

Л.В. Тарасов

Современный курс физики

МЕХАНИКА

Москва • Оникс • Мир и Образование

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я72
Т19

Тарасов Л. В.

Т19 Современный курс физики. Механика / Л. В. Тарасов. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009. — 592 с.: ил.

ISBN 978-5-488-02030-6 (ООО «Издательство Оникс»)

ISBN 978-5-94666-505-6 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Данный курс физики включает кинематику материальной точки, динамику поступательного движения, а также механику твёрдого тела, гидроаэромеханику, механические колебания и волны. Будучи предназначен в первую очередь для школьников (начиная с 7-го класса), он в то же время содержит объём информации, превосходящий принятый в существующих школьных учебниках. Изложение материала сочетает в себе строгость и систематичность, занимательность и обстоятельность, раскрывающие для читателя красоту и логику физики. Теоретический материал органически соединяется с методикой решения задач, представленных в большом количестве.

Учебное пособие предназначено учащимся школ, гимназий, лицеев, колледжей (особенно при углублённом изучении физики). Может быть полезно абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам в вуз.

**УДК 53(075.3)
ББК 22.3я72**

ISBN 978-5-488-02030-6 (ООО «Издательство Оникс»)

ISBN 978-5-94666-505-6 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

© Тарасов Л. В., 2009

© Оформление переплета. ООО «Издательство Оникс», 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	11
Глава 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.	12
1.1. Механическое движение	12
1.2. Средняя путевая скорость и средняя скорость по перемещению	15
1.3. Мгновенная скорость	17
1.3.1. Мгновенная скорость как предел последовательности средних скоростей по перемещению. 1.3.2. Прямолинейное движение: зависимости $v(t)$ и $x(t)$.	
1.4. Ускорение	20
1.4.1. Среднее ускорение и мгновенное ускорение. 1.4.2. Центро-стремительное ускорение. 1.4.3. Касательное (тангенциальное) ускорение. 1.4.4. Угловая скорость точки, движущейся по окружности.	
1.5. Движение с постоянным ускорением (равнопеременное движение)	26
1.5.1. Зависимость мгновенной скорости от времени. 1.5.2. Прямолинейное равнопеременное движение. 1.5.3. Графики мгновенной скорости и перемещения. 1.5.4. Криволинейное равнопеременное движение (принцип сложения движений).	
1.6. Свободное падение тела вблизи земной поверхности	32
1.6.1. Ускорение свободного падения. 1.6.2. Свободное падение по прямолинейной траектории. 1.6.3. Свободное падение по параболической траектории.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	40
Глава 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	43
2.1. Инерция и инерциальные системы отсчета	43
2.1.1. Закон инерции (первый закон Ньютона). 2.1.2. Инерциальные системы отсчета. 2.1.3. Принцип относительности Галилея.	
2.2. Сила и ускорение	46
2.2.1. Сила, приложенная к телу, как мера действия на него другого тела. 2.2.2. Связь между ускорением и силой (второй закон Ньютона). 2.2.3. Импульс тела и второй закон Ньютона. 2.2.4. Масса тела как мера его инертности. 2.2.5. Второй закон Ньютона как необходимое условие су-	

шествования «памяти о прошлом». 2.2.6. Принцип независи- мости действия сил. 2.2.7. Силы, которые не являются си- лами. 2.2.8. Измерение силы с помощью динамометра.	
2.3. Силы в механике.	61
2.3.1. Сила тяжести и центр тяжести. 2.3.2. Силы упру- гости и деформация тел. 2.3.3. Силы трения. 2.3.4. Роль сил трения. 2.3.5. Силы сопротивления при движении те- ла в жидкости или газе. 2.3.6. Вывод формулы для силы сопротивления. 2.3.7. Падение тела в воздухе.	
2.4. Действие и противодействие	71
2.4.1. Парное возникновение сил. 2.4.2. Третий закон Ньютона — закон равенства действия и противодействия. 2.4.3. Силы реакции как противодействия. 2.4.4. Вес тела. 2.4.5. Всегда ли вес тела равен силе тяжести? 2.4.6. Роль силы трения покоя в возникновении движения.	
2.5. Неинерциальные системы отсчета и силы инерции . . .	86
2.5.1. Специфика рассмотрения движения в неинерциаль- ных системах отсчета (силы инерции). 2.5.2. Неинерциаль- ные системы отсчета, движущиеся прямолинейно с по- стоянным ускорением. 2.5.3. Центробежная сила инерции. 2.5.4. Сила Кориолиса во вращающихся системах отсчета. 2.5.5. Вывод выражения для силы Кориолиса в частном случае. 2.5.6. Закон Бэра.	
2.6. Закон сохранения импульса в механике	95
2.6.1. Изменение импульса системы тел. 2.6.2. Закон со- хранения импульса. 2.6.3. Абсолютно неупругие соударе- ния. 2.6.4. Явление отдачи. 2.6.5. От явления отдачи к реак- тивному движению и формуле Мещерского. 2.6.6. Движе- ние центра масс системы тел.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	104
Глава 3. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА: СТАТИКА	107
3.1. Момент силы	108
3.1.1. Момент силы относительно точки. 3.1.2. Сложение мо- ментов сил. 3.1.3. Момент силы относительно оси. 3.1.4. Па- ра сил.	
3.2. Равновесие твердого тела	114
3.2.1. Перенос точки приложения силы вдоль ее линии действия. 3.2.2. Перенос точек приложения сил в общем случае. 3.2.3. Два условия равновесия твердого тела. 3.2.4. Почему брусок не опрокидывается на наклонной плоскости? 3.2.5. Виды равновесия тела.	
3.3. Сложение параллельных сил, находящихся в одной плоскости.	123
3.3.1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону. 3.3.2. Сложение двух параллельных сил, на- правленных в противоположные стороны. 3.3.3. Обобщение на случай многих параллельных сил.	

3.4.	Координаты центра тяжести твердого тела	129
3.4.1.	Центр тяжести системы материальных точек, расположенных на прямой линии.	
3.4.2.	Центр тяжести двумерной системы материальных точек.	
3.4.3.	Центр тяжести тела в общем случае.	
3.4.4.	Центр тяжести и центр масс тела.	
3.5.	Простые механизмы	137
3.5.1.	Рычаги.	
3.5.2.	Блоки.	
3.5.3.	Ворот.	
3.5.4.	Наклонная плоскость.	
3.5.5.	Винт.	
	Вопросы и задачи для самоконтроля	148
Глава 4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА:		
	КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА	152
4.1.	Кинематика твердого тела	152
4.1.1.	Общие замечания о движении твердого тела.	
4.1.2.	Вращение тела вокруг неподвижной оси.	
4.1.3.	Плоское (плоскопараллельное) движение тела.	
4.1.4.	Импульс твердого тела.	
4.2.	Динамика вращательного движения	162
4.2.1.	Основной закон динамики вращательного движения.	
4.2.2.	Момент инерции тела.	
4.2.3.	Теорема Штейнера для момента инерции тела.	
4.2.4.	Учет динамики вращения блока.	
4.3.	Момент импульса в механике	172
4.3.1.	Момент импульса материальной точки.	
4.3.2.	Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения.	
4.3.3.	Момент импульса в основном законе динамики вращательного движения.	
4.4.	Вращение вокруг главной оси инерции тела	177
4.4.1.	Главные оси инерции и главные моменты инерции твердого тела.	
4.4.2.	Векторы момента импульса и угловой скорости.	
4.4.3.	Вращательный дисбаланс.	
4.5.	Основной закон динамики вращательного движения в векторном виде	182
4.6.	Закон сохранения момента импульса в механике	188
4.6.1.	Закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг закрепленной оси.	
4.6.2.	Закон сохранения момента импульса тела в векторном виде.	
4.6.3.	Гироскоп.	
4.6.4.	Прецессия волчка.	
4.7.	Динамика плоского движения	196
4.7.1.	Основные уравнения динамики твердого тела.	
4.7.2.	Основные уравнения динамики плоского движения.	
4.7.3.	Скатывание цилиндра (колеса) по наклонной плоскости.	
4.7.4.	Скатывание шара по наклонной плоскости.	
4.7.5.	Условие отсутствия проскальзывания катящегося тела.	
4.7.6.	Почему останавливаются шар и цилиндр, катящиеся по горизонтальной плоскости?	
	Вопросы и задачи для самоконтроля	206

Глава 5. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ	210
5.1. Что есть энергия?	210
5.1.1. «Энергейя» в переводе с греческого означает «деятельность». 5.1.2. Энергия существует в разных видах и превращается из одного вида в другой. 5.1.3. Энергия способна накапливаться и храниться. 5.1.4. Энергия как общая мера различных форм движения материи.	
5.2. Работа силы	214
5.2.1. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути. 5.2.2. Работа нескольких постоянных сил. 5.2.3. Работа переменной силы на произвольном участке пути. 5.2.4. Работа постоянной силы на произвольном участке пути. 5.2.5. Графическое представление работы переменной силы на прямолинейном участке пути. 5.2.6. Работа силы упругости. 5.2.7. Мощность.	
5.3. От работы к энергии и от энергии к работе	224
5.3.1. «Золотое правило» механики и «принцип сохранения работы». 5.3.2. Можно ли заставить в теле способность совершать работу? 5.3.3. Энергия тела как его способность совершать работу.	
5.4. Кинетическая энергия	229
5.4.1. Теорема об изменении кинетической энергии. 5.4.2. Обобщение на случай работы переменной силы. 5.4.3. Соударение абсолютно упругих шаров. 5.4.4. Импульс тела и кинетическая энергия в классической механике Ньютона. 5.4.5. Релятивистская масса, релятивистский импульс, полная энергия тела. 5.4.6. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. 5.4.7. Вращательный аналог теоремы об изменении кинетической энергии. 5.4.8. Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение.	
5.5. Потенциальная энергия	244
5.5.1. Консервативные силы. 5.5.2. Теорема об изменении потенциальной энергии. 5.5.3. Работа силы тяжести и потенциальная энергия тела, поднятого над землей. 5.5.4. Работа силы упругости и потенциальная энергия деформированной пружины. 5.5.5. Нулевой уровень потенциальной энергии. 5.5.6. Потенциальная энергия — энергия взаимодействия тел или частей тела.	
5.6. Сохранение механической энергии в замкнутых системах с консервативными силами	253
5.6.1. Механическая энергия. 5.6.2. Закон сохранения механической энергии. 5.6.3. Примеры, иллюстрирующие закон сохранения механической энергии. 5.6.4. Изменение механической энергии под действием внешней силы. 5.6.5. Взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий при сохранении механической энергии. 5.6.6. При-	

менение закона сохранения механической энергии при решении задач.	
5.7. Сохраняется ли энергия при наличии неконсервативных сил?	269
5.7.1. Уменьшение механической энергии тела (системы тел) под действием неконсервативных сил. 5.7.2. Внутренняя энергия. 5.7.3. Превращение механической энергии во внутреннюю. 5.7.4. Внутренняя энергия и энергия покоя. 5.7.5. Учет внутренней энергии как выход за рамки механики.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	279
Глава 6. ГРАВИТАЦИЯ	283
6.1. Законы Кеплера	283
6.1.1. Первый закон Кеплера (эллиптическая форма планетных орбит). 6.1.2. Второй закон Кеплера (неравномерность движения по орбите). 6.1.3. Третий закон Кеплера (зависимость периода обращения планеты от ее расстояния до Солнца).	
6.2. Гравитационное взаимодействие	287
6.2.1. Общая природа силы тяжести и силы, удерживающей Луну на орбите. 6.2.2. Закон всемирного тяготения. 6.2.3. Гравитационная постоянная. 6.2.4. Сила тяжести и гравитационное взаимодействие. 6.2.5. Сила тяготения внутри земного шара. 6.2.6. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия.	
6.3. Использование закона всемирного тяготения в астрономии	302
6.3.1. Определение масс небесных тел. 6.3.2. Определение расстояний планет от Солнца. 6.3.3. Период обращения Луны вокруг Земли и расстояние до Луны. 6.3.4. Закон всемирного тяготения как основа небесной механики.	
6.4. Движение под действием силы тяготения	309
6.4.1. Первая космическая скорость и движение по круговым орбитам. 6.4.2. Движение по эллиптическим орбитам. 6.4.3. Переходы между круговыми орбитами. 6.4.4. Вторая космическая скорость. 6.4.5. Третья космическая скорость. 6.4.6. Начальные скорости и время полета космических зондов, запускаемых к планетам Солнечной системы.	
6.5. Гравитационный маневр	328
6.5.1. Полеты к планетам с использованием гравитационных маневров. 6.5.2. Изменение направления скорости зонда при гравитационном маневре. 6.5.3. Изменение модуля скорости зонда при гравитационном маневре.	
6.6. Что есть тяготение?	336
6.6.1. «Гипотезе не измышляю...» 6.6.2. Гравитационное поле (поле тяготения). 6.6.3. Принцип эквивалентности. 6.6.4. Объяснение природы гравитации в общей теории относительности.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	344

Глава 7. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ (ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА)	349
7.1. Давление в гидроаэромеханике	349
7.1.1. Силы давления твердого тела и силы давления в жидкости. 7.1.2. Сила давления на элемент поверхности и давление в точке. 7.1.3. Закон Паскаля. 7.1.4. Гидростатическое давление. 7.1.5. Сообщающиеся сосуды. 7.1.6. Атмосферное давление.	
7.2. Выталкивающая сила и плавание тел	373
7.2.1. Закон Архимеда. 7.2.2. Гидростатическое взвешивание. 7.2.3. Условия плавания тел. 7.2.4. Остойчивость судов. 7.2.5. Свободная конвекция.	
7.3. Механика поверхности жидкости	386
7.3.1. Поверхностная энергия и поверхностное натяжение. 7.3.2. Сила поверхностного натяжения. 7.3.3. Давление в жидкости под изогнутой свободной поверхностью. 7.3.4. Смачивание и несмачивание. 7.3.5. Капиллярные явления.	
7.4. Течение идеальной жидкости	402
7.4.1. О жидкости в гидродинамике и газодинамике. 7.4.2. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности. 7.4.3. Уравнение Бернулли. 7.4.4. Следствия из уравнения Бернулли. 7.4.5. Трубка Пито — Прандтля. 7.4.6. Сила реакции текущей жидкости.	
7.5. Течение реальной жидкости	413
7.5.1. Вязкость (внутреннее трение). 7.5.2. Ламинарное и турбулентное течения. Число Рейнольдса. 7.5.3. Лобовое сопротивление при обтекании тел вязкой жидкостью. 7.5.4. Подъемная сила крыла авиалайнера. 7.5.5. Эффект Магнуса.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	423
Глава 8. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	427
8.1. Виды колебаний	427
8.1.1. Общие замечания. 8.1.2. Свободные (собственные) колебания. 8.1.3. Вынужденные колебания. 8.1.4. Автоколебания. 8.1.5. Виды колебаний с точки зрения кинематики.	
8.2. Кинематика гармонических колебаний	434
8.2.1. Гармонические колебания. 8.2.2. Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности. 8.2.3. Графики смещения, скорости, ускорения при гармонических колебаниях. 8.2.4. Определение амплитуды и начальной фазы из начальных условий.	
8.3. Динамика гармонических колебаний	440
8.3.1. Динамическое определение гармонических колебаний. 8.3.2. Сила упругости и гармонические колебания. 8.3.3. Гармонические колебания математического маятника.	

ка. 8.3.4. Гармонические колебания комбинированного маятника. 8.3.5. Колебания маятника в неинерциальной системе отсчета.	
8.4. Энергетические превращения без учета трения	452
8.4.1. Превращения энергии при гармонических колебаниях. 8.4.2. Превращения энергии математического маятника. 8.4.3. Изменения модуля силы натяжения нити при колебаниях маятника.	
8.5. Вынужденные колебания под действием синусоидальной внешней силы	457
8.5.1. Степень затухания свободных колебаний и добротность колебательной системы. 8.5.2. Уравнение движения для вынужденных колебаний. 8.5.3. Амплитуда и сдвиг фазы вынужденных колебаний в случае, когда силу трения не учитывают. 8.5.4. Резонанс. 8.5.5. Резонансные кривые. 8.5.6. Время установления вынужденных колебаний.	
8.6. Сложение гармонических колебаний	467
8.6.1. Сложение колебаний одинаковой частоты. 8.6.2. Сложение колебаний с близкими частотами (биения). 8.6.3. Сложение колебаний с кратными частотами. 8.6.4. Разложение Фурье.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	474
Глава 9. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ	477
9.1. Волновое движение	477
9.1.1. Волны упругие и поверхностные. 9.1.2. Особенности волнового движения. 9.1.3. Идеализированный эксперимент: рождение упругой волны. 9.1.4. Моделирование поперечной и продольной плоских волн. 9.1.5. Общая формулировка закона Гука; модули упругости. 9.1.6. Скорость волны.	
9.2. Плоская бегущая волна	491
9.2.1. Уравнение бегущей волны. 9.2.2. Как быстро изменяется смещение со временем и при изменении пространственной координаты? 9.2.3. Плотность энергии в бегущей волне. 9.2.4. Плотность потока энергии, переносимого бегущей волной (интенсивность волны).	
9.3. Стоячая волна	500
9.3.1. Уравнение стоячей волны. 9.3.2. Отражение с потерей полуволны и без потери полуволны. 9.3.3. Мгновенные распределения скоростей частиц и относительной деформации среды в стоячей волне. 9.3.4. Плотность энергии в стоячей волне. 9.3.5. Колебания упругих тел как стоячие волны.	
9.4. Интерференция волн	513
9.4.1. Принцип суперпозиции и явление интерференции волн. 9.4.2. Интерференция от двух точечных источников: условия интерференционных максимумов и минимумов.	

