранника.

Покажем теперь, что ядро правильного многогранника — правильный многогранник.

Когда мы совмещаем данный многогранник сам с собой, то и его ядро, очевидно, тоже совмещается само с собой, причем если совпадают некоторые две грани многогранника, то совпадают и соответствующие грани ядра. Поэтому все грани ядра

<sup>1)</sup> Прямое построение правильных додекаэдра и икосаэдра см. Д. И. Пелки и н. Элементарная геометрия, ч. 2. Гостехиздат, 1949. С. 283.

равны, так как мы можем совместить две любые грани исходного многогранника.

С другой стороны, если вращать правильный многогранник вокруг перпендикуляра, опущенного из его центра на некоторую грань  $\sigma$ , то он будет совмещаться сам с собой при повороте на любой угол, кратный  $\frac{2\pi}{n}$ , где  $n$  — число сторон грани  $\sigma$ . При этом, очевидно, будет совмещаться само с собой и ядро и его грань  $\bar{\sigma}$ , лежащая в плоскости  $\sigma$ .

Пусть  $A$  — какая-нибудь вершина грани  $\bar{\sigma}$ . Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  вершины  $\bar{\sigma}$ , в которые переходит  $A$  при поворотах соответственно на углы  $\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \cdot 2, \frac{2\pi}{n} \cdot 3, \dots, \frac{2\pi}{n} (n-1)$ . Допустим, что грань  $\bar{\sigma}$  имеет еще какую-нибудь вершину  $B$ , отличную от  $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , тогда при поворотах на указанные углы эта вершина переходит в вершины  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ , также, очевидно, отличные от  $A, A_1, \dots, A_{n-1}$ , т. е. многоугольник  $\bar{\sigma}$  имеет не менее чем  $2n$  вершин. Далее, так как  $n \geq 3$ , то  $2n \geq 6$ . Таким образом, каждая грань ядра должна иметь не меньше шести вершин, что, однако, невозможно в силу задачи 45, а. Следовательно, точки  $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  должны исчерпывать все вершины грани  $\bar{\sigma}$ , т. е.  $\bar{\sigma}$  имеет ровно  $n$  сторон, причем указанными выше поворотами любая из них может быть совмещена с любой другой.

Таким образом, мы можем совместить ядро исходного многогранника само с собой так, чтобы произвольная его грань вместе с любым принадлежащим ей ребром совпала с любой гранью и принадлежащим ей ребром. Отсюда и следует в силу задачи 67, б правильность ядра.

**76. а)** Любые две грани выпуклого тетраэдра — смежные. Ребра же, принадлежащие одной грани, образуют единственный многоугольник — треугольник самой этой грани. Отсюда следует, что выпуклый тетраэдр не является ядром никакого другого многогранника.

б) Куб также не может являться ядром никакого другого многогранника. В самом деле, единственная грань куба, не смежная с какой-либо его гранью, параллельна этой грани, так что продолжение граней куба не приводит к новому многограннику. Продолжение ребер одной грани также не приводит к цели, так как противоположные стороны квадрата параллельны.

в) Так как гранями октаэдра являются треугольники, а звездчатых треугольников не существует, то новые многогранники могут быть получены из октаэдра только путем продолжения



его граней. Но из четырех граней октаэдра, не смежных с некоторой его гранью, одна параллельна этой грани. Таким образом, если существует многогранник, ядром которого является правильный выпуклый октаэдр, то он может быть получен из этого октаэдра единственным способом: путем продолжения каждой грани до пересечения с тремя не смежными и не параллельными ей гранями. Но плоскости трех граней октаэдра, не смежных с некоторой одной его гранью и не параллельных ей, вместе с плоскостью этой грани, пересекаясь, сами образуют некоторый многогранник, очевидно, правильный. Следовательно, при указанном выше продолжении граней октаэдра вместо нового правильного многогранника получаются два пересекающихся друг друга правильных тетраэдра (рис. 136).

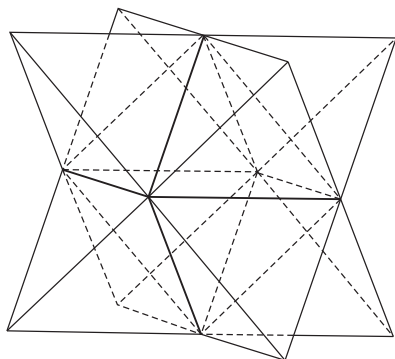


Рис. 136

**77. а)** Для нахождения всех возможных типов правильных додекаэдров найдем, какие многогранники могут быть получены из правильного выпуклого додекаэдра способами, указанными на с. 32.

1°. Считая смежными в новом многограннике грани, которые смежны в исходном додекаэдре, т. е. продолжая ребра исходного додекаэдра (рис. 137), получаем правильный многогранник, называемый малым звездным додекаэдром (см. ниже рис. 146, а). Он имеет 12 граней (являющихся звездчатыми пятиугольниками), 30 ребер и 12 вершин (являющихся вершинами пятигранных правильных выпуклых углов).

2°. Из шести граней, не смежных с некоторой гранью  $\mu$  исходного додекаэдра, одна параллельна  $\mu$ . Таким образом, продолжать до пересечения с  $\mu$  можно единственную пятерку граней исходного додекаэдра, — именно грани, смежные с гранью, проти-

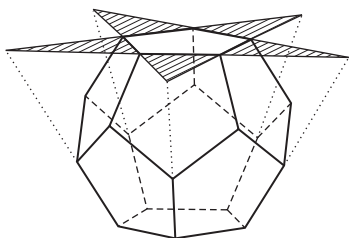


Рис. 137

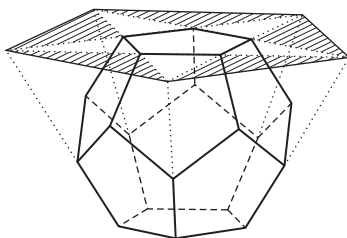


Рис. 138

воположной  $\mu$ . Прямые, по которым  $\mu$  пересекается с указанными плоскостями, определяют ребра нового многогранника, принадлежащие его грани  $\mu$ . Но, как указывалось выше (см. с. 28), совокупность прямых, на которых лежат стороны некоторого многоугольника, не определяет однозначно этого многоугольника. Если считать гранями нового многогранника выпуклые пятиугольники (рис. 138), мы приходим к большому додекаэдру (см. ниже рис. 146, б), имеющему снова 12 граней (правильных выпуклых пятиугольников), 30 ребер и 12 вершин (являющихся вершинами звездчатых правильных пятигранных углов). Если же считать гранями нового многогранника правильные звездчатые пятиугольники (рис. 139), то мы приходим к большому звездному додекаэдру (см. ниже рис. 146, в), имеющему 12 граней (правильных звездчатых пятиугольников), 30 ребер и 20 вершин (являющихся вершинами выпуклых правильных трехгранных углов).

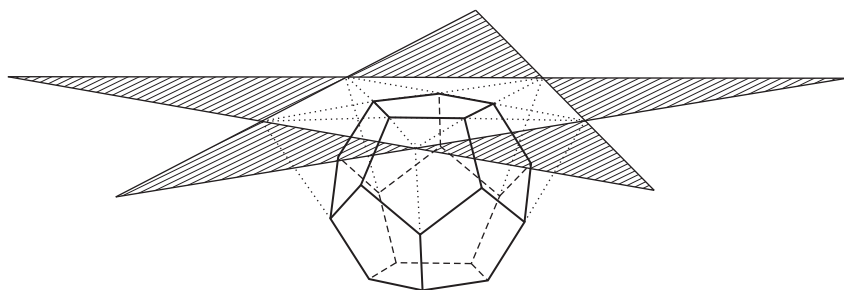


Рис. 139

Таким образом, кроме выпуклого додекаэдра существуют еще три типа правильных додекаэдров.

б) Так как гранями правильного выпуклого икосаэдра являются треугольники, то продолжение его ребер не может дать

нового многогранника. Посмотрим, какие многогранники могут быть получены путем продолжения граней выпуклого икосаэдра.

Пусть  $\mu_0$  — произвольная грань правильного выпуклого икосаэдра. Обозначим через  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  грани, смежные с  $\mu_0$ , через  $\mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9$  — грани, имеющие с  $\mu_0$  общую вершину, через  $\mu_{10}, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{15}$  — грани, смежные с  $\mu_4, \mu_5, \dots, \mu_9$ , через  $\mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{18}$  — грани смежные с  $\mu_{10}, \mu_{11}, \dots, \mu_{15}$ , и, наконец, через  $\mu_{19}$  оставшуюся грань, смежную с  $\mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{18}$  и параллельную  $\mu_0$  (см. схему, изображенную на рис. 140).

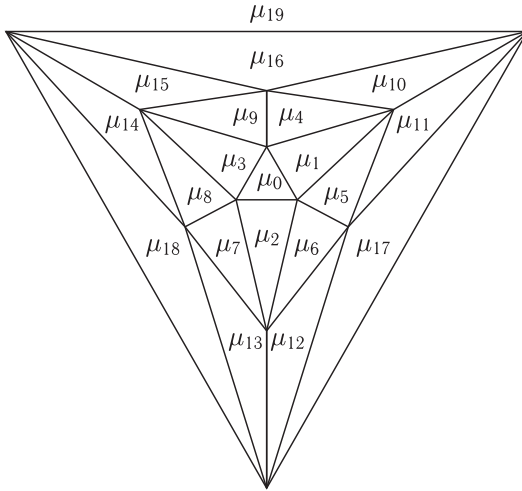


Рис. 140

Для получения грани нового многогранника, лежащей в плоскости  $\mu_0$ , мы должны продолжить до пересечения с  $\mu_0$  некоторые три из несмежных с  $\mu_0$  граней, одинаково наклоненных к  $\mu_0$  и друг к другу. Очевидно, такими будут только следующие тройки граней:

<i>I</i>	$\mu_4,$	$\mu_6,$	$\mu_8,$
<i>II</i>	$\mu_5,$	$\mu_7,$	$\mu_9,$
<i>III</i>	$\mu_{10},$	$\mu_{12},$	$\mu_{14},$
<i>IV</i>	$\mu_{11},$	$\mu_{13},$	$\mu_{15},$
<i>V</i>	$\mu_{16},$	$\mu_{17},$	$\mu_{18}.$

Предположим, что новый многогранник получается путем продолжения до пересечения с  $\mu_0$  граней  $\mu_4, \mu_6, \mu_8$ . Тогда смежными с  $\mu_4$  (в новом многограннике), очевидно, должны быть грани  $\mu_0, \mu_{11}, \mu_{15}$ , смежными с  $\mu_{11}$  — грани  $\mu_4, \mu_{19}, \mu_6$ , смежными с  $\mu_{19}$  — грани  $\mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{15}$ . Дальнейшее нахождение

граней, смежных (в новом многограннике) с  $\mu_6, \mu_8, \mu_{13}, \mu_{15}$ , приводит к повторению тех же граней  $\mu_0, \mu_4, \mu_6, \mu_8, \mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{15}, \mu_{19}$ . Следовательно, эти восемь граней, если считать их попарно смежными, как указано выше, сами образуют некоторый многогранник, именно, — правильный октаэдр (рис. 141). Поверхность, получаемая при таком продолжении всех граней исходного икосаэдра, распадается на пять октаэдров<sup>1)</sup> и, следовательно, сама многогранником не является. Аналогичный результат получается, если считать смежными с  $\mu_0$  грани  $\mu_5, \mu_7, \mu_9$ .

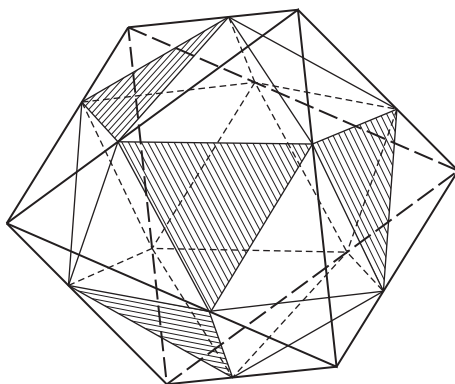


Рис. 141

Если считать смежными с  $\mu_0$  грани  $\mu_{10}, \mu_{12}, \mu_{14}$ , то с  $\mu_{10}$  должны быть смежны грани  $\mu_0, \mu_{12}, \mu_{14}$ , с  $\mu_{12}$  — грани  $\mu_0, \mu_{10}, \mu_{14}$ , а с  $\mu_{14}$  — грани  $\mu_0, \mu_{10}, \mu_{12}$ . Таким образом, в этом случае грани  $\mu_0, \mu_{10}, \mu_{12}, \mu_{14}$ , пересекаясь, образуют правильный тетраэдр (рис. 142) и многогранник, полученный при указанном продолжении всех граней икосаэдра, снова является составным — он распадается на пять правильных тетраэдров. К такому же результату приходим, считая смежными с  $\mu_0$  грани  $\mu_{11}, \mu_{13}, \mu_{15}$ .

Если, наконец, продолжить грань  $\mu_0$  до пересечения с  $\mu_{16}, \mu_{17}, \mu_{18}$  (рис. 143), то получится правильный многогранник, называемый б о л ь ш и м и к о с а э д р о м (см. ниже рис. 146, з). Он имеет 20 граней, 30 ребер и 12 вершин. Грани его — правильные треугольники, а многогранные углы — звездчатые.

Итак, существует единственный невыпуклый правильный икосаэдр.

<sup>1)</sup> При этом в плоскости каждой грани икосаэдра лежат грани двух октаэдров.

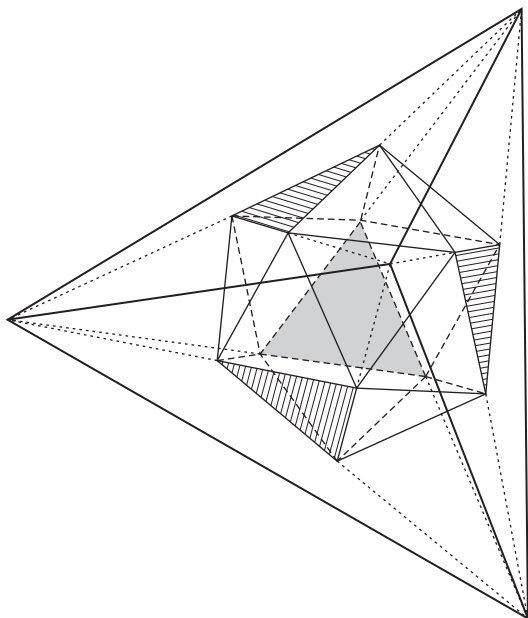


Рис. 142

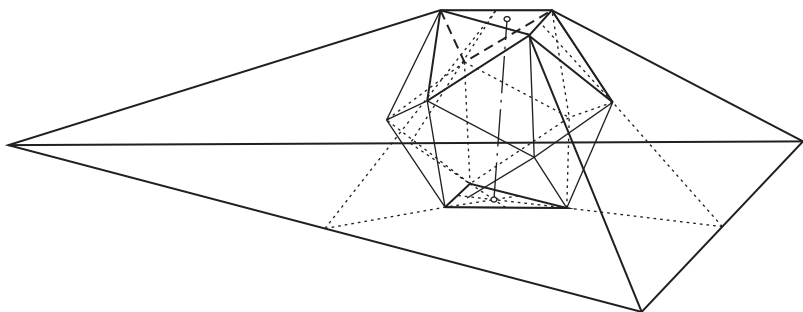


Рис. 143

**78.** Пусть каждая грань данного многогранника  $T$  имеет  $k$  сторон. Так как в каждой вершине многогранника  $T$  сходится  $n$  ребер, то каждая грань многогранника  $T'$ , взаимного  $T$ , имеет  $n$  сторон, причем число этих граней равно  $\mathcal{B}$ . В силу замечаний, сделанных на с. 33, почти правильный многогранник, получаемый из  $T$  и  $T'$ , будет иметь  $\mathcal{T}$   $k$ -угольных и  $\mathcal{B}$   $n$ -угольных граней, т. е. всего  $\mathcal{B} + \mathcal{T}$  граней.

Далее, так как на каждом ребре многогранника  $T$  лежит по одной вершине почти правильного многогранника, то последний должен иметь всего  $\mathcal{P}$  вершин.

Наконец, так как в каждой из  $\mathcal{P}$  вершин почти правильного многогранника сходится четыре ребра, а каждое ребро соединяет две вершины, то общее число ребер почти правильного многогранника должно быть равно  $\frac{4\mathcal{P}}{2} = 2\mathcal{P}$  ребер.

**79.** а) Двугранные углы почти правильного многогранника равны в силу симметрии, как углы между гранями взаимных правильных многогранников.

б) Многогранные углы совмещаются при совмещении ребер исходного многогранника, поэтому все они равны.

**80.** Соответственно парам взаимных выпуклых правильных многогранников (см. с. 158) получаем:

1) При пересечении двух взаимных тетраэдров — октаэдр, даже правильный многогранник (см. доказательство к задаче 76, а).

2) При пересечении куба и октаэдра — кубоктаэдр (рис. 144). Он имеет 14 граней, 24 ребра и 12 вершин.

3) При пересечении додекаэдра и икосаэдра — додекаэдрои-косаэдр (рис. 145). Он имеет 32 грани, 30 вершин и 60 ребер.

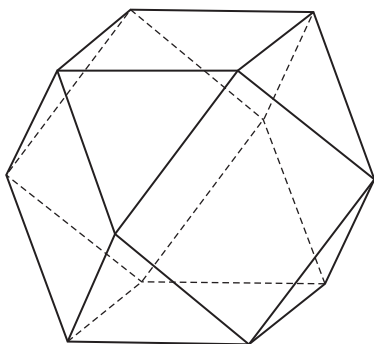


Рис. 144

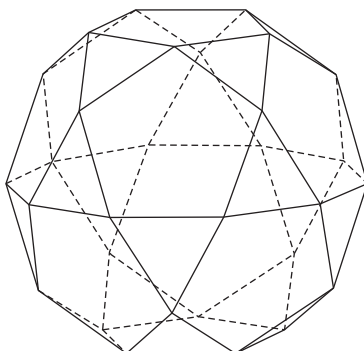


Рис. 145

Сравнивая число граней и вершин, найденных выше четырех правильных звездчатых многогранников, обнаружим, что малому звездному додекаэдру (рис. 146, а) взаимен большой додекаэдр (рис. 146, б), а большому звездному додекаэдру (рис. 146, в) — большой икосаэдр (рис. 146, г). Первая пара дает додекаэдрододекаэдр (рис. 147, а), имеющий 24 пятиугольные грани, из которых 12 выпуклых и 12 звездчатых. Вторая пара дает звездный

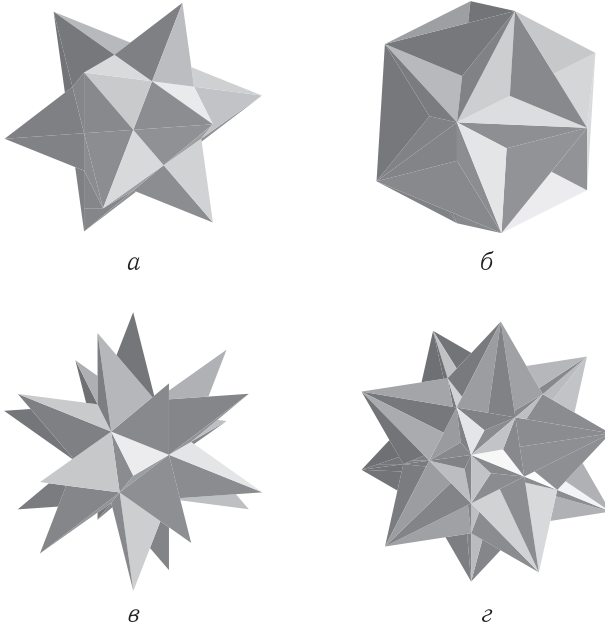


Рис. 146

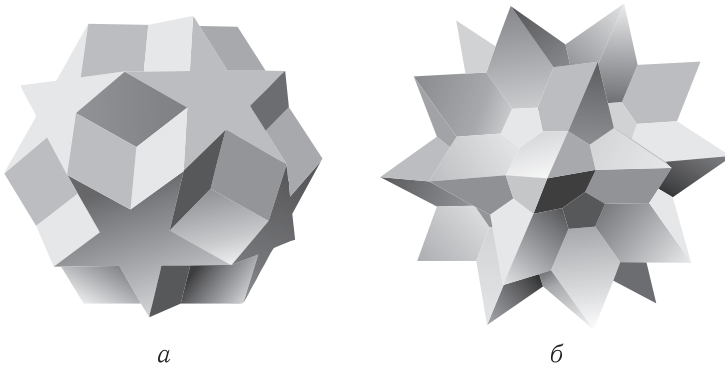


Рис. 147

додекаэдрокосаэдр (рис. 147, *б*), имеющий 32 грани, из которых 20 являются треугольниками, а 12 — звездчатыми пятиугольниками.

**81.** Пусть из правильных  $n$ -угольников сложен паркет. Такой паркет может иметь узлы двух родов: а) в узле лежат только вершины многоугольников; б) узел лежит на стороне одного из многоугольников.

Угол правильного  $n$ -угольника равен  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$ . Поэтому в первом случае число  $k$  многоугольников, сходящихся в узле, равно

$$k = \frac{2\pi}{\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)} = 2 + \frac{4}{n-2};$$

$k$  — число целое, поэтому 4 должно нацело делиться на  $n - 2$ . Но у числа 4 есть только три делителя: 1, 2 и 4. Поэтому паркет с узлами первого рода можно сложить только из правильных треугольников, четырехугольников и шестиугольников ( $n - 2$  соответственно равно 1, 2, 4). Такие паркеты действительно существуют. Они приведены на рис. 148, *a, б, в*.

Во втором случае число  $k$  многоугольников, сходящихся в узле, равно

$$k = \frac{\pi}{\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)} + 1 = 2 + \frac{2}{n-2};$$

здесь  $n - 2$  может принимать значения только 1 и 2.

Поэтому паркет с узлами второго рода можно сложить только из правильных треугольников и четырехугольников. Соответствующие паркеты изображены на рис. 148, *г, д*.

Интересна задача о полуправильных паркетажах — покрытиях плоскости с помощью двух или более видов правильных многоугольников. Мы не будем приводить здесь всей теории; укажем только, что в полуправильном паркетаже многоугольник с наименьшим числом сторон может быть либо треугольником, либо четырехугольником, либо пятиугольником, либо шестиугольником, и в каждом узле могут сходиться не более шести многоугольников. Некоторые примеры полуправильных паркетажей читатель найдет в «Задачнике по геометрии» Делоне и Житомирского и в книге Штейнгауза «Математический калейдоскоп».

**82.** а) Из двух равных треугольников можно сложить параллелограмм, а параллелограммами уже легко покрыть плоскость (рис. 149).

б) Пусть дан произвольный четырехугольник  $ABCD$ . Повернем его на  $180^\circ$  вокруг середины  $O$  стороны  $CD$ . Получим центрально-симметричный шестиугольник  $ABCA'B'D$  (рис. 150, *a*), состоящий из двух равных четырехугольников. Будем прикладывать такие шестиугольники друг к другу так, чтобы вершины  $A$  и  $B$  одного шестиугольника совпали соответственно с вершинами  $B'$  и  $A'$  другого. Очевидно, что, продолжая этот процесс, мы получим сколь угодно длинную полосу (рис. 150, *б*).



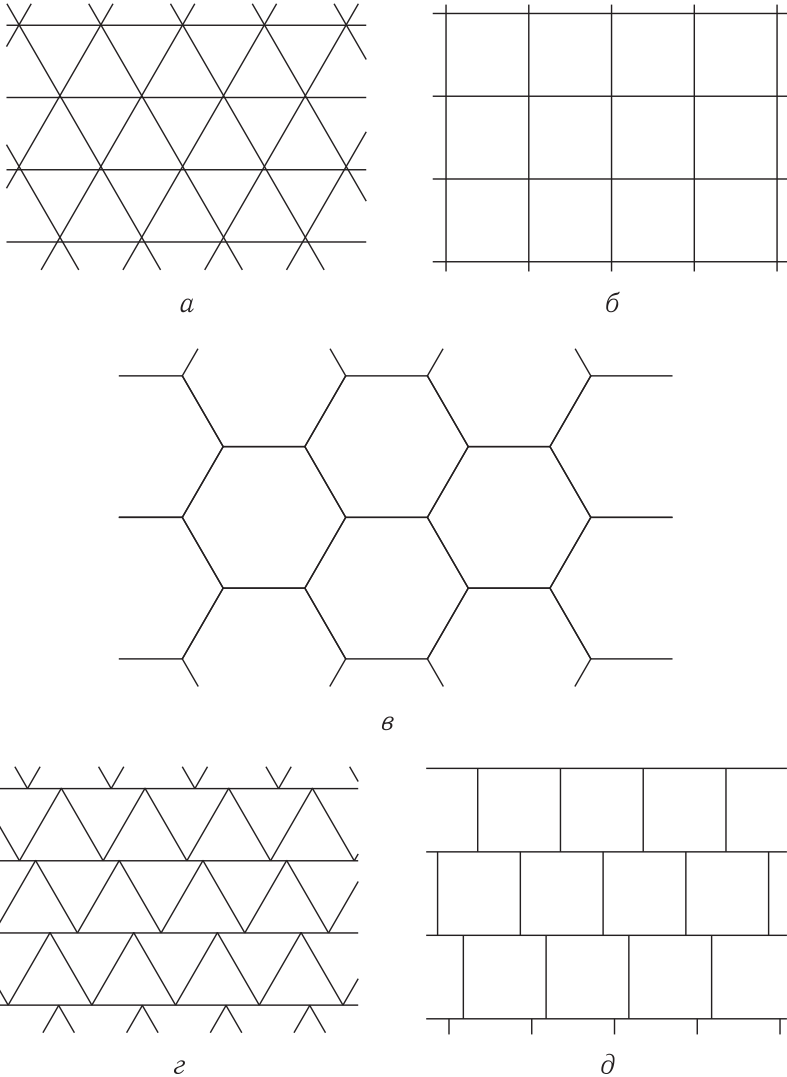


Рис. 148

Приложим к стороне  $AD$  шестиугольника одной из полос равную ей сторону любого шестиугольника другой полосы (рис. 150, в). Тогда границы обеих полос совпадут, ибо

$$\begin{aligned} \angle DAF + \angle FAE + \angle EAB + \angle BAD &= \\ &= \angle ADC + \angle DCB + \angle CBA + \angle BAD = 4d \end{aligned}$$

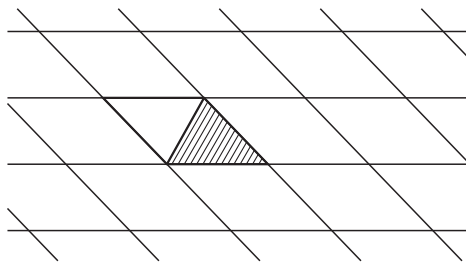


Рис. 149

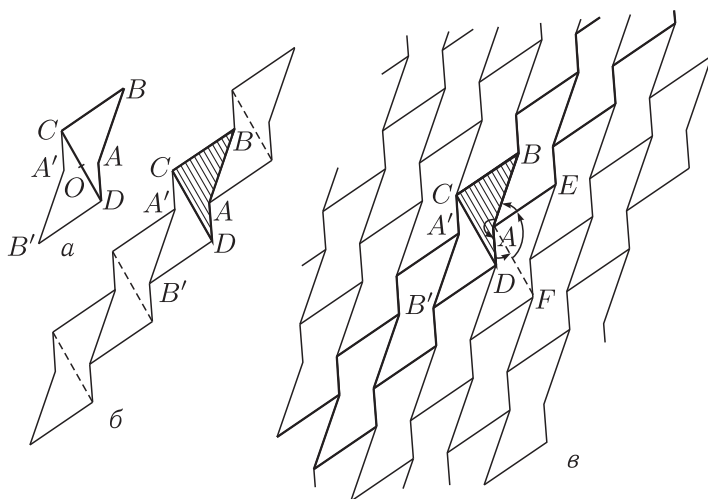


Рис. 150

(все углы отсчитываются в направлении против часовой стрелки, как указано на чертеже), как сумма внутренних углов четырехугольника; следовательно, сторона  $AB$  полосы тоже совпадает с равной ей стороной второй полосы и т. д.

Продолжая далее поступать так же, мы получим нужное покрытие плоскости четырехугольниками (рис. 150, в).

в) См. решение задачи б) (рис. 150, в).

**83.** Пусть из выпуклых  $n$ -угольников данного вида устроен паркет. Покажем, что из предположения, что многоугольники покрывают всю плоскость без просветов и двойных покрытий, необходимо вытекает  $n \leq 6$ .

В самом деле, пусть многоугольник  $M$  имеет площадь  $S$  и целиком помещается в круг диаметра  $\delta = 2r$ . Вырежем тогда из нашего паркета квадрат со стороной  $l$ , достаточно большой

по сравнению с  $r$  (что значит «достаточно большой», будет объяснено в конце решения задачи). Обозначим через  $N_1$  и  $N_2$  число узлов первого рода и второго рода соответственно (см. решение задачи 81), попавших внутрь квадрата; число всех многоугольников, хотя бы одна вершина которых лежит внутри квадрата, обозначим через  $L$ .

Тогда имеет место неравенство

$$3N_1 + 2N_2 \leq Ln, \quad (1)$$

потому что в каждом узле первого рода сходится не менее трех вершин многоугольников, в узле второго рода — не менее двух, а  $Ln$  есть число вершин всех тех многоугольников, которые хотя бы частично попадают внутрь квадрата.