9.4.3. Интерференция от двух точечных источников: интерференционная картина как совокупность гиперболоидов вращения. 9.4.4. Фигуры Хладни.	
9.5. Звук.	523
9.5.1. Объективные и субъективные характеристики звука.	
9.5.2. Излучение звука и его скорость. 9.5.3. Акустический резонанс. 9.5.4. Затухание плоской звуковой волны.	
9.5.5. Ультразвук и инфразвук. 9.5.6. Эхолокация у летучих мышей и дельфинов.	
9.6. Эффект Доплера в акустике.	534
9.6.1. Общие замечания. 9.6.2. Случаи, когда источник звука покоится. 9.6.3. Случаи, когда приемник звука покоится.	
9.6.4. Случаи, когда приемник и источник звука движутся навстречу или удаляются друг от друга. 9.6.5. Общая формула, описывающая эффект Доплера в акустике.	
9.7. Принцип Гюйгенса и некоторые волновые явления	542
9.7.1. Принцип Гюйгенса. 9.7.2. Закон отражения волн. 9.7.3. Закон преломления волн. 9.7.4. Возникновение звуковой ударной волны при полете сверхзвукового самолета.	
9.8. Сейсмические волны	548
9.8.1. Типы землетрясений. 9.8.2. Созревание и возникновение тектонического землетрясения. 9.8.3. Сейсмические волны, возникающие при землетрясении. 9.8.4. Оценка «силы землетрясения»: баллы и магнитуда. 9.8.5. Связь между значением магнитуды, глубиной гипоцентра землетрясения и количеством баллов в эпицентре. 9.8.6. Сейсмическое пролушивание земного шара.	
Вопросы и задачи для самоконтроля	561
Приложение	565
А. Элементы тригонометрии	565
А.1. Основные тригонометрические тождества. А.2. Тригонометрические функции.	
Б. Элементы векторной алгебры	573
Б.1. Задание вектора. Б.2. Сложение, вычитание, разложение векторов. Б.3. Скалярное произведение двух векторов. Б.4. Векторное произведение двух векторов.	
Ответы на вопросы и задачи для самоконтроля	583

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Современный курс физики» предназначен, прежде всего, для школьников. Он отличается четкостью и обстоятельностью изложения материала, что позволит достаточно ясно представить, как формируются и «работают» физические понятия, как используются физические закономерности при решении и анализе конкретных задач. С учетом современного уровня развития научного знания, современный курс физики должен, по мнению автора, содержать объем информации, превосходящий тот, что принят в стандартных школьных учебниках, а также учитывать наиболее важные достижения в развитии техники, в том числе современной, и уделять существенное внимание физике различных природных явлений.

Данная книга посвящена механике и состоит из девяти глав. 1. Кинематика материальной точки. 2. Динамика поступательного движения. 3. Механика твердого тела: статика. 4. Механика твердого тела: кинематика и динамика. 5. Работа и энергия. 6. Гравитация. 7. Механика жидкостей и газов (гидроаэромеханика). 8. Механические колебания. 9. Механические волны. Изложение материала в курсе сочетает в себе строгость и систематичность, присущие серьезным учебникам, занимательность и привлекательность для читателя, присущие хорошим научно-популярным изданиям, органическое соединение теории с методикой решения задач. В тексте проанализированы решения более 100 задач. В конце каждой главы даны «Вопросы и задачи для самоконтроля». В Приложении приведены необходимые сведения по тригонометрии и векторной алгебре.

Может использоваться в качестве учебного пособия в школах, гимназиях, лицеях, колледжах (особенно в классах с углубленным изучением физики), на курсах по подготовке абитуриентов, систематизированного самоучителя по физике.

* * *

Предлагая вниманию читателя данную книгу, автор выражает глубокую благодарность своим учителям, раскрывшим перед ним увлекательный мир физики: Ивану Васильевичу Обреимову, Аркадию Бейнусовичу Мигдала, Исааку Яковлевичу Померанчуку, Валентину Александровичу Фабриканту, Исаю Израилевичу Гуревичу, Аркадию Ароновичу Пинскому, Геннадию Яковлевичу Мякишеву. Автор искренне благодарит Тарасову Татьяну Борисовну за неизменную поддержку и помощь в работе над книгой.



КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Механическое движение тела есть процесс изменения с течением времени положения данного тела в пространстве. Механическое движение *относительно*, поскольку положение тела в пространстве можно определить только *по отношению* к какому-либо другому телу, которое можно рассматривать в качестве *тела отсчета*. С телом отсчета жестко связывают систему координат, позволяющую определить координаты тела в различные моменты времени. Тело отсчета вместе с системой координат называют *системой отсчета*. Всякий раз механическое движение наблюдают (рассматривают) в той или иной системе отсчета. Как мы неоднократно убедимся позднее, одно и то же движение выглядит по-разному в разных системах отсчета.

Как правило, будем использовать систему отсчета, связанную с Землей; ее называют *геоцентрической системой* или, проще, *лабораторной системой отсчета*. Условимся: если система отсчета в той или иной задаче не оговорена, то это означает, что задача рассматривается в лабораторной системе отсчета.

Исследуя механическое движение, физики заменяют реальные тела их упрощенными *моделями* — идеализированными объектами, в которых пренебрегают деталями и свойствами реальных тел, несущественными в рассматриваемой задаче. В зависимости от условий конкретной задачи используют модели *материальной точки*, *абсолютно твердого тела*, *абсолютно упругого тела*, *абсолютно неупругого тела*. В дальнейшем основное внимание будет уделено моделям материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка — это абстрактное тело, обладающее массой реального тела, но не имеющее размеров. Когда можно пренебрегать размерами реального тела и использовать модель материальной точки? Напрашивается простой ответ: тогда, когда размеры тела много меньше расстояний, характерных для рас-

сма­три­вае­мо­го в дан­ной за­да­че дви­же­ния. Так, дви­же­ние Зем­ли по ор­бите во­круг Солн­ца мож­но рас­сма­три­вать как дви­же­ние ма­те­ри­аль­ной точ­ки, по­сколь­ку ди­аметр зем­но­го ша­ра при­мер­но в 12 ты­сяч раз мень­ше ра­ди­уса зем­ной ор­би­ты.

Од­на­ко по­доб­ное за­клю­че­ние не со­всем ко­рек­тно. Ис­поль­зо­ва­ние мо­де­ли ма­те­ри­аль­ной точ­ки пра­во­мер­но то­гда, ко­гда те­ло дви­жет­ся по­ступатель­но или ко­гда вра­щатель­ную со­став­ляю­щую его дви­же­ния мож­но в рас­сма­три­вае­мой за­да­че не учи­ты­вать. *По­ступатель­ным* на­зы­ва­ют дви­же­ние, при ко­то­ром все точ­ки те­ла дви­жут­ся по оди­на­ко­вым траек­то­ри­ям; при та­ком дви­же­нии пря­мая, про­ве­ден­ная мы­слен­но че­рез две про­из­воль­ные точ­ки те­ла, пе­ре­ме­ща­ет­ся парал­лель­но са­мой се­бе.

Дру­гим про­стым ви­дом дви­же­ния те­ла яв­ля­ет­ся его вра­ще­ние (*вра­щатель­ное* дви­же­ние). В этом слу­чае все точ­ки те­ла опи­сы­ва­ют ок­ру­ж­но­сти в парал­лель­ных плос­ко­стях с цен­тра­ми, на­хо­дя­щи­ми­ся на од­ной пря­мой — на оси вра­ще­ния. Ось вра­ще­ния пер­пен­ди­ку­ляр­на упо­мя­ну­тым парал­лель­ным плос­ко­стям. В об­щем слу­чае дви­же­ние те­ла мож­но рас­сма­три­вать как *на­ло­же­ние вра­щатель­но­го дви­же­ния на по­ступатель­ное*. На­при­мер, дви­же­ние зем­но­го ша­ра мож­но пред­став­лять как на­ло­же­ние вра­щатель­но­го дви­же­ния ша­ра во­круг соб­ствен­ной оси на его по­ступатель­ное дви­же­ние по ор­бите во­круг Солн­ца.

Ес­ли, по ус­ло­вию за­да­чи, не тре­бу­ет­ся при­нимать во вни­ма­ние вра­ще­ние зем­но­го ша­ра во­круг своей оси, то в этом слу­чае Зем­лю на ор­бите мож­но пред­став­лять ма­те­ри­аль­ной точ­кой. Ес­ли же в за­да­че рас­сма­три­ва­ют кли­матиче­ские по­яса Зем­ли или смену вре­мен го­да, то мо­дель ма­те­ри­аль­ной точ­ки не го­дит­ся, по­сколь­ку не­об­хо­ди­мо учи­ты­вать вра­ще­ние Зем­ли во­круг оси, на­клонен­ной оп­ре­де­лен­ным об­ра­зом к плос­ко­сти ор­би­ты. А вот дру­гой при­мер: ре­бе­нок на сан­ках скат­ыва­ет­ся с гор­ки. Раз­ме­ры гор­ки и санок с ре­бен­ком при­мер­но оди­на­ко­вы. Тем не менее мы мож­ем вос­поль­зо­вать­ся мо­де­лью ма­те­ри­аль­ной точ­ки, ес­ли гор­ка не слиш­ком кру­тая и ис­клю­ча­ет­ся пе­ре­во­ра­чи­ва­ние санок во вре­мя спус­ка. Па­де­ние до­жде­вой кап­ли с вет­ки де­ре­ва мож­но рас­сма­три­вать, ис­поль­зуя мо­дель ма­те­ри­аль­ной точ­ки. Но эта мо­дель не­при­год­на для опи­са­ния па­де­ния ли­ста, отор­вав­ше­го­ся с той же вет­ки. Бро­са­ние об­ыч­но­го кам­ня под уг­лом к го­ри­зон­ту вполне мож­но рас­сма­три­вать, ис­поль­зуя мо­дель ма­те­ри­аль­ной точ­ки. Но эта мо­дель со­вер­шен­но не го­дит­ся при бро­са­нии бу­ме­ран­га.

Впро­чем, от­нюдь не всегда от­сут­ствие вра­щатель­но­го дви­же­ния яв­ля­ет­ся до­ста­точ­ным ус­ло­ви­ем при­ме­нимости мо­де­ли ма­те­ри­аль­ной точ­ки. Так, не­льзя прене­бре­гать раз­ме­рами те­ла в за­да­чах, ис­сле­ду­ю­щих рав­но­ве­сие те­ла. В по­доб­ных слу­чаях ис­поль­зуют ли­бо мо­дель аб­со­лют­но твер­до­го те­ла, ли­бо мо­дель аб­со­лют­но упру­го­го те­ла.

Аб­со­лют­но твер­дым те­лом на­зы­ва­ют те­ло, де­фор­ма­цией ко­то­ро­го мож­но прене­бречь в ус­ло­ви­ях дан­ной за­да­чи. Во вре­мя

движения такого тела сохраняются неизменными расстояния между любыми двумя его точками. *Абсолютно упругим телом* называют тело, размеры и форма которого полностью восстанавливаются после прекращения внешнего воздействия, вызвавшего деформацию тела. Такая модель применяется, например, при расчетах ферм моста. А вот *абсолютно неупругое тело*, напротив, полностью сохраняет деформированное состояние, вызванное внешним воздействием.

Раздел физики, занимающийся изучением механических явлений, т. е. явлений, связанных с механическими движениями тел, называется *механикой*. В более узком смысле слова под механикой понимают *классическую механику*. Она изучает механические движения макроскопических тел (тел, состоящих из очень большого числа атомов или молекул), совершающиеся со скоростями, которые во много раз меньше скорости света. В основе классической механики лежат законы Ньютона, поэтому ее называют также *ньютоновской механикой*. Движения тел со скоростями, близкими к скорости света, изучает *релятивистская механика*. Движения микрочастиц (например, электронов в атомах, молекулах, кристаллах) изучает *квантовая механика*.

Классическую механику подразделяют на кинематику, динамику, статику. *Кинематика* (от греческого *kinema* — «движение») описывает различные виды механического движения, не рассматривая причин возникновения движения. Этими причинами являются силовые взаимодействия между телами. Их исследует *динамика* (от греческого *dynamicis* — «сила»). Равновесие тел рассматривает *статику* (от греческого *statos* — «неподвижный»), которая представляет собой, по сути, частный случай динамики.

Изучение механического движения в классической механике начнем с рассмотрения *кинематики материальной точки*. Фактически речь пойдет о кинематике поступательного движения тел, представляемых материальными точками.

В зависимости от вида *траектории*, описываемой движущейся материальной точкой, различают *прямолинейные* и *криволинейные* движения. Важный частный случай криволинейного движения — движение точки по окружности.

Подчеркнем, что форма траектории материальной точки *зависит от выбора системы отсчета*. Траектория одного и того же движения различна в разных системах отсчета. Допустим, тело падает со столика вагона, который движется с некоторой скоростью. Траектория этого тела в системе отсчета, связанной с вагоном, будет прямой линией. А траектория того же тела в системе отсчета, связанной с железнодорожным полотном (иначе говоря, в лабораторной системе отсчета), будет иметь форму *параболы*. Такую же параболу описал бы камень, брошенный горизонтально в направлении движения вагона. В качестве еще одного примера рассмотрим траекторию точки, находящейся на ободке колеса

велосипеда, движущегося по плоскости. В системе отсчета, связанной с рамой велосипеда, траектория точки будет иметь форму окружности. А в лабораторной системе отсчета траектория точки будет иметь форму кривой, называемой *циклоидой* (рис. 1.1).



Рис. 1.1

Как прямолинейные, так и криволинейные движения могут быть *равномерными* либо *неравномерными*. Это связано со скоростью движения точки (точнее говоря, с модулем скорости).

1.2. СРЕДНЯЯ ПУТЕВАЯ СКОРОСТЬ И СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ

Понятие *скорости* — одно из главных понятий в кинематике. Читателю наверняка известно, что скорость — это физическая величина, показывающая насколько быстро (или насколько медленно) перемещается в пространстве движущееся тело. Разумеется, речь идет о перемещении в выбранной системе отсчета. Известно ли, однако, читателю, что используются не одно, а три понятия скорости? Есть скорость в данный момент времени, называемая *мгновенной скоростью*, и есть два понятия *средней скорости* за данный промежуток времени — *средняя путевая скорость* (по-английски speed) и *средняя скорость по перемещению* (по-английски velocity).

Будем рассматривать материальную точку в системе координат x, y, z (рис. 1.2, а). Положение A точки в момент времени t характеризуем координатами $x(t), y(t), z(t)$, представляющими три составляющих *радиуса-вектора* $\vec{r}(t)$. Точка движется, ее положение в выбранной системе координат с течением времени изменяется — конец радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ описывает кривую,

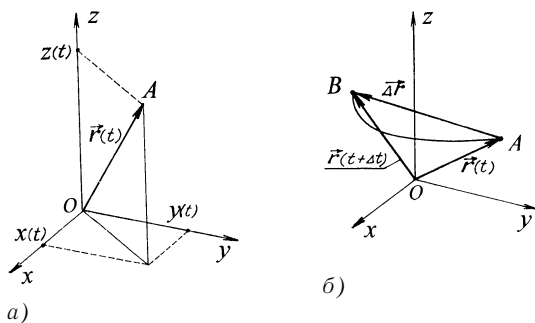


Рис. 1.2

называемую *траекторией* движущейся точки. Траектория, описанная за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, показана на рисунке 1.2, б. Через B обозначено положение точки в момент $t + \Delta t$ (его фиксирует радиус-вектор $\vec{r}(t + \Delta t)$). Пусть Δs — длина рассматриваемой криволинейной траектории, т. е. путь, пройденный точкой за время от t до $t + \Delta t$. *Среднюю путевую скорость* точки за данный промежуток времени определяют соотношением

$$v_n = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Очевидно, что v_n — скалярная величина; она характеризуется только числовым значением.

Показанный на рисунке 1.2, б вектор

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (1.2)$$

называют *перемещением* материальной точки за время от t до $t + \Delta t$. *Среднюю скорость по перемещению* за данный промежуток времени определяют соотношением

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Очевидно, что \vec{v}_{cp} — векторная величина. Направление вектора \vec{v}_{cp} совпадает с направлением перемещения $\vec{\Delta r}$.

Заметим, что в случае прямолинейного движения средняя путевая скорость движущейся точки совпадает с модулем средней скорости по перемещению.

Движение точки по прямолинейной либо криволинейной траектории называют равномерным, если в соотношении (1.1) величина v_n не зависит от Δt . Если, например, уменьшить Δt в 2 раза, то и длина пройденного точкой пути Δs уменьшится в 2 раза. При равномерном движении точка проходит за равные промежутки времени пути равной длины.



Можно ли считать, что при равномерном движении точки от Δt не зависит также вектор \vec{v}_{cp} средней скорости по перемещению?

Так можно считать только в случае прямолинейного движения (при этом, напомним, модуль средней скорости по перемещению равен средней путевой скорости). Если же равномерное движение совершается по криволинейной траектории, то с изменением промежутка усреднения Δt будут изменяться как модуль, так и направление вектора средней скорости по перемещению. При равномерном криволинейном движении равным промежуткам

времени Δt будут соответствовать разные векторы перемещения $\Delta \vec{r}$ (а значит, и разные векторы \vec{v}_{cp}).

Правда, в случае равномерного движения по окружности равным промежуткам времени будут соответствовать равные значения модуля перемещения $|\Delta \vec{r}|$ (а значит, и равные $|\vec{v}_{\text{cp}}|$). Но направле-

ния перемещений $\Delta \vec{r}$ (а значит, и векторов \vec{v}_{cp}) и в данном случае будут различными для одинаковых Δt . Это видно на рисунке 1.3, где равномерно движущаяся по окружности точка описывает за равные промежутки времени равные дуги AB , BC , CD . Хотя векторы перемещений $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$, $\Delta \vec{r}_3$ имеют одинаковые модули, однако направления у них различны, так что о равенстве этих векторов говорить не приходится.

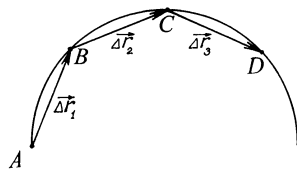


Рис. 1.3

Примечание

Из двух средних скоростей в задачах обычно рассматривают среднюю путевую скорость, а среднюю скорость по перемещению используют довольно редко. Однако она заслуживает внимания, так как позволяет ввести понятие мгновенной скорости.

1.3. МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ

1.3.1. Мгновенная скорость как предел последовательности средних скоростей по перемещению

Не так-то просто представить себе, что такое мгновенная скорость точки (тела) в момент времени t . Скорость характеризует *быстроту перемещения*, однако в тот или иной конкретный момент времени *перемещения как такового нет*. Древние греки не могли представить себе, как можно говорить о скорости тела, рассматривая не промежуток времени, а отдельный момент времени. Они полагали, что проблема движения неразрешима с точки зрения логики, считая, что в каждый момент времени летящая стрела покоится в определенном месте в пространстве и, значит, покоится вообще.

Чтобы ввести понятие мгновенной скорости точки в момент t (обозначим ее через $\vec{v}(t)$), рассмотрим *последовательность* сред-

них скоростей по перемещению за промежутки времени $\Delta t_i = t_i - t$ ($i = 1, 2, 3, \dots$):

$$\frac{\vec{\Delta r}_1}{\Delta t_1}, \frac{\vec{\Delta r}_2}{\Delta t_2}, \frac{\vec{\Delta r}_3}{\Delta t_3}, \dots, \frac{\vec{\Delta r}_i}{\Delta t_i}, \dots \quad (1.4)$$

где

$$\vec{\Delta r}_i = \vec{r}(t + \Delta t_i) - \vec{r}(t). \quad (1.5)$$

В данной последовательности средних скоростей промежутки Δt_i выбираются таким образом, чтобы по мере возрастания номера i они становились все меньше и меньше, *стремясь в пределе к нулю*. Нетрудно понять, что, чем ближе момент времени $t + \Delta t_i$ к моменту t ,

тем ближе вектор средней скорости $\frac{\vec{\Delta r}_1}{\Delta t_1}$ к вектору мгновенной скорости $\vec{v}(t)$. Можно сказать, что мгновенная скорость в момент t приближенно равна средней скорости по перемещению за *достаточно малый* промежуток времени Δt_i . Чтобы избавиться от слова «приближенно», надо найти *предел* последовательности (1.4) при $\Delta t_i \rightarrow 0$.

Этот предел записывают так: $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}_i}{\Delta t_i}$. Он и будет уже не приближенно, а точно равен мгновенной скорости точки в момент t :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}_i}{\Delta t_i}. \quad (1.6)$$

На рисунке 1.4 представлена криволинейная траектория материальной точки. В момент t точка находится в положении A , а в моменты $t + \Delta t_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — в положениях A_1, A_2, A_3, A_4 , соответственно. Напомним, что для каждого промежутка Δt_i направление вектора средней по перемещению скорости совпадает с направлением перемещения. Отсюда заключаем, что получающийся в пределе при $\Delta t_i \rightarrow 0$ вектор мгновенной скорости $\vec{v}(t)$ будет направлен по касательной к траектории в точке A . Так, при движении материальной точки по окружности вектор мгновенной скорости в каждой точке траектории будет ориентирован перпендикулярно к радиусу окружности, проведенному в эту точку. С учетом (1.5) перепишем (1.6) в виде:

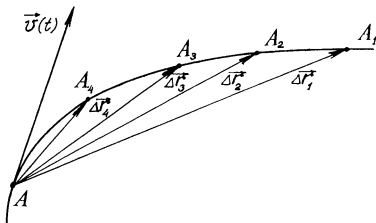


Рис. 1.4

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t_i) - \vec{r}(t)}{\Delta t_i}.$$

Ничто не мешает убрать здесь нумерацию промежутков времени и представить мгновенную скорость в виде предела:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

1.3.2. Прямолинейное движение: зависимости $v(t)$ и $x(t)$

Предположим теперь, что материальная точка движется *прямолинейно*. Выберем направление ее движения в качестве координатной оси Ox . В момент t точка имела координату $x(t)$, а в момент $t + \Delta t$ — координату $x(t + \Delta t)$. Используя (1.7), выразим мгновенную скорость в момент t через предел последовательности средних скоростей по перемещению за промежутки времени Δt :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Поскольку при прямолинейном движении все векторы (перемещение, средняя скорость по перемещению, мгновенная скорость) направлены вдоль одной и той же прямой, то их можно рассматривать как *скалярные* величины.

Если известен график зависимости положения точки от времени $x(t)$, то, используя (1.8), можно найти мгновенную скорость $v(t)$. Предположим, график $x(t)$ имеет вид кривой, представленной на рисунке 1.5.

? Как графически найти мгновенную скорость в момент t_0 ?

Из рисунка видно, что средняя скорость материальной точки за промежутки времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равна

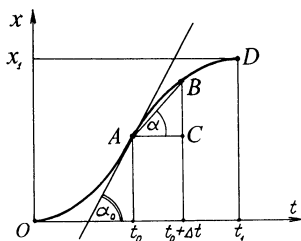


Рис. 1.5

$$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.9)$$

Будем мысленно уменьшать Δt . При этом точка B на графике $x(t)$ будет скользить по кривой, постепенно приближаясь к A . Легко сообразить, что в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ соотношение (1.9) превратится в соотношение

$$v(t_0) = \operatorname{tg} \alpha_0, \quad (1.10)$$

где α_0 — угол наклона касательной к графику $x(t)$, проведенной в точке A , соответствующей моменту времени t_0 . Итак, значение мгновенной скорости $v(t_0)$ выражается тангенсом угла наклона касательной к графику $x(t)$ для момента t_0 .

Вернемся к рисунку 1.5 и попробуем проследить по графику $x(t)$, как именно происходило в данном случае прямолинейное движение материальной точки. Ясно, что движение было неравномерным. Точка начала двигаться в момент $t = 0$. Начиная с этого момента времени и до момента t_0 крутизна графика постепенно возрастает и, значит, мгновенная скорость увеличивалась — вплоть до наибольшего значения, равного $\operatorname{tg} \alpha_0$. В дальнейшем скорость постепенно уменьшалась и при $t = t_1$ обратилась в нуль — тело остановилось (в точке D касательная к графику $x(t)$ ориентирована горизонтально).

Заметим, что кривая на рисунке 1.5 не является траекторией движущейся точки. Траектория в данном случае — отрезок прямой, имеющий длину x_1 .

В случае *равномерного прямолинейного* движения график $x(t)$ имеет весьма простой вид. Обозначим через x_0 координату точки в начальный момент времени (при $t = 0$), а через $x(t)$ — координату точки в момент t . Перемещение за время t имеет вид $x(t) - x_0$, а средняя скорость по перемещению выражается отношением $\frac{x(t) - x_0}{t}$. Так как движение равномерное, то эта средняя скорость не зависит от t (если уменьшить t , скажем, в 2 раза, то в 2 раза уменьшится и перемещение $x(t) - x_0$). Таким образом, отношение $\frac{x(t) - x_0}{t}$ есть величина, не зависящая от t , и может рассматриваться как мгновенная скорость v для любого момента времени:

$$v = \frac{x(t) - x_0}{t}. \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что

$$x(t) = x_0 + vt. \quad (1.12)$$

Итак, при равномерном прямолинейном движении график $x(t)$ (зависимость перемещения от времени) есть график *линейной функции* от времени.

1.4. УСКОРЕНИЕ

1.4.1. Среднее ускорение и мгновенное ускорение

Ускорением называют физическую величину, характеризующую *быстроту изменения мгновенной скорости тела*. Как и скорость, ускорение — одна из наиболее важных физических величин. Природа такова, что силовое воздействие на тело порождает имен-

но ускорение тела (не саму скорость, а быстроту ее изменения). Подробнее поговорим об этом в главе, посвященной динамике.

Различают *среднее ускорение* материальной точки за данный промежуток времени и *мгновенное ускорение* точки в данный момент времени. Среднее ускорение $\vec{a}_{\text{ср}}$ за время от t до $t + \Delta t$ определяют соотношением

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (1.13)$$

Мгновенное ускорение $\vec{a}(t)$ определяют как предел последовательности средних ускорений при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (1.14)$$

Примечание

Именно мгновенное ускорение является основным понятием, так как именно оно определяется силовым воздействием на тело. В различных задачах важно уметь находить ускорение в каждой точке траектории. Используя в дальнейшем термин «ускорение», будем иметь в виду именно мгновенное ускорение. Среднее же ускорение, как и средняя скорость по перемещению, играет, как правило, вспомогательную роль.

В случае *прямолинейного* движения *векторное* соотношение (1.14) можно заменить на соответствующее *скалярное* соотношение:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Если скорость $v(t)$ со временем возрастает (если $v(t + \Delta t) > v(t)$), то ускорение *положительно*: $a(t) > 0$ (тело ускоряется). Если же скорость $v(t)$ со временем уменьшается (если $v(t + \Delta t) < v(t)$), то ускорение *отрицательно*: $a(t) < 0$ (тело замедляется). При равномерном прямолинейном движении выполняется равенство $v(t + \Delta t) = v(t)$, ускорение равно нулю, т. е. отсутствует.

Подчеркнем, что ускорение равно нулю только в случае равномерного прямолинейного движения. Если точка движется по какой-либо криволинейной траектории, она будет иметь ускорение даже при равномерном движении. При равномерном движении по криволинейной траектории модуль мгновенной скорости остается неизменным, однако изменяется *направление скорости*. Поэтому и появляется ускорение.

1.4.2. Центростремительное ускорение

Рассмотрим *равномерное движение точки по окружности* радиусом R . Модуль скорости точки обозначим через v . Найдем вектор ускорения \vec{a} для данного движения. Часть траектории движу-

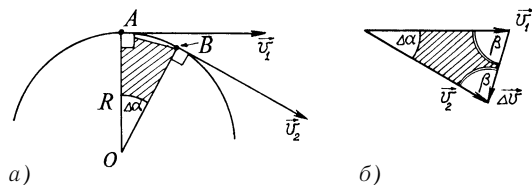


Рис. 1.6

щейся точки показана на рисунке 1.6, *a*. В положении *A* точка находилась в некоторый момент времени t , а в положении *B* — в момент $t + \Delta t$: \vec{v}_1 и \vec{v}_2 — векторы мгновенной скорости в указанных положениях. Они перпендикулярны соответственно радиусам OA и OB . Промежуток времени Δt выбран достаточно малым, и потому можно длину хорды AB считать равной длине соответствующей дуги, т. е. равной $v\Delta t$. На рисунке 1.6, *б* показаны векторы \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , а также их разность $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Среднее ускорение точки за рассматриваемый промежуток времени Δt есть

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.13, a)$$

Из подобия треугольников, показанных штриховкой, заключаем, что

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\Delta v}{v}$$

и, следовательно, $\Delta v = v \frac{AB}{OA} = v \frac{v\Delta t}{R}$. Таким образом,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}. \quad (1^*)$$

Из (1.13, *a*) и (1*) получаем

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Как мы убедились, при равномерном движении точки по окружности радиусом R со скоростью v модуль ускорения точки не изменяется и определяется соотношением:

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (1.16)$$



А как быть с направлением вектора ускорения?

Обратимся к рисунку 1.6, *б* и вспомним, что сумма углов в треугольнике равна π . Обозначив через β угол между векторами

\vec{v}_1 и $\Delta\vec{v}$ (таким же будет угол между векторами \vec{v}_2 и $\Delta\vec{v}$), запишем

$$\Delta\alpha + 2\beta = \pi.$$

Отсюда следует, что

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2}. \quad (2^*)$$

Напомним, что вектор среднего ускорения $\vec{a}_{\text{ср}}$ за промежуток Δt имеет такое же направление, что и вектор $\Delta\vec{v}$. Значит, вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ будет направлен, согласно (2*), к центру вращения, отклоняясь от перпендикуляра к вектору мгновенной скорости всего лишь на угол $\Delta\alpha/2$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ превращается в вектор мгновенного ускорения, а угол $\Delta\alpha$ обращается в нуль. Итак, в каждый момент времени ускорение материальной точки оказывается направленным строго к центру вращения (по перпендикуляру к вектору мгновенной скорости). Это ускорение называют *центростремительным*.

1.4.3. Касательное (тангенциальное) ускорение

Предположим, что материальная точка движется по окружности *неравномерно*: модуль вектора скорости точки не постоянен, он изменяется со временем. В этом случае ускорение точки $\vec{a}(t)$ в момент t представляет собой векторную сумму двух взаимно перпендикулярных ускорений:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\text{цс}}(t) + \vec{a}_{\text{т}}(t). \quad (1.17)$$

Ускорение $\vec{a}_{\text{цс}}(t)$ — *центростремительное* ускорение; оно направлено по радиусу к центру окружности, его модуль описывается выражением, аналогичным выражению (1.16):

$$a_{\text{цс}}(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (1.18)$$

(в отличие от (1.16) модуль скорости зависит здесь от времени). Ускорение $\vec{a}_{\text{т}}(t)$ — ускорение, направленное по касательной к окружности в сторону движения точки (если точка ускоряется) или в обратную сторону (если точка замедляется). Это ускорение называют *касательным*, или *тангенциальным*.

Центростремительное ускорение обусловлено *изменением направления* скорости точки, оно характеризует быстроту изменения направления. Касательное (тангенциальное) ускорение обусловлено *измене-*

нием модуля скорости, оно характеризует быстроту изменения значения скорости. Сопоставим следующие два соотношения:

$$a_{\text{цс}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)|}{\Delta t}; \quad (1.19, a)$$

$$a_{\text{т}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (1.19, б)$$

Будем мысленно увеличивать радиус окружности, т. е. постепенно «выпрямлять» траекторию движения точки. При $R \rightarrow \infty$ окружность превратится в прямую линию. При этом, согласно (1.18), центростремительное ускорение обратится в нуль и выражение (1.19) преобразуется к виду: $\vec{a}(t) = \vec{a}_{\text{т}}(t)$. Ускорение точки, движущейся прямолинейно, есть касательное ускорение.

1.4.4. Угловая скорость точки, движущейся по окружности

Пусть материальная точка движется равномерно со скоростью v по окружности радиусом R . За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ точка совершила поворот вокруг оси вращения MN на угол $\Delta\phi$ — переместилась из положения A в положение B (рис. 1.7). Величину

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (1.20)$$

называют *угловой скоростью* точки, движущейся по окружности. Умножим обе части равенства (1.20) на R ; получим $R\omega = R\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$. Величина $R\Delta\phi$ есть длина дуги AB ; она равна $v\Delta t$. Следовательно,

$$v = R\omega. \quad (1.21)$$

Если точка движется по окружности неравномерно, то

$$v(t) = R\omega(t), \quad (1.21, a)$$

где $\omega(t)$ — *мгновенная* угловая скорость. С учетом (1.21, a) перепишем соотношение (1.18) в виде:

$$a_{\text{цс}}(t) = \omega^2(t)R. \quad (1.22)$$

Обратим внимание на то, что *угловая скорость есть вектор*. Его модуль определяется соотношением (1.21) (или (1.21, a), если движение неравномерное). Направлен вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ вдоль оси вращения MN (т. е. перпендикулярно плоскости окружности) в сторону, которая определяется *правилом правого винта*: если правый винт мысленно вращать, повторяя

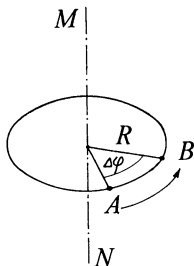


Рис. 1.7

движение точки по окружности, то направление вектора $\vec{\omega}$ будет совпадать с направлением осевого перемещения винта (рис. 1.8).