С другой стороны,

$$4dN_1 + 2dN_2 \leq 2d(n-2)L, \quad (2)$$

ибо  $4dN_1 + 2dN_2$  есть сумма углов во всех узлах паркета, лежащих внутри квадрата, а  $2d(n-2)L$  есть сумма всех углов всех тех многоугольников, которые хотя бы частично попадают внутрь квадрата. Оценим разность  $2d(n-2)L - (4dN_1 + 2dN_2)$ . Эта разность равна сумме углов при вершинах, лежащих вне квадрата, но принадлежащих многоугольникам, частично попавшим внутрь его. Все такие многоугольники лежат между контурами квадратов со сторонами  $l-2r$  и  $l+2r$  соответственно, концентрическими по отношению к нашему квадрату (рис. 151). Так как наши многоугольники покрывают плоскость без двойных покрытий, то число многоугольников, целиком попавших внутрь какой-нибудь фигуры, не может превышать отношения площади этой фигуры к площади самого многоугольника. В нашем случае это отношение равно

$$\frac{(l+2r)^2 - (l-2r)^2}{S} = \frac{8lr}{S}.$$

Поэтому разность, которую мы хотим оценить, никак не может превосходить  $\frac{8lr}{S} \cdot 2d(n-2)$ . С другой стороны, так как наши  $L$  многоугольников целиком покрывают исходный квадрат, то

$$LS > l^2 \quad \text{или} \quad S > \frac{l^2}{L}.$$

Заменяя  $S$  в выражении  $\frac{8lr}{S} \cdot 2d(n-2)$ , получаем

$$2d(n-2)L - (4dN_1 + 2dN_2) < \frac{8r}{l} L \cdot 2d(n-2)$$

или

$$4dN_1 + 2dN_2 > 2d(n-2)L \left(1 - \frac{8r}{l}\right). \quad (3)$$

Сократив неравенство (3) на  $d$  и вычитая из него почленно неравенство (1), получим

$$N_1 > L \cdot n - 4L - 2(n-2)L \frac{8r}{l}. \quad (4)$$

Но из неравенства (1) вытекает

$$N_1 \leq \frac{n}{3} L. \quad (5)$$

Таким образом, сопоставляя (4) и (5), получаем, сократив предварительно на  $L$ ,

$$\frac{n}{3} > n - 4 - 2(n-2) \frac{8r}{l} \quad (6)$$

и после несложных преобразований получим

$$6 + (n-2) \frac{24r}{l} > n. \quad (7)$$

Величину  $l$  мы с самого начала могли выбрать сколь угодно большой, в частности больше, чем  $24(n-2)r$  (это и означало наше утверждение в начале решения задачи о том, что сторона  $l$  выбирается достаточно большой по сравнению с  $r$ ). Но в таком случае  $n < 7$ ; а так как  $n$  — целое, то  $n$  меньше или равно 6.

Заметим, что мы нигде не пользовались тем, что многоугольники равны. Все наши рассуждения остаются в силе, если считать, что многоугольники не равны, но все они имеют по  $n$  сторон, площадь их равна  $S$  и каждый из них помещается в круг радиуса  $r$ . Слегка видоизменяя наши оценки, можно доказать даже следующее более сильное утверждение:

Если плоскость покрыта без просветов и двойных покрытий какими-то выпуклыми многоугольниками, причем выполнены условия:

- 1) все многоугольники помещаются в круге некоторого фиксированного радиуса  $r_0$ ;
- 2) площадь каждого из многоугольников не меньше некоторого фиксированного числа  $S_0$ ;
- 3) число сторон каждого многоугольника не превосходит некоторого фиксированного числа  $n_0$ ,

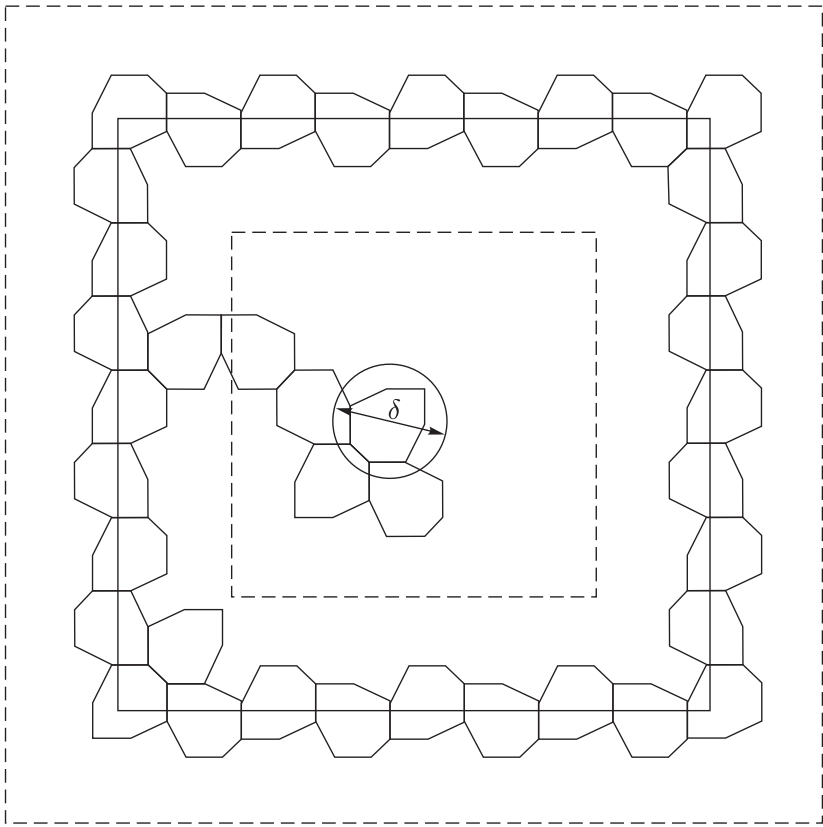


Рис. 151

то среди этих многоугольников обязательно найдутся многоугольники с числом сторон, не превосходящим шести, и даже более того, либо все многоугольники покрытия являются шестиугольниками, либо среди них найдутся многоугольники, число сторон которых не превосходит пяти.

Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

Нетрудно видеть, что требование *выпуклости* рассматриваемых многоугольников является существенным для доказательства. В самом деле, для невыпуклых многоугольников может не иметь места исходное неравенство  $3N_1 \leq Ln$ , ибо в узле паркета могут сходиться лишь два невыпуклых многоугольника. Нетрудно показать, что для каждого сколь угодно большого числа  $n$  существует такой *невыпуклый*  $n$ -угольник  $M$ , что плоскость можно покрыть без просветов и двойных покрытий

многоугольниками, равными  $M$  (на рис. 152 изображено покрытие плоскости невыпуклыми десятиугольниками).

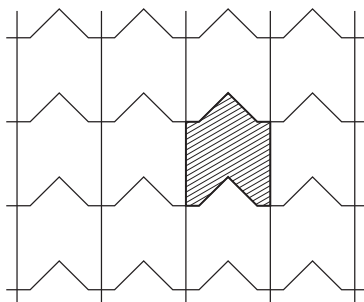


Рис. 152

**84.** Разрежем данный треугольник  $ABC$  по прямой  $DE$ , параллельной основанию  $AC$ , и такой, что  $AD : DB = 1 : 4$  (рис. 153, *a*). Треугольники  $DBE$  и  $ABC$ , очевидно, подобны. Поэтому если мы сможем разрезать трапецию  $ADEC$  на три части и сложить из них треугольник, подобный  $\triangle ABC$ , то задача будет решена.

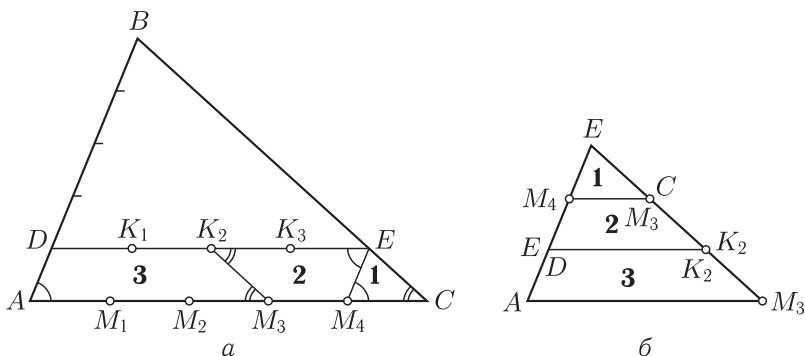


Рис. 153

По построению  $DE : AC = 4 : 5$ . Разделим  $DE$  на четыре, а  $AC$  — на пять равных частей точками:  $K_1, K_2, K_3$  и соответственно  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Разрежем затем трапецию по линиям  $K_2M_3$  и  $EM_4$ . Тогда она распадется на две трапеции  $ADK_2M_3$  и  $EK_2M_3M_4$  и треугольник  $M_4EC$ , причем  $AM_3 = 3a$ ,  $DK_2 = 2a$ ,  $EK_2 = 2a$ ,  $M_4M_3 = a$ ,  $M_4C = a$ , где

$$a = \frac{1}{5} AC = \frac{1}{4} DE.$$

Четырехугольник  $ADEM_4$  — параллелограмм (ибо  $DE = AM_4$ ), следовательно,  $\angle K_2EM_4 = \angle EM_4C = \angle A$ ; четырехугольник  $K_2ECM_3$  — тоже параллелограмм (ибо  $K_2E = M_3C$ ), следовательно,  $\angle EK_2M_3 = \angle K_2M_3A = \angle C$ . Отсюда вытекает, что если мы приложим трапецию  $K_2EM_4M_3$  основанием  $EK_2$  к основанию  $DK_2$  трапеции  $ADK_2M_3$ , а к основанию  $M_4M_3$  меньшей трапеции приложим основание  $M_4C$  треугольника  $M_4EC$  (см. рис. 153, б), то получим один треугольник  $AEM_3$ , подобный треугольнику  $ABC$  с коэффициентом подобия 3 : 5.

**85.** Каждый из углов выпуклого многоугольника меньше  $2d$ , и, следовательно, вершины его не могут лежать на сторонах треугольников разбиения. При разбиении выпуклого многоугольника на треугольники (не обязательно диагоналями) все углы многоугольника разобьются на части, которые будут служить углами треугольников разбиения (рис. 154). Отсюда следует, что сумма углов всех треугольников разбиения должна быть не меньше суммы углов многоугольника. Но сумма углов 14-угольника равна  $28d$ , а сумма углов 17-угольника равна  $30d$ . Поэтому выпуклый 17-угольник нельзя разбить на 14 треугольников.

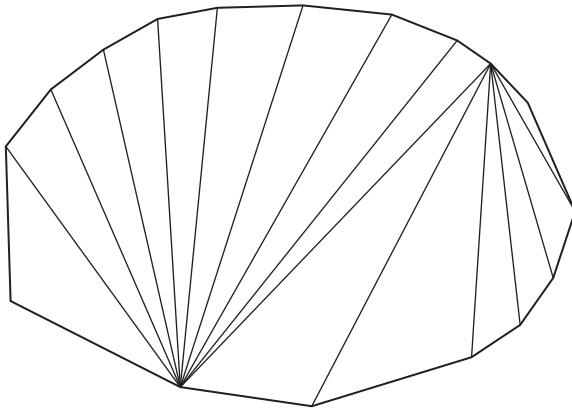


Рис. 154

Легко построить невыпуклый 17-угольник, который можно разбить на шесть треугольников (см., например, рис. 155, а, б).

Покажем теперь, что на пять треугольников никак о́й 17-угольник (выпуклый или невыпуклый) разрезать уже нельзя (если 17-угольник не имеет углов в  $180^\circ$ ).

В самом деле, каждая вершина 17-угольника либо совпадает с вершинами нескольких (может быть, одного) треугольников

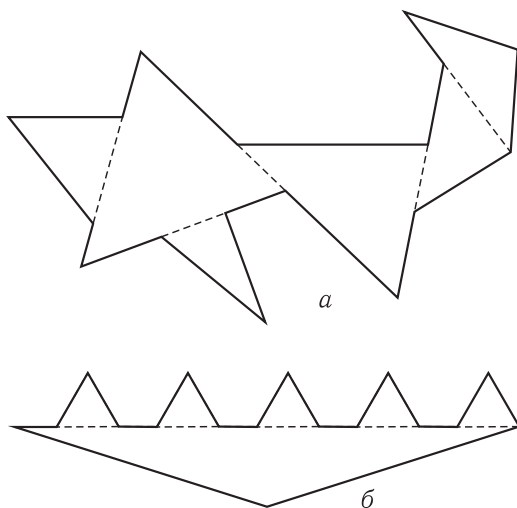


Рис. 155

разбиения, либо лежит на стороне треугольника разбиения; при этом во втором случае соответствующий угол 17-угольника, очевидно, должен быть строго больше  $180^\circ$ . Поэтому оставшаяся часть этого угла должна быть заполнена по меньшей мере еще одним треугольником разбиения; значит, в этом случае вершина тоже совпадает с вершиной хотя бы одного треугольника. Отсюда вытекает, что общее число вершин всех треугольников разбиения не меньше числа вершин 17-угольника, т. е. равно 17.

Следовательно, если  $T$  — число треугольников разбиения, то

$$3T \geq 17,$$

откуда

$$T \geq 5\frac{2}{3}.$$

А так как  $T$  — число целое, то  $T$  не может быть меньше шести.

**86.** См. рис. 156.

**87.** а) Соединим вершины креста, взятые через одну (так, как показано на рис. 157, а). При этом, как нетрудно видеть, все заштрихованные треугольники будут равны (как подобные прямоугольные треугольники, имеющие по равному катету). Переложив треугольники, заштрихованные горизонтально, на место треугольников, заштрихованных вертикально, мы получим квадрат (углы образовавшегося четырехугольника равны углам



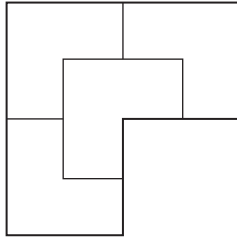


Рис. 156

креста в силу равенства переложенных треугольников; все стороны равны в силу симметрии).

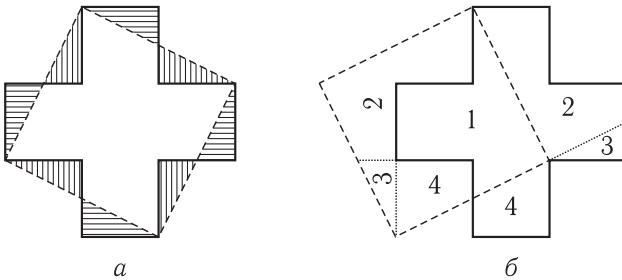


Рис. 157

На рис. 157, б показан другой способ разрезания. Его можно осуществить двумя взмахами ножниц.

б) См. рис. 158.

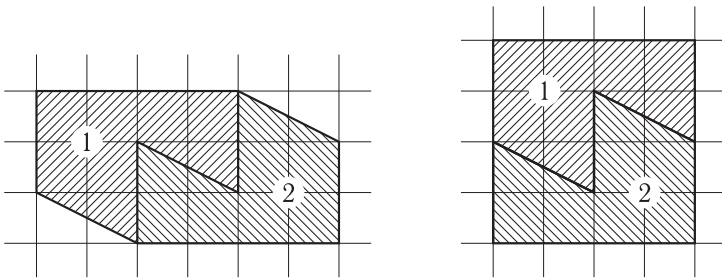


Рис. 158

**88.** Пусть стороны данных квадратов равны соответственно  $a$  и  $b$ , причем  $a > b$ . Разрежем больший квадрат, как указано на рис. 159, так, чтобы отрезки стороны равнялись соответственно  $\frac{a+b}{2}$  и  $\frac{a-b}{2}$ , и затем уложим части так, как показано

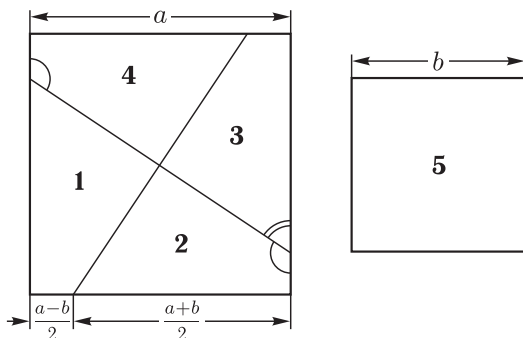


Рис. 159

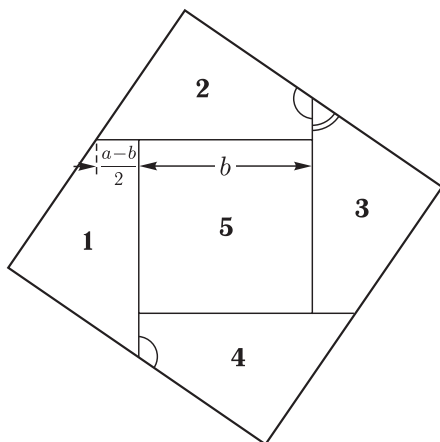


Рис. 160

на рис. 160. Легко проверить, что  $\frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$ , так что относительное положение кусков указано на чертеже верно. В силу симметрии (см. рис. 159) угол при вершине у каждого куска равен  $\frac{4d}{4} = d$ . Таким образом, сложенная нами фигура — квадрат.

Так как площадь полученного квадрата равна  $a^2 + b^2$ , то в силу теоремы Пифагора сторона этого квадрата должна равняться гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$ .

Нетрудно указать и непосредственное разбиение двух квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, на части, из которых можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе (см. ниже рис. 163).

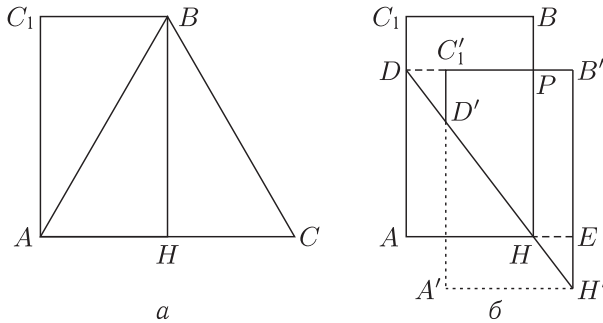


Рис. 161

**89.** Сложим сначала из правильного треугольника  $ABC$  прямоугольник  $AHC_1B$  (рис. 161, а). Теперь достаточно перекроить полученный прямоугольник в квадрат. Так как площадь искомого квадрата равна, очевидно, площади прямоугольника, то одна из сторон прямоугольника меньше стороны квадрата, а вторая — больше. Наложим квадрат  $ADB'E$  на прямоугольник так, как это изображено на рис. 161, б, и отрезем треугольник  $ADH$  (отметим, что этот треугольник сам разрезан на две части линией  $AB$ , по которой сложены две половины правильного треугольника). Сдвинем затем четырехугольную часть  $C_1DHB$  вдоль линии  $DH$  так, чтобы сторона  $C_1B$  (в новом положении — сторона  $C_1'B'$ ) попала на сторону  $DB'$  квадрата. (При этом вершина  $B$  попадет в вершину  $B'$  квадрата, так как

$$BB' \parallel DH; \quad \frac{BP}{B'P} = \frac{AC_1 - AD}{AE - AH} = \frac{AD}{AH},$$

так как из-за равенства площадей  $AC_1 \cdot AH = AD \cdot AE$  и  $\frac{AC_1}{AE} = \frac{AD}{AH}$ .) Очевидно, что выступающая за сторону  $AE$  треугольная часть  $HEH'$  четырехугольника  $C_1'D'H'B'$  равна недостающему треугольнику  $DC_1'D'$  (эти треугольники подобны, а их гипотенузы  $DD'$  и  $HH'$  равны). Отрезав треугольник  $HEH'$  и переложив его на место  $DC_1'D'$ , мы получим квадрат  $ADB'E$ . Так как пятиугольник  $C_1'B'EHD'$  тоже разбивается на две части линией разреза  $AB$ , то окончательно получим, что треугольник  $ABC$  и квадрат  $ADB'E$  составлены из пяти одинаковых частей (рис. 162).

**90.** См. рис. 163.

**91.** См. рис. 164.

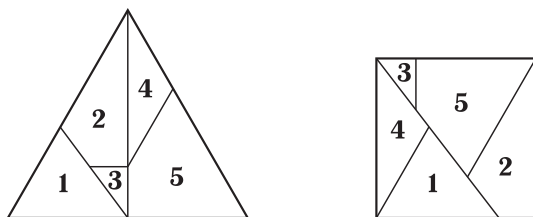


Рис. 162

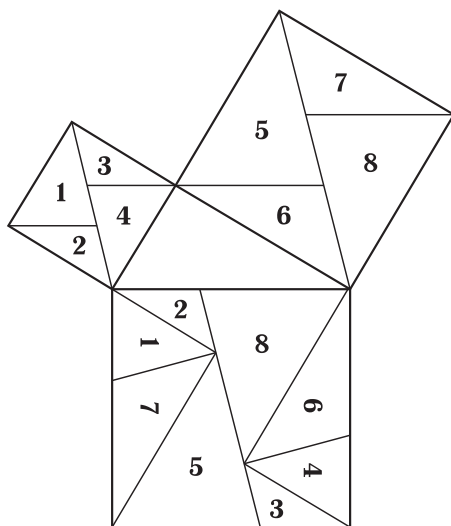


Рис. 163

**92.** Данный параллелепипед разрезаем на две равные ступенчатые части, как показано на рис. 165, *а* (высота ступени равна 9, а ширина — 4). Из этих частей складываем новый параллелепипед с отношением сторон  $12 : 8 : 18$  (рис. 165, *б*). Этот параллелепипед, в свою очередь, разрезаем на ступенчатые тела, как изображено на рис. 165, *в* (высота ступеньки равна 6, а ширина — 4). Из таких частей складываем куб со стороной 12 (рис. 165, *г*). На рис. 165, *д* отдельно изображены четыре части, на которые распадается первоначальный параллелепипед при таком разрезании.

**93.** Пусть  $AC'$  — одна из диагоналей куба (рис. 166). Проведем через  $AC'$  и соответственно через каждую из диагоналей  $AB'$ ,  $AC$  и  $AD'$  граней, исходящих из вершины  $A$ , три полуплоскости, границей каждой из которых служит диагональ  $AC'$ . Эти три полуплоскости разбивают куб на три многогранника.

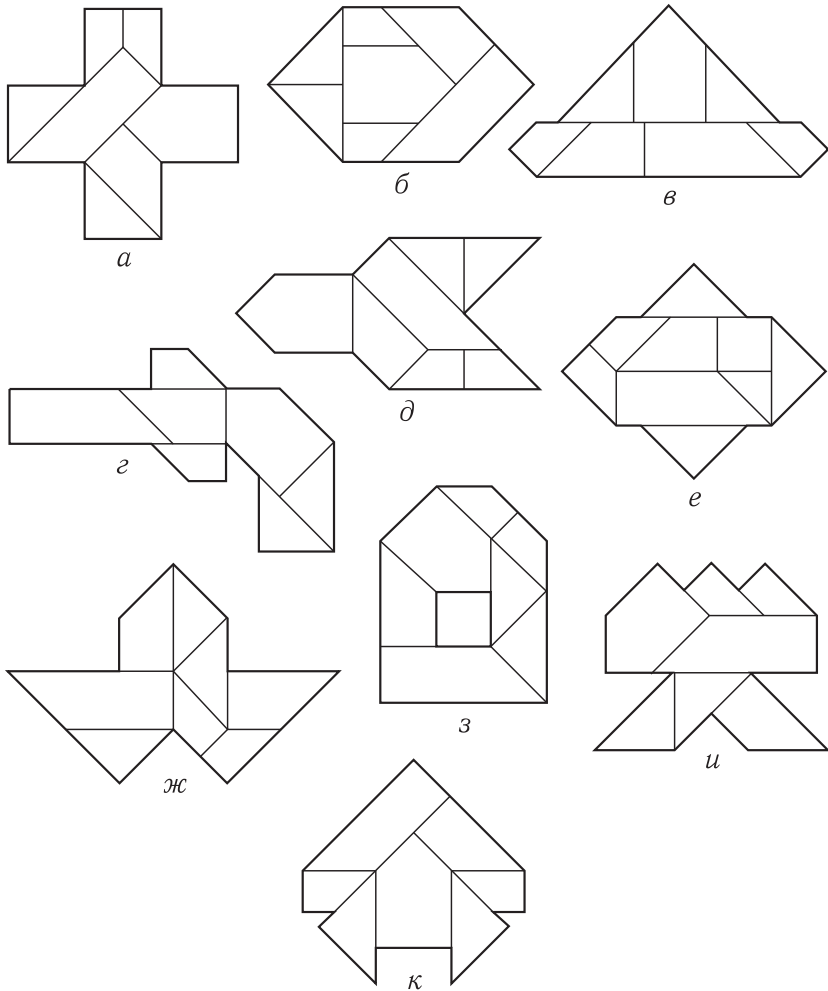


Рис. 164

Очевидно, что в силу симметрии куба эти три многогранника равны; в самом деле, повернув куб около его диагонали ( $AC'$ ) на  $120^\circ$ , мы совместим его сам с собой; при этом наши многогранники обменяются местами.

Но каждый из многогранников — четырехгранная пирамида. В самом деле, в состав любого многогранника входит целиком одна из граней, примыкающих к вершине  $C'$ , и, кроме вершин этой грани, многогранник имеет еще только одну вершину — вершину  $A$ .

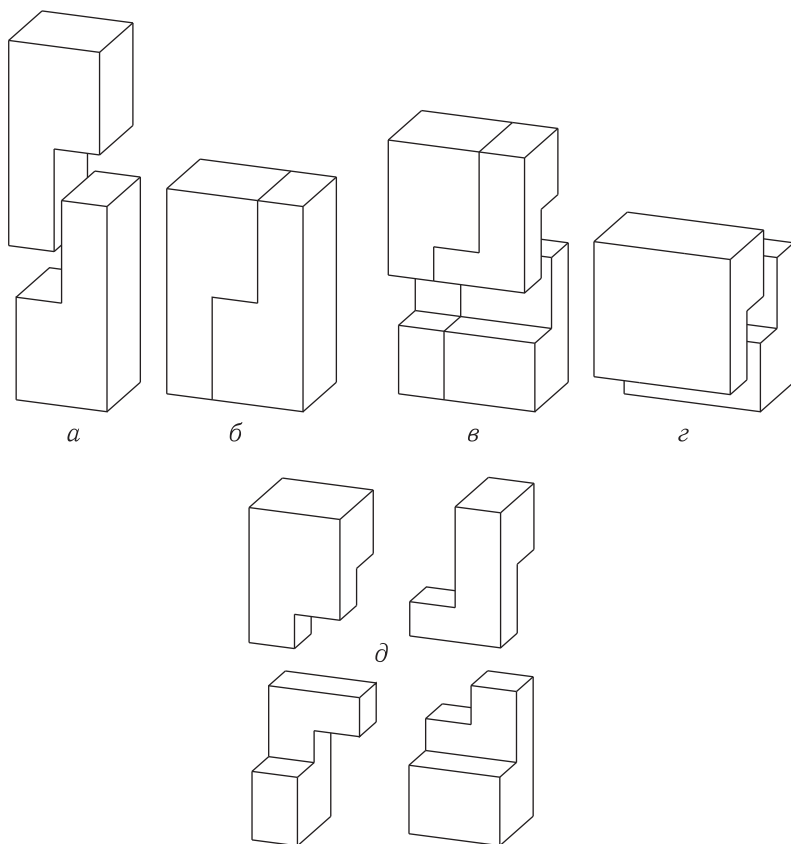


Рис. 165

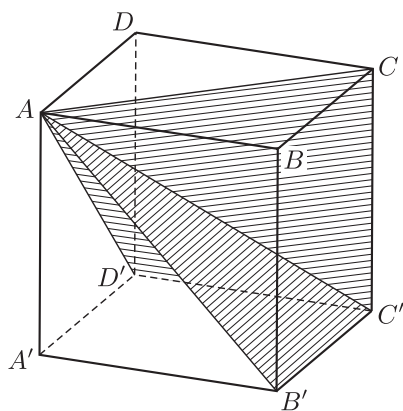


Рис. 166

**94.** Рассмотрим невыпуклый многогранник, составленный из четырех равных кубов со стороной  $a$  (рис. 167, *а*). Четыре куба, которые дополняют этот многогранник до куба со стороной  $2a$ , образуют второй точно такой же многогранник. Таким образом, из двух многогранников (рис. 167, *а*) можно сложить выпуклый многогранник — куб.

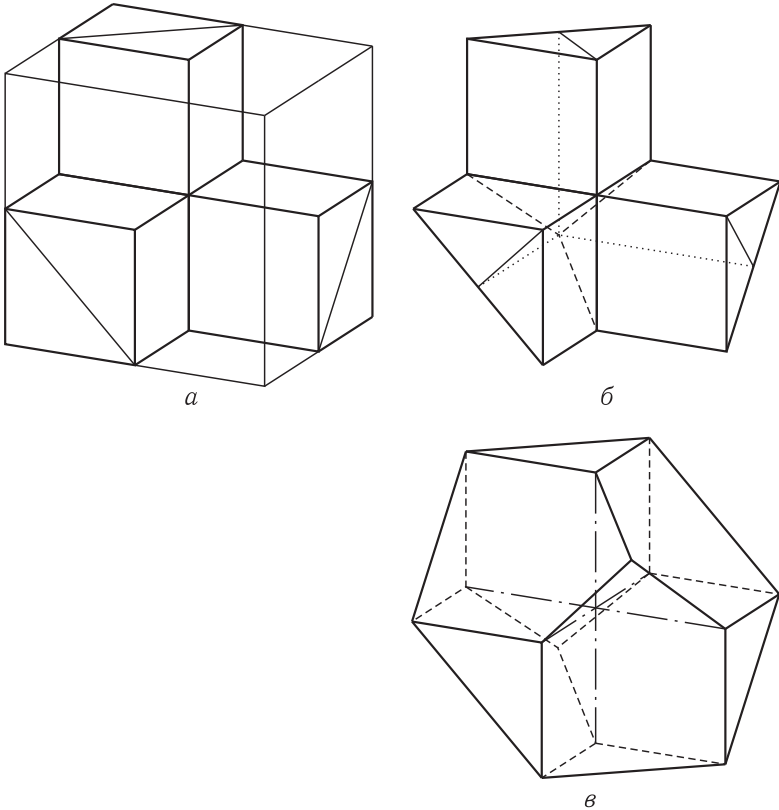


Рис. 167

Отрежем теперь от нашего невыпуклого многогранника три (пересекающиеся) треугольные призмы, содержащие ребра большого куба, так, чтобы плоскости разрезания проходили параллельно соответствующим ребрам большого куба и пересекали поверхность многогранника по линиям, изображенным на рис. 167, *а* тонкими линиями. Тогда получим новый невыпуклый многогранник, изображенный на рис. 167, *б*. Отметим теперь, что если срезать таким образом два многогранника (рис. 167, *а*), сложенные

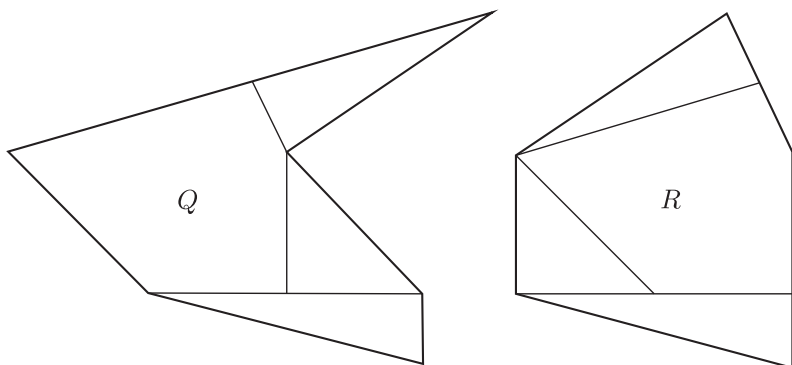


Рис. 168

в куб, то получим в результате выпуклый многогранник — куб с шестью срезанными ребрами, изображенный на рис. 167, в; следовательно, такой выпуклый многогранник можно сложить из двух невыпуклых многогранников рис. 167, б.

Заметим теперь, что если разрезать многогранник, изображенный на рис. 167, б, по тонким линиям, проведенным на треугольных гранях, так, чтобы плоскости разреза были перпендикулярны к этим граням, то мы образуем три «кирпичика» такого вида, как дано в условии задачи (на рис. 167, б тонким пунктиром изображены невидимые контуры кирпичиков). Таким образом, сложив из шести кирпичиков два многогранника рис. 167, б, мы можем затем сложить эти два многогранника так, чтобы получить выпуклый многогранник рис. 167, в.

**95.** Пусть два многоугольника  $P$  и  $Q$  равноставлены по рознь третьему многоугольнику  $R$ . В многоугольнике  $R$  проведем все разрезы, разбивающие его на части, из которых складывается  $Q$  (рис. 168), и все разрезы, разбивающие его на части, из которых складывается  $P$  (рис. 169). Все эти разрезы вместе разобьют многоугольник  $R$  на части, из которых можно сложить как  $P$ , так и  $Q$  (рис. 170). Отсюда следует, что многоугольники  $P$  и  $Q$  равноставлены.

**96.** а) Пусть прямоугольники  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  равновелики и пусть, например,  $AB > A_1B_1$ ,  $BC < B_1C_1$ . Предположим сначала, что  $AB < 2A_1B_1$ . Наложим теперь прямоугольник  $A_1B_1C_1D_1$  на прямоугольник  $ABCD$  так, чтобы вершины  $A$  и  $A_1$  совпали, а сторона  $A_1B_1$  пошла по стороне  $AB$  (рис. 171, а). Разрежем прямоугольник  $ABCD$  по линии  $B_1D$ ; тогда задача сведется к тому, чтобы четырехугольник  $BB_1DC$



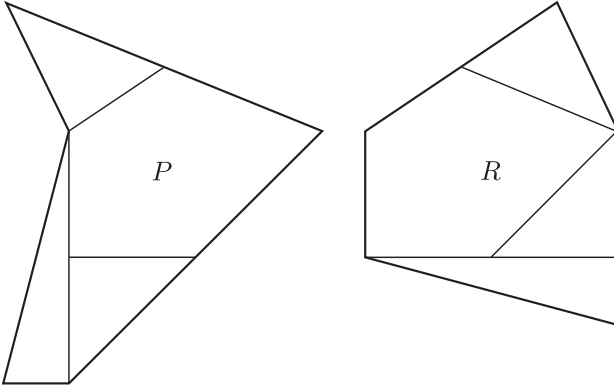


Рис. 169

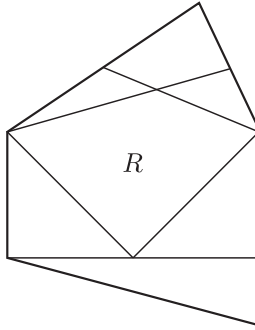


Рис. 170

перекроить в четырехугольник  $B_1C_1D_1D$ . Для этого четырехугольник  $BB_1DC$  передвинем вдоль прямой  $B_1D$  до совпадения  $DC$  и  $D_1C_1$  (рис. 171, б). Так как треугольник  $DD_1D'$  равен  $B_1B'B'_1$  по построению, то, отрезав от четырехугольника  $B'B'_1D'C_1$  треугольник  $DD_1D'$  и переложив его на место  $B_1B'B'_1$ , придем к требуемому результату.

Если сторона  $AB > 2A_1B_1$ , то мы можем, очевидно, построить цепь равновеликих прямоугольников  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ ,  $A_3B_3C_3D_3, \dots, A_kB_kC_kD_k$ ,  $ABCD$  так, чтобы было  $A_2B_2 = 1,9A_1B_1$ ;  $A_3B_3 = 1,9A_2B_2$ ;  $\dots$ ;  $A_kB_k = 1,9A_{k-1}B_{k-1}$ ;  $A_kB_k < AB < 2A_kB_k$ . При этом каждые два соседних из этих прямоугольников будут равносоставлены в силу вышедоказанного. Отсюда в силу предложения задачи 95 будет следовать, что  $ABCD$  равносоставлен с  $A_1B_1C_1D_1$  (можно доказать также равносоставленность прямоугольников  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  прямым построением; см. рис. 172).

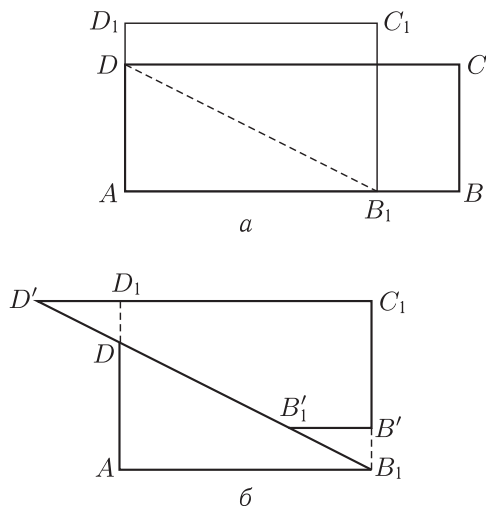


Рис. 171

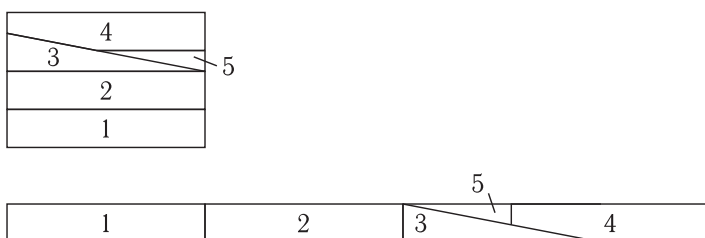


Рис. 172

б) Каждый треугольник равносоставлен с прямоугольником, одной стороной которого является большая сторона треугольника, а другая сторона равна половине высоты, опущенной на эту сторону. Способ разбиения указан на рис. 173 (у треугольника оба угла, прилежащие к большей стороне, обязательно острые!). Применяя теоремы задач 96, а и 95, получим, что любые два равновеликих треугольника равносоставлены, как соответственно равносоставленные двум равновеликим прямоугольникам.

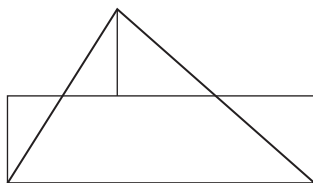


Рис. 173

**97.** Покажем прежде всего, что каждый многоугольник  $M$  равносоставлен с некоторым прямоугольником. Для этого разрежем многоугольник  $M$  по всевозможным прямым, на которых

лежат стороны многоугольника; при этом многоугольник  $M$  распадется на ряд выпуклых многоугольников (если многоугольник  $M$  — выпуклый, то надобность в этом шаге отпадает). Затем каждый выпуклый многоугольник мы без труда разрежем на треугольники по его диагоналям. Таким образом, весь многоугольник  $M$  распадется на ряд треугольников. Каждый треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником (см. решение задачи 96, б). Так как всякие два равновеликих прямоугольника равносоставлены (задача 96, а), то каждый из треугольников, составляющих многоугольник  $M$ , можно перекроить в прямоугольник с определенным основанием  $a$ . Сложив затем столбиком все полученные прямоугольники с равными основаниями, мы получим прямоугольник, которому равносоставлен многоугольник  $M$ .

Равносоставленность между собой любых двух равновеликих многоугольников  $M_1$  и  $M_2$  вытекает из теорем задач 95 и 96, а.

Примечание. В самое последнее время доказано следующее более сильное утверждение.

Два равновеликих многоугольника всегда можно разбить на попарно равные треугольники с соответственно параллельными сторонами.

**98.** а) Пусть прямоугольные параллелепипеды  $P_1$  и  $P_2$  равновелики. Пусть  $a_1, b_1, c_1$  и  $a_2, b_2, c_2$  суть длины их ребер. Построим равновеликий  $P_1$  и  $P_2$  прямоугольный параллелепипед  $P$  с двумя ребрами длин  $a_1$  и  $a_2$  (длина третьего ребра  $P$  должна быть равна  $\frac{b_1c_1}{a_2} = \frac{b_2c_2}{a_1}$ ). Покажем, что каждый из параллелепипедов  $P_1$  и  $P_2$  равносоставлен с параллелепипедом  $P$ . Для определенности рассмотрим параллелепипеды  $P_1$  и  $P$ . У них имеется по равному ребру длины  $a_1$ . Обозначим через  $Q$  и  $Q_1$  основания параллелепипедов  $P$  и  $P_1$ , соответственно лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этим ребрам. Тогда прямоугольники  $Q$  и  $Q_1$  равновелики и, следовательно, равносоставлены. Таким образом  $Q_1$  можно разрезать на многоугольники  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , из которых можно сложить прямоугольник  $Q$  (рис. 174). Пусть  $K_1, K_2, \dots, K_n$  — прямые призмы высоты  $a_1$ , основаниями которых служат многоугольники  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Таким образом параллелепипед  $P$  разрезан на призмы  $K_1, K_2, \dots, K_n$ . Если мы при составлении прямоугольника  $Q_1$  из многоугольников  $M_1, M_2, \dots, M_n$  будем вместе с ними передвигать призмы  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , то из них составится параллелепипед  $P_1$ ; следовательно, параллелепипеды  $P$  и  $P_1$  равносоставлены. Аналогично доказывается равносоставленность

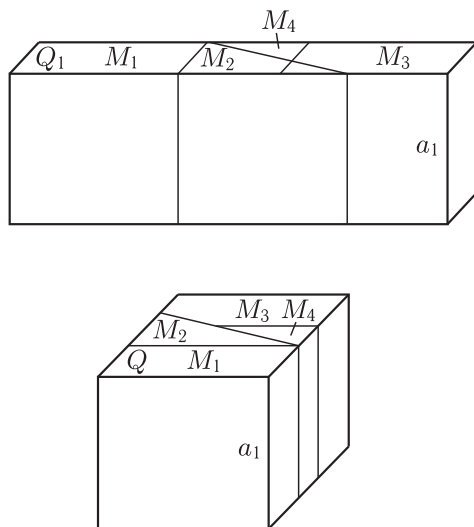


Рис. 174

параллелепипедов  $P$  и  $P_2$ . Поэтому параллелепипеды  $P_1$  и  $P_2$  также равносоставлены между собой. (Доказательство проходит аналогично решению задачи 95.)

б) Покажем прежде всего, что всякая призма равносоставлена с некоторой прямой призмой. Пусть длина бокового ребра данной призмы равна  $a$ . Проведем через произвольную вершину призмы плоскость  $\pi_1$ , перпендикулярную к боковому ребру. Построим далее плоскости  $\pi_2, \pi_3, \dots$ , параллельные  $\pi_1$  и удаленные от  $\pi_1$  на расстоянии  $a, 2a, \dots$ . (Нам понадобятся только те из таких плоскостей, которые пересекают данную призму; плоскость  $\pi_1$ , очевидно, можно выбрать так, чтобы все пересекающие призму плоскости  $\pi_2, \pi_3, \dots$  лежали по одну сторону от  $\pi_1$ ; рис. 175, а.) Эти плоскости разобьют данную призму на многогранники  $P_1, P_2, P_3, \dots$ . Передвинем теперь многогранник  $P_2$  на расстояние  $a$  в направлении, параллельном боковому ребру призмы так, чтобы грань его, лежащая в плоскости  $\pi_2$ , попала в плоскость  $\pi_1$ . Тогда грань многогранника  $P_2$ , лежащая в плоскости нижнего основания призмы, и грань многогранника  $P_1$ , лежащая в плоскости верхнего основания призмы, совпадут и  $P_2$  займет положение, указанное на рис. 175, б. Аналогично передвинув многогранник  $P_3$  на расстояние  $2a$  параллельно боковому ребру призмы так, чтобы грань его, лежащая в плоскости  $\pi_3$ , попала в плоскость  $\pi_1$ , мы получим тело, изображенное на рис. 175, в. Проведем эту операцию последовательно со всеми

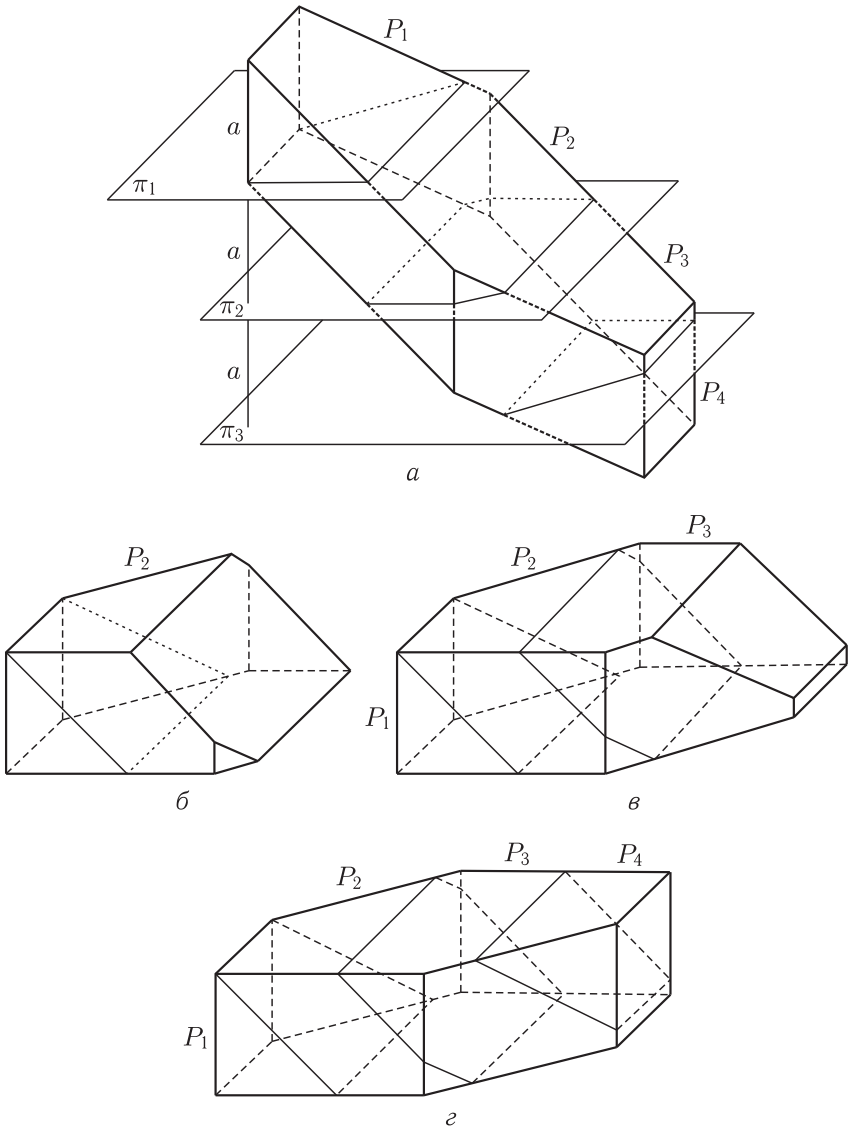
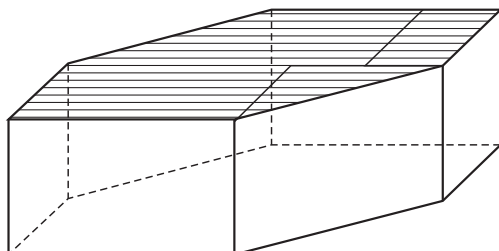


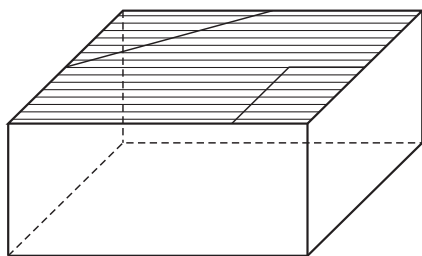
Рис. 175

многогранниками, полученными при разбиении призмы плоскостями  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ , мы приходим к прямой призме  $\bar{P}$ , изображенной на рис. 175, *г*, которая таким образом равносоставлена с данной призмой  $P$ .

В силу задачи 97 основание призмы  $\bar{P}$  равносоставлено с некоторым прямоугольником. Разбивая это основание на части, из которых можно сложить прямоугольник, и проводя через стороны многоугольников разбиения плоскости, параллельные боковым ребрам  $\bar{P}$ , мы получим разбиение  $\bar{P}$  на призмы, из которых можно сложить прямоугольный параллелепипед (рис. 176, а, б). Следовательно, всякая призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом. Отсюда и из задачи а) уже сразу следует равносоставленность любых равновеликих призм.



а



б

Рис. 176

**99.** Докажем сначала некоторые вспомогательные предложения.

1°. Если тетраэдр имеет плоскость симметрии, то две его грани суть равнобедренные треугольники, основанием которых служит общее ребро этих граней.

Пусть  $A$  — вершина тетраэдра  $ABCD$ , имеющего плоскость симметрии. Тогда либо у тетраэдра найдется другая вершина, симметричная  $A$ , либо вершина  $A$  лежит в плоскости симметрии. Очевидно, что все вершины тетраэдра не лежат в плоскости

симметрии, иначе бы он выролдился в плоский четырехугольник. Таким образом в тетраэдре найдется пара симметричных вершин. Ребро, их соединяющее, перпендикулярно к плоскости симметрии и делится ею пополам. Две остальные вершины должны лежать в плоскости симметрии. Действительно, в противном случае они бы тоже были симметричны друг другу и также лежали бы на перпендикуляре к плоскости симметрии и, следовательно, все четыре вершины тетраэдра лежали бы в одной плоскости, проходящей через оба перпендикуляра к плоскости симметрии.

Итак, плоскость симметрии тетраэдра обязательно проходит через одно из его ребер, перпендикулярно к противоположному ребру и к граням, смежным по этому ребру, и делит противоположное ребро и смежные по нему грани пополам. Следовательно, эти две грани являются равнобедренными треугольниками.

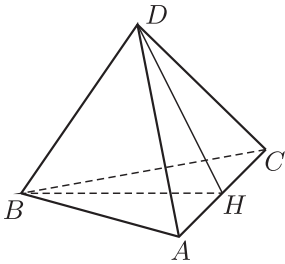


Рис. 177

Таким образом, если в тетраэдре есть плоскость симметрии, то две грани тетраэдра суть равнобедренные треугольники, основанием которых служит их общее ребро.

Обратно, если это условие выполнено, то тетраэдр имеет плоскость симметрии. Действительно, пусть в тетраэдре  $ABCD$   $AB = BC$  и  $AD = DC$  (рис. 177). Пусть  $H$  — середина ребра  $AC$ . Тогда  $BH \perp AC$ ,  $DH \perp AC$ , значит, ребро  $AC$  — перпендикуляр к плоскости  $BHD$ .

Но  $AH = HC$ , значит, точки  $A$  и  $C$  симметричны относительно этой плоскости, откуда и следует наше утверждение.

2°. Произвольный тетраэдр можно разложить на тетраэдры, каждый из которых имеет плоскость симметрии.

Пусть  $A_1A_2A_3A_4$  — произвольный тетраэдр (рис. 178, а). Тогда внутри него существует такая точка  $O$ , которая равноудалена от всех его граней (центр шара, вписанного в тетраэдр, см. задачу 31). Соединим основания  $P_2$  и  $P_4$  перпендикуляров  $OP_2$  и  $OP_4$ , опущенных из  $O$  соответственно на грани  $A_1A_3A_4$  и  $A_1A_2A_3$ . Так как  $OP_2 = OP_4$ , то плоскость  $OA_1A_3$  есть биссектральная плоскость двугранного угла с ребром  $A_1A_3$  (см. задачу 31) и поэтому отрезок  $P_2P_4$  перпендикулярен к плоскости  $OA_1A_3$  и делится этой плоскостью пополам. Для доказательства проведем плоскость  $\alpha$  через  $OP_4$  и  $OP_2$ ; пусть она пересекается с ребром  $A_1A_3$  в точке  $H$  (рис. 178, б). Тогда точки  $O$ ,  $H$

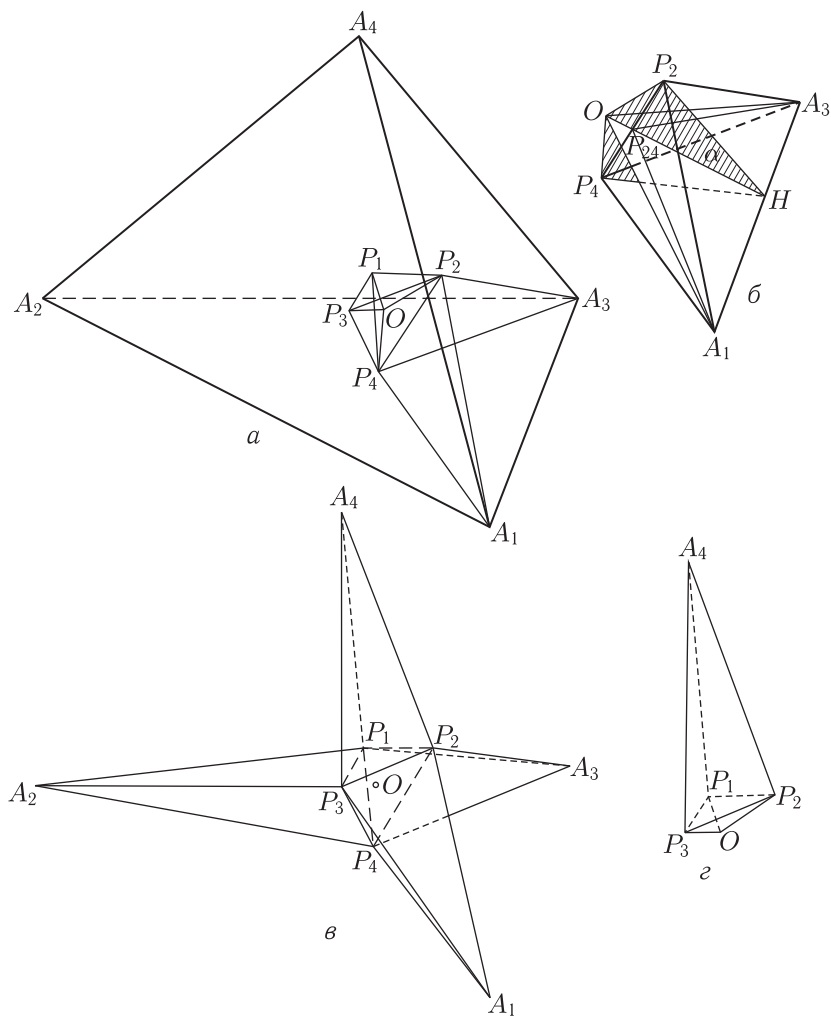


Рис. 178

и точка  $P_{24}$  пересечения  $P_2P_4$  с плоскостью  $OA_1A_3$  лежат на одной прямой (прямой пересечения  $\alpha$  с  $OA_1A_3$ ),  $HP_2 \perp OP_2$ ,  $HP_4 \perp OP_4$ , поэтому  $HP_{24}$  есть биссектриса плоского угла  $P_4HP_2$ , являющегося линейным углом двугранного угла<sup>1)</sup>  $A_4(A_1A_3)A_2$ . Отсюда легко следуют оба наши утверждения.

<sup>1)</sup> Двугранный угол между плоскостями  $ABC$  и  $DBC$  (которые пересекаются по прямой  $BC$ ) принято обозначать: двугранный угол  $A(BC)D$ .



Рассмотрим теперь тетраэдр  $P_4A_3A_1P_2$  (см. рис. 178, б). В силу того, что  $P_{24}P_2 = P_4P_{24}$  и отрезок  $P_2P_4$  перпендикулярен к плоскости  $OA_1A_3$ , эта последняя плоскость (пересекающая тетраэдр  $P_4A_3A_1P_2$  по треугольнику  $P_{24}A_1A_3$ ) есть плоскость симметрии этого тетраэдра. Совершенно аналогично тетраэдр  $P_2A_1A_4P_3$  имеет плоскость симметрии, проходящую через ребро  $A_1A_4$ ; тетраэдр  $P_1A_2A_4P_3$  имеет плоскость симметрии, проходящую через ребро  $A_2A_4$ ; тетраэдр  $P_1A_2A_3P_4$  имеет плоскость симметрии, проходящую через ребро  $A_2A_3$ ; тетраэдр  $P_1A_3A_4P_2$  имеет плоскость симметрии, проходящую через ребро  $A_3A_4$ ; и, наконец, тетраэдр  $P_3A_1A_2P_4$  имеет плоскость симметрии, проходящую через ребро  $A_1A_2$ .

Оставшаяся часть тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  состоит из тетраэдра  $P_1P_2P_3P_4$ , к граням которого пристроены треугольные пирамиды  $A_1P_2P_3P_4$ ,  $A_2P_3P_4P_1$ ,  $A_3P_4P_1P_2$  и  $A_4P_1P_2P_3$  (рис. 178, в). Разрежем тетраэдр  $P_1P_2P_3P_4$  на четыре тетраэдра с общей вершиной  $O$ . Точка  $O$  лежит внутри тетраэдра (см. задачу 40). Наше тело распадается на четыре бипирамиды. Рассмотрим одну из них, например  $A_4P_1P_2P_3O$  (рис. 178, г). Легко видеть, что прямая  $A_4O$  — биссектриса трехгранного угла  $A_4A_1A_2A_3$  (см. задачу 40) — перпендикулярна к плоскости  $P_1P_2P_3$  и проходит внутри треугольника  $P_1P_2P_3$ . Поэтому бипирамиду можно разрезать на три тетраэдра  $A_4P_1OP_2$ ,  $A_4P_2OP_3$  и  $A_4P_3OP_1$ . В каждом из них по две равнобедренные грани с общим основанием — ребра  $A_4P_1$ ,  $A_4P_2$ ,  $A_4P_3$  равны, как касательные к шару, проведенные из одной точки, а ребра  $OP_1$ ,  $OP_2$  и  $OP_3$  — как радиусы этого шара. Таким образом, эти три тетраэдра имеют плоскости симметрии. Аналогично разбиваем остальные бипирамиды. Таким образом, весь тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  разбился на 18 тетраэдров, каждый из которых имеет плоскость симметрии.

3°. Два зеркально равных тетраэдра равносоставлены.

Заметим сначала, что если два зеркально равных тетраэдра имеют (каждый) плоскость симметрии, то эти тетраэдры равны. Разобьем теперь один из данных тетраэдров на тетраэдры, имеющие плоскости симметрии (см. 2°); соответственно этому и симметричный тетраэдр разобьем на части, симметричные частям первого тетраэдра. Тогда соответствующие части обоих тетраэдров будут равны, что и доказывает наше утверждение.

Перейдем теперь к доказательству самой теоремы. Разобьем один из данных многогранников на выпуклые куски, продолжив плоскости всех его граней. Тогда любой кусок будет лежать по одну сторону от плоскости каждой своей грани, т. е. будет

выпуклым (если исходные многогранники были выпуклыми, то надобность в этом шаге доказательства отпадает). Внутри каждого куска выберем точку и соединим ее со всеми вершинами куска. Тогда наш многогранник разобьется на пирамиды. Каждую пирамиду диагональными сечениями разобьем на тетраэдры. Если мы произведем такое же построение и для второго многогранника, то тетраэдры, на которые разобьется второй многогранник, будут зеркально равны соответствующим тетраэдрам разбиения первого многогранника. А тогда из предложения 3° мы сразу выведем равносоставленность рассматриваемых многогранников.

**100.** Разобьем оба рассматриваемых многогранника на параллелепипеды (см. ниже задачу 117). Выберем какой-нибудь прямоугольник и каждому параллелепипеду сопоставим равновеликий ему прямой параллелепипед, имеющий основанием выбранный прямоугольник. Согласно задаче 98, б каждый параллелепипед равносоставлен с равновеликим ему прямым параллелепипедом.

Весь многогранник равносоставлен со «столбом», составленным из этих прямых параллелепипедов, прилежащих равными основаниями. Точно такой же «столб» равносоставлен со вторым многогранником. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

**101.** Нетрудно видеть, что если какой-то выпуклый многоугольник  $P$  покрыт прямоугольниками без просветов и двойных покрытий, то стороны всех этих прямоугольников взаимно параллельны. Действительно, выберем какую-либо сторону  $l$  многоугольника  $P$ . Очевидно, все прямоугольники, примыкающие к  $l$ , имеют сторону направления  $l$ ; все прямоугольники, примыкающие к какому-либо из первых прямоугольников, имеют сторону, параллельную  $l$ ; все прямоугольники, примыкающие к какому-либо из уже рассмотренных прямоугольников, имеют сторону, параллельную  $l$ , и т. д. Так как таким путем мы можем исчерпать все прямоугольники покрытия, то все они имеют сторону, параллельную  $l$ .

Отсюда следует, что все стороны многоугольника  $P$  параллельны  $l$  или перпендикулярны к  $l$ . А так как выпуклый многоугольник не может иметь более двух параллельных сторон (это следует из определения выпуклого многоугольника как такого, который лежит по одну сторону от каждой своей стороны), то многоугольник должен быть прямоугольником.