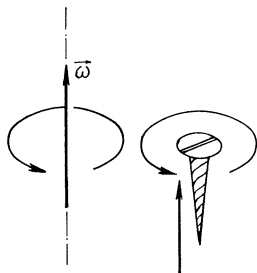


Рис. 1.8

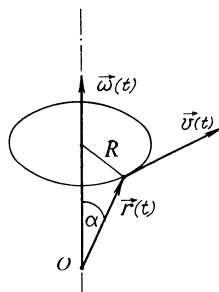


Рис. 1.9

Найдем выражение, связывающее векторы $\vec{\omega}(t)$ и $\vec{v}(t)$ точки. Положение точки в данный момент времени определим радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ (рис. 1.9). Из рисунка видно, что векторное произведение¹⁾ $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$ совпадает по направлению с вектором $\vec{v}(t)$ и имеет модуль, равный $\omega(t)r(t) \sin \alpha$. Следовательно,

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t). \quad (1.23)$$

**О единицах
физических
величин**

В Международной системе единиц (СИ) время выражают в *секундах* (обозначение: с), а перемещение и путь — в *метрах* (обозначение: м). Учитывая соотношение (1.1), заключаем:

$$\text{единица скорости} = \frac{\text{единица пути}}{\text{единица времени}}.$$

Отсюда следует, что скорость в СИ выражается в *метрах в секунду* (обозначение: м/с).

С учетом соотношения (1.13) заключаем:

$$\text{единица ускорения} = \frac{\text{единица скорости}}{\text{единица времени}}.$$

Следовательно, ускорение выражается в *метрах на секунду в квадрате* (обозначение: м/с²).

С учетом (1.22) заключаем:

$$\text{единица угловой скорости} = \frac{\text{единица угла}}{\text{единица времени}}.$$

В СИ за единицу угла (точнее, плоского угла) принят *радиан* (обозначение: рад); $1 \text{ рад} = 180^\circ/\pi \approx 57^\circ 14' 45''$. Единица угловой скорости — *радиан в секунду* (обозначение: рад/с).

¹⁾ Векторное произведение двух векторов обсуждается в Приложении Б.

1.5. ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ (РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ)

1.5.1. Зависимость мгновенной скорости от времени

Достаточно простой и распространенный вид неравномерного движения — движение *с постоянным ускорением*, или *равнопеременное движение*. При таком движении не изменяются со временем ни модуль, ни направление ускорения.

Обозначим через \vec{v}_0 мгновенную скорость материальной точки в начальный момент времени (при $t = 0$), а через $\vec{v}(t)$ — скорость в момент t . В этих обозначениях среднее ускорение за промежуток времени от 0 до t выражается, с учетом (1.13), в виде

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t}. \quad (1.13, б)$$

В общем случае $\vec{a}_{\text{ср}}$ в (1.13, б) зависит от промежутка усреднения t . В случае же движения с постоянным ускорением \vec{a} отношение $\frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t}$ не зависит от t . Оно остается постоянным при усреднении по любому промежутку t и сохраняется таким же в пределе при $t \rightarrow 0$, превращаясь в ускорение \vec{a} для любой точки траектории:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t}.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (1.24)$$

При движении с постоянным ускорением мгновенная скорость изменяется со временем по *линейному закону*. Скорость \vec{v}_0 называют *начальной скоростью*, поскольку движение материальной точки рассматривается, начиная с момента $t = 0$. Скорость \vec{v}_0 является результатом предшествующей этому моменту «истории» тела, представляемого материальной точкой. Иными словами, скорость \vec{v}_0 — следствие силовых воздействий на тело в предыдущие моменты времени.

Равнопеременное движение точки может быть как прямолинейным, так и криволинейным. Прямолинейное движение наблюдается, когда векторы \vec{v}_0 и \vec{a} параллельны или антипараллельны. Если эти векторы ориентированы под некоторым углом друг другу, движение происходит по криволинейной траектории.

1.5.2. Прямолинейное равнопеременное движение

В этом случае векторное соотношение (1.24) превращается в скалярное:

$$v(t) = v_0 + at. \quad (1.25)$$

Здесь $v(t)$, v_0 , a — проекции соответствующих векторов на координатную x -ось, которую будем полагать направленной параллельно вектору \vec{v}_0 . Графики $v(t)$ на рисунке 1.10 соответствуют ситуациям: $a > 0$ (материальная точка ускоряется, векторы \vec{v}_0 и \vec{a} параллельны), $a < 0$ (точка замедляется, векторы \vec{v}_0 и \vec{a} антипараллельны).

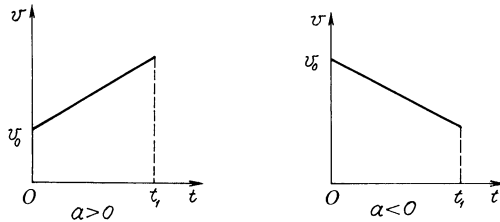


Рис. 1.10

Задача 1. Точка начинает двигаться из состояния покоя с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$. По истечении времени $t_1 = 3$ с ускорение точки изменится и оно становится равным $a' = -3 \text{ м/с}^2$. Требуется найти полное время движения точки до ее остановки и начертить график зависимости скорости точки от времени.

□ В соответствии с (1.25) $v(t_1) = at_1$. Искомое полное время движения T найдем из соотношения $at_0 + a'(T - t_1) = 0$. Таким образом,

$$T = t_1 \left(1 - \frac{a}{a'} \right) = 8 \text{ с.}$$

График $v(t)$ показан на рисунке 1.11. ■

Если известен график $v(t)$, то можно найти зависимость от времени перемещения точки, т. е. ее x -координаты. Для простоты будем полагать, что при $t = 0$ точка находилась в нуле координатной оси: $x(0) = 0$. Рассмотрим случаи равномерного, произвольного переменного и равнопеременного движения.

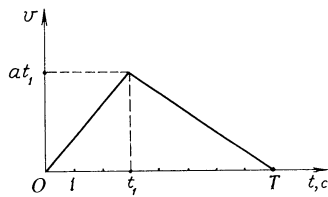


Рис. 1.11

При равномерном движении имеем, с учетом (1.12), $x(t) = v_0 t$. Легко видеть, что перемещение за время T равно численно площади под графиком $v(t)$ на промежутке времени

от нуля до T (на рисунке 1.12, а эта площадь заштрихована). Оказывается, что и в общем случае произвольного переменного движения *перемещение точки за время T численно равно площади под графиком $v(t)$ на промежутке времени от 0 до T .*

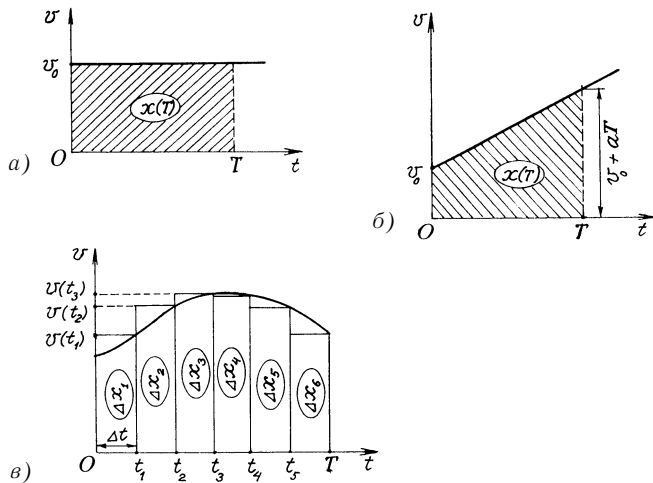


Рис. 1.12

Оставляя в стороне строгое доказательство этого утверждения, ограничимся кратким пояснением. Разобьем промежуток от O до T на N малых участков длительностью $\Delta t = \frac{T}{N}$ каждый и обозначим через $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ моменты времени для правых концов этих участков (понятно, что $t_N = T$). Ввиду малости Δt будем считать приближенно, что на протяжении каждого из указанных участков скорость точки постоянна; поэтому ее перемещение за промежуток времени, соответствующий, например, i -му участку, будет равно $\Delta x_i = v(t_i) \frac{T}{N}$. Полное перемещение за время от 0 до t получим, сложив все Δx_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Понятно, что сумма $\sum_{i=1}^N \Delta x_i$ будет приблизительно равна площади под кривой $v(t)$ на промежутке от 0 до T (см. рис. 1.12, б). Чем больше N , тем точнее перемещение $x(T)$, выражаемое указанной суммой, будет приближаться численно к площади под графиком $v(t)$. На рисунке $N = 6$.

С учетом сделанных замечаний обратимся теперь к случаю равнопеременного движения, когда $v(t) = v_0 + at$ (см. рис. 1.12, в). Перемещение $x(T)$ равно в данном случае численно площади трапеции, отмеченной на рисунке штриховкой. Отсюда следует, что

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.26)$$

Если в момент $t = 0$ координата точки равна x_0 , то вместо (1.26) будем иметь соотношение

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.26, a)$$

Соотношения (1.25)—(1.26, a) позволяют решить любую задачу на прямолинейное равнопеременное движение тела, представляемого материальной точкой. Зависимость мгновенной скорости от времени выражается линейной функцией (1.25), а зависимость перемещения (координаты) от времени — квадратичной функцией (1.26) (или (1.26, a)). График $x(t)$ имеет вид параболы (части параболы). Если $a > 0$, парабола обращена выпуклостью вниз, а если $a < 0$, то выпуклостью вверх.

Исключив время t , получаем из (1.25) и (1.26) полезное при решении ряда задач соотношение:

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2ax(t)}. \quad (1.27)$$

Оно позволяет найти скорость, которую приобретает равнопеременно движущаяся точка на заданном перемещении.

Задача 2. Точка начинает движение с постоянным ускорением $a = 4 \text{ м/с}^2$. Пройдя расстояние $x = 8 \text{ м}$, точка начала двигаться далее равномерно с приобретенной скоростью. Чему равно перемещение точки от начала движения до момента $T = 5 \text{ с}$?

□ Будем полагать, что движение началось в момент $t = 0$. Обозначим через t_0 момент, когда точка начала двигаться равномерно. Согласно (1.27), $v(t_0) = \sqrt{2ax}$. Используя (1.25), находим

$$t_0 = \frac{v(t_0)}{a} = \sqrt{\frac{2x}{a}}.$$

Перемещение точки за время от t_0 до T равно $v(t_0)(T - t_0)$. Таким образом, искомое перемещение за все время есть

$$\begin{aligned} x + v(t_0)(T - t_0) &= x + \sqrt{2ax} \left(T - \sqrt{\frac{2x}{a}} \right) = \\ &= T\sqrt{2ax} - x = 32 \text{ м}. \blacksquare \end{aligned}$$

1.5.3. Графики мгновенной скорости и перемещения

Рассмотрим рисунки 1.13—1.18. На каждом из них изображены два графика — график $v(t)$ и соответствующий ему график $x(t)$ (с учетом того, что $x_0 = 0$). График $x(t)$ на рисунке 1.17 нам знаком (см. рис. 1.15). В § 1.3 отмечалось, что модуль мгновенной скорости точки в тот или иной момент времени t численно равен тангенсу угла наклона касательной к графику $x(t)$ для данного момента. Легко убедиться, что это утверждение качественно выполняется на представленных рисунках. Так, во всех примерах касательная к графику $x(t)$ горизонтальна для моментов времени, когда мгновенная скорость обращается в нуль. С увеличением v угол наклона касательной к графику $x(t)$ возрастает, а с уменьшением v — убывает. На промежутках времени, где скорость постоянна, угол наклона касательной к графику $x(t)$ не изменяется (график $x(t)$ изображается прямой линией).

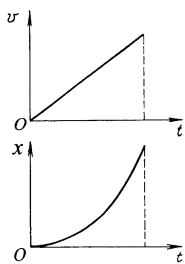


Рис. 1.13

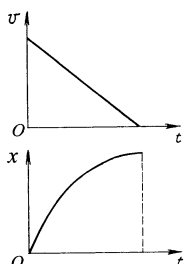


Рис. 1.14

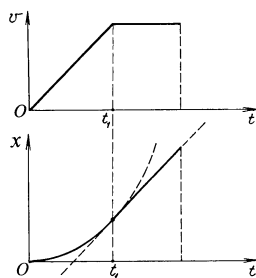


Рис. 1.15

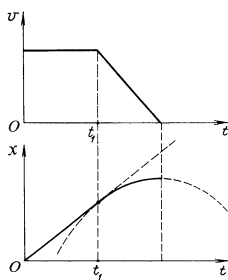


Рис. 1.16

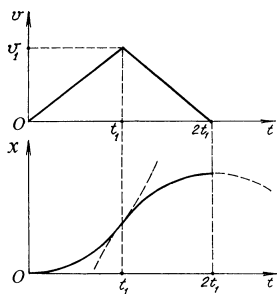


Рис. 1.17

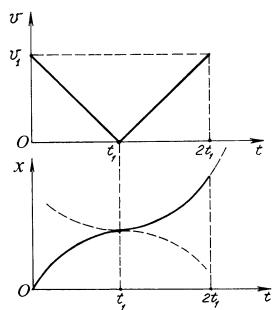


Рис. 1.18

На рисунке 1.19 представлен необычный случай. В момент t_1 график $v(t)$ претерпевает разрыв: скорость скачком изменяется от v_1 до нуля. Соответственно этому график $x(t)$ претерпевает в момент t_1 излом. Конечно, в реальных ситуациях скорость тела не может изменяться скачком и, значит, графики $x(t)$ не могут иметь изломы. Они имеют вид плавно изменяющихся линий, где параболы сопрягаются с параболами или с прямыми. Такие сопряжения хорошо видны на рисунках 1.15—1.18.

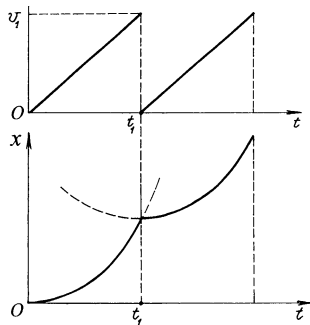


Рис. 1.19

1.5.4. Криволинейное равнопеременное движение (принцип сложения движений)

Криволинейное равнопеременное движение наблюдается, как уже отмечалось, тогда, когда векторы \vec{v}_0 и \vec{a} ориентированы под некоторым углом друг к другу. Движение происходит в плоскости, образованной указанными векторами; вектор $\vec{v}(t)$ находится в этой плоскости. Будем рассматривать данную плоскость как координатную $xу$ -плоскость. Теперь вместо векторного соотношения (1.24) мы имеем систему двух скалярных соотношений — для x -проекции и y -проекции векторов $\vec{v}(t)$, \vec{v}_0 , \vec{a} :

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + a_x t; \\ v_y(t) &= v_{0y} + a_y t. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Для проекций перемещения точки будем иметь систему двух скалярных соотношений, аналогичных соотношению (1.26):

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2; \\ y(t) &= v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Целесообразно ориентировать координатные оси в $xу$ -плоскости таким образом, чтобы одна из осей была параллельна (или антипараллельна) вектору ускорения \vec{a} . Пусть это будет

y -ось. В этом случае $a_x = 0$ и системы уравнений (1.28) и (1.29) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x}, \\ v_y(t) &= v_{0y} + a_y t; \end{aligned} \right\} \quad (1.30, a)$$

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x}, \\ v_y(t) &= v_{0y} + a_y t; \end{aligned} \right\} \quad (1.30, б)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t, \end{aligned} \right\} \quad (1.31, a)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t, \\ y(t) &= v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.31, б)$$

Движение материальной точки можно теперь рассматривать как сумму двух происходящих одновременно прямолинейных движений — *равномерного по x -оси* со скоростью v_{0x} и *равнопеременного по y -оси* с ускорением a_y и начальной скоростью v_{0y} .

Отметим, что в этом заключается *принцип сложения движений*, введенный в физику еще Галилеем. Движение тела, брошенного в горизонтальном направлении, Галилей представлял состоящим из «равномерного беспрепятственного движения» по горизонтали и «равномерно ускоренного движения» вниз, вызванного силой тяжести. Введя принцип сложения движений, ученый решил основную задачу баллистики — установил, что в отсутствие сопротивления воздуха «бросаемые тела или снаряды описывают кривую линию, являющуюся параболой».

1.6. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛА ВБЛИЗИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1.6.1. Ускорение свободного падения

Движение тела, происходящее только под воздействием притяжения к Земле, называют *свободным падением*. Свободное падение тела вблизи поверхности Земли можно рассматривать как равнопеременное движение; оно происходит с постоянным ускорением, называемым *ускорением свободного падения*. Такое рассмотрение допустимо при условии, что в данной задаче можно пренебрегать воздействием на тело со стороны воздушной среды (пренебрегать сопротивлением воздуха и ветром). Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли равно $9,8 \text{ м/с}^2$ и направлено вертикально вниз. Модуль ускорения свободного падения принято обозначать через g (от латинского *gravitas*, что означает «тяжесть»); вектор ускорения свободного падения есть \vec{g} .