**102.** а) Докажем предварительно следующее предложение. Если из попарно различных квадратов сложен прямоугольник,

то квадраты, примыкающие к самому маленькому квадрату  $Q_1$ , расположены либо так, как это изображено на рис. 179, а, либо так, как изображено на рис. 179, б (эти два расположения несущественно отличаются друг от друга: одно получается из другого симметрией относительно прямой).

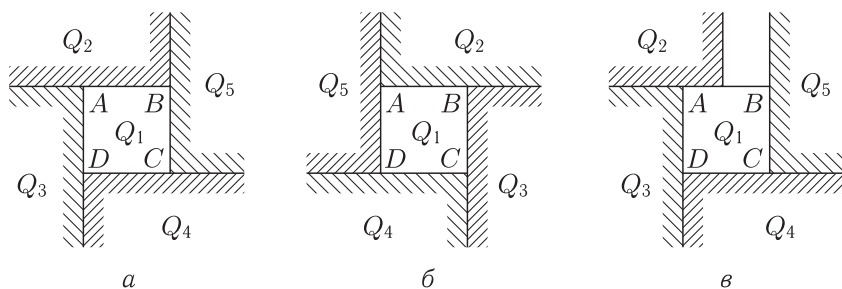


Рис. 179

Действительно, пусть  $ABCD$  — самый маленький квадрат (см. рис. 179, а). Так как прямоугольник составляется из нескольких квадратов, то найдется сторона, например  $AB$ , к которой примыкает сторона некоторого другого квадрата  $Q_2$ . По предположению его сторона больше  $AB$ , поэтому одна из вершин  $A$  или  $B$  лежит на стороне квадрата  $Q_2$ . Пусть это будет, например,  $A$ <sup>1)</sup>. Тогда оставшийся угол при точке  $A$  должен быть заполнен некоторым квадратом  $Q_3$ . По предположению сторона  $Q_3$  больше стороны  $AD$ , поэтому при вершине  $D$  образуется прямой угол, который должен заполняться квадратом  $Q_4$ . Аналогично угол при вершине квадрата  $C$  заполняется квадратом  $Q_5$  со стороной, большей  $CB$ . Поэтому его сторона выдается за точку  $B$ , а значит, правая вершина квадрата  $Q_2$  лежит на самой стороне  $AB$  или, по крайней мере, совпадает с  $B$ .

Покажем, что в действительности осуществляется именно второй случай. В самом деле, если правая вершина  $Q_2$  лежит внутри стороны  $AB$  (рис. 179, в), то правая сторона  $Q_2$  и выступающая часть левой стороны квадрата  $Q_5$  образуют «колодец», который уже является частью стороны  $AB$  квадрата  $Q_1$  и который поэтому может быть заполнен лишь квадратами, меньшими  $Q_1$ . Но, согласно сделанному нами предположению, таких квадратов нет.

<sup>1)</sup> Если бы на стороне квадрата  $Q_2$  лежала бы не вершина  $A$  квадрата  $Q_1$ , а вершина  $B$ , то мы пришли бы вместо расположения рис. 179, а к расположению рис. 179, б.

Отсюда сразу следует, что

1°. Число квадратов, из которых можно сложить прямоугольник, должно быть не меньше пяти, т. е. утверждение задачи.

2°. Самый маленький квадрат должен лежать внутри прямоугольника.

б) Рассмотрим самый маленький квадрат  $Q_1$ . Тогда, как было показано в решении задачи а), прилегающие квадраты должны образовывать одну из двух зеркально-симметричных конфигураций, изображенных на рис. 179, а, б. Но если бы мы смогли сложить прямоугольник, исходя из одной из указанных конфигураций, то автоматически можно было бы сложить зеркально-симметричный прямоугольник, исходя из второй конфигурации; поэтому раз и навсегда условимся рассматривать только конфигурацию, изображенную на рис. 179, а.

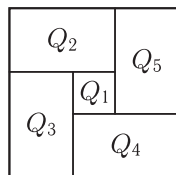


Рис. 180

Пусть можно сложить прямоугольник из некоторых пяти квадратов. Тогда стороны квадратов  $Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ , соседние со сложенными, должны лежать на одной прямой, т. е. наши квадраты должны быть расположены так, как изображено на рис. 180.

Пусть сторона  $Q_1$  равна  $a_1$ , сторона  $Q_2$  равна  $a_2$  и т. д. В таком случае мы, очевидно, имеем

$$a_2 = a_1 + a_3, \quad a_3 = a_1 + a_4, \quad a_4 = a_1 + a_5, \quad a_5 = a_1 + a_2.$$

Отсюда последовательно получаем

$$a_2 = a_1 + a_3 = 2a_1 + a_4 = 3a_1 + a_5 = 4a_1 + a_2$$

и, следовательно,

$$a_1 = 0.$$

Это показывает, что ни из каких пяти попарно неравных квадратов нельзя сложить прямоугольник.

в) Отметим прежде всего, что, очевидно, угол между двумя квадратами, одной из сторон которого является целая сторона квадрата, нельзя заполнить одним новым квадратом, неравным первым двум (в противном случае одна сторона нового квадрата полностью совпала бы с целой стороной одного из прежних, что противоречит нашему условию). Если прямоугольник составлен из попарно неравных квадратов, то некоторые пять из этих квадратов должны располагаться так, как это изображено на рис. 179, а (см. решение задачи а)). Но если какая-то пара соседних квадратов образует угол (рис. 181), то шестого квадрата

будет недостаточно, чтобы его заполнить. Поэтому из шести квадратов составить прямоугольник нельзя.

г) Попробуем сложить прямоугольник из семи квадратов. Ясно, что в основной конфигурации пяти квадратов должен быть только один незаполненный угол, так как в противном случае двух квадратов для заполнения углов было бы мало (см. замечание в начале решения задачи в)). Пусть это будет угол между  $Q_2$  и  $Q_5$ . Нетрудно видеть, что именно квадрат  $Q_2$  возвышается над  $Q_5$  (см. рис. 181). Действительно, в противном случае (рис. 182) мы имели бы

$$a_2 = a_3 + a_1, \quad a_3 = a_4 + a_1, \quad a_4 = a_5 + a_1,$$

т. е.

$$a_2 = a_3 + a_1 = a_4 + 2a_1 = a_5 + 3a_1,$$

что невозможно, так как с другой стороны должно быть

$$a_2 < a_5 - a_1.$$

Для того чтобы не образовывалось незаполненного одним квадратом угла, верхний край  $Q_6$  должен служить продолжением верхнего края  $Q_2$ . По этой же причине правая сторона  $Q_6$  должна лежать правее правой стороны  $Q_5$ , т. е. должно иметь место расположение квадратов, изображенное на рис. 183. При этом мы имеем

$$a_2 = a_1 + a_3, \quad a_3 = a_1 + a_4, \quad a_4 = a_1 + a_5, \quad a_5 + a_6 = a_1 + a_2, \\ a_6 = a_5 + a_7, \quad a_7 = a_4 + a_5,$$

откуда, с одной стороны

$$a_2 = a_3 + a_1 = a_4 + 2a_1 = a_5 + 3a_1; \quad a_2 = a_6 + a_5 - a_1,$$

т. е.

$$a_6 = 4a_1$$

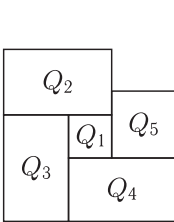


Рис. 181

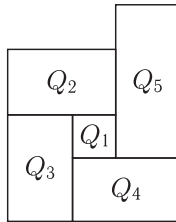


Рис. 182

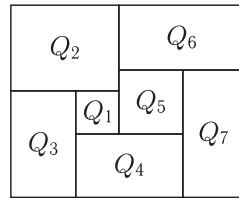


Рис. 183

и, с другой стороны,

$$a_6 = a_5 + a_7 = a_4 + 2a_5 = a_1 + 3a_5, \quad 3a_5 = a_6 - a_1 = 3a_1,$$

т. е.

$$a_5 = a_1.$$

Но это противоречит тому, что по условию задачи все квадраты должны быть попарно различными. Таким образом, и из семи попарно различных квадратов нельзя сложить прямоугольник.

д) Рассмотрим теперь случай восьми квадратов.

Рассмотрим основную конфигурацию из пяти квадратов. Согласно замечанию в начале решения задачи в) в этой конфигурации не должно быть больше двух незаполненных углов (в противном случае эти углы нельзя было бы заполнить тремя квадратами). Рассмотрим сначала случай, когда имеется один незаполненный угол. Как показано в решении задачи г), тогда край квадрата  $Q_2$  должен выступать над краем  $Q_5$ . Квадрат  $Q_6$  должен составить угол с  $Q_5$ , так как квадраты по условию не равны между собой. Поэтому

$$a_5 + a_6 = a_1 + a_2,$$

так как в противном случае в конфигурации шести квадратов было бы два незаполненных угла, и для заполнения их не хватило бы двух добавочных квадратов. Предположим теперь, что  $a_6 < a_5$  (рис. 184, а); тогда квадрат  $Q_7$ , заполняющий угол между  $Q_6$  и  $Q_5$ , сам должен составить угол с  $Q_6$ , причем должно быть  $a_7 > a_6$ , так как иначе образующийся угол нельзя было бы заполнить одним квадратом. В таком случае  $Q_8$  прилегает одной стороной к  $Q_2$  и  $Q_6$  и другой стороной к  $Q_7$ . Следовательно,

$$a_7 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_8,$$

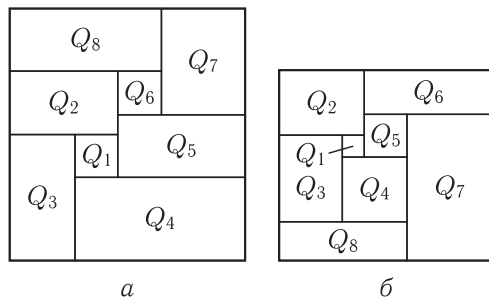


Рис. 184

а, с другой стороны,

$$a_8 < a_7,$$

что невозможно.

Остается исследовать случай  $a_6 > a_5$ . Здесь правая сторона квадрата  $Q_7$  должна лежать на одной прямой с правой стороной квадрата  $Q_6$ , так как иначе образуется угол, одной из сторон которого будет  $a_7$  или  $a_6$ . В то же время должно быть  $a_7 > a_5 + a_4$ , так как в противном случае образуется незаполнимый угол. Таким образом квадрат должен примыкать к конфигурации семи квадратов, как показано на рис. 184, б.

Но в таком случае мы будем иметь

$$a_8 < a_7 < a_6 < a_2 = a_3 + a_1,$$

а, с другой стороны,

$$a_8 = a_3 + a_4,$$

что невозможно, так как  $a_1 < a_4$ .

Рассмотрим теперь случай, когда в конфигурации пяти квадратов имеются два незаполненных угла. Предположим сначала, что незаполненными остаются диаметрально противоположные углы конфигурации пяти квадратов. Случаи рис. 185, а, б отпадают сразу; действительно, здесь для заполнения каждого из оставшихся углов надо не меньше двух квадратов и, следовательно, всего потребуется не менее девяти квадратов. Рассмотрим теперь случай, изображенный на рис. 186, а. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся, что квадраты  $Q_6$ ,  $Q_7$  и  $Q_8$  должны быть расположены так, как это изображено на рис. 186, б. Но в этом случае

$$\begin{aligned} a_2 &= a_3 + a_1, & a_3 &= a_1 + a_4 + a_8, \\ a_4 &= a_1 + a_5, & a_8 &= a_4 + a_7, & a_6 &= a_5 + a_7. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2a_1 + a_3 = 3a_1 + a_4 + a_8 = 4a_1 + a_5 + (a_4 + a_7) = \\ &= 4a_1 + a_4 + (a_5 + a_7) = 5a_1 + a_5 + a_6, \end{aligned}$$

что невозможно, так как

$$a_1 + a_2 = a_5 + a_6, \quad \text{а } a_1 > 0.$$

Этим закончено рассмотрение конфигурации с двумя противоположными свободными углами в основной конфигурации пяти квадратов.

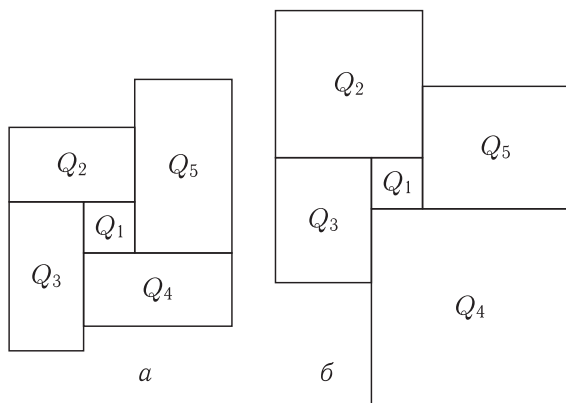
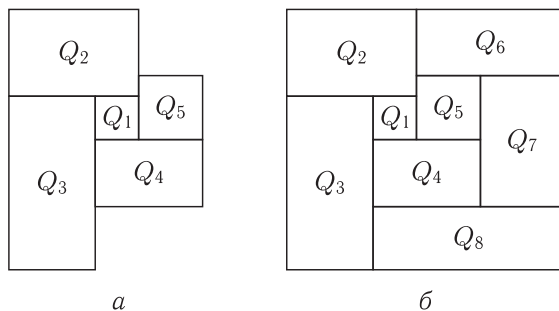
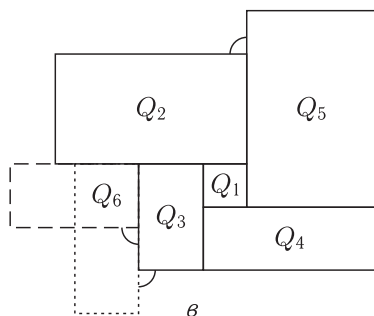


Рис. 185



а

б



в

Рис. 186

Рассмотрим теперь последовательно все случаи, когда незаполненными остаются два соседних угла, занумеровав так же, как и выше, квадраты основной конфигурации пяти квадратов.

1°. Квадрат  $Q_5$  выступает над  $Q_2$ , а  $Q_2$  — над  $Q_3$  (рис. 187, а). Заполнив угол между  $Q_2$  и  $Q_3$  квадратом  $Q_6$ , получаем два



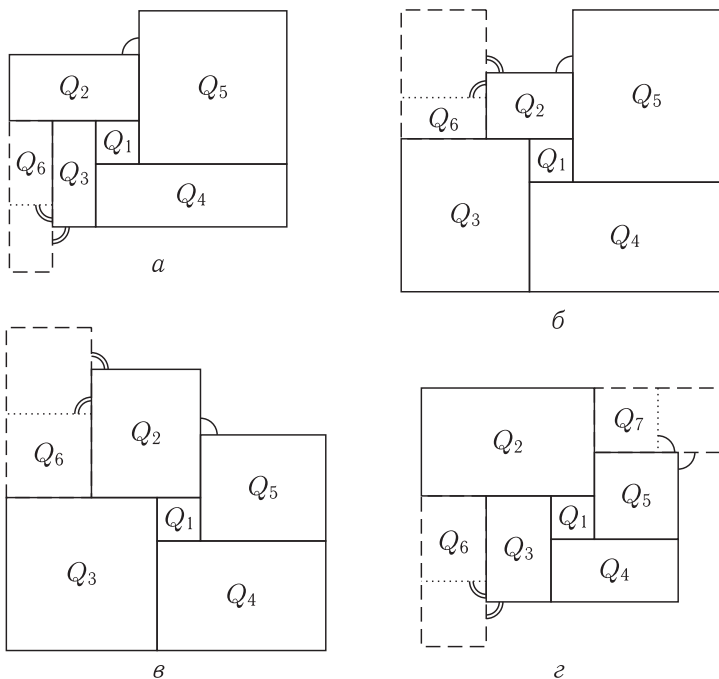


Рис. 187

угла: между  $Q_6$  и  $Q_3$  и между  $Q_5$  и  $Q_2$ . Эти углы не могут быть заполнены двумя квадратами, так как угол между  $Q_5$  и  $Q_2$  нельзя заполнить одним квадратом (угол между  $Q_3$  и  $Q_6$  может быть заполнен одним квадратом, если  $a_6 > a_3$ ).

2°. Квадраты  $Q_5$  и  $Q_3$  выступают над  $Q_2$  (см. рис. 187, б). Пусть угол между  $Q_2$  и  $Q_3$  заполнен квадратом  $Q_6$ . Если  $a_6 < a_2$ , то получаются два незаполнимых двумя квадратами угла. Если же  $a_6 > a_2$ , то образуется «колодец», который тоже, очевидно, нельзя заполнить двумя неравными квадратами.

3°. Квадрат  $Q_2$  выступает над  $Q_5$ , а  $Q_3$  над  $Q_2$  (рис. 187, в). Заполняя квадратом  $Q_6$  угол между  $Q_2$  и  $Q_3$ , получаем угол между  $Q_6$  и  $Q_2$  и еще один незаполненный угол между  $Q_2$  и  $Q_5$ .

4°. Квадрат  $Q_2$  выступает как над  $Q_5$ , так и над  $Q_3$  (рис. 187, г). Вставим в углы между  $Q_2$  и  $Q_3$  и между  $Q_2$  и  $Q_5$  квадраты  $Q_6$  и  $Q_7$ ; тогда образуются еще два незаполненных угла.

Так как мы рассмотрели все возможные случаи, то этим полностью доказано, что из восьми попарно неравных квадратов нельзя сложить прямоугольник.

**103.** а) Конфигурация из 8 квадратов рисунка 184, *a* оказалась невозможной, так как неравенство  $a_7 < a_5$  противоречит неравенству  $a_8 < a_7$ . Следовательно, если бы у нас было  $a_7 > a_5$ , и мы приложили бы квадрат  $Q_7$  так, как изображено на рис. 188, то никакого противоречия не получилось бы.

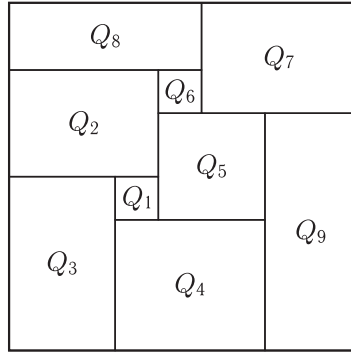


Рис. 188

Покажем теперь, что при некоторой определенной величине квадратов образовавшийся в конфигурации квадратов угол можно заполнить одним квадратом  $Q_9$ .

Действительно, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + a_5, & a_2 &= a_1 + a_3, & a_5 + a_9 &= a_6 + a_7, & a_8 &= a_2 + a_6, \\ a_3 &= a_1 + a_4, & a_2 + a_1 &= a_5 + a_6, & a_7 &= a_6 + a_8, & a_9 &= a_4 + a_5. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$a_2 = a_1 + a_3 = 2a_1 + a_4 = 3a_1 + a_5 \quad \text{и} \quad a_2 = a_5 + a_6 - a_1;$$

следовательно,

$$3a_1 + a_5 = a_5 + a_6 - a_1, \quad a_6 = 4a_1.$$

Затем имеем

$$\begin{aligned} a_5 &= a_2 + a_1 - a_6 = a_2 - 3a_1, \\ a_5 &= a_6 + a_7 - a_9 = 2a_6 + a_8 - (a_4 + a_5) = 3a_6 + a_2 - (2a_5 - a_1), \\ 3a_5 &= 3a_6 + a_2 - a_1 = 11a_1 + a_2; \end{aligned}$$

следовательно,

$$3a_2 - 9a_1 = 11a_1 + a_2, \quad 2a_2 = 20a_1; \quad a_2 = 10a_1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - a_1 = 9a_1, & a_4 &= a_3 - a_1 = 8a_1, \\ a_5 &= a_4 - a_1 = 7a_1, & a_8 &= a_2 + a_6 = 14a_1, \\ a_9 &= a_4 + a_5 = 15a_1, & a_7 &= a_6 + a_8 = 18a_1. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно

$$\begin{aligned} a_2 &= 10a_1, & a_3 &= 9a_1, & a_4 &= 8a_1, & a_5 &= 7a_1, \\ a_6 &= 4a_1, & a_7 &= 18a_1, & a_8 &= 14a_1, & a_9 &= 15a_1. \end{aligned}$$

Совокупность квадратов с такими длинами сторон удовлетворяет всем условиям задачи (рис. 189); длины сторон разбиваемого прямоугольника здесь равны  $32a_1$  и  $33a_1$  и, следовательно, относятся как  $32 : 33$ .

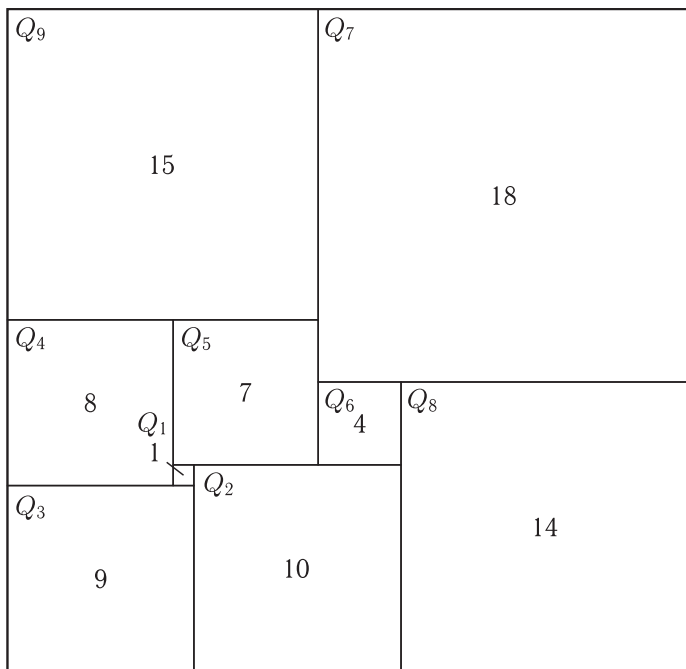


Рис. 189

Аналогично, исходя из рис. 187,  $z^1$ ), можно построить еще одно разбиение прямоугольника на 9 попарно различных квадратов (рис. 190), стороны которых относятся как  $2 : 5 : 7 : 9 :$

<sup>1)</sup> Квадрат  $Q_2$  рис. 187,  $z$  соответствует квадрату  $Q_5$  рис. 190.

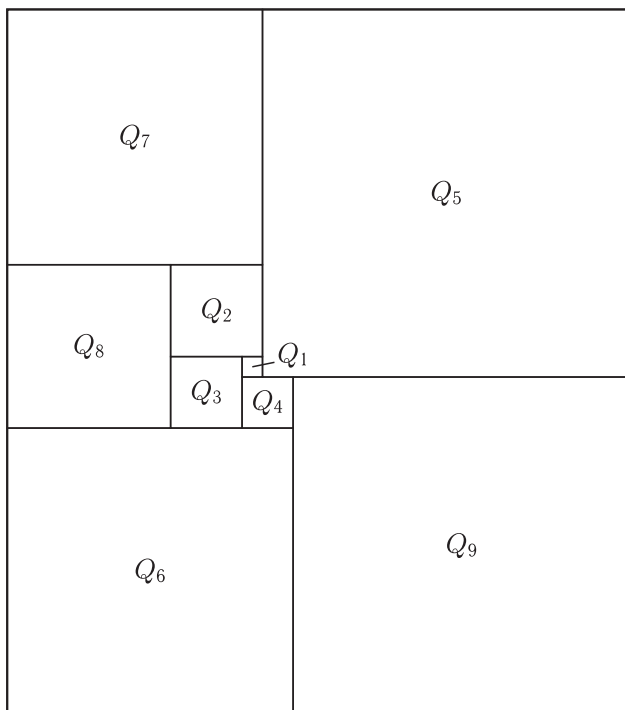


Рис. 190

16 : 25 : 28 : 33 : 36 (длины сторон разбиваемого прямоугольника относятся как 61 : 69).

Можно показать, что невозможны никакие другие разбиения прямоугольника на 9 попарно различных квадратов, кроме изображенных на рис. 189 и 190.

б) См. рис. 191.

в) Если мы к стороне прямоугольника, образованной девятью попарно неравными квадратами, приложим квадрат, сторона которого равна этой стороне прямоугольника, то получим прямоугольник, образованный из 10 попарно различных квадратов. Поступая и дальше таким же образом, мы сможем получить прямоугольники, составленные из 11, 12, ... и т.д. попарно различных квадратов (рис. 192).

**104.** См. рис. 193, *a* и *б*.

**105.** Стороны прямоугольника  $P_1$ , изображенного на рис. 191, равны 47 и 65. Стороны прямоугольника  $P_2$ , изображенного

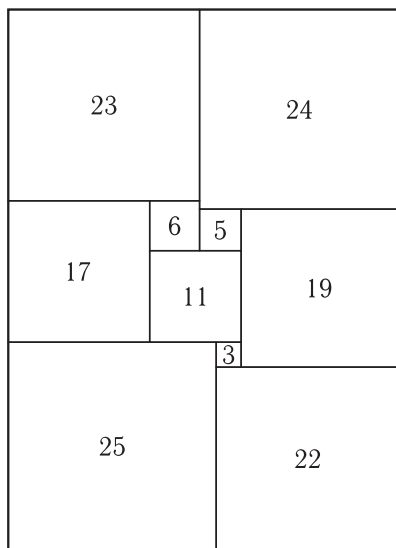


Рис. 191

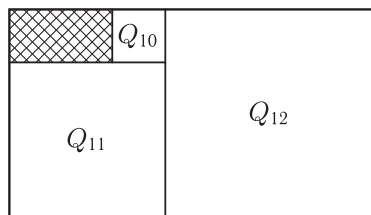


Рис. 192

на рис. 189, равны 32 и 33; приложив к прямоугольнику  $P_2$  квадрат со стороной 33, мы получим прямоугольник  $P_3$  со сторонами

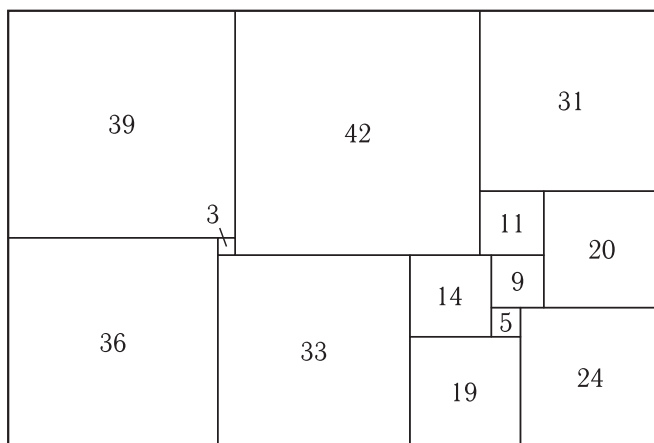
$$33 \text{ и } 32 + 33 = 65,$$

который составлен из 10 попарно неравных квадратов. Наконец, приложив друг к другу прямоугольники  $P_1$  и  $P_3$  равными сторонами, получим прямоугольник  $P$  со сторонами

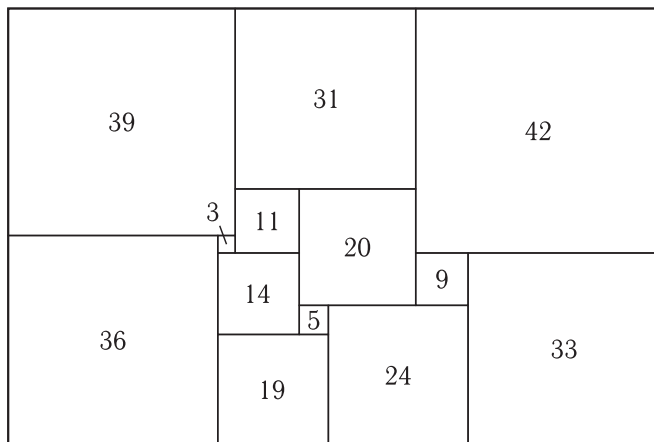
$$65 = 13 \cdot 5 \text{ и } 33 + 47 = 80 = 16 \cdot 5,$$

который таким образом составляется из 20 попарно различных квадратов (рис. 194).

Перейдем теперь ко второму способу разбиения прямоугольника с отношением сторон 13 : 16 на попарно неравные квадраты.



а



б

Рис. 193

Стороны прямоугольника  $\overline{P}_1$ , изображенного на рис. 195, равны  $256 = 16 \cdot 16$  и  $377 = 13 \cdot 29$ .

Стороны прямоугольника  $P$ , изображенного на рис. 194, равны  $13 \cdot 5$  и  $16 \cdot 5$ ; приложив к прямоугольнику  $P$  квадрат со стороной  $16 \cdot 5$ , мы придем к новому прямоугольнику  $\overline{P}_2$  со сторонами

$$16 \cdot 5 \text{ и } 16 \cdot 5 + 13 \cdot 5 = 29 \cdot 5;$$

прямоугольник  $\overline{P}_2$  составлен из 21 попарно неравных квадратов. Подобно увеличив прямоугольники  $\overline{P}_1$  и  $\overline{P}_2$ , мы придем

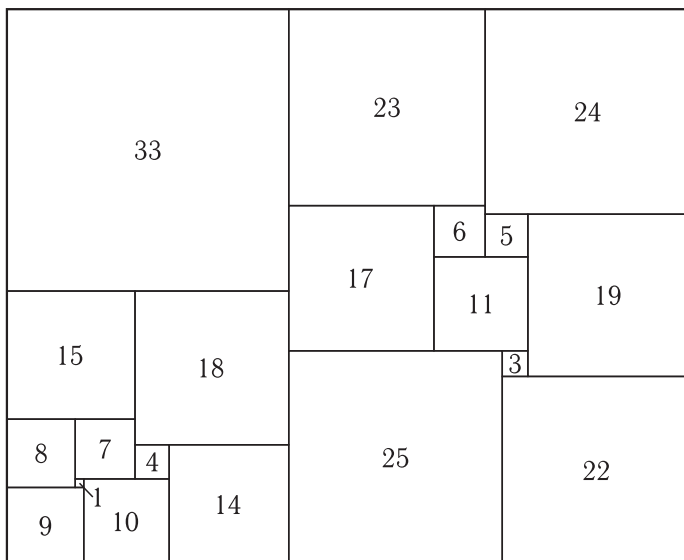


Рис. 194

к прямоугольникам  $\overline{P}'_1$  и  $\overline{P}'_2$  со сторонами

$$5 \cdot 16 \cdot 16 \text{ и } 5 \cdot 13 \cdot 29$$

и соответственно

$$13 \cdot 5 \cdot 16 \text{ и } 13 \cdot 5 \cdot 29.$$

Приложив эти два прямоугольника равными сторонами, мы получим прямоугольник  $\overline{P}$ , стороны которого равны

$$5 \cdot 13 \cdot 29 \text{ и } 5 \cdot 16 \cdot 16 + 5 \cdot 13 \cdot 16 = 5 \cdot 16 \cdot 29;$$

этот прямоугольник  $P$  с тем же отношением сторон  $13 : 16$  составляется из 33 попарно неравных квадратов (рис. 196).