На практике мы встречаемся с четырьмя случаями свободного падения тела:

- а) без начальной скорости;
- б) с вертикальной начальной скоростью;
- в) с горизонтальной начальной скоростью;
- г) бросание тела под углом к горизонту.

В случаях а) и б) свободное падение происходит по *прямолинейной* траектории (по вертикальной прямой), а в случаях в) и г) — по *параболической* траектории, находящейся в плоскости векторов \vec{v}_0 и \vec{g} (в координатной xy -плоскости).

При рассмотрении указанных выше случаев будем пользоваться соотношениями (1.30) и (1.31), полагая, что y -ось направлена вертикально вверх (и значит, $a_y = -g$), а x -ось ориентирована вдоль проекции вектора \vec{v}_0 на горизонтальную плоскость. Если тело начинает движение с некоторой высоты y_0 , то в (1.31, б) следует добавить слагаемое y_0 . С учетом сделанных замечаний перепишем (1.30) и (1.31) в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x}, \\ v_y(t) &= v_{0y} - gt; \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (1.32, a) \\ (1.32, б) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (1.33, a) \\ (1.33, б) \end{aligned}$$

Используя данные соотношения, рассмотрим приведенные выше случаи свободного падения тел.

1.6.2. Свободное падение по прямолинейной траектории

С л у ч а й а). *Свободное падение без начальной скорости.* В момент $t = 0$ тело, находившееся на высоте H , отпускают, и оно начинает падать вертикально вниз. Время падения T находим из (1.33, б), положив $t = T$, $y(T) = 0$, $y_0 = H$, $v_{0y} = 0$:

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1.34)$$

Из (1.32, б), положив $t = T$, $v_{0y} = 0$, $v_y(T) = -v_1$ и учтя (1.34), получим модуль конечной скорости

$$v_1 = gT = \sqrt{2gH}. \quad (1.35)$$

Случай б). Свободное падение с вертикальной начальной скоростью. В момент $t = 0$ тело подбрасывают с начальной скоростью \vec{v}_0 , направленной вертикально вверх. Свободное падение тела имеет два этапа: подъем по вертикали вверх в течение времени T_1 до высоты H и затем спуск по вертикали вниз в течение времени T_2 . Время T_1 находим, исходя из того, что скорость тела в наивысшей точке траектории (т. е. в момент $t = T_1$) обращается в нуль. Положив в (1.32, б) $t = T_1$, $v_{0y} = 0$, $v_y(T_1) = 0$, получим

$$T_1 = \frac{v_0}{g}. \quad (1.36)$$

Чтобы найти H , воспользуемся (1.33, б), положив $t = T_1$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0$, $y(T_1) = H$; получаем $H = v_0 T_1 - \frac{1}{2} g T_1^2$. Подставив (1.36) в это равенство, находим

$$H = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (1.37)$$

Подставив (1.37) соответственно в (1.34) и (1.35), получим время

$$T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0}{g} \quad (1.38)$$

и модуль конечной скорости

$$v_1 = \sqrt{2gH} = v_0. \quad (1.39)$$

Мы убедились, что $T_1 = T_2$, т. е. время, в течение которого тело поднимается, равно времени, в течение которого оно опускается, и $v_1 = v_0$, т. е. модуль конечной скорости тела равен модулю его начальной скорости. Полное время T свободного падения равно

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}. \quad (1.40)$$

Предположим, что тело в момент $t = 0$ находилось на высоте h . Его подбрасывают вертикально вверх с начальной скоростью \vec{v}_0 . Какими теперь окажутся величины T_1 , H , T_2 , v_1 , T ? Очевидно, что время подъема T_1 не изменится, оно по-прежнему равно $\frac{v_0}{g}$. Наибольшая высота подъема будет теперь на h больше по сравнению с (1.37), т. е. будет равна $H' = h + \frac{v_0^2}{2g}$.

Время T_2' движения тела вниз и модуль конечной скорости тела v_1' будут определяться формулами (1.38) и (1.39), соответственно, в которых вместо H надо подставить H' :

$$T_2' = \sqrt{\frac{2H'}{g}} = \frac{1}{g} \sqrt{2gh + v_0^2}; \quad (1^*)$$

$$v_1' = \sqrt{2gH'} = \sqrt{2gh + v_0^2}. \quad (2^*)$$

Легко видеть, что теперь $T_2' > T_1$ и $v_1' > v_0$. Полное время T свободного падения в данном случае равно

$$T' = T_1 + T_2' = \frac{1}{g} \left(v_0 + \sqrt{2gh + v_0^2} \right). \quad (3^*)$$

Как и следовало ожидать, при $v_0 = 0$ и $h = H$ результат (2*) превращается в (1.35), а результат (3*) — в (1.34).

Достаточно просто рассматривается случай, когда находившееся на высоте H тело бросают вертикально вниз с начальной скоростью \vec{v}_0 . Это есть случай прямолинейного равноускоренного движения, характеризующегося начальной скоростью v_0 , ускорением g , перемещением H . Время падения тела T можно определить, согласно (1.25), из соотношения $v_1 = v_0 + gT$, где v_1 — конечная скорость, а последнюю можно найти, согласно (1.27), из соотношения $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$. Таким образом,

$$T = \frac{1}{g} (v_1 - v_0) = \frac{1}{g} \left(\sqrt{2gH + v_0^2} - v_0 \right).$$

При $v_0 = 0$ этот результат превращается в (1.34).

1.6.3. Свободное падение по параболической траектории

Случай в). *Свободное падение с горизонтальной начальной скоростью.* Находившееся на высоте H тело бросают в момент $t = 0$ с начальной скоростью \vec{v}_0 , направленной параллельно координатной x -оси. В соответствии с принципом сложения движений представим движение тела в данном случае как сумму двух одновременно происходящих прямолинейных движений — равномерного движения вдоль x -оси со скоростью v_0 и равноускоренного движения антипараллельно y -оси без начальной скорости. Рассматривая второе из этих движений, находим время

падения T и y -проекцию конечной скорости v_{1y} ; согласно (1.34) и (1.35),

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \text{ и } v_{1y} = \sqrt{2gH}.$$

Рассматривая первое движение, находим дальность полета тела:

$$L = v_0 T = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1.41)$$

Так как движение вдоль x -оси равномерное, x -проекция скорости тела остается неизменной: $v_{1x} = v_0$. Следовательно,

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}. \quad (1.42)$$

Обозначим через α' угол между направлениями вектора \vec{v}_1 и x -оси. Тангенс этого угла равен

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0}. \quad (1.43)$$

Траектория движения тела в рассматриваемом случае находится в координатной xy -плоскости и может быть графически представлена как зависимость y -координаты движущегося тела от его x -координаты. Чтобы найти эту зависимость, перепишем (1.33), положив $y_0 = H$, $v_{0y} = 0$, $v_{0x} = v_0$:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t; \\ y &= H - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Исключив t в этой системе уравнений, находим искомую зависимость:

$$y = H - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (1.45)$$

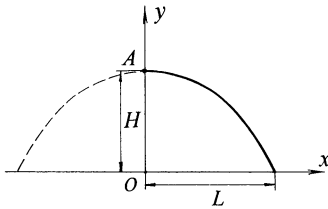


Рис. 1.20

Соотношение (1.45) задает *параболу*; ее вершина A имеет координаты $x_A = 0$ и $y_A = H$ (рис. 1.20).

Обратим внимание на то, что время падения тела не зависит от v_0 . Оно такое же, как и в случае падения с высоты H без начальной скорости: $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. От v_0 зависит,

как далеко по горизонтальному направлению улетит тело за время T .

С л у ч а й г). *Бросание тела под углом к горизонту.* Находящееся в начале координат тело бросают в момент $t = 0$ с начальной скоростью \vec{v}_0 , направленной под углом α к горизонту. Как и в предыдущем случае, движение тела складывается из вертикального равнопеременного и горизонтального равномерного движений. Рассматривая первое из этих движений, найдем время полета T и наибольшую высоту траектории H . Для этого достаточно воспользоваться соотношениями (1.37) и (1.40), заменив в них v_0 на вертикальную проекцию начальной скорости $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. В результате получаем:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}; \quad (1.46)$$

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (1.47)$$

Равномерное движение в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$. С учетом (1.47) находим дальность полета:

$$L = v_{0x} T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.48)$$

Максимальная дальность при заданном модуле начальной скорости достигается, если угол бросания 45° . В этом случае $L = \frac{v_0^2}{g}$.

Обратим внимание на то, что второй этап полета (от наивысшей точки траектории) — это свободное падение тела с горизонтальной начальной скоростью, рассмотренное ранее. Поэтому для нахождения конечной скорости \vec{v}_1 удобно воспользоваться соотношениями (1.42) и (1.43), положив в них $v_0 \cos \alpha$ вместо v_0 и заменив, в соответствии с (1.46), величину H на $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. С указанными заменами соотношения (1.42) и (1.43) преобразуются следующим образом:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 2g \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha} = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = v_0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{\sqrt{2g \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha}}{v_0 \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Как мы убедились, модули векторов конечной и начальной скоростей равны. Кроме того, направления указанных векторов со-

ставляют с направлением x -оси один и тот же угол. Отсюда заключаем, что

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_0| = 2v_0 \sin \alpha. \quad (1.49)$$

Замечание

Результат (1.49) можно было бы получить непосредственно из (1.24) и (1.47). Соотношение (1.24) имеет в рассматриваемом здесь случае вид: $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Отсюда следует, что $(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = \vec{g}t$. Подставив сюда (1.47), приходим к соотношению (1.49).

Траектория движения тела находится в координатной xy -плоскости. Чтобы найти ее, перепишем (1.33), положив $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha; \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Исключив t , находим отсюда зависимость $y(x)$:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.51)$$

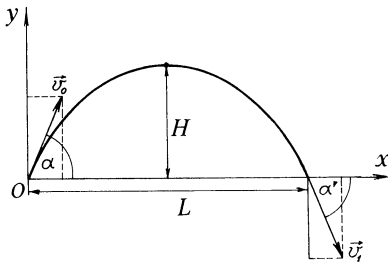


Рис. 1.21

График этой зависимости (траектория тела) имеет вид параболы (рис. 1.21). Ее вершина A определяется координатами:

$$x_A = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha; \quad y_A = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (1.52)$$

Сравнивая (1.52) с (1.46) и (1.48), заключаем, что $x_A = \frac{L}{2}$, $y_A = H$.

Покажем, как можно получить (1.52). Для этого соотношение (1.51) перепишем в виде

$$y = - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} (x^2 - \frac{v_0^2}{g} x \sin 2\alpha). \quad (1^*)$$

Выражение в скобках можно представить следующим образом:

$$x^2 - \frac{v_0^2}{g} x \sin 2\alpha = (x - \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha)^2 - \frac{v_0^4}{4g^2} \sin^2 2\alpha,$$

после чего (1*) преобразуется к виду:

$$y = - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} (x - \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha)^2 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Отсюда видно, что для получения параболы (1.51) надо параболу $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$, вершина которой находится в начале координат, сместить

вправо по x -оси на $x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ и вверх по y -оси на $y_A = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Задача 1. С вершины башни высотой h бросают тело с начальной скоростью \vec{v}_0 под углом α к горизонту. Требуется найти время и дальность полета тела.

□ Обозначим через T_1 время подъема тела, а через T_2 время, в течение которого тело опускалось из наивысшей точки траектории до земной поверхности. Учитывая (1.47), находим, что $T_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, а учитывая (1.34) и (1.46), заключаем, что

$$T_2 = \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha\right)}{g}}.$$

Таким образом, полное время полета тела равно

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha\right)}{g}}. \quad (2^*)$$

Дальность полета тела равна

$$L = T v_0 \cos \alpha = \frac{v_0}{g} \cos \alpha \left(v_0 \sin \alpha + \sqrt{2gh + v_0^2 \sin^2 \alpha} \right). \quad (3^*)$$

Как и следовало ожидать, при $h = 0$ результат (2*) превращается в (1.47), а результат (3*) — в (1.48). ■

Задача 2. Тело бросают из точки O над наклонной плоскостью с углом наклона β (рис. 1.22). Начальная скорость тела \vec{v}_0 направлена под углом α к горизонтальной плоскости. Требуется найти время полета тела и расстояние от точки бросания до точки падения.

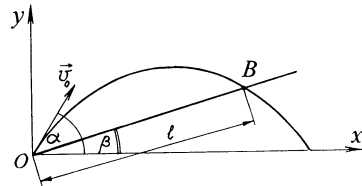


Рис. 1.22

□ Точка падения тела есть точка B пересечения параболы (1.51) и прямой $y = x \operatorname{tg} \beta$ (см. рисунок). Координату x_B этой точки находим, решая уравнение

$$x \operatorname{tg} \beta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = x \operatorname{tg} \beta.$$

Оно имеет два решения: нуль и

$$x_B = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta). \quad (4^*)$$

Таким образом, расстояние от точки бросания до точки падения равно

$$l = \frac{x_B}{\cos \beta} = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \beta} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta). \quad (5^*)$$

Время полета T легко найти, зная x_B . В течение этого времени тело перемещалось в горизонтальном направлении равномерно со скоростью $v_0 \cos \alpha$ и в итоге переместилось по горизонтали на расстояние, равное x_B . Следовательно, $T = \frac{x_B}{v_0 \cos \alpha}$. С учетом (4*), получаем

$$T = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta). \quad (6^*)$$

Как и следовало ожидать, при $\beta = 0$ результат (5*) превращается в (1.48), а результат (6*) — в (1.47). ■

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.1. За некоторый промежуток времени точка описала половину длины окружности. Во сколько раз средняя путевая скорость оказалась больше модуля средней скорости по перемещению?

1.2. Тот же вопрос для случая, когда точка описала $\frac{5}{6}$ длины окружности.

1.3. Может ли модуль средней скорости по перемещению превысить среднюю путевую ско-

рость за тот же промежуток времени?

1.4. Велосипед движется по плоскости равномерно со скоростью v_0 . Что можно сказать о траектории и мгновенной скорости точки на ободе колеса при условии, что движение рассматривается в системе отсчета, связанной с рамой велосипеда?

1.5. Тот же вопрос при условии, что движение рассматри-

вается в лабораторной системе отсчета.

1.6. На равномерно вращающемся горизонтальном диске радиусом R лежит тело, представляемое материальной точкой. Если поместить тело на расстоянии $R/2$ от центра диска, то модуль его скорости равен v_0 . Как изменится центростремительное ускорение тела, если переместить его на край диска?

1.7. На рисунке 1.17 $v = 5$ м/с, $t_1 = 3$ с. Используя рисунок, найдите перемещение x_1 .

1.8. Сравните перемещения x_1 для случаев, изображенных на рисунках 1.17 и 1.18, полагая, что в обоих случаях v одинаковы, но t_1 на втором рисунке в 1,2 раза больше, чем на первом.

1.9. Материальная точка движется неравномерно по окружности радиусом 0,5 м. В некоторый момент времени скорость точки равна 2 м/с, а касательное ускорение равно 6 м/с². Чему равен модуль полного ускорения точки в рассматриваемый момент времени?

1.10. Две материальные точки движутся прямолинейно равнопеременно. За промежуток времени, равный 4 с, скорость первой точки увеличилась на 12 м/с, а скорость второй точки уменьшилась на 12 м/с. Что можно сказать об ускорениях этих точек?

1.11. Материальная точка движется прямолинейно с постоянным ускорением. Что можно сказать о направлении мгновенной скорости точки?

1.12. В результате равноускоренного движения на перемещении $x = 16$ м скорость тела возросла в $n = 3$ раза. Чему равно ускорение тела, если известно, что оно имело начальную скорость $v_0 = 6$ м/с?

1.13. Прямолинейно и равнопеременно движущееся тело в момент $t = 0$ имело скорость v_0 . Что можно сказать об ускорении тела, если известно, что в момент $t = t_1$ оно оказалось в той же точке, в какой находилось в момент $t = 0$?

1.14. Рассмотрите предыдущую задачу, полагая, что в момент $t = 0$ тело находилось в точке $x = x_0$ и что скорость \vec{v}_0 была направлена параллельно x -оси. Найдите x -координату тела в момент $t = 2t_1$.

1.15. Такое же задание, как в 1.14, в предположении, что скорость \vec{v}_0 направлена антипараллельно x -оси.

1.16. Возможно ли, чтобы в процессе свободного падения тела модуль его мгновенной скорости постепенно уменьшался до нуля?

1.17. Тело бросили вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Начертите графики $v_y(t)$ и $y(t)$.

1.18. Зависит ли время свободного падения тела от его массы?

1.19. Тело, подвешенное на нити к воздушному шару, поднимается равномерно вертикально вверх со скоростью v_0 . На высоте h нить оборвалась. Найдите время свободного падения тела.