Увеличим подобно прямоугольник  $\overline{P}$  с коэффициентом подобия 29; тогда он станет равен прямоугольнику  $\overline{P}$ . Стороны квадратов, из которых состоит подобно увеличенный прямоугольник  $P$ , равны

$$\begin{aligned} &29, 3 \cdot 29, 4 \cdot 29, 5 \cdot 29, 6 \cdot 29, 7 \cdot 29, 8 \cdot 29, \\ &9 \cdot 29, 10 \cdot 29, 11 \cdot 29, 14 \cdot 29, 15 \cdot 29, 17 \cdot 29, 18 \cdot 29, \\ &19 \cdot 29, 22 \cdot 29, 23 \cdot 29, 24 \cdot 29, 25 \cdot 29, 33 \cdot 29, \end{aligned}$$

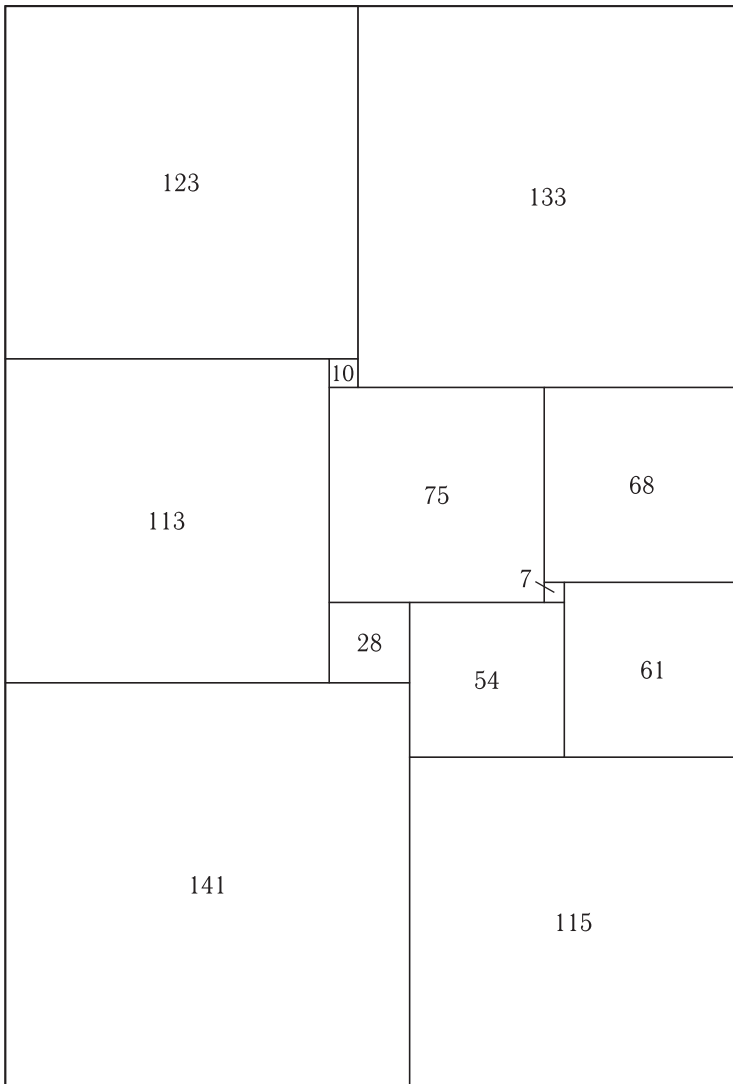


Рис. 195

а стороны квадратов, из которых состоит прямоугольник  $\overline{P}$ , равны

13,  $3 \cdot 13$ ,  $4 \cdot 13$ ,  $5 \cdot 13$ ,  $6 \cdot 13$ ,  $7 \cdot 13$ ,  $8 \cdot 13$ ,  
 $9 \cdot 13$ ,  $10 \cdot 13$ ,  $11 \cdot 13$ ,  $14 \cdot 13$ ,  $15 \cdot 13$ ,  $17 \cdot 13$ ,  $18 \cdot 13$ ,  
 $19 \cdot 13$ ,  $22 \cdot 13$ ,  $23 \cdot 13$ ,  $24 \cdot 13$ ,  $25 \cdot 13$ ,  $33 \cdot 13$ ,  $5 \cdot 13 \cdot 13$



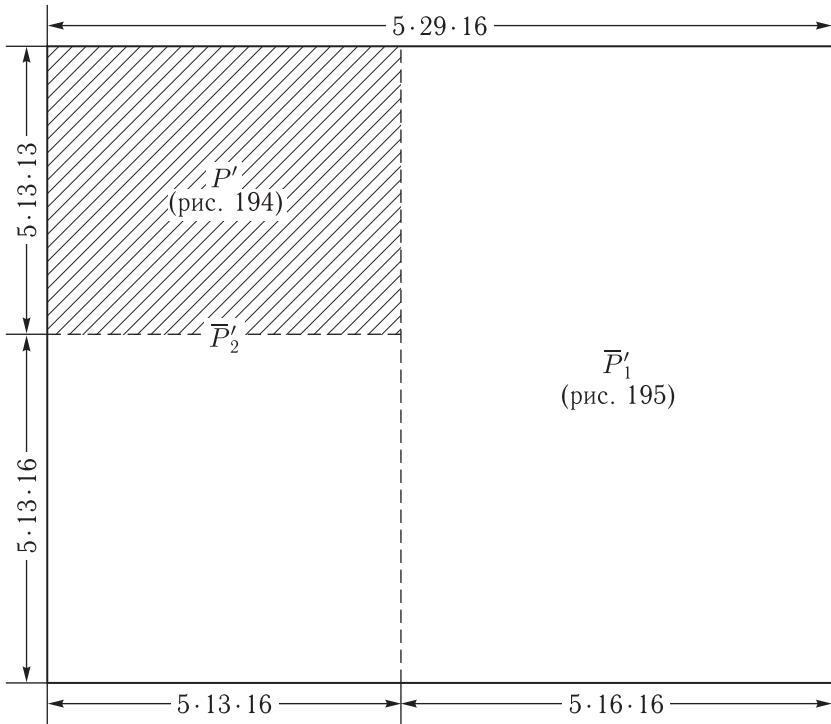


Рис. 196

и

$$5 \cdot 7, 5 \cdot 10, 5 \cdot 28, 5 \cdot 54, 5 \cdot 61, 5 \cdot 68, \\ 5 \cdot 75, 5 \cdot 113, 5 \cdot 115, 5 \cdot 123, 5 \cdot 133, 5 \cdot 141.$$

Никакие два из этих чисел не равны друг другу.

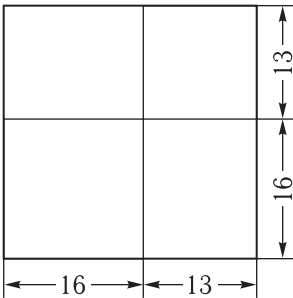


Рис. 197

**106.** а) Для решения задачи достаточно разбить на попарно неравные квадраты какой-либо один квадрат, так как все квадраты подобны между собой.

Известно, что прямоугольник со сторонами 13 и 16 можно двумя существенно различными способами разрезать на попарно неравные квадраты (см. задачу 105); при этом ни один из квадратов, использованных в одном разбиении этого прямоугольника,

не повторяется во втором разбиении. Разобьем теперь квадрат со стороной  $13 + 16 = 29$  на два квадрата со сторонами, равными соответственно 13 и 16 и на два прямоугольника со сторонами 13 и 16 (рис. 197). Если теперь разбить два прямоугольника со сторонами 13 и 16 на попарно неравные квадраты двумя способами, о которых говорилось в задаче 105, то весь квадрат со стороной 29 разобьется на

$$1 + 1 + 20 + 33 = 55$$

попарно неравных квадратов.

Примечание. Квадрат можно разбить и на меньшее число попарно неравных квадратов, чем 55. Так, например, на рис. 198 изображено разложение квадрата на 26 попарно различных квадратов.

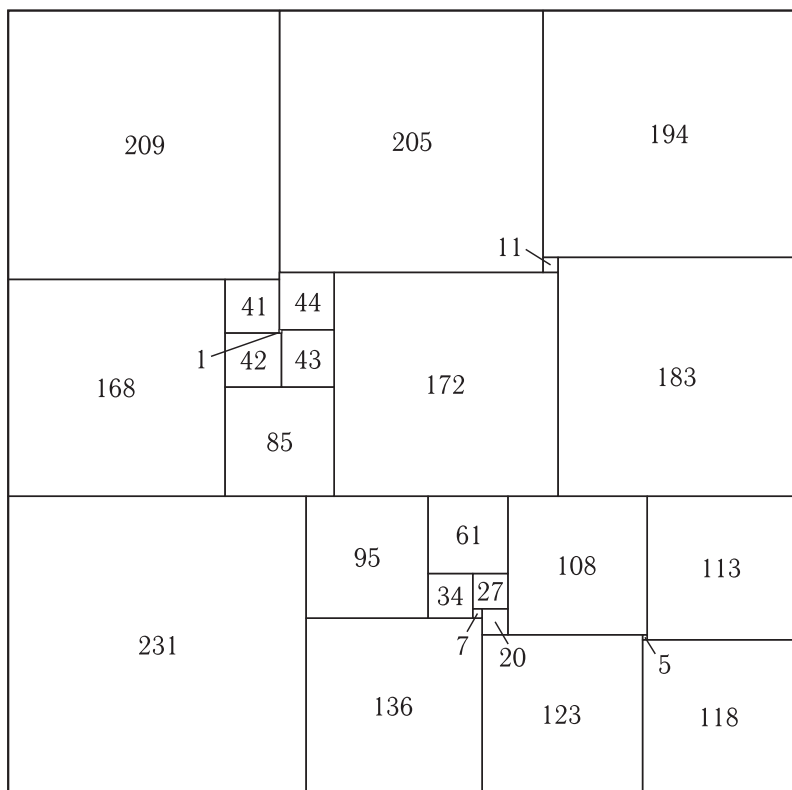


Рис. 198

б) Достаточно показать, что можно найти сколько угодно много различных разложений квадрата на попарно неравные квадраты, причем таких, что никакой из квадратов не повторяется дважды в двух различных разложениях.

Каждый прямоугольник с соизмеримыми сторонами можно разрезать на некоторое число равных квадратов. В самом деле, соизмеримость сторон означает, что стороны прямоугольника имеют общую меру; если эта мера укладывается в одной стороне прямоугольника  $m$  раз, а во второй стороне  $n$  раз, то весь прямоугольник можно разрезать на  $mn$  равных квадратов. Если теперь разбить каждый из этих равных квадратов на попарно неравные квадраты различными способами, так чтобы ни один из квадратов разложения одного из этих равных квадратов не повторялся в разложении другого квадрата, то весь большой прямоугольник разобьется на попарно различные квадраты.

Доказательство существования сколь угодно большого числа разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, удовлетворяющих высказанному условию, мы проведем в два этапа.

А. Существует бесконечно много различных разложений квадрата на попарно неравные квадраты.

Пусть  $P_0$  — некоторый прямоугольник (рис. 199, а), который можно разбить на попарно различные квадраты. Уменьшим подобно прямоугольник  $P_0$  так, чтобы его бо́льшая сторона стала равна меньшей стороне первоначального прямоугольника, и приложим полученный прямоугольник к прямоугольнику  $P_0$ ; при этом мы получим некоторый прямоугольник  $P_1$  (рис. 199, б). Произведем теперь такую же операцию с прямоугольником  $P_1$  и получим прямоугольник  $P_2$  (рис. 199, в), затем произведем ту же операцию с прямоугольником  $P_2$  и получим прямоугольник  $P_3$  и т. д. Таким образом, получим ряд прямоугольников  $P_1, P_2, P_3, \dots$  с одинаковой меньшей стороной; при этом  $P_1$  состоит из двух прямоугольников, подобных  $P_0$ ,  $P_2$  — из четырех прямоугольников, подобных  $P_0$ ,  $P_3$  — из восьми прямоугольников, подобных  $P_0$ , и т. д. Так как прямоугольник  $P_0$  (а следовательно, и все прямоугольники, подобные  $P_0$ ) можно разбить на ряд попарно неравных квадратов, то все прямоугольники  $P_1, P_2, P_3, \dots$  можно разбить на квадраты; однако без дополнительного исследования мы не можем утверждать, что все квадраты, на которые разбивается каждый из этих прямоугольников, будут попарно различны.

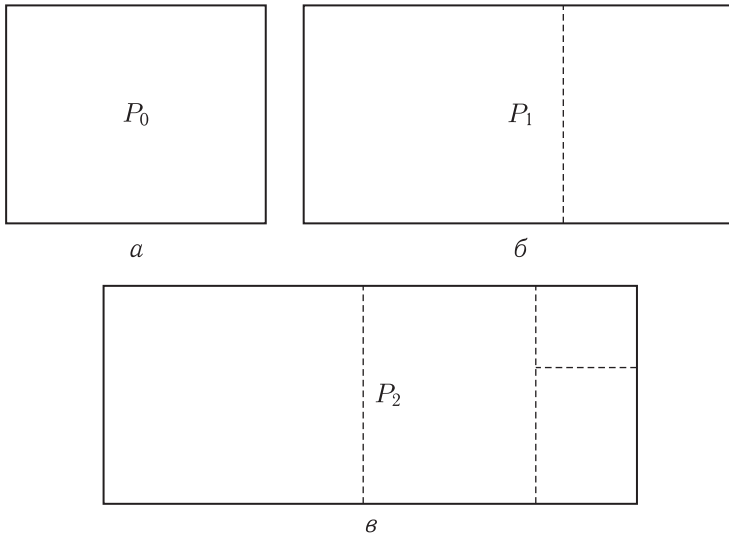


Рис. 199

Предположим теперь, что  $P_0$  — прямоугольник с отношением сторон  $13 : 16$ , который, согласно результату задачи 105, можно двумя различными способами разбить на попарно неравные квадраты. В этом случае и каждый из прямоугольников  $P_1, P_2, P_3$  и т. д. можно двумя способами разбить на квадраты. Мы докажем ниже, что каждый из прямоугольников  $P_1, P_2, P_3, \dots$  разбивается двумя способами на попарно неравные квадраты и что ни один из квадратов, участвующих в разбиении какого-либо прямоугольника  $P_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) одним способом, не повторяется в разбиении того же прямоугольника вторым способом.

Пусть меньшая сторона прямоугольника  $P_0$  равна 1, а большая сторона  $a_0 = \frac{16}{13}$ . Большую сторону прямоугольника  $P_1$  обозначим через  $a_1$ , большую сторону прямоугольника  $P_2$  — через  $a_2$  и т. д. (меньшая сторона всех этих прямоугольников равна 1). Из закона построения прямоугольника  $P_k$  следует, что

$$a_k = a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-1}}$$

(прямоугольник  $P_k$  получается, если приложить к прямоугольнику  $P_{k-1}$  со сторонами 1,  $a_{k-1}$  прямоугольник, подобный  $P_{k-1}$

со сторонами  $\frac{1}{a_{k-1}}, 1$ ; отсюда следует, что стороны прямоугольника  $P_k$  равны  $1, a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-1}}$ . Наконец, обозначим разность  $a_k - a_{k-1} = \frac{1}{a_{k-1}}$  через  $u_k$ ; очевидно  $u_k$  есть сторона прямоугольника, который надо приложить к прямоугольнику  $P_{k-1}$  для того, чтобы получить  $P_k$ .

Прямоугольник  $P_1$  состоит из двух прямоугольников, подобных  $P_0$ ; меньшая сторона одного из этих прямоугольников равна 1 (это — прямоугольник  $P_0$ ), а меньшая сторона второго прямоугольника равна  $u_1 = \frac{1}{a_0}$ . Прямоугольник  $P_2$  состоит из двух прямоугольников, подобных  $P_1$ ; меньшая сторона одного из этих прямоугольников равна 1 (это — прямоугольник  $P_1$ ), а меньшая сторона второго прямоугольника равна  $u_2 = \frac{1}{a_1}$ . Учитывая, что  $P_1$  состоит из двух прямоугольников, подобных  $P_0$ , мы заключим, что  $P_2$  состоит из четырех прямоугольников, подобных  $P_0$ ; меньшие стороны двух из них, составляющих прямоугольник  $P_1$ , равны 1 и  $u_1$ , а меньшие стороны остальных двух равны  $u_2 \cdot 1$  и  $u_2 \cdot u_1$ . Аналогично прямоугольник  $P_3$  состоит из двух прямоугольников, подобных  $P_2$ , меньшие стороны которых равны 1 (у прямоугольника  $P_2$ ) и  $u_3 = \frac{1}{a_2}$ ; отсюда следует, что  $P_3$  состоит из восьми прямоугольников, подобных  $P_0$ ; меньшие стороны четырех из них (составляющих прямоугольник  $P_2$ ) равны 1,  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_1u_2$ , а меньшие стороны остальных четырех равны  $u_3 \cdot 1$ ,  $u_3 \cdot u_1$ ,  $u_3 \cdot u_2$  и  $u_3 \cdot u_1u_2$ . Точно так же показывается, что прямоугольник  $P_4$  состоит из 16 прямоугольников, подобных  $P_0$ ; меньшие стороны этих прямоугольников равны 1,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $u_1u_2$ ,  $u_1u_3$ ,  $u_1u_4$ ,  $u_2u_3$ ,  $u_2u_4$ ,  $u_3u_4$ ,  $u_1u_2u_3$ ,  $u_1u_2u_4$ ,  $u_1u_3u_4$ ,  $u_2u_3u_4$  и  $u_1u_2u_3u_4$ . Аналогично определяются прямоугольники, подобные  $P_0$ , из которых составляются все прямоугольники  $P_k$ .

Пусть теперь  $x$  есть сторона некоторого квадрата разложения прямоугольника  $P_k$ . Этот квадрат находится в каком-то из подобных  $P_0$  прямоугольников, из которых составляется прямоугольник  $P_k$ ; коэффициент подобия, как мы видели выше, равен какому-то произведению  $u_i u_j \dots u_r$  (где все «номера»  $i, j, \dots, r$ , которые мы будем считать возрастающими, не равны между собой и не больше  $k$ ; отсюда следует, что и число множителей  $u_i, u_j, \dots, u_r$  не больше  $k$ ). Обозначим сторону квадрата разложения прямоугольника  $P_0$ , отвечающего нашему квадрату в раз-

ложении прямоугольника, подобного  $P_0$ , через  $c$ ; тогда, очевидно,

$$x = u_i u_j \dots u_r c.$$

Предположим теперь, что сторона  $x$  какого-то квадрата в одном из двух возможных разложений на квадраты прямоугольника  $P_k$  равна стороне  $y$  какого-то другого квадрата в том же или втором разложении того же самого прямоугольника. При этом, как мы видели,

$$x = u_i u_j \dots u_r c$$

и

$$y = u_m u_n \dots u_s d,$$

где  $c$  и  $d$  — стороны квадратов разложения прямоугольника  $P_0$ . Таким образом, получаем равенство

$$u_i u_j \dots u_r c = u_m u_n \dots u_s d,$$

из которого следует

$$\frac{d}{c} = \frac{u_i u_j \dots u_r}{u_m u_n \dots u_s}; \quad (*)$$

здесь мы можем считать, что все множители  $u$  в числителе и знаменателе правой части различны, так как в противном случае мы просто произвели бы сокращение.

Докажем теперь, что равенство (\*) является невозможным. Для этого понадобятся некоторые предварительные рассмотрения.

Из того, что  $a_0 = \frac{16}{13}$  есть число рациональное, следует, что все числа

$$a_1 = a_0 + \frac{1}{a_0}, \quad a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}, \quad a_3 = a_2 + \frac{1}{a_2}, \dots$$

— рациональны. Но в таком случае и все числа

$$u_1 = \frac{1}{a_0}, \quad u_2 = \frac{1}{a_1}, \quad u_3 = \frac{1}{a_2}, \dots$$

тоже будут рациональны; обозначим эти числа через

$$u_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad u_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad u_3 = \frac{p_3}{q_3}, \dots$$

(где  $p_k$  и  $q_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  взаимно просты). В таком случае равенство (\*) примет вид

$$\frac{d}{c} = \frac{\frac{p_i}{q_i} \cdot \frac{p_j}{q_j} \dots \frac{p_r}{q_r}}{\frac{p_m}{q_m} \cdot \frac{p_n}{q_n} \dots \frac{p_s}{q_s}} = \frac{p_i p_j \dots p_r q_m q_n \dots q_s}{q_i q_j \dots q_r p_m p_n \dots p_s}. \quad (**)$$

Постараемся теперь уловить закон, по которому образуются числа  $p_k$  и  $q_k$ . Как мы знаем,

$$a_k = \frac{1}{u_{k+1}} = a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-1}} = \frac{1}{u_k} + u_k.$$

Далее,

$$\frac{1}{u_{k+1}} = \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}, \quad \frac{1}{u_k} + u_k = \frac{q_k}{p_k} + \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k^2 + p_k^2}{p_k q_k},$$

откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} q_{k+1} &= q_k^2 + p_k^2, \\ p_{k+1} &= p_k q_k. \end{aligned} \right\}$$

(Если  $p_k$  и  $q_k$  взаимно просты, то и  $q_k^2 + p_k^2$  и  $p_k q_k$  взаимно просты, так как сумма  $q_k^2 + p_k^2$  не может делиться ни на один из простых делителей числа  $p_k$  и ни на один из простых делителей числа  $q_k$ .) Отсюда можно сделать следующие два заключения.

1°. Число  $q_{k+1}$  взаимно просто с каждым из чисел  $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$  и  $q_1, q_2, \dots, q_k$ .

Действительно, достаточно только доказать, что  $q_{k+1}$  взаимно просто с каждым из чисел  $q_1, q_2, \dots, q_k$  и  $p_1$ , так как  $q_{k+1}$  взаимно просто с  $p_{k+1}$ , ибо дробь  $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$  несократима и так как в силу наших формул

$$p_2 = p_1 q_1, \quad p_3 = p_2 q_2 = p_1 q_1 q_2, \quad p_4 = p_3 q_3 = p_1 q_1 q_2 q_3, \dots$$

и вообще

$$p_l = p_1 q_1 q_2 \dots q_{l-1}.$$

Но мы имеем

$$q_{k+1} = q_k^2 + p_k^2 = q_k^2 + p_1^2 q_1^2 q_2^2 \dots q_{k-1}^2.$$

Из последнего равенства вытекает, что если  $q_k$  взаимно просто с  $p_1, q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$ , то  $q_{k+1}$  взаимно просто с  $p_1, q_1, q_2, \dots, q_k$ , что в силу принципа математической индукции доказывает наше утверждение.

2°.

$$q_{k+1} > q_k.$$

Это неравенство с очевидностью вытекает из формулы  $q_{k+1} = q_k^2 + p_k^2$ .

Теперь отметим, что  $u_1 = \frac{1}{a_0} = \frac{13}{16}$ , так что  $p_1 = 13$ ,  $q_1 = 16$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} p_2 &= 13 \cdot 16 = 208, & q_2 &= 13^2 + 16^2 = 425, \\ p_3 &= 208 \cdot 425 = 88\,400, & q_3 &= 208^2 + 425^2 = 223\,889. \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно показать, что равенство (\*\*), а следовательно, и равенство (\*) является невозможным. Действительно, предположим, что наибольший из «номеров»  $i, j, \dots, r, m, n, \dots, s$  есть  $s$ . (Рассуждения мало изменились бы, если бы наибольшим из этих «номеров» был  $r$ .) В таком случае в силу доказанного множитель  $q_s$ , стоящий в числителе дроби, являющейся правой частью формулы (\*\*), не может сократиться с каким-либо другим множителем знаменателя той же правой части. С другой стороны, отметим, что отношение  $\frac{d}{c}$  есть отношение каких-то двух из 53 целых чисел, выписанных в конце решения задачи 105 — сторон квадратов, на которые разлагается первым и вторым способом прямоугольник со сторонами  $5 \cdot 29 \cdot 13$  и  $5 \cdot 29 \cdot 16$ . Но самое большое из этих чисел есть  $33 \cdot 29 = 957$ , т. е. меньше 223 889. Таким образом, мы можем утверждать, что в числителе дроби, получающейся по сокращению левой части формулы (\*\*), не может стоять число, большее 957. А так как в числителе дроби, получающейся по сокращению правой части формулы (\*\*), обязательно будет стоять число, делящееся на  $q_s$ , то  $q_s$  должно быть не больше 957, т. е.  $s$  должно быть не больше двух ( $q_3 = 223\,889 > 957$ ). Но нетрудно показать, что  $s$  не может также равняться 2 или 1. Первое следует из того, что никакое из 53 чисел, выражающих стороны квадратов и на которые разлагается первым и вторым способом прямоугольник со сторонами  $5 \cdot 29 \cdot 13$  и  $5 \cdot 29 \cdot 16$ , не делится на 425; следовательно, по сокращении дроби, стоящей в левой части формулы (\*\*), мы не можем получить дробь, числитель которой делится на  $q_2 = 425$ . Второе же вытекает из того, что, положив  $s = 1$ , мы получим

$$\frac{d}{c} = \frac{q_1}{p_1} = \frac{16}{13},$$

а никакие два из квадратов разложения рассматриваемого прямоугольника (никакие два из чисел, выписанных в конце решения задачи 105) не имеют отношения  $\frac{16}{13}$ .

Таким образом, мы полностью убедились, что равенство (\*) является невозможным, а следовательно, никакие два из квадратов, на которые разбивается одним или другим способом



какой-либо из прямоугольников  $P_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), не равны между собой. Отсюда уже легко следует существование бесконечного числа разбиений квадрата на попарно различные квадраты.

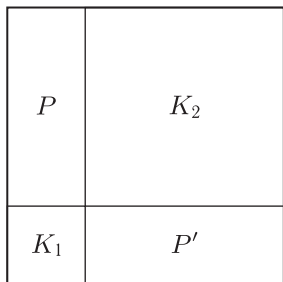


Рис. 200

Действительно, разделим стороны квадрата в отношении сторон прямоугольника  $P_k$  и разобьем квадрат на два меньших квадрата и на два прямоугольника  $P$  и  $P'$ , подобных  $P_k$  (рис. 200), аналогично тому, как это делалось при решении задачи 106, а (см. рис. 197). Затем каждый из прямоугольников, подобных  $P_k$ , разобьем на попарно неравные квадраты, причем разными способами; при этом большой квадрат разобьется на попарно неравные квадраты.

Таким образом, получим бесконечную цепочку разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, отвечающих прямоугольникам  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$

Б. Существует сколь угодно много различных разложений квадрата на попарно неравные квадраты, таких, что каждый из квадратов, фигурирующих в каком-либо одном разложении, уже не повторяется ни в одном из остальных разложений.

При доказательстве этого утверждения мы, как и выше, будем пользоваться разбиением квадрата на попарно различные квадраты, определенным прямоугольником  $P_k$  (ср. выше рис. 199). Отметим, что отношение сторон прямоугольника  $P_k$  с возрастанием номера  $k$  неограниченно возрастает. Действительно, выше мы видели, что отношение  $a_k : 1$  сторон прямоугольника  $P_k$  связано с отношением  $a_{k-1} : 1$  сторон прямоугольника  $P_{k-1}$  соотношением

$$a_k = a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-1}}.$$

Отсюда прежде всего следует, что  $a_k > a_{k-1}$ . Далее имеем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{a_{k-1}} + a_{k-1} = \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}} + a_{k-2} = \\ &= \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}} + \frac{1}{a_{k-3}} + a_{k-3} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}} + \frac{1}{a_{k-3}} + \dots + \frac{1}{a_0} + a_0. \end{aligned}$$

Предположим, что все числа  $a_k$  остаются меньше некоторого числа  $N$ . В таком случае все числа  $\frac{1}{a_k}$  должны быть больше  $\frac{1}{N}$  и, следовательно,

$$a_{N^2} = \frac{1}{a_{N^2-1}} + \frac{1}{a_{N^2-2}} + \dots + \frac{1}{a_0} + a_0 > \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{N^2 \text{ раз}} + a_0 > N.$$

Полученное противоречие и показывает, что наше исходное предположение о том, что все числа  $a_k$  остаются ограниченными, является ошибочным.

Таким образом, мы можем утверждать, что прямоугольники  $P$  и  $P'$  (см. рис. 200) могут быть сделаны сколь угодно «тонкими». Отсюда сразу следует нужное предложение. Действительно, начнем с какого-то определенного разложения квадрата на попарно неравные квадраты, например, с разложения, определяемого прямоугольником  $P_0$  (с отношением сторон 13 : 16; см. рис. 197). Пусть теперь  $s$  есть сторона самого маленького квадрата, участвующего в этом первом разложении. Выберем номер  $k$  настолько большим, чтобы прямоугольники  $P$  и  $P'$  (рис. 200), подобные прямоугольнику  $P_k$ , были «тоньше»  $s$  (т.е. чтобы их меньшая сторона была меньше  $s$ ). Ни один квадрат из полученного таким образом разложения квадрата не может быть равен квадрату из первого разложения: квадраты, на которые будут разлагаться прямоугольники  $P$  и  $P'$ , будут меньше самого маленького квадрата первого разложения (ибо стороны этих квадратов заведомо будут меньше  $s$ ), а квадраты  $K_1$  и  $K_2$  тоже будут не равны квадратам первого разложения: один из этих двух квадратов будет меньше самого маленького квадрата первого разложения, а второй — больше самого большого.