1.20. В момент $t = 0$ тело бросили с высоты H с горизонтальной начальной скоростью \vec{v}_0 . Чему равен модуль мгновенной скорости тела на высоте $\frac{H}{2}$?

1.21. Тело бросили горизонтально с высоты H . Какой должна быть начальная скорость, чтобы дальность полета оказалась равной H ?

1.22. Тело бросили с горизонтальной начальной скоростью \vec{v}_0 . Известно, что направление вектора конечной скорости тела составило с горизонтальной плоскостью угол 45° . С какой высоты брошено тело?

1.23. Тело бросили со скоростью \vec{v}_0 под углом α к горизон-

ту. В какой точке траектории тела модуль мгновенной скорости тела будет наименьшим? Чему он равен? Как в этой точке направлен вектор скорости?

1.24. Тело бросили со скоростью \vec{v}_0 под углом α к горизонту. Найдите направление и модуль средней скорости тела по перемещению за все время полета.

1.25. Вблизи поверхности Луны ускорение свободного падения в 6 раз меньше, чем вблизи Земли (его модуль равен $1,62 \text{ м/с}^2$). Оцените, как это влияет на высоту и дальность полета тела, брошенного на Луне под углом к горизонту (по сравнению с таким же броском на Земле).



ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. ИНЕРЦИЯ И ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

2.1.1. Закон инерции (первый закон Ньютона)

Мы уже неоднократно отмечали, что механическое движение *относительно*. Одно и то же движение выглядит по-разному при рассмотрении его в разных системах отсчета. Как правило, удобнее рассматривать движение в системе отсчета, связанной с Землей (она же геоцентрическая, или лабораторная система) или с любым телом, которое движется относительно Земли *равномерно* и *прямолинейно*. Удобство состоит в том, что в таких системах отсчета проявляется свойство тел, называемое *инертностью*. Иначе говоря, в этих системах выполняется закон инерции (первый закон Ньютона). В формулировке Ньютона этот закон гласит:

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Системы отсчета, в которых выполняется данный закон, называются *инерциальными*. В этих системах для сохранения состояния равномерного прямолинейного движения тела не требуется прикладывать к нему какие-либо силы; как говорят, *движение тела происходит по инерции* (термин «инерция» взят от латинского *inertia*, что означает «бездеятельность»). Хороший пример движения по инерции — скольжение хоккейной шайбы по гладкому льду.

Заметим, забегая немного вперед, что в действительности на тело всегда действуют какие-то силы. Чтобы наблюдать движение по инерции, надо взаимно уравновесить эти силы, т. е. сделать так, чтобы равнялась нулю *равнодействующая* всех сил, приложенных к данному телу.

О движении по инерции в 1638 году писал Галилео Галилей: *«Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то движение его является равномерным, и оно продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца»*. Впервые закон инерции сформулировал Рене Декарт (1644 г.): *«Если тело пришло в движение, то уже этого достаточно, чтобы оно его продолжило с той же скоростью и в направлении той же прямой линии, пока оно не будет остановлено или отклонено какой-либо причиной»*. Исаак Ньютон включил закон инерции в качестве первого закона в свою систему трех «аксиом или законов движения». Эта система была сформулирована в книге Ньютона «Математические начала натуральной философии», вышедшей в свет в 1687 году. Вместе с первым законом второй и третий законы Ньютона составили основу для исчерпывающего изучения динамики поступательного движения (иначе говоря, динамики материальной точки).

2.1.2. Инерциальные системы отсчета

Вернемся к первому закону Ньютона (закону инерции) и обратим внимание на то, что он может рассматриваться как определение понятия *инерциальная система*:

это такая система отсчета, в которой проявляется свойство инертности тела, заключающееся в способности сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на тело силы не выведут его из этого состояния. По сути, содержание закона инерции сводится к двум утверждениям: во-первых, все тела обладают свойством инертности и, во-вторых, существуют системы отсчета, в которых это свойство проявляется. Отсюда вытекает современная, более точная формулировка первого закона Ньютона:

Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Система отсчета, связанная с Землей, — не единственная возможная инерциальная система. Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то можно указать *сколь угодно много* инерциальных систем, поскольку любая система, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно данной инерциальной системы, тоже будет инерциальной. Предположим, что в некоторой системе отсчета тело движется по инерции — его скорость не изменится ни по направлению, ни по модулю. В любой другой системе

отсчета, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно, рассматриваемое тело будет иметь, хотя и иную, но тоже постоянную по направлению и модулю скорость. Следовательно, эти другие системы отсчета в такой же степени инерциальны, что и первая система. Например, инерциальны системы отсчета, связанные с вагоном, судном, автомобилем, велосипедом, движущимися равномерно и прямолинейно относительно Земли.

Примечание

Справедливости ради отметим, что система отсчета, связанная с Землей (геоцентрическая, или лабораторная система отсчета), может считаться инерциальной лишь с той или иной степенью приближения. Ведь земной шар вращается вокруг своей оси и движется по орбите вокруг Солнца. Это практически не влияет на работу различных механизмов, на движение транспорта, на протекание тепловых, электромагнитных, химических и прочих процессов. Поэтому при описании подобных процессов геоцентрическая система отсчета может с большой точностью считаться инерциальной. При более строгом подходе в качестве инерциальной системы отсчета выбирают *гелиоцентрическую* систему. В ней начало координат совмещено с центром Солнца, а координатные оси направлены к неподвижным звездам.

Отметим, что механическое движение мы будем изучать исключительно в инерциальных системах отсчета, не оговаривая это особо. Неинерциальным системам (системам, движущимся с ускорением) будет уделено внимание в § 2.5.

2.1.3. Принцип относительности Галилея

Во времена Галилея вызывал удивление тот факт, что если уронить поднятый на вершину мачты корабля камень, то он упадет к подножию мачты не только в случае, когда корабль стоит на якоре, но и в случае, когда он движется по спокойной воде равномерно и прямолинейно. При таком движении корабля камень, выпущенный из рук, падает вертикально вниз, если, разумеется, наблюдать за ним с палубы корабля. Относительно же берега такой камень будет двигаться по параболической траектории.

Многочисленные наблюдения показывают, что механическое движение происходит *одинаковым образом* во всех инерциальных системах отсчета. Предположим, мы находимся на равномерно и прямолинейно плывущем авианосце и бросаем камень с начальной скоростью \vec{v}_0 под углом α к палубе, а наш приятель находится на берегу и тоже бросает камень с начальной скоростью \vec{v}_0 под углом α к горизонту. Траектория, описываемая нашим камнем относительно корабля (но не относительно берега!), и траектория, описываемая камнем приятеля относительно берега (но не относи-

тельно корабля!), будут совершенно одинаковыми. Так что по измерению времени и дальности полета камня мы не сможем заключить, что авианосец движется, а не встал на якорь.

Никакой опыт с механическим движением не позволяет выделить ту или иную инерциальную систему отсчета. Впервые к этому выводу пришел Галилей и выдвинул принцип равноправия всех инерциальных систем, называемый ныне принципом относительности Галилея. Этот принцип можно сформулировать следующим образом:

Все механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Иначе говоря, законы механики не зависят от выбора той или иной инерциальной системы отсчета.

Отсюда следует, в частности, что нельзя указать *преимущественную* систему отсчета и, значит, не существует абсолютного покоя или абсолютного движения тел; можно говорить только об относительном движении тел в той или иной инерциальной системе отсчета.

В 1905 году Альберт Эйнштейн сформулировал более общий принцип равноправия всех инерциальных систем. Согласно **принципу относительности Эйнштейна**, во всех инерциальных системах протекают одинаково не только механические процессы, но и другие — тепловые, электромагнитные, оптические и т. п. Кратко принцип относительности Эйнштейна можно сформулировать следующим образом:

Во всех инерциальных системах отсчета все законы природы одинаковы.

2.2. СИЛА И УСКОРЕНИЕ

2.2.1. Сила, приложенная к телу, как мера действия на него другого тела

Мы довольно часто употребляем слово «сила». Мы говорим о «силе воли», «силе чувств», «силе характера». Желая увеличить «силу мышц», мы занимаемся физкультурой. Мы посещаем специальные спортивные залы для того, чтобы там «накачать побольше силы». Слово «сильный» нередко используется для подчеркивания масштабности какого-либо явления: «сильный туман»,

«сильное течение», «сильный дождь», «сильная засуха». Мы говорим также: «я выбился из сил», «мои силы на исходе», «надо поберечь силы», «следует взвешивать свои силы». Как правило, мы не задумываемся над тем, что все подобные словесные обороты не имеют никакого отношения к используемому в физике понятию «сила», к физической величине с таким названием.

Впервые научное понятие силы было дано Ньютоном. В честь этого выдающегося ученого названа единица силы в СИ: «ньютон» (обозначают: Н).

Заметим, что 1 Н равен силе, сообщаемой телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 ($1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$).

Согласно Ньютону, *«приложенная сила есть действие, производимое на тело для изменения его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения»*. Ньютон подчеркивал: *«Сила проявляется единственно только в действии и по прекращении действия на тело не остается в теле»*. Так что, отметим, накачать или накопить в теле силу принципиально невозможно; ее нельзя ни израсходовать, ни сберечь.

Уточняя ньютоновское определение силы, заметим, что «действие, производимое на тело» есть действие на данное тело другого тела. Приведем определение силы в современной формулировке:

Силой, приложенной к телу, называется векторная физическая величина, которая служит мерой (количественной характеристикой) действия на данное тело другого тела.

Обратим внимание на то, что сила — это *вектор*. Она имеет не только числовое значение (модуль силы), но и направление. Прямую, вдоль которой направлена сила, называют *линией действия силы*. Сила определена полностью, если заданы ее *модуль, направление в пространстве и точка приложения*. Не обсуждая пока вопроса о точке приложения силы, заметим, что он не возникает, если тело можно представить материальной точкой. Ясно, что эта точка и есть точка приложения силы, действующей на данное тело.

Обратим внимание также на то, что понятие силы относится к *двум* телам (не к одному и не ко многим!) — к телу, на которое действует данная сила, и к телу, *со стороны которого* эта сила действует. Примеры: сила тяжести камня действует на камень со стороны Земли; сила трения скольжения санок действует на санки со стороны снежного покрытия дороги; на шарик, прикрепленный к растянутой пружине, действует сила упругости со стороны пружины. Конечно, в реальных ситуациях на данное тело могут оказывать действие одновременно несколько тел. Это означает, что к данному телу приложено несколько сил.

Если тело можно представить материальной точкой, то в этом случае одновременное действие на тело нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой *равнодействующей* (или *результатирующей*). Она представляет собой геометрическую (иначе говоря, векторную) сумму всех сил, действующих на данную материальную точку. Если эта векторная сумма оказывается равной нулю, то говорят, что все действующие на материальную точку силы *взаимно уравновешены*. (О сложении сил, действующих на тело, которое нельзя представлять материальной точкой, мы поговорим в главе 3).

Различают силы, действующие лишь *при непосредственном соприкосновении* тел (*конкретные силы*), и силы, которые могут действовать на тело *на расстоянии*. Примером контактной силы может служить сила трения, а примером силы, действующей на расстоянии, — сила тяжести. Подробнее мы поговорим о различных силах в § 2.3, а пока заметим лишь, что когда говорят о прекращении действия силы, то имеют в виду контактную силу. Так, например, прекращается действие на тело силы трения скольжения, как только тело перестает скользить по поверхности и останавливается. В момент остановки сила трения скольжения тела просто исчезает. Но никогда не прекращается действие на тело силы тяжести. Сила тяжести действует на камень и перед тем, как его подбросили, и во время свободного падения, и после того, как камень упал на землю.

2.2.2. Связь между ускорением и силой (второй закон Ньютона)

Из первого закона Ньютона следует, что рассматриваемое в инерциальной системе отсчета тело само по себе не может изменить своей скорости. **Второй закон Ньютона** утверждает, что *причиной изменения модуля или направления скорости тела* в инерциальной системе отсчета является действие на него другого тела (других тел), т. е. *сила, которая приложена к данному телу*. Этот закон называют основным законом динамики. Его можно сформулировать следующим образом:

Ускорение тела в данный момент времени прямо пропорционально равнодействующей всех сил, приложенных к телу в данный момент, обратно пропорционально массе тела и направлено так же, как равнодействующая сил.

Строгости ради следовало бы указать, что тело рассматривается в инерциальной системе отсчета. Далее будем полагать, что это подразумевается.

Математически данный закон может быть представлен в виде

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}. \quad (2.1)$$

Здесь $\vec{a}(t)$ — мгновенное ускорение тела в момент времени t , m — масса тела, $\vec{F}(t)$ — равнодействующая сил, приложенных к телу в момент t .

Из (2.1) следует, что если $\vec{F}(t) = 0$, то $\vec{a}(t) = 0$ — ускорение в данный момент отсутствует. Предположим, что $\vec{F} = 0$ на промежутке времени от t до $t + \Delta t$. В этом случае на указанном промежутке тело будет двигаться без ускорения, т. е. равномерно и прямолинейно с той скоростью, какую оно имело к началу промежутка (к моменту t). Иначе говоря, на рассматриваемом промежутке времени тело будет двигаться *по инерции* — в соответствии с первым законом Ньютона. Однако это не означает, что первый закон Ньютона есть просто следствие второго закона. Первый закон утверждает существование инерциальных систем отсчета, а второй говорит, что в таких системах ускорение тела имеет *единственную причину* — наличие равнодействующей сил.

2.2.3. Импульс тела и второй закон Ньютона

Введя понятие импульса, можно привести другую формулировку второго закона Ньютона. *Импульс тела* $\vec{p}(t)$ ¹⁾ в момент t определяют как произведение массы тела m на мгновенную скорость $\vec{v}(t)$:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t). \quad (2.2)$$

Полагая, что промежуток времени Δt достаточно мал, можно приближенно представить ускорение $\vec{a}(t)$ в виде

$$\vec{a}(t) \cong \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Для получения точного равенства надо было бы, как уже говорилось (см. § 1.4, соотношение (1.14)), перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$.

Учитывая (2.3), перепишем (2.1) в виде

$$\frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \cong \frac{\vec{F}(t)}{m}. \quad (2.4)$$

¹⁾ Заметим, что раньше эта физическая величина имела еще одно наименование — *количество движения*.

Согласно (2.2),

$$m\vec{v}(t + \Delta t) - m\vec{v}(t) = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t),$$

после чего второй закон Ньютона можно записать так:

$$\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) \cong \vec{F}(t)\Delta t. \quad (2.5)$$

Теперь приведем следующую формулировку второго закона:

Изменение импульса за малый промежуток времени пропорционально равнодействующей сил и промежутку времени и направлено так же, как равнодействующая сил.

Замечание

Малость промежутка времени нужна не только для использования равенства (2.3), но и для того, чтобы можно было равнодействующую сил считать постоянной на данном промежутке и равной $\vec{F}(t)$.

Напомним, как именно сформулировал второй закон сам Ньютон в своих знаменитых «Математических началах натуральной философии»:

«Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.»

Под «приложенной движущей силой» надо понимать равнодействующую сил, приложенных к телу. Заметим, что здесь нет упоминания о малом промежутке времени, в течение которого происходит изменение импульса (количества движения). Однако в тексте своей книги Ньютон пользуется понятием малого промежутка времени и рассматривает изменение количества движения за этот промежуток.

Впрочем, нетрудно избавиться от необходимости говорить о каком-то «малом промежутке времени». Представим (2.5) в виде

$$\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \cong \vec{F}(t)$$

и заменим левую часть равенства пределом при $\Delta t \rightarrow 0$. Получим строгое выражение:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \vec{F}(t). \quad (2.6)$$

Вспомним, что величина $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$ есть ускорение $\vec{a}(t)$, т. е. *быстрота изменения скорости*. По аналогии можно назвать

величину $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t}$ в формуле (2.6) *быстротой изменения импульса*. Поэтому выражаемый формулой (2.6) второй закон Ньютона может быть сформулирован так:

Быстрота изменения импульса (количества движения) пропорциональна действующей на тело силе и направлена по прямой, по которой действует эта сила.

Эта формулировка практически дословно повторяет приведенную выше формулировку Ньютона, если заменить в последней «изменение количества движения» на «быстроту изменения количества движения».

Формула (2.6) соответствует *наиболее общей* формулировке основного закона динамики, так как позволяет рассматривать движение тел как с постоянной, так и с переменной массой.

Если масса движущегося тела m постоянна, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = m\vec{a}(t).$$

В этом случае формула (2.6) превращается в формулу $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$, которая эквивалентна формуле (2.1).

Отметим, что если сила \vec{F} , а значит, и ускорение \vec{a} , не зависят от времени, приближенное равенство (2.5) превращается в строгое выражение для второго закона Ньютона:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t. \quad (2.7)$$

Здесь $\Delta \vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$ для любых значений t и Δt .