Далее, точно так же, обозначив через  $d$  сторону самого маленького квадрата второго разложения, построим третье разложение таким образом, чтобы прямоугольники  $P$  и  $P'$  (подобные прямоугольнику  $P_k$ , где номер  $k$  следует выбрать достаточно большим) были «тоньше»  $d$ . Очевидно, что, поступая и дальше таким же образом, мы можем найти сколь угодно много различных разложений квадрата на попарно неравные квадраты, удовлетворяющих условию предложения Б.

Этим самым утверждение задачи полностью доказано.

**107.** Докажем даже больше, чем требуется в условии задачи. А именно докажем, что если только стороны прямоугольника несоизмеримы, то этот прямоугольник никаким способом нельзя разбить на квадраты (хотя бы и не попарно неравные).

Пусть имеем некоторое разложение прямоугольника на  $n$  квадратов. Рассмотрим «примерный» чертеж, изображающий это разложение (пусть, например, это разложение имеет вид, изображенный на рис. 201). Прилагательное «примерный» означает, что нам неизвестны ни стороны квадратов, на которые разлагается прямоугольник, ни стороны самого прямоугольника (положение, которое часто встречалось нам при решении задач 102 и 103); постараемся определить стороны квадратов разложения и стороны прямоугольника.

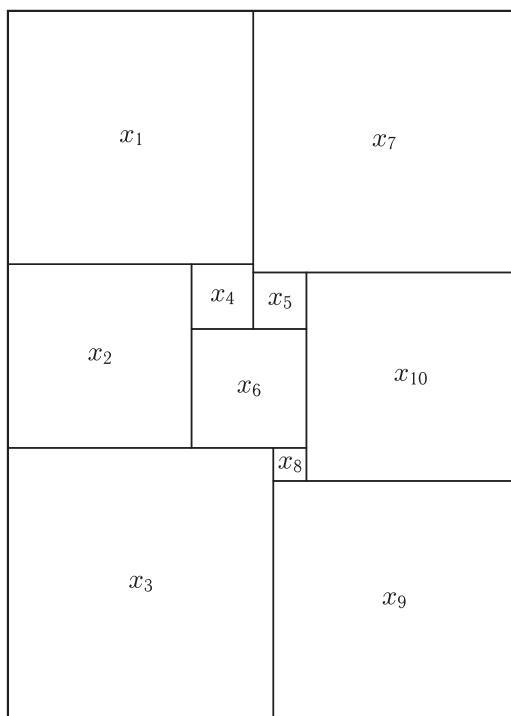


Рис. 201

Обозначим неизвестные стороны квадратов буквами  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , а стороны прямоугольника — буквами  $a$  и  $b$ . Для определения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  мы сможем составить систему уравнений первой степени. Эти уравнения мы получим, проведя прямые, параллельные сторонам прямоугольника, через все стороны всех квадратов и записывая, что длины сумм отрезков этих прямых внутри прямоугольника равны соответственно  $a$  или  $b$  (близко к этому мы поступали

несколько раз при решении задачи 103). Так, например, в случае рис. 201 наша система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{array}{rcl}
 & & x_1 + x_7 = b, \\
 x_1 + x_2 + x_3 = a, & & x_2 + x_4 + x_7 = b, \\
 x_1 + x_4 + x_6 + x_3 = a, & & x_2 + x_4 + x_5 + x_{10} = b, \\
 x_7 + x_5 + x_6 + x_3 = a, & & x_2 + x_6 + x_{10} = b, \\
 x_7 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 = a, & & x_3 + x_8 + x_{10} = b, \\
 x_7 + x_{10} + x_9 = a, & & x_3 + x_9 = b.
 \end{array}$$

Если мы сможем найти какие-либо положительные решения полученной системы уравнений, то это будет означать, что прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$  можно разложить на квадраты (располагающиеся внутри прямоугольника таким образом, как это указано на рис. 201). Докажем теперь, что какой бы вид ни имела наша система уравнений, она заведомо не может иметь положительных решений, если только числа  $a$  и  $b$  несоизмеримы.

Система уравнений первой степени решается следующим способом. Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражается через остальные неизвестные; полученное выражение подставляется во все остальные уравнения. При этом первоначальная система уравнений переходит в новую систему, которая содержит меньше уравнений и имеет меньше неизвестных. Далее, в новой системе еще какое-то из неизвестных выражается через остальные и т. д.; при этом общее число уравнений системы и число неизвестных все время уменьшается. Далее возможно несколько различных случаев.

А. Система уравнений несовместна, т. е. число независимых соотношений больше числа неизвестных. В этом случае система не может иметь решений: поступая так, как описано выше, мы в конце концов исключим все неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и придем к некоторому соотношению между  $a$  и  $b$ , которое на самом деле не имеет места.

Б. Система уравнений имеет одно-единственное решение (число неизвестных равно числу независимых уравнений). При этом если  $x_1, \dots, x_n$ , определяемые как решения нашей системы, будут все положительны, то мы получим некоторое разбиение прямоугольника со сторонами  $a, b$  на квадраты, выражаемые нашей «примерной» схемой.

Отметим теперь, что в рассматриваемом случае все неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выражаются через  $a$  и  $b$  какими-то формулами вида

$$x_k = p_k a + q_k b, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где все числа  $p_k$  и  $q_k$  — рациональны (ибо при решении нашей системы уравнений первой степени с целыми коэффициентами у нас никак не могут появиться иррациональные числа). Подставив эти значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в наши уравнения, мы получим какие-то соотношения между  $a$  и  $b$  вида

$$Pa + Qb = 0$$

с рациональными коэффициентами  $P$  и  $Q$ , откуда следует, что отношение  $\frac{a}{b} = -\frac{Q}{P}$  рационально.

Может показаться, что наше рассуждение неверно, так как возможен случай, когда подстановка выражений  $x_k = p_k a + q_k b$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) во все уравнения нашей системы превращает все эти уравнения в тождества: во всех уравнениях, правая часть которых равна  $a$ , после подстановки сокращаются все члены, зависящие от  $b$ , а в уравнениях, правая часть которых равна  $b$ , — все члены, зависящие от  $a$ . Однако на самом деле так получиться никогда не может. Действительно, подобное положение вещей означало бы, что наша система имеет решения, выражаемые формулами  $x_k = p_k a + q_k b$ , справедливые при любых  $a$  и  $b$ . Геометрически это означает, что любой прямоугольник (стороны  $a$  и  $b$  которого заключаются только в известных пределах, обеспечивающих то, что  $x_1, x_2, \dots, x_n$  положительны) может быть разбит на квадраты по одной и той же примерной схеме. Покажем, что это невозможно.

Отметим, что площадь прямоугольника равна сумме площадей всех квадратов. Алгебраически это означает, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = ab$$

или

$$(p_1 a + q_1 b)^2 + (p_2 a + q_2 b)^2 + \dots + (p_n a + q_n b)^2 = ab,$$

что можно еще записать так:

$$(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) a^2 + (2p_1 q_1 + 2p_2 q_2 + \dots + 2p_n q_n - 1) ab + (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2) b^2 = Pa^2 + Rab + Qb^2 = 0.$$

Изменим теперь  $a$ , заменив его на  $a + \alpha$ ; при этом  $\alpha$  выберем настолько малым, чтобы  $x'_k = p_k(a + \alpha) + q_k b$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) все оставались положительными. В таком случае мы должны иметь

$$P(a + \alpha)^2 + R(a + \alpha)b + Qb^2 = 0,$$

или

$$Pa^2 + Rab + Qb^2 + \alpha(2Pa + Rb + P\alpha) = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(2Pa + Rb + P\alpha) &= 0, \\ 2Pa + Rb + P\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство должно иметь место при любом (достаточно малом!)  $\alpha$ . Но отсюда следует, что должно быть

$$2Pa + Rb = 0$$

(иначе равенство нарушалось бы при  $\alpha < \left| \frac{2Pa + Rb}{P} \right|$ ), а значит, и

$$P\alpha = 0, \quad P = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = 0.$$

Но последнее соотношение показывает, что  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ , а это невозможно ( $x_1, x_2, \dots, x_n$  не могут вовсе не зависеть от  $a$ , так как среди уравнений системы есть такие, правая часть которых равна  $a$ ).

Этим завершается исследование случая Б.

В. Система уравнений неопределенна (число неизвестных больше, чем число независимых уравнений). В таком случае система имеет бесконечно много решений; все эти решения выражаются через  $a$  и  $b$  и какие-то неизвестные  $x_{r+1}, \dots, x_n$ , которые могут быть выбраны произвольно:

$$x_k = p_k a + q_k b + d_k x_{r+1} + e_k x_{r+2} + \dots + n_k x_n \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Возможно, что при этом неизвестным  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  нельзя придать такие положительные значения, чтобы и  $x_1, x_2, \dots, x_r$  были все положительны; в таком случае наше решение системы не определяет никакого разбиения прямоугольника со сторонами  $a, b$  на квадраты. В противном же случае, очевидно, мы получаем бесконечно много разбиений прямоугольника со сторонами  $a, b$  на квадраты, выражаемых одной и той же «примерной» схемой; действительно, изменив очень мало значения  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ , мы можем добиться, чтобы измененные значения  $x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$  все оставались положительными и, следовательно, определяли какое-то новое разбиение.

Покажем теперь, что этот последний случай является невозможным. Доказательство очень близко к рассуждению в заключительной части пункта Б. Так как площадь прямоугольника равна сумме площадей всех квадратов, то имеем

$$(p_1a + q_1b + d_1x_{r+1} + e_1x_{r+2} + \dots + n_1x_n)^2 + \\ + (p_2a + q_2b + d_2x_{r+1} + e_2x_{r+2} + \dots + n_2x_n)^2 + \dots \\ \dots + (p_ra + q_rb + d_rx_{r+1} + e_rx_{r+2} + \dots + n_rx_n)^2 + \\ + x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2 + \dots + x_n^2 = ab.$$

Последнее равенство можно переписать также в виде

$$Pa^2 + Qb^2 + Dx_{r+1}^2 + Ex_{r+2}^2 + \dots + Nx_n^2 + Rab + \\ + Sax_{r+1} + Tbx_{r+1} + Ux_{r+1}x_{r+2} + \dots + Zx_{r+1}x_n + \dots = 0,$$

где, например,

$$D = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_r^2 + 1$$

(выражения для остальных коэффициентов нам не понадобятся).

Изменим теперь  $x_{r+1}$ , заменив его на  $x'_{r+1} = x_{r+1} + \alpha_{r+1}$ , где  $\alpha_{r+1}$  настолько мало, что  $x'_{r+1}$  и все новые значения  $x_1, \dots, x_r$  остаются положительными. В таком случае мы должны иметь

$$Pa^2 + Qb^2 + D(x_{r+1} + \alpha_{r+1})^2 + E_1x_{r+2}^2 + \dots + Nx_n^2 + \\ + Rab + Sa(x_{r+1} + \alpha_{r+1}) + Tb(x_{r+1} + \alpha_{r+1}) + \\ + U(x_{r+1} + \alpha_{r+1})x_{r+2} + \dots + Z(x_{r+1} + \alpha_{r+1})x_n + \dots = 0.$$

Сравнивая последнее тождество с предыдущим, получим

$$\alpha_{r+1}(2Dx_{r+1} + Sa + Tb + Ux_{r+2} + \dots + Zx_n + D\alpha_{r+1}) = 0,$$

откуда, в точности так же, как в конце пункта Б, заключаем

$$2Dx_{r+1} + Sa + Tb + Ux_{r+2} + \dots + Zx_n = 0, \quad D = 0.$$

Но равенство

$$D = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_r^2 + 1 = 0$$

невозможно. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Таким образом, разобрав все возможности, которые представляются при отыскании разложения данного прямоугольника на квадраты, задаваемого определенным «примерным» рисунком, мы приходим к выводу, что таких разложений либо

вовсе не существует, либо существует единственное разложение, причем отношение сторон разлагаемого прямоугольника рационально (случай Б). Отсюда и следует, что не существует никакого прямоугольника с иррациональным отношением сторон, который можно разбить на квадраты.

**108.** Пусть выпуклый многоугольник  $P$  сложен из конечного числа попарно различных правильных треугольников  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Тогда стороны любых двух из этих треугольников будут взаимно параллельны; это доказывается совершенно аналогично решению задачи 101.

Назовем колодцем всякую ломаную  $ABCD$ , обладающую следующими свойствами:

- 1)  $A, B, C$  и  $D$  — вершины правильных треугольников, на которые разбит многоугольник  $P$ , а отрезки  $AB, BC$  и  $CD$  целиком состоят из сторон таких треугольников (каждый отрезок может состоять и из нескольких сторон разных треугольников);
- 2) точки  $A$  и  $D$  лежат по одну сторону прямой  $BC$ ;
- 3) углы  $ABC$  и  $BCD$  равны  $120^\circ$  каждый (рис. 202).

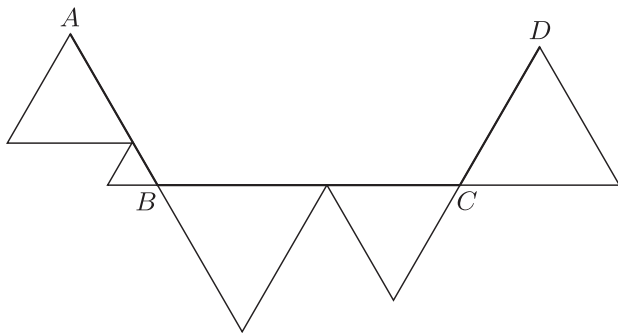


Рис. 202

Отрезок  $BC$  мы назовем основанием колодца  $ABCD$ .

Заметим прежде всего, что по крайней мере один колодец существует. Действительно, легко видеть, что углы выпуклого многоугольника  $P$  составляют целое, кратное  $60^\circ$  каждый (каждый угол многоугольника  $P$  составлен из некоторого числа углов правильных треугольников, из которых состоит  $P$ ) и, следовательно, равны либо  $60^\circ$ , либо  $120^\circ$ . Поскольку сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна  $360^\circ$ , а внешний угол при каждой вершине  $P$  составляет не менее  $60^\circ$ , многоугольник  $P$  имеет не более шести сторон. Если оба



угла в концах какой-нибудь из сторон  $P$  равны  $120^\circ$ , то колодец уже существует. Если же ни к какой из сторон  $P$  не примыкают два таких угла, то сумма внешних углов при каждой стороне не меньше  $180^\circ$ , и потому  $P$  есть либо правильный треугольник, либо четырехугольник, а именно параллелограмм с двумя углами по  $60^\circ$  и двумя по  $120^\circ$ .

Рассмотрим оба случая. Если  $P$  — правильный треугольник  $ABC$ , то правильный треугольник разбиения  $AЕК$ , имеющий вершину в  $A$  (рис. 203, *а*), не может совпадать с  $P$ , и потому ломаная  $ВКЕС$ , где  $K$  и  $E$  — вершины этого треугольника, является колодцем. Если же  $P$  — параллелограмм  $ABCD$  (рис. 203, *б*), то стороны треугольника  $KBE$  — меньшего из двух треугольников, заполняющих острые углы параллелограмма, заведомо меньше обеих сторон параллелограмма; поэтому, если  $K$  и  $E$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$ , то ломаная  $AKЕС$  — колодец. Таким образом, во всех случаях по крайней мере один колодец существует.

Пусть теперь  $ABCD$  — колодец с наименьшей длиной основания  $BC$  (рис. 204), или один из таких колодцев. Отрезок  $BC$  должен являться стороной одного треугольника, лежащего внутри колодца  $ABCD$ , ибо если отрезок основания  $BC$  есть сторона треугольника  $BKE$  разбиения, то  $KECD$  есть колодец с основанием  $EC$ , которое меньше  $BC$ .

Итак, мы приходим к конфигурации, изображенной на рис. 205. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  заполнены треугольниками  $T_1$  и  $T_2$ ; ни один из этих треугольников не может превосходить треугольника  $T$  по величине, так как если, например,  $T_1$  больше  $T$ , то, очевидно,

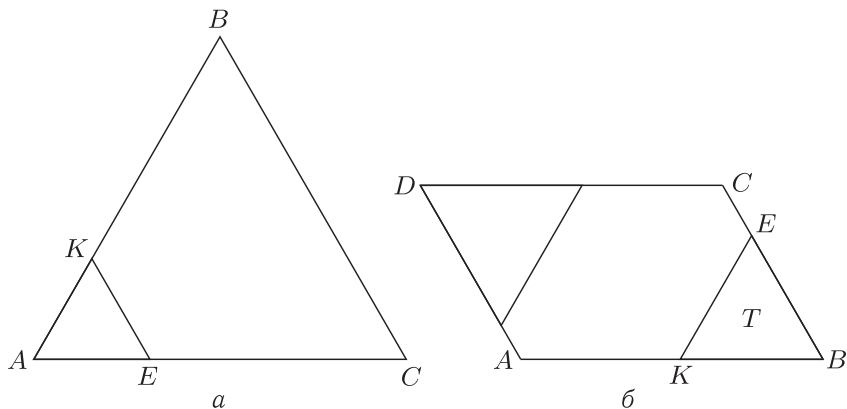


Рис. 203

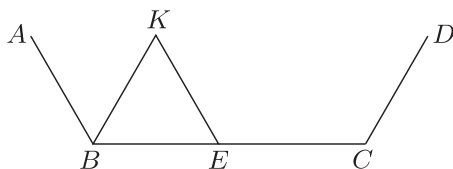


Рис. 204

$T_2$  меньше  $T$ , и образуется конфигурация, изображенная на рис. 206, где  $EKLD$  — колодец с основанием, меньшим  $BC$ .

Заметим теперь, что стороны треугольников, сходящиеся в одной вершине, очевидно, могут образовать лишь углы, кратные  $60^\circ$ . Кроме того, по направлениям  $KX$  и  $KX'$  (рис. 205) вообще не могут идти стороны треугольников разбиения, так как в противном случае образовался бы колодец с основанием, меньшим  $BC$ . Следовательно, через точку  $K$  должен проходить отрезок, параллельный  $AC$ . При этом отрезок  $KL$  (а также и  $KM$ ) должен принадлежать одному треугольнику, ибо в противном

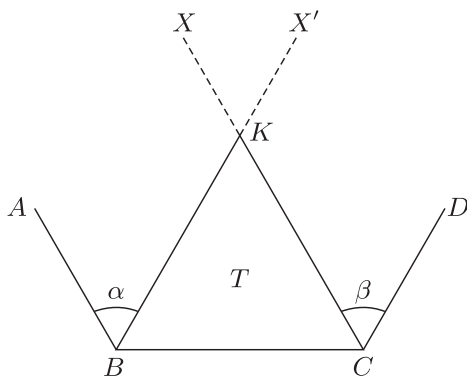


Рис. 205

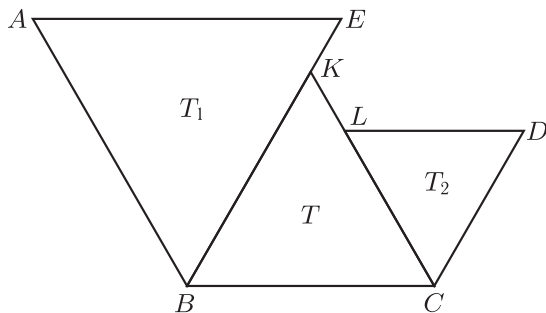


Рис. 206

случае мы получили бы колодец  $RPLD$  с основанием, лежащим на  $CK$  (соответственно колодец с основанием, лежащим на  $BK$ ) и, следовательно, меньшим, чем  $BC$  (рис. 207). Таким образом, должна иметь место конфигурация, изображенная на рис. 208.

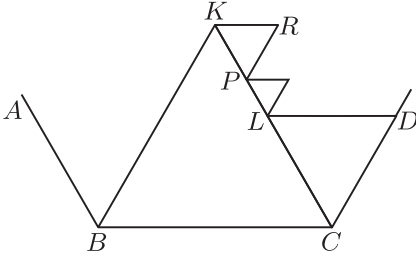


Рис. 207

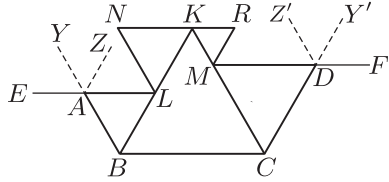


Рис. 208

Далее, через точку  $A$  по направлениям  $AU$  и  $AZ$  (рис. 208) стороны треугольников идти не могут, так как в противном случае образовался бы колодец  $YALK$  или  $ZABC$  с основанием, меньшим  $BC$ . Так как  $A$  не может быть вершиной многоугольника  $P$  (так как иначе в силу выпуклости  $P$  весь многоугольник должен был бы располагаться по одну сторону  $AL$ , что противоречит рис. 208), то отсюда следует, что по направлению  $AE$  (см. рис. 208) должна идти сторона некоторого треугольника. Аналогично, сторона треугольника должна идти по направлению  $DF$ . Отсюда, в частности, следует (в силу выпуклости многоугольника  $P$ ), что точки  $B$  и  $C$  не могут быть вершинами  $P$ . Следовательно, через эти точки должны проходить стороны треугольников разбиения, кроме сторон колодца  $ABCD$ . Но по направлениям  $BV$  и  $BW$  (рис. 209) стороны треугольников идти не могут, так как при этом образовался бы один из колодцев  $UBLN$  или  $EABV$  с основанием, меньшим  $BC$ . Аналогично, не могут идти стороны треугольников разбиения и по направлениям  $CU'$  и  $CV'$ . Следовательно, стороны треугольников должны идти по направлениям  $BG$  и  $CH$ . Но в таком случае каждая из сторон треугольника  $KBC$  является основанием колодца. Рассуждения, которые были проведены для минимального колодца  $ABCD$ , будучи применены к колодцам  $RKVG$  и  $NKCH$ , приводят к конфигурации, изображенной на рис. 210 (где по направлениям, отмеченным тонкими линиями, должны также идти стороны треугольников разбиения).

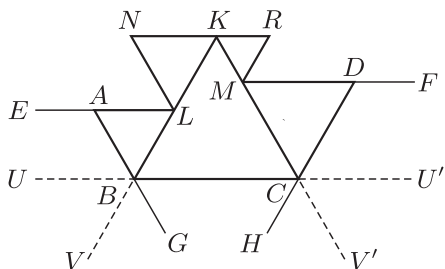


Рис. 209

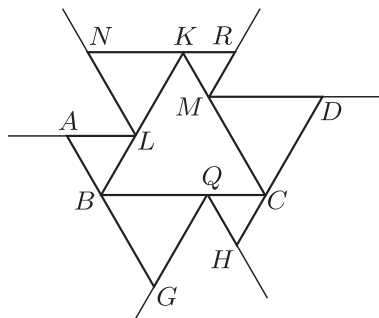


Рис. 210

Теперь, обозначая сторону треугольника  $BKC$  через  $a$ , имеем

$$\begin{aligned} NR + DH + AG &= NK + KR + DC + CH + AB + BG = \\ &= LK + KM + MC + CQ + QB + BL = 3a. \end{aligned}$$

Так как каждый из отрезков  $NR$ ,  $DH$  и  $AG$  является основанием колодца, то ни один из них не может быть меньше, чем  $a$ . Следовательно, все они должны быть равны  $a$ . Но теперь из равенств

$$NK + KR = LK + BL \quad \text{и} \quad NK = LK$$

следует:

$$KR = BL,$$

т. е. треугольники  $ABL$  и  $KMR$  равны, вопреки тому, что все треугольники разбиения должны быть попарно различны. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

**109.** а) Аналогично решению задачи 101 легко показать, что если выпуклый многогранник  $P$  составлен из конечного числа кубов, то все стороны всех этих кубов параллельны. Но отсюда следует, что все грани  $P$  параллельны граням составляющих  $P$  кубов. Далее, очевидно, что выпуклый многогранник не может иметь трех параллельных граней (это вытекает из определения выпуклого многогранника как такого, который лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани). Отсюда вытекает, что  $P$  есть шестигранник, шесть граней которого параллельны шести граням куба. Таким образом,  $P$  может быть только прямым параллелепипедом.

Пусть теперь некоторый прямой параллелепипед  $P$  сложен из попарно различных неперекрывающихся кубов  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , грани которых, очевидно, параллельны граням параллелепипеда  $P$  (это доказывается аналогично решению задачи 101).

Пусть  $P_1$  — наименьший куб из числа примыкающих к границе  $P$  и пусть  $\mu$  — грань параллелепипеда  $P$ , к которой примыкает  $P_1$  (или одна из граней  $P$ ). Основания кубов, примыкающих к  $\mu$ , суть неперекрывающиеся попарно неравные квадраты, из которых составлен прямоугольник  $M$ . Среди них основание  $P_1$  есть наименьший квадрат и потому не примыкает к границе  $\mu$  (см. решение задачи 102, а). Поскольку кубы, примыкающие к  $\mu$ , по условию все превосходят  $P_1$ , над  $P_1$  образуется объемный «колодец» с основанием  $\mu_1$  — гранью куба  $P_1$ .

Рассмотрим теперь все кубы, примыкающие к  $\mu_1$ . Пусть  $P_2$  — наименьший из них. Основания этих кубов суть квадраты попарно неравные, неперекрывающиеся и составляющие прямоугольник (и даже квадрат)  $M_1$ . Поскольку грань куба  $P_2$  — наименьший из этих квадратов, он не примыкает к границе  $\mu$ . Следовательно, все соседние с  $P_2$  кубы, примыкающие к его основанию, сами имеют основания на  $\mu_1$ , и потому над  $P_2$ , в свою очередь, образуется объемный «колодец». Продолжая тот же процесс и замечая, что всякий раз наименьший из кубов, закрывающих основание очередного колодца, не примыкает к границе этого колодца, мы выделим бесконечную последовательность уменьшающихся кубов  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ , что противоречит предположению о конечности числа кубов.

б) Пусть  $P$  — выпуклый многогранник, сложенный без пропусков и перекрытий из попарно неравных правильных тетраэдров  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Рассмотрим грани многогранника  $P$ . Каждая грань  $P$  сложена без пропусков и перекрытий из граней тетраэдров разбиения. В силу результата задачи 107 (поскольку грани выпуклого многогранника суть выпуклые многоугольники), каждая грань  $P$  должна быть заполнена одной гранью одного из тетраэдров разбиения (ибо она не может быть составлена из нескольких треугольников). Но это значит, что все грани многогранника  $P$  суть правильные треугольники. Если теперь две грани многогранника  $P$  смежны, то у них имеется общее ребро, и, следовательно, соответствующие треугольники, а вместе с тем и соответствующие тетраэды, равны. Поскольку, однако, все тетраэды попарно различны, смежные грани  $P$  должны служить гранями одного тетраэдра разбиения. Поэтому все грани  $P$  суть грани одного и того же тетраэдра разбиения и весь многогранник  $P$  сводится к этому тетраэдру.

в), г) Для случая октаэдров и икосаэдров доказательство проводится совершенно аналогично решению задачи б).

д) Пусть выпуклый многогранник  $P$  сложен из конечного числа попарно различных правильных додекаэдров  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Каждая из граней  $P$  есть выпуклый многоугольник, составленный из граней меньших додекаэдров. Если каждая из граней  $P$  состоит из одной грани меньшего додекаэдра, то, поскольку смежные грани  $P$  имеют общее ребро, смежные грани  $P$  принадлежат обязательно одному и тому же додекаэдру (так как эти додекаэдры, по условию, попарно не равны). Но тогда и все грани  $P$  суть грани одного додекаэдра, и потому весь многогранник сводится к додекаэдру.

Итак, если  $P$  не сводится к единственному додекаэдру, то по крайней мере одна из граней многогранника  $P$  должна быть составлена из нескольких попарно различных правильных пятиугольников. Но нетрудно показать, что из конечного числа правильных пятиугольников (хотя бы и не попарно различных) нельзя сложить никакого выпуклого многоугольника. Действительно, угол правильного пятиугольника равен  $\frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ$ . Поэтому в одной вершине выпуклого многоугольника не могут сходиться два пятиугольника. (Углы выпуклого многоугольника не могут превосходить  $180^\circ$ .) Значит, если не все стороны грани  $\mu$  суть стороны одного и того же пятиугольника (тогда и весь многоугольник сводится к этому пятиугольнику), то хотя бы к одной стороне примыкает по крайней мере два пятиугольника. Рассмотрим общую вершину  $A$  двух таких правильных пятиугольников  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , лежащую на грани  $\mu$ . Тогда сумма углов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , примыкающих к  $A$ , составит  $216^\circ$ , т. е. больше  $180^\circ$ , что невозможно.

Таким образом, каждая грань  $\mu$  многогранника  $P$  должна состоять из единственного пятиугольника и вместе с тем и весь многогранник  $P$  представляет собой единственный додекаэдр.

**110.** а) Покажем сначала, что двугранный угол правильного тетраэдра не укладывается целое число раз ни в  $180^\circ$ , ни в  $360^\circ$ . Действительно, рассмотрим правильный тетраэдр  $ABCD$  (рис. 211). Опустим из вершин  $A$  и  $B$  перпендикуляры  $AH$  и  $BH$  на ребро  $CD$ . Основанием этих перпендикуляров, являющихся высотами граней  $ACD$  и  $BCD$ , будет точка  $H$  — середина ребра  $CD$ . Угол  $AHB$  будет линейным углом двугранного угла  $CD$ . Пусть  $AHB = \varphi$ . Тогда из равнобедренного треугольника  $AHB$  получаем  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , откуда  $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $60^\circ < \varphi < 90^\circ$ , откуда  $3\varphi > 180^\circ$ ,  $2\varphi < 180^\circ$ , т. е.  $\varphi$  не содержится целое число раз в  $\pi$ . Аналогично  $6\varphi > 2\pi$ ,

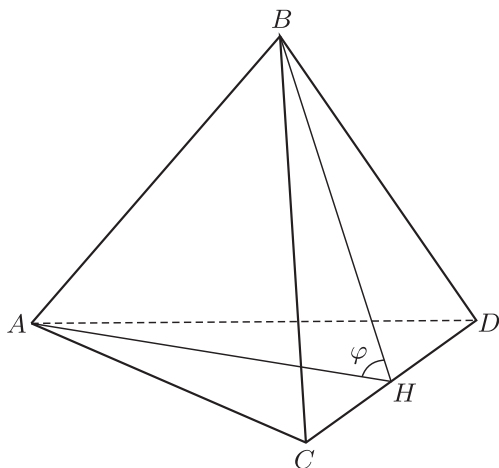


Рис. 211

$4\varphi < 2\pi$ . Остается показать, что  $5\varphi \neq 2\pi$ . Предположим противное, т. е. что  $\varphi = \frac{2\pi}{5}$ ,  $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{5}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi &= \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ибо  $\sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5} \neq 0$ . Но, с другой стороны,

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}.$$

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Пусть теперь из правильных тетраэдров сложен какой-либо выпуклый многогранник  $P$ . Возьмем один из тетраэдров. Так как мы заранее исключаем случай, когда тело состоит только из одного тетраэдра, то найдется еще один тетраэдр, грань  $\mu_2$  которого примыкает к некоторой грани  $\mu_1$  первого тетраэдра. При этом либо грани  $\mu_1$  и  $\mu_2$  совпадают, либо у одного из тетраэдров найдется ребро, которое полностью или частью прилежит к грани другого тетраэдра.

Покажем, что второй случай невозможен. Очевидно, что образовавшийся двугранный угол  $180^\circ - \varphi$  нельзя полностью

заполнить тетраэдрами, примыкающими к ребру только вершинами (ибо всего у нас имеется конечное число тетраэдров). Но его нельзя заполнить и  $n$  тетраэдрами, имеющими общее ребро, так как в этом случае было бы  $n\varphi = 180^\circ - \varphi$  или  $(n + 1)\varphi = 180^\circ$ , что невозможно. Таким образом, если два смежных тетраэдра входят в выпуклое тело, то их приложенные грани совпадают. Отметим еще, что к одному ребру не может прилежать более двух тетраэдров. Действительно,  $3\varphi > 180^\circ$ , а поэтому не может служить двугранным углом выпуклого многогранника  $P$ , так как  $360^\circ - 3\varphi$  не является кратным  $\varphi$ , иначе бы  $360^\circ - 3\varphi = n\varphi$ ,  $360^\circ = (n + 3)\varphi$ , что невозможно.

Если бы наше тело не сводилось к бипирамиде, то к одному из двух наших тетраэдров, например к первому, примыкал бы по целой грани третий. Но две грани тетраэдра всегда имеют общее ребро. Поэтому нашлось бы ребро первого тетраэдра, к которому примыкали бы сразу три тетраэдра. Но, как мы показали выше, это невозможно. Итак, число 2 есть максимально возможное число правильных тетраэдров, из которого можно сложить выпуклое тело — бипирамиду, образованную двумя равными тетраэдрами, сложенными основаниями.

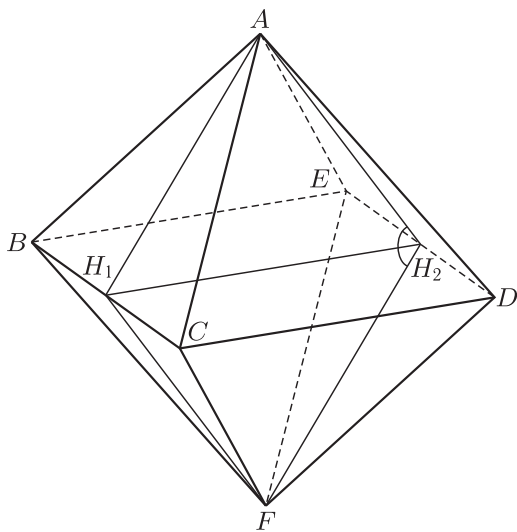


Рис. 212

б) Определим, прежде всего, двугранные углы октаэдра. Пусть  $ABCDEF$  — октаэдр и  $BCDE$  — квадрат, образованный его ребрами (рис. 212). Проведем высоты  $AH_1$ ,  $AH_2$ ,  $FH_1$ ,  $FH_2$



соответственно треугольников  $ABC$ ,  $ADE$ ,  $FBC$  и  $FDE$ . Их основаниями будут середины  $H_1$  и  $H_2$  ребер  $BC$  и  $DE$ . Легко видеть, что все четыре высоты будут лежать в одной плоскости, которая проходит через среднюю линию  $H_1H_2$  квадрата  $BCDE$  перпендикулярно к его плоскости. Пусть ребро октаэдра равно  $a$ ; тогда в треугольнике  $H_1AH_2$  стороны  $AH_1$  и  $AH_2$  являются высотами правильного треугольника со стороной  $a$ , а сторона  $H_1H_2$  равна стороне  $a$ . Отсюда следует, что  $\angle H_1AH_2 = \varphi$  — двугранному углу правильного тетраэдра (ср.  $\triangle AH_1H_2$  рис. 212 и  $\triangle ABH$  рис. 211). Далее, в плоском четырехугольнике  $AH_1FH_2$  все стороны равны; значит этот четырехугольник — ромб. Поэтому двугранный угол октаэдра  $\psi = \angle AH_1F = 180^\circ - \varphi$ . Из неравенств для  $\varphi$  получаем  $90^\circ < \psi < 120^\circ$ . Таким образом,  $\psi < 180^\circ < 2\psi < 270^\circ < 3\psi < 360^\circ < 4\psi$ , т.е. угол  $\psi$  не укладывается целое число раз ни в  $180^\circ$ , ни в  $360^\circ$ . Отсюда, точно так же как в задаче а), доказываем, что примыкающие друг к другу октаэдры имеют совпадающую грань и октаэдры, имеющие общее ребро, образуют двугранный угол, меньший  $\pi$ . Но уже  $2\psi > 180^\circ$ . Поэтому все выпуклое тело необходимо сводится к единственному октаэдру.

**111. а)** Возьмем правильный тетраэдр  $ABCD$  (рис. 213). Пусть  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$  — середины его ребер. Через каждые три из этих шести точек, лежащие на ребрах одного трехгранного угла, проведем по плоскости. Очевидно, что эти плоскости будут параллельны плоскостям оснований. Наш тетраэдр распадается на четыре правильных тетраэдра, подобных

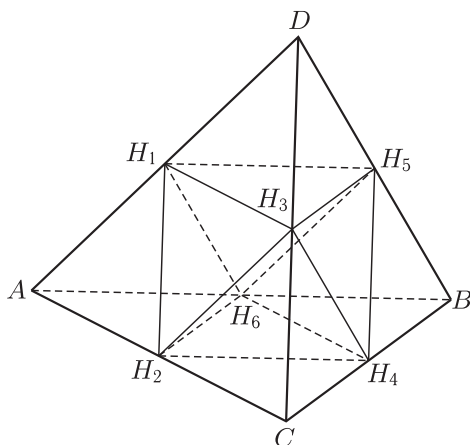


Рис. 213

исходному с коэффициентом подобия  $\frac{1}{2}$ , и на некоторый октаэдр. Докажем, что этот октаэдр — правильный. Действительно, все грани октаэдра — одинаковые правильные треугольники, со стороной вдвое меньшей, чем сторона исходного тетраэдра; все двугранные углы дополняют угол  $\varphi$  правильного тетраэдра до  $180^\circ$ , т. е. тоже все равны между собой. Таким образом, мы разбили правильный тетраэдр  $ABCD$  на четыре правильных тетраэдра и один правильный октаэдр. Обратное, если мы имеем четыре правильных тетраэдра и правильный октаэдр, причем ребра всех наших тел равны  $a$ , то из них можно сложить правильный тетраэдр со стороной  $2a$ .

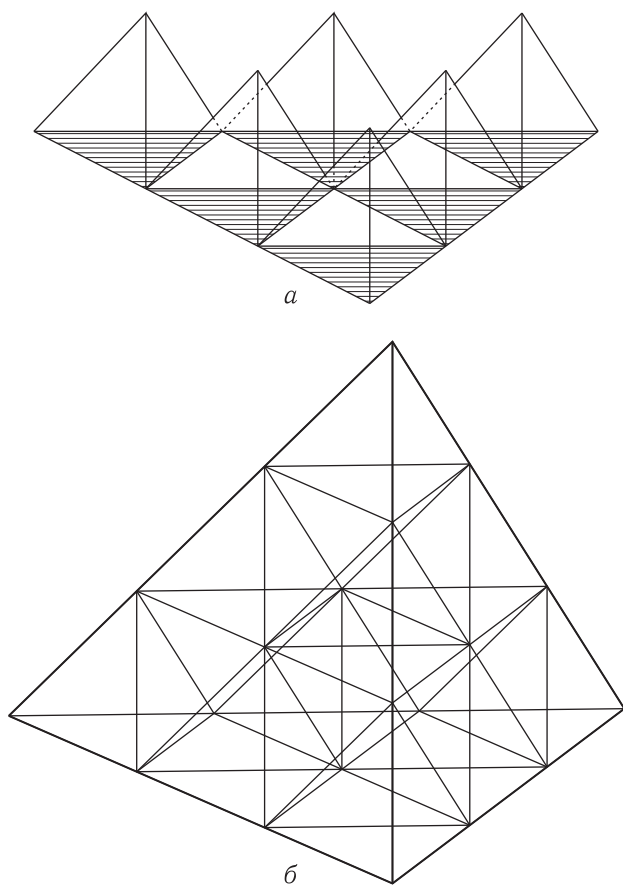


Рис. 214

б) Покажем, что аналогично можно складывать тетраэдры с ребрами  $3a, 4a, \dots$ . Разобьем правильный треугольник со стороной  $ka$  прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольнички со стороной  $a$ . Заштрихуем не смежные по стороне треугольнички (рис. 214, а) и поставим на заштрихованные треугольнички правильные тетраэдры. Тогда каждые три соседних тетраэдра образуют «колодец», куда согласно задаче а) должен входить правильный октаэдр. Действительно, подобный многогранник (составленный из трех правильных тетраэдров и правильного октаэдра) получится, если у правильного тетраэдра с ребром  $2a$ , основание которого разбито на четыре равных треугольника, срезать верхний малый тетраэдр (со стороной  $a$ ). Отсюда же следует, что верхние грани октаэдров образуют треугольник со стороной  $(k-1)a$ , плоскость которого параллельна плоскости основания.

Действительно, основание верхнего малого тетраэдра параллельно основанию всего тетраэдра с ребром  $2a$ , т. е. плоскости основания, число незаштрихованных треугольников в каждом ряду на единицу меньше числа заштрихованных, и вершины верхних граней октаэдров лежат как раз над центрами заштрихованных треугольников (рис. 214, б). На первый слой мы накладываем второй, но уже с меньшим числом тетраэдров и т. д., пока не придем к слою из одного тетраэдра.

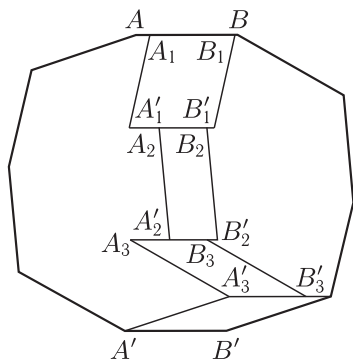


Рис. 215

Если же мы сделаем все слои бесконечными, для чего нам понадобится расчертить на правильные треугольнички со стороной  $a$  всю плоскость, то получим заполнение всего пространства правильными тетраэдрами и октаэдрами.

**112.** Пусть некоторый многоугольник  $M$  (рис. 215) разрезан на параллелограммы. Рассмотрим сторону  $A_1B_1$  одного из параллелограммов разбиения, примыкающего к стороне  $AB$  многоугольника.

У параллелограмма, которому принадлежит эта сторона, есть сторона  $A'_1B'_1$ , параллельная  $A_1B_1$ , а значит, также и  $AB$ . Если  $A'_1B'_1$  не находится на границе  $M$ , то к ней с другой стороны примыкает хотя бы один параллелограмм  $A_2B_2B'_2A'_2$ , имеющий сторону  $A'_2B'_2 \parallel A'_1B'_1$  (см. рис. 215). Точно так же, если  $A'_2B'_2$  не принадлежит границе  $M$ , мы можем

найти сторону  $A'_3B'_3$  какого-то из параллелограммов, параллельную  $A'_2B'_2$ , и т. д. Так как все рассматриваемые отрезки  $A'_1B'_1$ ,  $A'_2B'_2$ ,  $A'_3B'_3$  различны, то мы в конце концов придем к отрезку  $A'_kB'_k \parallel AB$ , расположенному на границе  $M$ . Отсюда следует, что многоугольник  $M$  имеет сторону  $A'B'$ , параллельную  $AB$ .

Так как в выпуклом многоугольнике может быть не более двух параллельных между собой сторон (это следует из определения выпуклого многоугольника как такого, который лежит по одну сторону от каждой своей стороны), то все стороны  $M$  распадаются на пары параллельных между собой сторон. Отсюда следует, что  $M$  не может иметь нечетного числа сторон; в частности,  $M$  не может иметь 13 сторон.

**113.** а) Пусть  $A_1A_2 \dots A_{2k}$  есть центрально-симметричный выпуклый многоугольник. (Число сторон центрально-симметричного многоугольника обязательно четное, так как все его стороны разбиваются на пары симметричных — равных и параллельных — сторон.) Из вершин  $A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$  можно провести отрезки  $A_2A'_2, A_3A'_3, \dots, A_{k-1}A'_{k-1}$ , равные и параллельные сторонам  $A_1A_{2k}$  и  $A_kA_{k+1}$  (рис. 216). Эти отрезки целиком лежат внутри многоугольника. Действительно, в силу выпуклости многоугольника  $A_1 \dots A_{2k}$  параллелограмм  $A_1A_{2k}A_{k+1}A_k$  заключен внутри него, а так как ломаная  $A'_2A'_3 \dots A'_{k-1}$  лежит, очевидно, по ту же сторону от  $A_{2k}A_{k+1}$ , что и  $A_2A_3 \dots A_{k-1}$  от  $A_1A_k$ , то она не может выйти за пределы многоугольника.

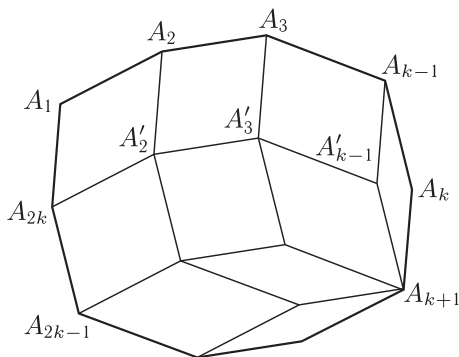


Рис. 216

Отрежем теперь от многоугольника  $A_1A_2 \dots A_{2k}$   $k-1$  параллелограммов  $A_1A_2A'_2A_{2k}$ ,  $A_2A_3A'_3A'_2$ ,  $\dots$ ,  $A_{k-1}A_kA_{k+1}A'_{k-1}$ . У нас останется многоугольник  $A_{2k}A'_2A'_3 \dots A'_{k-1}A_{k+1} \dots A_{2k-1}$ , у которого тоже каждая сторона имеет равную и параллельную.

Этот последний многоугольник — выпуклый, но имеет уже  $2k - 2$  сторон. Тем же самым приемом мы можем отрезать от многоугольника  $A_{2k}A'_2 \dots A'_{k-1}A_{k+1} \dots A_{2k-1}$  еще  $k - 2$  параллелограммов, после чего у нас получится многоугольник с  $2k - 4$  сторонами.

Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к четырехугольнику, имеющему две пары равных и параллельных сторон, т. е. к параллелограмму. Таким образом, окончательно мы разрежем наш многоугольник на

$$(k - 1) + (k - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{k(k - 1)}{2}$$

параллелограммов.

б) В решении предыдущей задачи мы показали, как центрально-симметричный  $2k$ -угольник разрезать на  $\frac{k(k - 1)}{2}$  параллелограммов. Докажем теперь, что при любом разбиении центрально-симметричного  $2k$ -угольника на параллелограммы найдется не менее  $\frac{k(k - 1)}{2}$  различных параллелограммов.

Действительно, возьмем точку на основании одного из параллелограммов, прилежащих к какой-либо стороне  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) многоугольника и проведем какую-нибудь прямую  $KK'$ , пересекающуюся в точке  $K'$  с противоположной стороной этого параллелограмма (рис. 217). Если точка  $K'$  не принадлежит границе многоугольника, то с другой стороны к ней прилежит еще один параллелограмм, стороны которого параллельны  $l_i$ . Проведем теперь внутри этого нового параллелограмма какую-нибудь прямую  $K'K''$  до ее пересечения в точке  $K''$  с противоположной стороной параллелограмма. Продолжая этот процесс, мы в силу

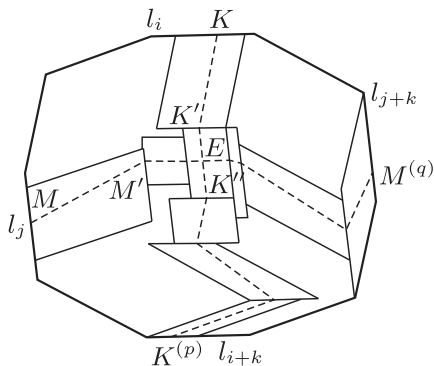


Рис. 217

конечности числа параллелограммов, в конце концов, получим точку  $K^{(p)}$  на стороне  $l_{i+k}$  многоугольника, параллельной  $l_i$  (на противоположной стороне). Ломаная  $KK' \dots K^{(p)}$  соединяет две точки многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_{2k}$  и нигде не выходит за пределы этого многоугольника; следовательно, она делит его на две части. Построим теперь аналогично ломаную  $MM' \dots M^{(q)}$ , соединяющую точки  $M$  и  $M^{(q)}$  другой пары противоположных сторон  $l_j$  и  $l_{j+k}$ . Очевидно, эти две ломаные пересекутся в некоторой точке  $E$ , ибо в противном случае пара соответствующих сторон  $l_i$  и  $l_{i+k}$  лежала бы по одну сторону от пары  $l_j, l_{j+k}$ , что, очевидно, невозможно. Параллелограмм, которому принадлежит точка  $E$ , имеет две стороны, параллельные  $l_i$  и  $l_{i+k}$  и две стороны, параллельные  $l_j$  и  $l_{j+k}$ .

Таким образом, мы показали, что в нашем разбиении существуют параллелограммы, стороны которых параллельны произвольной паре непараллельных сторон нашего многоугольника. Таких пар сторон, очевидно, можно выбрать  $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ , причем различным парам соответствуют различные параллелограммы. Отсюда и следует, что число различных параллелограммов разбиения не может быть меньше  $\frac{k(k-1)}{2}$ .

**114.** Докажем прежде всего, что если в выпуклом многоугольнике  $A_1 A_2 \dots A_n$  для каждой стороны  $l_i$  есть параллельная и равная ей сторона  $l_k$  и если  $l_{i-1}$  и  $l_{i+1}$  — стороны, смежные со стороной  $l_i = A_{i-1} A_i$ , то параллельные  $l_{i-1}$  и  $l_{i+1}$  стороны  $\bar{l}_{i-1}$  и  $\bar{l}_{i+1}$  должны быть смежными со стороной  $l_k = A_{k-1} A_k$ , параллельной  $l_i$ , и притом  $\bar{l}_{i-1}$ ,  $l_k$  и  $l_{i+1}$  должны следовать друг за другом в том же порядке, что и  $l_{i-1}$ ,  $l_i$ ,  $l_{i+1}$  (т. е. если при обходе вокруг многоугольника в некотором направлении за  $l_i$  следует сторона  $l_{i+1}$ , то за  $l_k$  следует  $\bar{l}_{i+1}$ ). Действительно, предположим, что это не так. Так как стороны  $l_i$  и  $l_k$  параллельны, то если, например,  $A_i A_{i+1} \nparallel A_k A_{k+1}$ , то  $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1} \neq \angle A_{k-1} A_k A_{k+1}$  (рис. 218). Пусть для определенности первый угол будет больше второго. В таком случае отрезок  $A_k A'_k$ , параллельный  $A_i A_{i+1}$ , будет лежать вне многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Отсюда очевидно, что существует отрезок  $MN$  такой, что  $MN \parallel A_k A'_k \parallel A_i A_{i+1}$  и точки  $M$  и  $N$  лежат внутри сторон  $A_{k-1} A_k$  и  $A_k A_{k+1}$  многоугольника. Многоугольник  $A_1 \dots A_k M N A_{k+1} \dots A_n$  — выпуклый многоугольник, ибо он получается из выпуклого многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_n$  отсечением от него треугольника  $M A_k N$ . Но этот многоугольник имеет три параллельные стороны:  $A_{i+1} A_i$ , сторону,

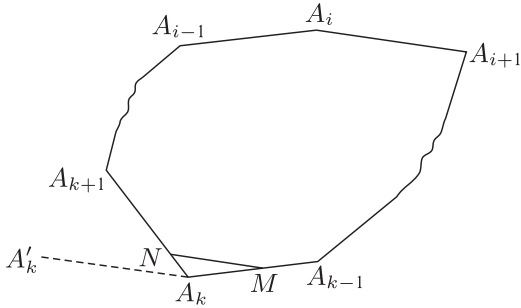


Рис. 218

соответствующую ей в исходном многоугольнике (т. е. равную и параллельную  $A_{i+1}A_i$ ), и сторону  $MN$ , что невозможно, так как выпуклый многоугольник, очевидно, не может иметь трех параллельных сторон (это сразу следует из определения выпуклого многоугольника как такого, который лежит по одну сторону от каждой своей стороны). Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Пусть теперь  $A_1A_2$  (рис. 219, а) есть некоторая сторона многоугольника  $A_1 \dots A_{2n}$ , обладающего указанным в формулировке свойством, и пусть  $A_{n+1}A_{n+2}$  — параллельная и равная ей сторона. Очевидно, что отрезки  $A_1A_2$  и  $A_{n+1}A_{n+2}$  имеют центр симметрии  $O$ , лежащий на середине отрезков  $A_1A_{n+1}$  и  $A_2A_{n+2}$ . Вследствие доказанного выше  $A_2A_3 \parallel A_{n+2}A_{n+3}$  и  $A_2A_3 = A_{n+2}A_{n+3}$ ; поэтому эти два отрезка тоже имеют центр симметрии, совпадающий с общей серединой отрезков  $A_2A_{n+2}$

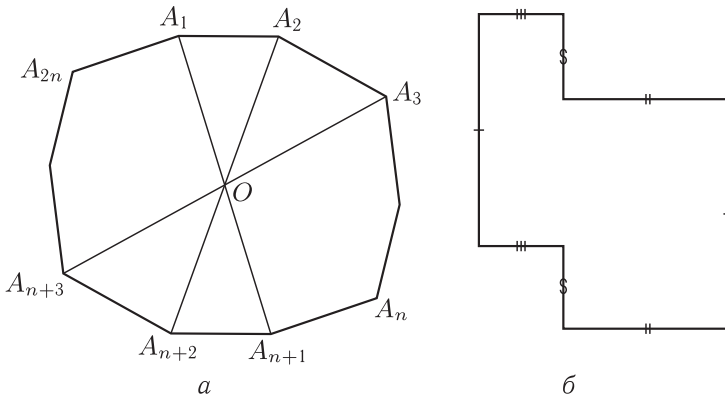


Рис. 219

и  $A_3A_{n+3}$ , т.е. совпадающий с  $O$ . Продолжая этот процесс, мы докажем, что  $O$  есть центр симметрии всего многоугольника.

Для невыпуклых многоугольников утверждение задачи очевидно неверно (см. рис. 219, б).

**115.** Рассмотрим ряд многоугольников, прилегающих в какой-нибудь стороне  $AB$  рассматриваемого многоугольника  $M$  (рис. 220, а). Очевидно, что для каждого отрезка  $a$  этой стороны, на которые она разбита вершинами прилегающих центрально-симметричных многоугольников разбиения, найдется равный и параллельный отрезок  $a'$  — противоположная сторона того же многоугольника разбиения. Все эти новые отрезки либо расположены на стороне  $n$ -угольника, либо к ним с другой стороны примыкают новые центрально-симметричные многоугольники, и на противоположных сторонах этих многоугольников можно найти отрезки, равные и параллельные рассматриваемым. Продолжая этот процесс и используя то, что выпуклый многоугольник не может иметь три параллельные стороны (см. решение задачи 114), мы вынуждены будем заключить, что у каждой стороны нашего многоугольника есть ему равная и параллельная. Но отсюда следует, что наш многоугольник имеет центр симметрии (см. задачу 114).

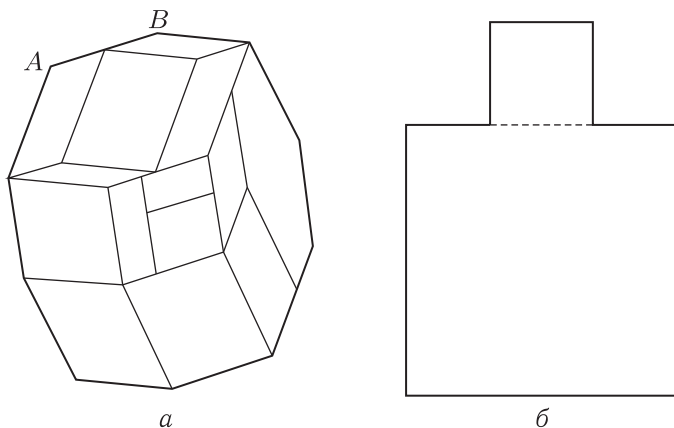


Рис. 220

Для невыпуклых многоугольников утверждение задачи не сохраняется (см., например, рис. 220, б).

**116.** Возьмем произвольное ребро  $r_1$  некоторой грани  $L_1$  рассматриваемого многогранника; так как грань  $L_1$  центрально-симметрична, то она имеет ребро  $r_2$ , равное и параллельное



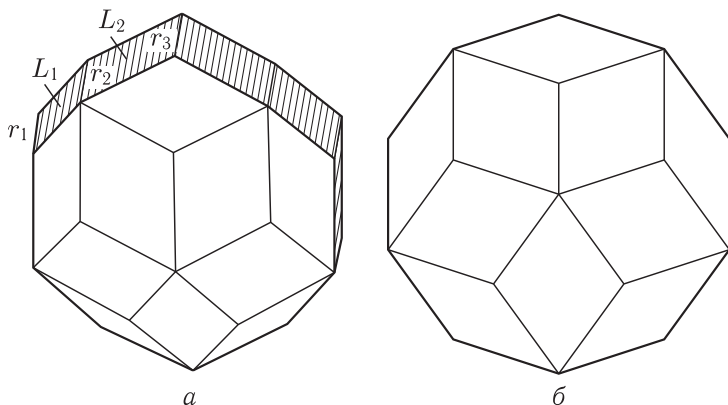


Рис. 221

ребру  $r_1$ . Пусть  $L_2$  есть грань, которая прилежит с другой стороны к ребру  $r_2$ ; тогда в грани  $L_2$  найдется ребро  $r_3$ , равное и параллельное ребру  $r_2$ . Продолжая этот процесс, мы найдем, что грани, имеющие ребра, параллельные ребру  $r_1$ , образуют на рассматриваемом многограннике некоторую «зону» граней (рис. 221, *а*). Спроектируем многогранник на некоторую плоскость  $H$  параллельно  $r_1$ . В проекции мы получим некоторый многоугольник  $E$  (рис. 221, *б*); стороны многоугольника  $E$  представляют собой проекции граней, входящих в нашу «зону». Многоугольник  $E$ , очевидно, выпуклый (легко видеть, что параллельная проекция выпуклого многогранника всегда есть выпуклый многоугольник).

Наша «зона» определяет на поверхности многогранника две «шапочки», состоящие из граней многогранника, расположенных по одну, соответственно по другую, сторону от «зоны». Все грани одной «шапочки» проектируются в выпуклые многоугольники  $E_i$ , которые определяют некоторое разбиение выпуклого многоугольника  $E$  на более мелкие многоугольники. Легко видеть, что каждый из многоугольников  $E_i$  центрально-симметричен. Действительно, параллельная проекция центрально-симметричного многоугольника есть опять многоугольник с центром симметрии (это следует из того, что параллельная проекция середины отрезка будет серединой его проекции; поэтому, если исходный многоугольник имеет точку, в которой все его хорды делятся пополам, то и проекция многоугольника будет иметь такую точку). Отсюда в силу результата задачи 113, *б* следует, что сам многоугольник  $E$  имеет центр симметрии.

Так как многоугольник  $E$  центрально-симметричен, то каждой его стороне отвечает равная и параллельная сторона. Это означает, что каждой грани  $L_k$ , входящей в данную «зону», соответствует параллельная ей грань  $L_i$  той же «зоны».

Будем теперь проектировать многогранник на плоскость параллельно всем зонам, в которые входит данная грань  $L_k$ . В каждой из этих зон, аналогично предыдущему, найдется грань, параллельная  $L_k$ . Но в выпуклом многограннике существуют не более двух параллельных граней (ср. с замечанием в конце решения задачи 113, а). Значит грань  $L_i$ , параллельная  $L_k$ , содержится в тех и только тех «зонах», в которые входит грань  $L_k$ . Отсюда вытекает, что все ребра граней  $L_k$  и  $L_i$  попарно равны и параллельны. Очевидно, что эти грани равны (для доказательства достаточно наложить  $L_i$  на  $L_k$  так, чтобы их сходственные ребра совпали). Итак, у каждой грани  $L_k$  многогранника найдется равная и параллельно расположенная грань  $L_i$ .

Отсюда аналогично решению задачи 113, а можно показать, что многогранник имеет центр симметрии. Прежде всего грань  $L_i$  симметрична грани  $L_k$  относительно середины  $O$  отрезка  $O_k O_i$ , где  $O_k, O_i$  — соответственно центры симметрии граней  $L_k$  и  $L_i$  (рис. 222). В самом деле, пусть  $A_k$  — точка многоугольника  $L_k$  и пусть  $A_i$  — соответствующая ей точка многоугольника  $L_i$ ; обозначим через  $A'_i$  точку  $L_i$ , симметричную точке  $A_i$  относительно центра симметрии  $O_i$  грани  $L_i$ ; в таком случае точка  $A_i$  симметрична точке  $A_k$  относительно  $O$ .