2.2.4. Масса тела как мера его инертности

Итак, ускорение тела в данный момент пропорционально действующей на него в этот момент силе (речь идет, разумеется, о равнодействующей всех сил, приложенных к телу, но для краткости будем в дальнейшем использовать термин «действующая сила»). Однако ускорение, приобретаемое телом, зависит не только от силы, действующей на него, но и от выбора тела. Как показывает опыт, разные тела получают при действии на них одной и той же силой разные ускорения. У одних тел ускорение может оказаться относительно большим — они довольно быстро изменяют свою скорость, демонстрируя тем самым относительно малую инертность. У других тел ускорение может оказаться малым — они медленно изменяют свою скорость, демонстрируя большую инертность.



Чем же можно количественно охарактеризовать инертность тела?

Ответ на этот вопрос содержится во втором законе Ньютона, согласно которому ускорение тела (быстрота изменения его скорости) обратно пропорционально массе тела. Масса как раз и служит *мерой инертности тела*:

чем больше масса, тем выше инертность, тем меньшее ускорение приобретает тело под действием данной силы.

Мерой инертности тела служит его масса.



А как измерить массу?

Так как тело с любой массой приобретает под действием силы тяжести одно и то же ускорение (ускорение свободного падения \vec{g}), то, следовательно, для измерения массы тела достаточно измерить модуль силы тяжести этого тела. Массу m тела можно определить как отношение модуля силы тяжести тела F_T к модулю ускорения свободного падения g :

$$m = \frac{F_T}{g}.$$

Данное соотношение немедленно следует из второго закона Ньютона для случая, когда на тело действует только сила тяжести.

В этом случае формула (2.1) имеет вид $\vec{g} = \frac{\vec{F}_T}{m}$.

Масса тела обладает свойством, которое физики называют *аддитивностью* (от латинского *aditivus*, что означает «прибавляемый»): масса тела есть сумма масс составляющих это тело частей. Если, например, к телу массой m_1 присоединить (прибавить) тело массой m_2 , то масса получившегося составного тела m будет равна сумме масс исходных тел: $m = m_1 + m_2$.

Замечание

Свойством аддитивности обладает также объем тела. Он равен сумме объемов частей, из которых состоит данное тело.

Разделив массу тела m на его объем V , получают физическую величину ρ , называемую *плотностью*:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.8)$$

Как m , так и V являются характеристиками данного тела, но ρ — характеристика не тела, а *вещества*, из которого изготовлено тело. Алюминиевая ложка, алюминиевая кружка, алюминиевая

тарелка — это разные тела с разными массами и объемами. Но все они сделаны из одного и того же вещества — алюминия. Все они имеют одну и ту же плотность — плотность алюминия. Однако в отличие от массы и объема плотность не является аддитивной величиной. Можно складывать массы или объемы двух тел, но нельзя складывать их плотности.

2.2.5. Второй закон Ньютона как необходимое условие существования «памяти о прошлом»

Будем рассматривать движение материальной точки (тела, представляемого материальной точкой). Состояние движущейся точки в тот или иной момент времени полностью определено, если известны положение точки в этот момент (радиус-вектор $\vec{r}(t)$) и ее мгновенная скорость (вектор $\vec{v}(t)$).

Предположим, что до момента времени $t = 0$ на точку не действовала какая-либо сила, так что точка двигалась по инерции с некоторой скоростью \vec{v}_0 . Предположим далее, что, начиная с момента $t = 0$, на материальную точку действует некоторая сила \vec{F} , которую для простоты будем полагать постоянной. Под действием этой силы точка будет двигаться, начиная с момента $t = 0$, с ускорением $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, где m — масса точки. Ускорение возникает сразу же, одновременно с началом действия силы, однако скорость изменяется постепенно. Она изменяется тем медленнее, чем больше ее масса и чем меньше модуль силы. Обратим внимание: включение силы не изменяет в один момент скорость тела, оно приводит лишь к тому, что скорость *начинает* постепенно изменяться. Изменение скорости за промежуток времени t равно $\Delta\vec{v}(t) = \vec{a}t$, и поэтому в момент t скорость оказывается равной

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (2.9)$$

(Эта формула нам уже известна — см. (1.23).)

Когда-то полагали, что, согласно Аристотелю, скорость тела в данный момент полностью определяется силой, действующей на тело в тот же момент. Если есть сила, то есть и скорость; прекратилось действие силы — тело тут же перестало двигаться. В современных обозначениях это можно выразить соотношением $\vec{v} \sim \vec{F}$ (скорость тела пропорциональна приложенной к телу силе и направлена так же, как сила).

В действительности, по мнению Ньютона, не сама скорость пропорциональна приложенной к телу силе, а изменение скорости,

обусловленное ускорением. Поэтому *скорость в данный момент определяется не только силой, действующей на тело в этот момент, но и скоростью, которую тело приобрело раньше и которая является результатом действия сил в предыдущие моменты*. Это как раз и демонстрирует формула (2.9), которую можно представить в виде

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m} t. \quad (2.10)$$

Итак, если по Аристотелю сила в данный момент определяет *скорость* тела в этот момент, то по Ньютону сила в данный момент определяет *ускорение* тела в этот момент. Этот факт весьма принципиален. Полезно задуматься над тем, как мог бы выглядеть «мир Аристотеля», и сопоставить его с «миром Ньютона», т. е. с реальным миром, в котором мы живем.

В «мире Аристотеля» состояние движения тела в какой-либо момент времени не зависит от того, как тело двигалось раньше; оно полностью определяется силой, действующей в данный момент. Сила направлена вправо — и тело движется вправо. Направление силы сменилось на противоположное — в то же самое мгновение тело стало двигаться влево. Сила исчезла — и тело тут же остановилось. В таком «мире» совершенно отсутствует инерция. Все определяется *сиюминутным* действием тел друг на друга. У любого явления здесь нет предыстории, *настоящее никак не связано с прошлым, прошлое нисколько не влияет на настоящее*. Соответственно и настоящее нисколько не влияет на будущее. Используя известную фразу шекспировского Гамлета, мы могли бы сказать, что в этом странном «мире» «порвалась дней связующая нить».

В реальном мире, подчиняющемся второму закону Ньютона, *существует инерция*. Несмотря на то, что в переводе с латинского «инерция» означает «бездеятельность», это свойство нашего мира оказывается принципиально важным, потому что благодаря инертности любое воздействие на тело в данный момент отнюдь не перечеркивает результата воздействий на тело в предыдущие моменты времени. Сила направлена вправо — однако скорость тела может быть направлена в каком-то другом направлении, поскольку тело «помнит» о воздействии, которое оно испытало в прошлом. Тело бросили горизонтально, и, находясь в полете под действием направленной вертикально вниз силы тяжести, оно «помнит» о начальном броске, а потому движется не вертикально вниз, а по параболической траектории. Разогнав тело до некоторой скорости, сила исчезла — однако тело не остановилось: оно «помнит» об исчезнувшей силе и по инерции продолжает двигаться с приобретенной ранее скоростью.

Итак, благодаря тому, что непосредственным следствием действия силы на тело является не скорость тела, а его ускорение,

в нашем мире *прошлое* влияет на *настоящее*. Соответственно, *настоящее* влияет на *будущее*. Можно сказать, что настоящее помнит о прошлом и не окажется забытым в будущем, и поэтому не прерывается «дней связующая нить».

2.2.6. Принцип независимости действия сил

Пусть на материальную точку действуют одновременно силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$. Равнодействующая сила есть векторная сумма

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$, которую кратко записывают так: $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.

Согласно второму закону Ньютона ускорение точки \vec{a} запишем в виде

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.11)$$

где m — масса точки. Это ускорение можно представить в виде суммы:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i, \quad (2.12)$$

где $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$ — ускорение, сообщаемое точке силой \vec{F}_i . Каждая из сил, действующих на материальную точку, сообщает ей «свое» ускорение, как если бы других сил не было. В этом сущность **принципа независимости действия сил**.

Используем этот принцип в конкретной задаче.

Задача. Тело массой m падает без начальной скорости с высоты H и при этом на него действует с постоянной силой \vec{F} горизонтально дующий ветер. Требуется найти время падения тела и дальность его полета по направлению ветра. Соппротивление воздуха не учитывается.

□ На тело действуют две силы: горизонтальная сила ветра \vec{F} и вертикальная сила тяжести \vec{F}_T . По второму закону Ньютона, ускорение тела

$$\vec{a} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_T}{m}.$$

В соответствии с принципом независимости действия сил ветер сообщает телу ускорение $\vec{a}_в = \frac{\vec{F}}{m}$ (как если бы силы тяжести

не было), а сила тяжести сообщает телу ускорение \vec{g} (как если бы не было ветра). Результирующее ускорение есть векторная сумма $\vec{a} = \vec{a}_в + \vec{g}$. Сориентируем x -ось по направлению ветра, а y -ось вертикально вверх. Движение по x -оси рассматриваем как движение под действием только ветра и запишем $v_x(t) = \frac{Ft}{m}$, а движение по y -оси — как движение только под действием силы тяжести и запишем $v_y(t) = -gt$. Соответственно для x - и y -координат тела получим

$$x = \frac{1}{2} \frac{Ft^2}{m}; \quad (1^*)$$

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2^*)$$

Время падения тела T находим из (2*), положив $y = 0$:

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Дальность полета L найдем из (1*), положив $t = T$:

$$L = \frac{1}{2} \frac{Ft^2}{m} = \frac{FH}{mg}. \quad \blacksquare$$

2.2.7. Силы, которые не являются силами



В п. 2.2.1 отмечалось, что понятие силы нередко используется в ситуациях, не имеющих отношения к физике (вспомним, например, о «силе воли», «силах на исходе», о том, что «надо побереечь силы»). Это понятие проникло в физику многими путями, прижилось и до сих пор применяется, в частности, к понятиям, которые в действительности не являются силой и единицами силы не измеряются.

Так, ни «сила тока», ни «электродвижущая сила» не являются силами. Сила тока выражается в амперах, а электродвижущая сила — в вольтах. Исторически сложилась курьезная ситуация, когда в одном и том же физическом законе (законе Ома) $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ фигурируют сразу две «лжесилы»: I — сила

тока и \mathcal{E} — электродвижущая сила.

Есть и другие примеры сохранившихся в физике «сил», которые на самом деле не являются силами. К ним относятся: «сила звука», представляющая собой в действительности интенсивность звука (выражается в ваттах на квадратный метр), «сила света», которая в действительности есть световой поток (измеряется в канделах), «оптическая сила», которая на самом деле является величиной, обратной фокусному расстоянию линзы (измеряется в диоптриях, т. е. в обратных метрах).

Некоторые «силы», бывшие некогда в употреблении, в XIX столетии подверглись «чистке» — получили новые наименования. Так, «живая сила» стала

именоваться кинетической энергией, а «напряженная сила» оказалась потенциальной энергией. «Принцип сохранения силы» преобразовался в закон сохранения механической энергии.

2.2.8. Измерение силы с помощью динамометра

Прикрепленная к телу растянутая пружина тянет к себе тело с силой $\vec{F}_{\text{упр}}$ (рис. 2.1). Эту силу называют *силой упругости* пружины. Она направлена вдоль оси пружины; ее модуль пропорционален удлинению Δl пружины при растягивании:

$$F_{\text{упр}} = k\Delta l. \quad (2.13)$$

Коэффициент пропорциональности k называют *коэффициентом упругости* или *жесткостью*. Жесткость зависит от материала пружины, а также от ее размеров.

Формула (2.13) представляет собой математическую запись *закона Гука*. Роберт Гук, современник Ньютона, установил зависимость силы упругости от упругой деформации, показал, что эта зависимость *линейная*. Заметим, что деформация тела называется упругой, если после прекращения действия деформирующих сил тело полностью восстанавливает свою форму и размеры. Рассматриваемое в нашем случае растяжение пружины является примером упругой деформации.

Вернемся к ситуации, изображенной в нижней части рисунка 2.1. Согласно второму закону Ньютона, тело в данный момент будет иметь ускорение $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{упр}}}{m}$, где m — масса тела. Приложим теперь

к телу такую силу \vec{F} , чтобы оно оставалось в покое (рис. 2.2). Для этого нужно, чтобы силы \vec{F} и $\vec{F}_{\text{упр}}$ оказались уравновешенными; следовательно,

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{упр}}.$$

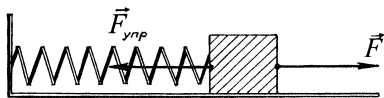


Рис. 2.2

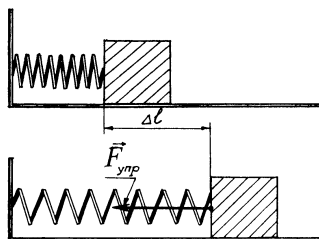


Рис. 2.1



Обратим внимание: природа силы \vec{F} не оговаривалась, эта сила отнюдь не должна иметь такую же природу, что и сила упругости. И несмотря на это *можно сравнить* силы \vec{F} и $\vec{F}_{\text{упр}}$ и утверждать, что коль скоро сила \vec{F} уравновесила силу упругости, то, значит, она направлена противоположно силе $\vec{F}_{\text{упр}}$ и ее модуль равен модулю силы $\vec{F}_{\text{упр}}$, который, как мы уже знаем, определяется законом Гука (2.13).

Таким образом, мы получаем способ измерения силы \vec{F} , какова бы ни была ее природа. Для измерения \vec{F} нужно найти опытным путем силу упругости пружины, уравновешивающую силу \vec{F} . Для этого используют *динамометр* — прибор, представляющий собой пружину, проградуированную на различные значения силы упругости в соответствии с удлинением Δl при ее растяжении (рис. 2.3). Динамометр позволяет измерить приложенную к его крючку силу \vec{F} , фиксируя силу упругости пружины, уравновешивающую силу \vec{F} .

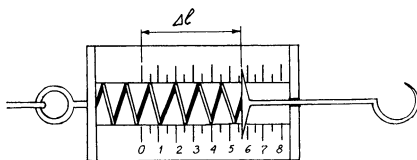


Рис. 2.3

На рисунке 2.4 показано, как измерить силу трения скольжения санок. Динамометр прикрепляют веревкой к санкам в точке A и тянут за крючок параллельно плоскости так, чтобы санки скользили равномерно. Искомая сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ уравновешивается фиксируемой динамометром силой упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$. Следовательно, $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}_{\text{упр}}$.

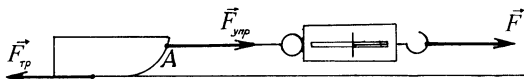


Рис. 2.4

Примечание

Сила, приложенная к крючку динамометра, направлена на рисунке вправо. Значит, уравновешивающая ее сила упругости должна быть направлена влево. Однако на рисунке сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$ направлена тоже

вправо. Как это понять? Дело в том, что стремящаяся сжаться растянутая пружина действует с равными по модулю, но противоположно направленными силами упругости на тела, прикрепленные как к одному, так и к другому ее концу (иначе говоря, как к крючку, так и к санкам).

Из рисунка 2.5 видно, как можно измерить силу тяжести гири \vec{F}_T . Надо просто подвесить гирю к динамометру. Так как гиря находится в состоянии покоя, то $\vec{F}_T = -\vec{F}_{\text{упр}}$.

Простой опыт с тремя динамометрами позволяет убедиться в том, что *силы складываются как векторы*. Свяжем узлом три нити с петлями на концах и наденем петли на крючки трех динамометров. Все три динамометра укрепим на горизонтальном листе фанеры с помощью гвоздей так, чтобы их пружины оказались как-то растянутыми (рис. 2.6, а). Узел покоится, следовательно, $\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}'_{\text{упр}} + \vec{F}''_{\text{упр}} = 0$ (все три силы упругости, действующие на узел со стороны динамометров, уравновешены). На листе бумаги, закрепленном на фанере, отметим положение узла 0 и направления трех натянутых нитей. Отложим по этим направлениям фиксируемые динамометрами модули $F_{\text{упр}}$, $F'_{\text{упр}}$, $F''_{\text{упр}}$ в произвольном масштабе — получим стрелки, изображающие на листе бумаги силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, $\vec{F}'_{\text{упр}}$, $\vec{F}''_{\text{упр}}$. Легко убедиться, что эти стрелки дают нуль при сложении по правилу сложения векторов (они образуют треугольник, см. рис. 2.6, б).

Можно повторять опыт, меняя всякий раз расположения динамометров и растяжения их пружин. Во всех случаях тройка сил

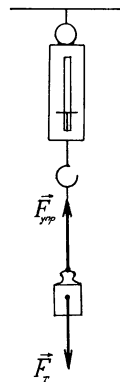


Рис. 2.5

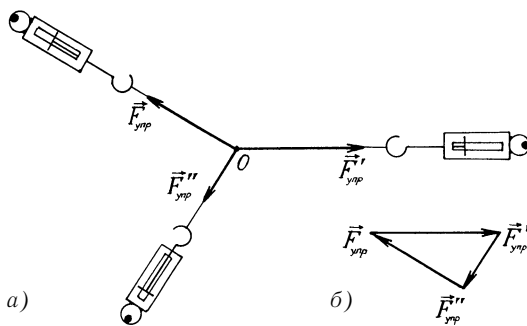


Рис. 2.6

упругости будет обращаться в нуль в результате векторного сложения.