Рассмотрим два симметричных относительно  $O$  ребра граней  $L_k$  и  $L_i$ ; обозначим эти ребра через  $r_k$  и  $r_i$ . Прилежащие

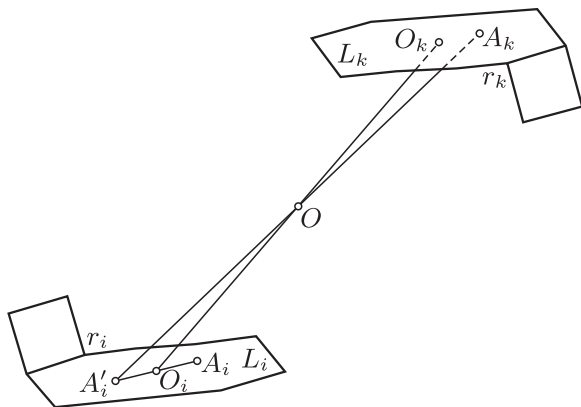


Рис. 222

к ним с других сторон грани параллельны, что следует из рассмотрения «зоны», в которую входят ребра  $r_k$  и  $r_i$ , и, значит, равны. Можно показать, что эти грани имеют центр симметрии; так как этот центр симметрии должен являться центром симметрии ребер  $r_k$  и  $r_i$ , то он совпадает с  $O$ . Продолжая таким же образом переходить от одной пары параллельных граней к другой паре, смежной с первоначальными гранями, мы убедимся, что весь многогранник симметричен относительно точки  $O$ .

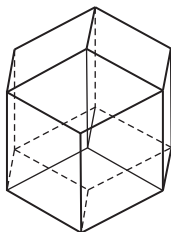


Рис. 223

**117.** Рассмотрим некоторую замкнутую «зону» ребер (см. решение предыдущей задачи). Все вершины многогранника делятся на три группы, входящие в эту зону и принадлежащие той или другой шапочке. Из всех вершин одной шапочки проведем внутрь многогранника отрезки, равные и параллельные ребрам зоны; нетрудно видеть, что все эти отрезки будут лежать внутри многогранника. Соединим теперь свободные концы проведенных отрезков и соответствующие концы ребер зоны гранями, параллельными граням шапочки<sup>1)</sup>. При этом многогранник разобьется на ряд призм с центрально-симметричными основаниями и на «меньший» многогранник (имеющий меньше ребер, чем первоначальный), у которого тоже все грани имеют центр симметрии. Производя тот же процесс с «меньшим» многогранником и т. д., мы разобьем в конце концов наш многогранник на ряд призм с центрально-симметричными основаниями. Но в силу результата задачи 113, а каждую призму с центрально-симметричным основанием можно разбить на параллелепипеды (если разбить на параллелограммы основание призмы, то сама призма разобьется на параллелепипеды). Этим и заканчивается наше доказательство.

**118.** Предположим, что многогранник  $M$  разбит на ряд многогранников с центрально-симметричными гранями. В таком случае каждая грань многогранника  $M$  разобьется на ряд центрально-симметричных многоугольников — граней многогранников разбиения. Но отсюда в силу теоремы задачи 113, б следует, что все грани многогранника  $M$  являются центрально-симметричными многоугольниками, что и требовалось доказать.

<sup>1)</sup> Эту операцию можно представить себе как параллельный перенос шапочки кнутри многогранника на вектор, равный ребру данной зоны (см. рис. 223).

Для невыпуклых многогранников утверждение задачи не сохраняется.

**119.** Заметим предварительно, что любые две «зоны» граней многогранника с центрально-симметричными гранями пересекаются. Действительно, рассмотрим две «шапочки», которые образует какая-то «зона». Каждой грани одной «шапочки», очевидно, соответствует симметричная грань другой, и наоборот. Отсюда следует, что каждая из «шапочек» имеет одинаковое число граней. Если бы две «зоны» не пересекались, то вторая «зона» и одна из «шапочек», образованных ею, лежали бы целиком внутри некоторой «шапочки», образованной первой «зоной», и наоборот, другая шапочка, образованная первой зоной, лежала бы целиком внутри второй шапочки, образованной второй зоной. Мы пришли к противоречию, так как в этом случае либо шапочки, образованные первой зоной, либо шапочки, образованные второй зоной, должны содержать неодинаковое число граней.

Заметив это, обратимся к многограннику, все грани которого — параллелограммы, и обозначим через  $k$  число направлений ребер многогранника, т. е. число различных «зон». Каждая «зона» пересекается с каждой из остальных по двум симметричным граням; следовательно, в каждой «зоне» будет  $2(k - 1)$  граней. Но каждая грань является параллелограммом, откуда следует, что она принадлежит двум и только двум «зонам». Так как общее число зон равно  $k$ , то отсюда вытекает, что число граней равно  $\frac{k \cdot 2(k - 1)}{2} = k(k - 1)$ .

Попутно заметим, что так как каждая грань нашего многогранника имеет четыре ребра и каждое ребро принадлежит двум граням, то число ребер многогранника равно  $\frac{4k(k - 1)}{2} = 2k(k - 1)$ .

Примечание. Можно показать, что для каждого целого числа  $k$ , большего 2, можно найти  $k(k - 1)$ -гранник, все грани которого являются параллелограммами.

---

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

---

**1.** Разбейте четырехугольник диагональю на два треугольника и сравните сумму углов четырехугольника с суммой углов обоих треугольников.

**2.** Воспользуйтесь тем, что если угол между прямой и плоскостью равен  $\alpha$ , то угол между этой прямой и перпендикуляром к данной плоскости равен  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .

**3.** Докажите сначала утверждение задачи для треугольника, одна сторона которого параллельна плоскости проекции.

**4.** Окружность, лежащая в плоскости, параллельной обеим скрещивающимся прямым и проходящей через середину  $O$  их общего перпендикуляра. Центр окружности лежит в точке  $O$ , а радиус равен  $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$ , где  $h$  — длина общего перпендикуляра.

**5.** Дополните тетраэдр до параллелепипеда так, чтобы скользящие отрезки являлись скрещивающимися диагоналями двух параллельных граней параллелепипеда и докажите, что объем этого параллелепипеда не зависит от положения отрезков.

**6.** Воспользуйтесь теоремой: все касательные, проведенные к шару из внешней точки, равны между собой.

**7.** Воспользуйтесь теоремой: сумма расстояний от произвольной точки  $N$  внутри правильного многоугольника до его сторон не зависит от положения точки  $N$ .

**8.** а) Предположив, что существуют три прямые, не проходящие через одну точку, докажите, что любая четвертая прямая, удовлетворяющая условию задачи, обязательно лежит в плоскости треугольника, образованного этими тремя прямыми.

б) Используйте указание к задаче а).

**9.** Воспользуйтесь вспомогательным предложением: если ломаная длины  $\frac{d}{2}$  вращается вокруг прямой, проходящей через один из ее концов, то площадь образовавшейся поверхности вращения не превосходит  $\frac{\pi d^2}{4}$ .

**10.** а) Дуга окружности, заключенная внутри шара. Окружность построена, как на диаметре, на отрезке  $OH$ , где  $O$  — центр шара, а  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую  $a$ ; плоскость окружности перпендикулярна к прямой  $a$ .

б) Сферический сегмент, заключенный внутри шара. Сфера построена, как на диаметре, на отрезке  $OH$ .

**11.** Возьмите два произвольных пересекающихся круговых сечения тела и покажите, что, какова бы ни была точка  $M$ , всегда найдется сечение тела, плоскость которого пересекает оба выбранных круга и проходит через точку  $M$ .

**12.** Из всех проекций наибольшую площадь имеет квадрат. Он получается при проектировании правильного тетраэдра на плоскость, параллельную двум его скрещивающимся ребрам.

**13.** 6 вершин куба, не являющиеся концами рассматриваемой диагонали.

Рассмотрите геометрическое место точек пространства, из которых данный отрезок виден под данным углом.

**14.** Правильный шестиугольник.

**15.** Окружность наибольшего радиуса вписана в шестиугольник задачи 14.

Докажите сначала, что центр искомой окружности совпадает с центром куба. Затем постройте на искомой окружности, как на экваторе, сферу и рассмотрите сферические сегменты, которые отрезаются от сферы гранями куба. Покажите, что если радиус сферы превышает радиус окружности, указанной в ответе, то любая плоскость, проведенная через центр куба, пересекает хотя бы один из этих шести сегментов.

**16.** Направьте ось отверстия по диагонали куба и покажите, что при определенных положениях направляющего квадрата отверстия его края не заденут ребер куба, не имеющих общих точек с диагональю куба — осью отверстия.

**17.** Существует бесчисленное множество отличных от куба многогранников, удовлетворяющих условию задачи, но все они невыпуклые.

**18.** Оси цилиндров должны быть перпендикулярны друг к другу.

**19.** Синусоида.

**20.** Проекциями треугольника могут быть: 1) угол, 2) полуполоса, 3) два угла, у которых одна сторона одного служит продолжением стороны другого, а две другие стороны параллельны и направлены в разные стороны, 4) треугольник, 5) несобственный треугольник.

**21.** Докажите, что в каждой вершине не может сходиться более трех треугольников.

**22.** Через любые три точки касания проведите плоскость и воспользуйтесь указанием к задаче 6.

**23.** а) Докажите сначала теорему: геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, является плоскость, проходящая через биссектрису угла между прямыми перпендикулярно к их плоскости.

б) Докажите, что существует плоскость, с которой все стороны четырехугольника образуют равные углы.

Спроектируйте четырехугольник на эту плоскость, впишите в его проекцию окружность и докажите, что перпендикуляр к плоскости, проведенный через центр окружности, будет геометрическим местом точек, равноудаленных от прямых, образующих стороны четырехугольника.

в) Радиус искомой сферы равен радиусу окружности, о которой говорится в указании к задаче б).

**24.** Возможно в том и только в том случае, когда данный треугольник — остроугольный.

**25.** а) Проведите плоскость сечения параллельно любым двум скрещивающимся ребрам.

б) Можно.

в) Вершины искомого параллелограмма лежат в серединах ребер тетраэдра.

**26.** Докажите, что стороны любых двух построенных указанным путем треугольников — пропорциональны.

**27.** а) Рассмотрите сначала случаи, когда точка  $A'$  лежит на ребре и на грани пирамиды  $ABCD$ .

б) Может.

**28.** Докажите сначала, что если все двугранные углы выпуклого трехгранного угла — острые, то и все плоские углы — острые.

**29.** Докажите, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся ребер такого тетраэдра проходит через их середины.

**30.** а) Центр искомой сферы должен быть равноудален от всех вершин тетраэдра, следовательно, он принадлежит геометрическому месту точек, равноудаленных от всех трех вершин какой-либо его грани и, кроме того, принадлежит геометрическому месту точек, равноудаленных от четвертой вершины и какой-нибудь из первых трех.

б) Пусть  $A$  и  $B$  — точки пересечения окружностей. Возьмите произвольные точки  $C$  и  $D$  на первой и второй окружностях соответственно и опишите около тетраэдра  $ABCD$  сферу.

**31.** Докажите, что биссектральная плоскость двугранного угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от граней угла.

**32.** а) Докажите, что любые две медианы тетраэдра пересекаются и что точка их пересечения делит медиану в отношении  $3 : 1$ .

б) Средняя линия тетраэдра лежит в плоскости, проходящей через одно из его ребер и середину противоположного ребра.

**33.** Пусть  $DH_4$  и  $BH_2$  — две пересекающиеся высоты тетраэдра  $ABCD$ . Докажите, что ребра  $BD$  и  $AC$  скрещиваются под прямым углом; обратно, если ребра  $BD$  и  $AC$  скрещиваются под прямым углом, то высоты  $DH_4$  и  $BH_2$  пересекаются.

**34.** а) Докажите, что проекции трех ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины, на противоположную грань будут высотами этой грани.

б) Воспользуйтесь результатом задачи 33, а также указанием к ней.

в) См. указание к задаче б).

г) См. указание к задаче а).

д) Проведите плоскости через каждое ребро и точку пересечения высот.

**35.** а) Проведите плоскость перпендикулярно к одному из ребер угла и рассмотрите высоты образовавшегося треугольника.

б) Пусть  $DH_4$  и  $BH_2$  — пересекающиеся высотные прямые тетраэдра  $ABCD$ . Докажите, что ребра  $BD$  и  $AC$  скрещиваются под прямым углом, и обратно, что если ребра  $BD$  и  $AC$  скрещиваются под прямым углом, то  $DH_4$  и  $BH_2$  — пересекаются.

в) Воспользуйтесь указанием к задаче б).

**36.** Воспользуйтесь теоремой Пифагора.



**37.** а) Докажите, что биссекторная прямая трехгранного угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от ребер угла.

б) Докажите, что если две биссекторные прямые тетраэдра пересекаются, то сумма длин одной пары противоположных ребер равна сумме длин другой пары, и обратно.

в) Используйте результат задачи б) и указание к ней.

г) Воспользуйтесь указанием к задаче б).

**38.** Воспользуйтесь результатом задачи 37, г).

**39.** Докажите, что в любых двух гранях углы, лежащие против общего ребра, равны.

**40.** Докажите, что если в трехгранный угол  $SABC$  вписана сфера с центром в точке  $O$ , то плоскость точек касания перпендикулярна к прямой  $SO$  и разделяет точки  $O$  и  $S$ .

**41.** а) Подсчитайте сумму числа сторон всех граней.

б) Подсчитайте сумму числа ребер всех многогранных углов.

**42.** а) У многогранника должно быть не менее четырех вершин.

б) Покажите, что у многогранника с семью ребрами могли бы быть только треугольные грани.

Примером многогранника с  $2n$  ребрами является  $n$ -угольная пирамида.

**43.** Покажите сначала, что у такого многогранника нашелся бы четырехгранный угол.

**44.** Выберите на каждой грани по точке, разбейте грани на треугольники, основанием которых являлись бы ребра грани, а противоположными вершинами — выбранные точки, и подсчитайте сумму углов треугольников разбиения.

**45.** а) См. указание к задаче 44.

б) Выведите утверждение задачи из теоремы задачи а).

**46.** Разбейте каждую грань на треугольники (см. указание к задаче 44) и сравните сумму углов треугольников с вершинами в точках, выбранных на выделенных  $k$  гранях с аналогичной суммой углов с вершинами на остальных  $n - k$  гранях.

**47.** Пусть  $R$  — произвольный отрезок. Поставьте в соответствие каждой вершине  $A$  многогранника  $W$  плоскость  $\alpha$ , так что  $\alpha \perp OA$  и  $OA \cdot OB = R^2$ , где  $OB$  — расстояние от точки  $O$  до плоскости  $\alpha$ .

**48.** Выберите внутри многогранника произвольную точку  $O$ , спроектируйте поверхность многогранника на какую-нибудь сферу с центром в точке  $O$  и докажите аналогичную формулу для карты на поверхности сферы.

**49.** Исключите из многогранника одну из его граней и для оставшейся односвязной многогранной поверхности докажите формулу  $\mathcal{B} - \mathcal{P} + \mathcal{T} = 2$ . Это можно сделать по индукции.

В решениях приведено более трудное доказательство.

**50.** а) Для доказательства неравенства  $\frac{3}{2} \leq \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{T}}$  используйте указания к задаче 41, а, для доказательства неравенства  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{T}} < 3$  — теорему Эйлера.

б) Для доказательства неравенства  $\frac{3}{2} \leq \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B}}$  используйте указание к задаче 41, б, для доказательства неравенства  $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B}} < 3$  — теорему Эйлера.

**51.** Используйте формулу  $3\mathcal{T}_3 + 4\mathcal{T}_4 + 5\mathcal{T}_5 + \dots = 2\mathcal{P} = 3\mathcal{B}_3 + 4\mathcal{B}_4 + 5\mathcal{B}_5 + \dots$ , где  $\mathcal{T}_m$  — число граней с  $m$  ребрами и  $\mathcal{B}_n$  — число вершин с  $n$  ребрами.

**52.** См. указание к задаче 51.

**53.** Для каждого данного многогранника постройте путем срезания вершин выпуклый многогранник так, чтобы при этом максимальное число соседей грани не возросло и в каждой вершине сходилось бы ровно три ребра.

**54.** а) 6. См. указание к задаче 53.

б) 4.

**55.** Сначала расклассифицируйте многогранники по числу граней многогранного угла с наибольшим количеством граней.

**56.** Пусть  $n$  — число ребер каждой грани и  $k$  — число ребер каждого многогранного угла. Выведите из формулы Эйлера неопределенное уравнение для  $n$  и  $k$  и докажите, что оно имеет только пять целочисленных решений.

**57.** а) Докажите утверждение задачи методом математической индукции по  $m$  и воспользуйтесь утверждением задачи 8 из части 2.

б) Рассмотрите два многоугольника, на которые разбивает многоугольный контур поверхность многогранника.

**58.** а) Предположив противное, рассмотрите карту, образованную сетью тех ребер одного из многогранников, соответствующие двугранные углы которых не равны соответственным углам второго многогранника.

Отметьте знаком «+» ребра, двугранные углы которых больше соответственных двугранных углов второго многогранника, а знаком «-» ребра, у которых двугранные углы меньше соответственных углов второго.

Докажите для сферических многоугольников теорему, аналогичную теореме задачи 9, б из части 2 для плоских многоугольников.

Воспользовавшись связью между сферическими многоугольниками и многогранными углами, покажите, что если многогранный угол первого из многогранников не равен соответственному многогранному углу второго, то по крайней мере два ребра, исходящих из вершины этого угла, отмечены знаком «+» и два — знаком «-», причем эти ребра идут в порядке «+», «-», «+», «-», т. е. к вершине этого угла примыкают по меньшей мере четыре области нашей карты, стороны которых меняют в этой вершине знак. Оцените, исходя из этого, число пар смежных сторон областей, имеющих разные знаки.

С другой стороны, оцените число перемен знака по числу областей карты. Затем докажите, что для карты, образованной сетью произвольно выбранных ребер выпуклого многогранника, имеет место соотношение  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$ , где  $\alpha_0$  — число узлов сети,  $\alpha_1$  — число сторон, и  $\alpha_2$  — число областей карты. Наконец, с помощью указанного соотношения покажите, что обе оценки противоречат друг другу.

б) План решения дословно совпадает с намеченным в указании к задаче а).

**59.** Для сферических двуугольников (аналогично для двугранных углов) с соизмеримыми углами можно выбрать общую меру.

**60.** а) Разбейте каждый из симметричных треугольников на равнобедренные.

**61.** а) Большие круги, на которых лежат стороны сферического треугольника, разбивают сферу на три пары сферических двуугольников, в пересечении которых лежит пара симметричных треугольников.

**62.** а) Разбейте многоугольники на треугольники.

**63.** а)  $1^\circ$ . Примените признаки перпендикулярности прямой и плоскости.

2°. Линейный угол двугранного угла равен углу между перпендикулярами к его граням.

**64.**  $4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ . Опишите вокруг конуса правильную пирамиду с неограниченно увеличивающимся числом граней и рассмотрите пирамиду, к ней дополнительную.

**65.** Телесный угол трехгранного угла равен сумме линейных углов его двугранных углов минус  $\pi$ .

**66.** Выберите внутри многогранника точку  $O$  и вычислите сумму телесных углов при вершине для пирамид, вершиной которых является точка  $O$ , а основаниями — грани многогранника.

**67.** а) Докажите равенство двух соседних граней, ребер и т. д.

б) Все грани правильного многогранника, смежные с какой-либо одной гранью, лежат по одну сторону от нее.

**68.** Центр правильного многогранника лежит на пересечении перпендикуляров к граням многогранника, восстановленных из их центров, на расстоянии  $a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  от каждой грани, где  $a$  — апофема грани многогранника, а  $\varphi$  — его двугранный угол.

**69.** Докажите, что правильная пирамида, получающаяся при пересечении любого многогранного угла  $S$  правильного многогранника плоскостью, перпендикулярной к прямой  $SO$ , где  $O$  — центр многогранника, с точностью до подобия определена комбинаторным типом многогранника и видом его граней и многогранных углов.

**70.** Осуществите конструкцию, намеченную в указании к задаче 47, приняв за  $R$  радиус полувписанной сферы.

**71.** Воспользуйтесь утверждением задачи 67, б).

**72.** а) Указанная плоскость перпендикулярна к оси многогранного угла.

б) Воспользуйтесь утверждением задачи а) и задачи 69.

**73.** Пусть  $R_1, r_1, \rho_1, R', r'$  — соответственно радиусы описанной, вписанной и полувписанной сфер двух взаимных многогранников. Тогда имеют место соотношения

$$R' = \frac{\rho}{\cos \delta}; \quad r_1 = \rho_1 \cos \delta,$$

где  $\delta$  — половина двугранного угла второго из многогранников.

**74.** Правильные тетраэдр, гексаэдр (куб), додекаэдр, октаэдр, икосаэдр.

**75.** Воспользуйтесь теоремами задач 67, б и 45, а.

**76.** Не существует ни звездчатых треугольников, ни звездчатых четырехугольников.

**77.** а) Всего имеется четыре типа додекаэдра: выпуклый додекаэдр, малый, звездный додекаэдр, большой додекаэдр, большой звездный додекаэдр.

Возможны додекаэдры со звездчатыми гранями; кроме того, у додекаэдра имеются несмежные непараллельные грани.

б) У икосаэдра имеются несмежные непараллельные грани. Всего имеются два типа икосаэдра: выпуклый икосаэдр и большой икосаэдр.

**78.**  $V + T$  граней,  $F$  вершин и  $2F$  ребер.

**79.** Воспользуйтесь утверждением задачи 67, б.

**80.** Выпуклые почти правильные многогранники: октаэдр, кубооктаэдр, додекаэдр-икосаэдр; звездчатые — додекаэдр-додекаэдр и звездный додекаэдр-икосаэдр.

**81.** Из правильных треугольников, квадратов, правильных шестиугольников.

**82.** а) Сложите из двух треугольников параллелограмм и постройте паркет из параллелограммов.

б) Приложите равными сторонами два четырехугольника так, чтобы соответственные вершины не совпадали, и сложите паркет из образовавшихся центрально-симметричных шестиугольников.

в) Выберите определенную пару противоположных сторон и сложите из шестиугольников бесконечную полосу, прикладывая их друг к другу указанными сторонами. Прикладывая эти полосы друг к другу, получим искомый паркет.

**83.** Так как в узле паркета из выпуклых многоугольников сходится не менее трех многоугольников, то «в среднем» угол многоугольника не может быть больше  $120^\circ$  ( $= \frac{360^\circ}{3}$ ). С другой стороны, если число вершин многоугольника больше или равно семи, то «в среднем» угол многоугольника больше, что  $128^\circ$   $\left[180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) > 128^\circ\right]$ .

Это рассуждение, разумеется, не является доказательством, так как мы пользуемся нигде не определенным понятием —

«в среднем». Чтобы провести само доказательство, рассмотрите достаточно большой квадрат и вычислите двумя способами сумму углов многоугольников, хотя бы частично попавших внутрь квадрата: один раз по числу попавших внутрь квадрата «паркетин», а другой раз по числу узлов паркета, лежащих внутри квадрата. Если предположить, что  $n \geq 7$ , то эти оценки будут противоречить друг другу.

**84.** Отсеките от данного треугольника ему подобный, так чтобы стороны треугольников относились как 5 : 4.

**85.** Нельзя. Наименьшее число треугольников, на которое можно разбить невыпуклый 17-угольник, равно шести.

**86.** Разрежьте фигуру на части, подобные исходной.

**87.** Сторона квадрата должна быть равна  $a\sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ , где  $a$  — сторона квадратов, образующих крест.

**88.** Пусть сторона большего квадрата равна  $a$ , а меньшего —  $b$ . Разрежьте больший квадрат на четыре части двумя взаимно перпендикулярными прямыми, проходящими через центр квадрата и разбивающими стороны квадрата на отрезки длиной в  $\frac{a+b}{2}$  и  $\frac{a-b}{2}$ .

**89.** Предварительно из правильного треугольника сложите прямоугольник.

**90.** Можно использовать решение задачи 88.

**92.** Предварительно разрежьте параллелепипед на две части и сложите из них параллелепипед с отношением сторон 8 : 12 : 18.

**93.** Основаниями пирамид служат три грани куба, имеющие общую вершину.

**95.** Разбейте третий многоугольник обоими семействами разрезов: как разбивающими его на части, из которых можно сложить первый многоугольник, так и разбивающими его на части, из которых можно сложить второй многоугольник.

**96.** б) Разрежьте каждый из треугольников так, чтобы из образовавшихся частей можно было сложить прямоугольник.

**97.** Предварительно разбейте оба многоугольника на треугольники.

- 98.** а) Воспользуйтесь утверждением задачи 96, а.  
б) Сначала превратите наклонную призму в прямую.

**99.** Докажите предварительно, что произвольный тетраэдр можно разбить на многогранники, имеющие плоскость симметрии, для чего используйте утверждение задачи 40.

**100.** Воспользуйтесь результатом задачи 117.

**102.** а), б), в) Рассмотрите положение наименьшего из квадратов.

г), д) Опираясь на результаты задач пунктов а), б) и в), рассмотрите все возможные конфигурации.

**103.** а) Возможны только два (с точностью до подобия) набора девяти квадратов, из которых можно сложить прямоугольник; стороны этих квадратов имеют отношения

$$1 : 4 : 7 : 8 : 9 : 10 : 14 : 15 : 18$$

и, соответственно,

$$2 : 5 : 7 : 9 : 16 : 25 : 28 : 33 : 36.$$

в) Докажите это утверждение методом математической индукции.

**105.** Для первого разложения воспользуйтесь решениями задач 103, а и б (см. рис. 189 и 191) на с. 202 и 204.

Второе разложение получить из первого, приложив к рис. 194 (см. с. 206) некоторый прямоугольник с отношением сторон  $256 : 377$ , разбитый на 12 квадратов (см. рис. 195 на с. 207).

**106.** а) Разбейте квадрат со стороной 29 на два квадрата со сторонами 13 и 16 и два прямоугольника со сторонами  $13 \times 16$  и воспользуйтесь результатом задачи 105.

б) Достаточно доказать, что можно найти сколь угодно много различных разложений квадрата на попарно различные квадраты, причем таких, что никакой из квадратов не повторяется дважды в двух различных разложениях. Это доказательство можно получить на следующем пути. Из одного прямоугольника  $P_0$ , который разлагается на квадраты двумя способами, можно получить целую последовательность таких прямоугольников  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ : многоугольник  $P_k$  получается, если сложить два неравных между собой прямоугольника, подобных  $P_{k-1}$ . Можно показать, что если прямоугольник  $P_0$  разлагается двумя способами на попарно неравные квадраты, причем так, что ни один из квадратов, входящих в одно из разложений, не участвует во

втором разложении, то и разложения каждого из прямоугольников  $P_k$  на квадраты обладают теми же свойствами (доказательство этого утверждения является самым трудным местом в решении задачи). Наконец, аналогично решению задачи а) отсюда выводится, что существует бесконечно много различных разложений квадрата на попарно неравные квадраты, удовлетворяющих сформулированным в начале указания требованиям, при этом надо еще воспользоваться тем, что с увеличением номера  $k$  прямоугольники  $P_k$  делаются сколь угодно «узкими».

**107.** Пусть прямоугольник  $P$  со сторонами  $a$  и  $b$  составлен определенным образом из конечного числа квадратов со сторонами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (слова «определенным образом» означают, что нам известно относительное расположение квадратов внутри прямоугольника). В таком случае величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будут удовлетворять некоторой системе уравнений первой степени, которую можно получить, если воспользоваться тем, что длина каждого сечения прямоугольника, параллельного одной из его сторон, равна  $a$  или  $b$ . Каждая такая система может, вообще говоря, иметь одно решение, бесконечно много решений или вовсе не иметь решений. Докажите, что в нашем случае второй случай вовсе не может иметь места, а первый случай может иметь место только тогда, если стороны  $a$  и  $b$  прямоугольника соизмеримы. При доказательстве воспользуйтесь тем, что сумма площадей всех квадратов равна площади прямоугольника.

**108.** Предположив противное, рассмотрите ломаные  $ABCD$ , обладающие следующими свойствами:

1)  $A, B, C$  и  $D$  — вершины правильных треугольников разбиения, а отрезки  $AB, BC$  и  $CD$  целиком состоят из сторон таких треугольников;

2) точки  $A$  и  $D$  лежат по одну сторону прямой  $BC$ ;

3)  $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$ .

Докажите, что если правильные треугольники разбиения попарно различны, то не существует ломаной  $ABCD$ , у которой длина отрезка  $BC$  принимала бы наименьшее значение.

**109.** а) Рассмотрите, как могут быть приложены кубы к наименьшему из кубов, примыкающему к какой-либо грани.

б), в), г) Воспользуйтесь утверждением задачи 108.

д) Воспользуйтесь тем, что угол правильного пятиугольника равен  $108^\circ$ .

**110.** а) Докажите предварительно, что  $180^\circ$  не делится нацело на величину двугранного угла правильного тетраэдра.



б) Докажите предварительно, что  $180^\circ$  не делится нацело на величину двугранного угла правильного октаэдра.

**111.** а) Сложите из четырех правильных тетраэдров и одного правильного октаэдра с одинаковым ребром  $a$  правильный тетраэдр с ребром  $2a$ .

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

**112.** Докажите, что если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то для каждой его стороны найдется другая, ей параллельная.

**113.** а) При доказательстве утверждения задачи воспользуйтесь методом математической индукции.

б)  $\frac{k(k-1)}{2}$ .

**114.** Докажите, что стороны многоугольника, смежные с параллельными сторонами  $l_i$  и  $l_k$  (и расположенные по одинаковую сторону от  $l_i$  и  $l_k$  при определенном направлении обхода контура многоугольника) сами параллельны. Для невыпуклых многоугольников утверждение задачи неверно.

**115.** Примените утверждение задачи 114.

**116.** Рассмотрите «зону» граней, плоскости которых параллельны данному ребру многогранника. Такая зона является замкнутой несамопересекающейся цепочкой граней, причем общее ребро двух соседних граней параллельно исходному ребру. Если одна грань принадлежит одновременно двум зонам, то эти зоны пересекаются. Отсюда следует, что эти зоны имеют еще одну общую грань. Выведите отсюда, что у всякой грани многогранника найдется равная и параллельная. При доказательстве используются соображения, сходные с приведенными в решении задачи 114.

**117.** При доказательстве утверждения задачи воспользуйтесь методом математической индукции.

**118.** Воспользуйтесь утверждением задачи 115.

**119.** Рассмотрите всевозможные «зоны» граней, плоскости которых параллельны данному ребру многогранника.

---