**О единицах
физических
величин**

Система физических величин состоит из основных и производных величин. *Основная* величина в данной системе — это величина, принимаемая за независимую. Она используется для определения других величин системы. *Производная* величина — это величина, определяемая через другие, ранее введенные, а также независимые величины системы.

Из основных физических величин Международной системы единиц (СИ) в механике используются три величины — время (в *секундах*), длина (в *метрах*), масса (в *килограммах*). На основе кинематических соотношений в главе I введены единицы производных величин — скорости, ускорения, угловой скорости. Теперь введем единицы еще четырех производных величин — силы, импульса тела, плотности, жесткости пружины. Из второго закона Ньютона запишем

$$\text{единица силы} = \frac{\text{единица массы}}{\text{единица ускорения}} \times \text{единица ускорения}.$$

Следовательно, единица силы — *килограмм-метр на секунду в квадрате* (обозначение: $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$). Эта единица имеет специальное наименование — *ньютон* (обозначение: Н); $1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$.

Ньютон — сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 .

Из соотношения (2.2) имеем

$$\text{единица импульса} = \frac{\text{единица массы}}{\text{единица скорости}} \times \text{единица скорости}.$$

Следовательно, единица импульса — *килограмм-метр в секунду* (обозначение: $\text{кг} \cdot \text{м/с}$).

Из соотношения (2.8) запишем

$$\text{единица плотности} = \frac{\text{единица массы}}{\text{единица объема}}.$$

Следовательно, единица плотности — *килограмм на кубический метр* (обозначение: кг/м^3).

Из закона Гука следует, что

$$\text{единица жесткости} = \frac{\text{единица силы}}{\text{единица длины}},$$

откуда получаем: единица жесткости пружины — *ньютон на метр* (обозначение: Н/м); $1 \text{ Н/м} = 1 \text{ кг/с}^2$.

2.3. СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

При рассмотрении механических явлений приходится иметь дело, в основном, с силами трех типов:

силы тяготения, действующие на расстоянии;

силы упругости;

силы трения.

Последние два типа сил — это контактные силы. Они действуют лишь при непосредственном контакте тел.

2.3.1. Сила тяжести и центр тяжести

Силой тяжести называют силу притяжения Землей тел, находящихся на поверхности Земли или в непосредственной близости от нее. Сила тяжести представляет собой частный, хотя и очень важный для нас вид *силы всемирного тяготения*. (О законе всемирного тяготения будет отдельный разговор в главе 6). Пока же достаточно заметить, что сила тяжести действует на все тела и во всякое время (ее действие на тело нельзя прекратить). Сила тяжести \vec{F}_T определяется соотношением

$$\vec{F}_T = m\vec{g}, \quad (2.14)$$

где m — масса тела, \vec{g} — ускорение свободного падения¹⁾; вектор \vec{g} направлен вертикально вниз; его модуль равен $9,8 \text{ м/с}^2$.

Напомним, что в § 1.5 обсуждалось движение тела под действием силы тяжести — так называемое свободное падение. При этом использовалась модель материальной точки.



Как найти *точку приложения* силы тяжести в случаях, когда тело нельзя представлять материальной точкой?

Это совсем нетрудно сделать для двумерного тела, например для куска фанеры произвольной формы. Подвесим такое тело (кусок фанеры) на нити в некоторой точке A (рис. 2.7, a). На тело действуют две силы: сила тяжести \vec{F}_T и сила реакции нити \vec{T} (сила упругости). Так как тело покоится, то, следовательно, $\vec{F}_T + \vec{T} = 0$. Значит, $\vec{F}_T = -\vec{T}$ — сила тяжести и сила реакции нити направлены противоположно, линии их действия — общая вертикальная

¹⁾ Ранее в учебной литературе неправильно использовался термин ускорение силы тяжести.

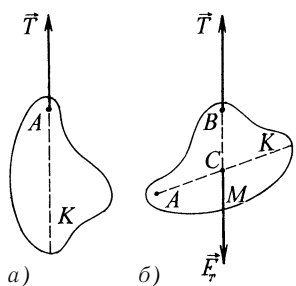


Рис. 2.7

прямая, проходящая через точку A (штриховая прямая AK на рисунке 2.7, a). Точка приложения силы тяжести должна находиться где-то на этой прямой.

Подвесим теперь наш кусок фанеры в другой точке; пусть это будет точка B (рис. 2.7, b). Повторив прежние рассуждения, приходим к заключению, что точка приложения силы тяжести должна находиться на прямой BM . Понятно, что точка пересечения прямых AK и BM (точка C) как раз и будет являться искомой точкой приложения силы тя-

жести. Ее называют *центром тяжести* тела. Обратим внимание: центр тяжести тела есть точка приложения силы тяжести, действующей на тело при *любом* его положении в пространстве. В этом легко убедиться, подвесивая кусок фанеры на нити в самых разных точках.

Положение центра тяжести однородных тел простой формы может быть найдено *из соображений симметрии*. Так, центры тяжести диска, шара, квадратной пластинки, куба совпадают с геометрическими центрами тел. Центр тяжести цилиндра находится на середине его оси. Центры тяжести пластинки в форме параллелограмма и бруса в форме параллелепипеда находятся в точке пересечения их диагоналей.

Допустим, тело состоит из нескольких частей, для каждой из которых центр тяжести может быть определен из соображений симметрии (например, тело из нескольких дисков или шаров, надетых на общий вал). Сила тяжести такого тела может быть найдена как равнодействующая сил тяжести дисков (шаров) и вала. (Об этом мы поговорим в главе 3.)

Понятно, что притяжение Земли действует на все частицы, из которых состоит данное тело. Но если нам известно положение центра тяжести тела, то мы можем считать, что есть только одна сила, приложенная в центре тяжести и равная произведению массы тела на ускорение свободного падения.

2.3.2. Силы упругости и деформация тел

На уже знакомом нам рисунке 2.5 гиря находится в состоянии покоя, поскольку ее сила тяжести \vec{F}_T уравновешена силой упругости пружины динамометра $\vec{F}_{\text{упр}}$ ($\vec{F}_T + \vec{F}_{\text{упр}} = 0$). Но вот динамометр убрали и подвесили гирю просто на нити. Гиря по-прежнему находится в состоянии покоя и, значит, на нее должна

действовать со стороны нити сила, уравнивающая силу тяжести \vec{F}_T ; обозначим эту силу через \vec{T} (рис. 2.8). Понятно, что $\vec{F}_T + \vec{T} = 0$. Силу \vec{T} можно назвать *силой реакции нити*.



На что же среагировала нить? Иначе говоря, почему возникла сила реакции нити \vec{T} ?

Она возникла вследствие *деформации нити*, т. е. вследствие некоторого *растяжения нити* под действием подвешенной на этой нити гири. Конечно, в отличие от пружины, нить растягивается весьма незначительно, и увидеть воочию это растяжение невозможно. Но его вполне способны обнаружить достаточно точные приборы.

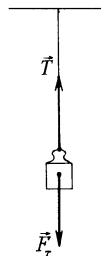


Рис. 2.8

Итак, сила реакции нити \vec{T} , обусловленная ее деформацией под действием подвешенной на нити гири, имеет такую же природу, что и сила упругости пружины. Короче говоря, сила реакции нити \vec{T} — не что иное, как *сила упругости*. Она так и была названа в скобках в п. 2.3.1 при обсуждении опыта по отысканию центра тяжести куска фанеры. Довольно часто для силы реакции нити \vec{T} используют название «*сила натяжения нити*». Наш совет: так делать не следует, поскольку сила реакции нити приложена к телу, взаимодействующему с нитью, тогда как сила натяжения нити приложена к самой нити (она натягивает нить). (Подробнее об этом см. в § 2.4.)

Легко сообразить, что лежащая на столе книга не проваливается под действием силы тяжести сквозь стол благодаря тому, что на нее действует со стороны крышки стола уравнивающая сила. Эту силу естественно назвать силой реакции крышки стола или, более широко, *силой реакции опоры*. На рисунке 2.9 даны обе силы, действующие на книгу: сила тяжести \vec{F}_T и сила реакции опоры \vec{N} . Понятно, что $\vec{F}_T + \vec{N} = 0$. Сила реакции опоры возникла вследствие *деформации* крышки стола под действием лежащей на ней книги. В данном случае мы имеем дело с деформацией, называемой *изгибом*. Под действием книги крышка стола слегка (на глаз этого не заметишь) прогибается — и возникает сила реакции опоры \vec{N} (сила упругости), направленная вертикально вверх и равная по модулю силе тяжести книги \vec{F}_T .

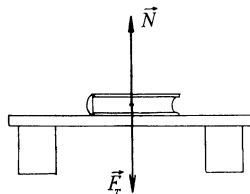


Рис. 2.9

Теперь можно дать общее определение силы упругости:

это есть сила, действующая со стороны деформированного тела на соприкасающиеся с ним тела и направленная противоположно перемещению частей тела при его деформации.



Обратим внимание: силы упругости появляются только при деформациях, т. е. при каких-либо изменениях размеров или формы тела. Наблюдаются различные виды деформации: *растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг, кручение*. Если тело, деформированное каким-либо образом (например, растянутая или сжатая пружина, изогнутая стальная пластинка или просто незначительно прогнувшаяся крышка стола и натянута нить), соприкасается с другим телом, то на это «другое тело» будет действовать сила упругости со стороны деформированного тела. Направление силы упругости противоположно направлению, в котором перемещаются части тела при деформации. Если, например, подвешенная к потолку пружина была оттянута книзу, то ее упругая сила будет тянуть вверх тело, подвешенное к пружине. Если крышка стола прогибается книзу, то ее упругая сила будет подталкивать вверх книгу, лежащую на крышке стола.

2.3.3. Силы трения

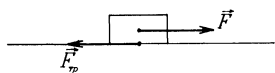


Рис. 2.10

На горизонтальную доску положим тяжелый деревянный брусок, обвяжем его нитью и с ее помощью начнем тянуть брусок с горизонтально направленной силой \vec{F} , которую назовем *силой тяги* (рис. 2.10).

Будем постепенно увеличивать модуль силы \vec{F} (его можно всякий раз фиксировать, если воспользоваться динамометром, как это показано на рисунке 2.4). Пока модуль силы тяги относительно мал, брусок остаётся в покое и, значит, на него действует со стороны доски уравновешивающая сила $\vec{F}_{\text{тр}}$, равная по модулю силе тяги \vec{F} и направленная в противоположную сторону:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}.$$

Эту силу называют *силой трения покоя*. Линия действия указанной силы проходит по поверхности той грани бруска, которая соприкасается с поверхностью доски.

Сила трения покоя возникает вследствие того, что поверхности бруска и доски, какими бы отполированными они ни были, имеют многочисленные мелкие неровности, шероховатости, хорошо наблюдаемые под микроскопом. Обеспечивая сцепление соприкасающихся тел, эти неровности обуславливают появление силы тре-

ния покоя, не позволяющей сдвинуть брусок с места, если сила тяги относительно невелика.

С увеличением силы тяги возрастает и сила трения покоя. Это будет происходить до тех пор, пока сила тяги не достигнет некоторого критического значения F' , после чего брусок придет в движение. Теперь со стороны доски на брусок будет действовать уже не сила трения покоя, а *сила трения скольжения*.

Как показывает опыт,

$$F' = \mu' N, \quad (2.15)$$

где N — модуль силы реакции опоры, μ' — *коэффициент трения покоя*; он не зависит от размеров площади соприкосновения тел, но зависит от сочетания материалов, из которых сделаны соприкасающиеся тела, а также от характера обработки их поверхностей. Чем больше сила реакции опоры, тем сильнее брусок прижимается к доске и тем больше должна быть сила тяги, которая, наконец, сдвинет брусок с места и заставит его скользить по поверхности доски. Для увеличения N надо увеличивать силу тяжести бруска (ведь $N = F_T$); можно, например, сверху на брусок положить кирпич.

Итак, постепенно возрастающая сила тяги достигла критического значения F , и брусок начал скользить по доске. При $F = F_0$ скольжение будет равномерным. При $F > F'$ скольжение будет происходить с ускорением \vec{a} , модуль которого определяется, согласно второму закону Ньютона, соотношением

$$a = \frac{F - F'}{m}, \quad (2.16)$$

где m — масса бруска. После того, как началось скольжение бруска, сила трения практически перестаёт зависеть от значения силы тяги. Она становится *силой трения скольжения*; ее модуль приближенно описывают формулой, похожей на формулу (2.15):

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (2.17)$$

Здесь μ — *коэффициент трения скольжения*. Он немного меньше коэффициента трения покоя μ' и, соответственно, модуль силы трения скольжения немного меньше критического значения силы тяги F' .

Изменение модуля силы трения по мере возрастания модуля силы тяги удобно представить графически (рис. 2.11). При $F < F'$ этот график описывает зависимость от F модуля силы трения покоя (в этом случае $F_{\text{тр}} = F$), а при $F \geq F'$ — зависимость от F модуля силы трения скольжения (в этом случае $F_{\text{тр}} = \mu N$ — зависимость от F отсутствует).

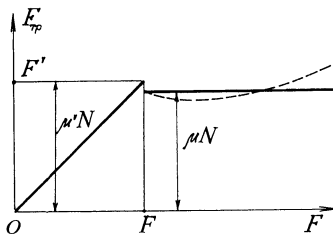


Рис. 2.11

Строго говоря, при $F > F'$ модуль силы трения скольжения не постоянен, а слегка изменяется с увеличением силы тяги, поскольку коэффициент трения скольжения μ слабо зависит от скорости скольжения бруска, а она возрастает с ростом силы тяги. Сначала с ростом F коэффициент μ немного уменьшается, но потом он начинает медленно возрастать. Поэтому на графике вместо горизонтальной прямой следовало бы изобразить штриховую кривую.

Как показывает опыт, коэффициент трения скольжения μ меньше единицы (например, при скольжении деревянного бруска по доске он равен примерно 0,5, а при скольжении бруска по льду он снижается до 0,04). Поэтому модуль силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ меньше модуля силы реакции опоры \vec{N} . Отсюда следует, что любое тело легче перемещать волоком, чем поднимать или переносить.

2.3.4. Роль сил трения



Какую роль в нашей жизни играют силы трения?

Этот вопрос заслуживает особого внимания. Во всех случаях *сила трения направлена против движения тела*, а потому нередко можно слышать, что роль трения в нашей жизни негативна. Считается очевидным, что «трение мешает движению». Недаром же принимаются меры для уменьшения трения скольжения внутри различных механизмов с движущимися друг относительно друга частями — соприкасающиеся поверхности очищают, полируют, смазывают; применяются шарикоподшипники.

Казалось бы, как хорошо было бы без трения: сани и повозки двигались бы по ровной горизонтальной прямой дороге по инерции — достаточно было бы лишь придать им некоторую начальную скорость. Правда, управлять движением саней на такой сверхскользящей дороге было бы невозможно, а повозка не катилась бы по дороге, а скользила. Поэтому никому не приходит в голову поливать дорогу зимой водой (чтобы она покрылась льдом), а летом поливать асфальтовое покрытие какой-нибудь смазочной жидкостью. Совсем наоборот: дорогу от льда очищают, покрытие дороги стараются делать из материала, повышающего трение, на шины автомобилей наносят рельефные узоры с целью увеличения трения. Так что роль сил трения в нашей жизни *скорее позитивная, чем негативная*.

Это относится прежде всего к силе трения покоя. Если бы вдруг исчезло трение покоя, то невозможно было бы поднести к рту стакан с водой, взять в руки мячик, шахматную фигуру, книгу, ложку — они попросту выскользывают из рук. Нельзя было

бы завязать какой-либо узел, пришить пуговицу, сколотить с помощью гвоздей ящик. Благодаря силе трения покоя неподвижно стоят на своих местах предметы мебели в комнате, не соскальзывает со стола стоящая на нем посуда. Не будь силы трения покоя, мы не смогли бы ходить: при всякой попытке сделать шаг мы бы теряли равновесие и падали. Любая дорога представлялась бы нам сверхскользкой. Если на такую дорогу поставить автомобиль и запустить в работу двигатель, то можно было бы наблюдать такую картину: ведущие колеса вращаются, автомобиль буксует и не сдвигается с места. Такое, кстати сказать, нередко наблюдается, когда колеса автомобиля попадают на вязкую грязь.

Может показаться удивительным тот факт, что *именно сила трения покоя обеспечивает движение автомобиля*. Разумеется, силу трения покоя нельзя воспринимать в данном случае как активную движущую силу. Она — всего лишь реакция на ту активную силу, с какой ведущие колеса действуют на дорожное полотно. (Мы подробно обсудим это в § 2.4.)

Отметим, что полезным может быть не только трение покоя, но и трение скольжения. Когда-то человек использовал его (разумеется, неосознанно) для добывания огня, заставляя быстро вращаться заостренную деревянную палочку, соприкасающуюся своим концом с куском сухого дерева. При трении о дерево палочка сильно нагревалась и в конечном счете воспламеняла положенные тут же кусочки березовой коры или пучок сухой травы. В наше время нагревание тел, трущихся одно о другое, используется для получения огня при помощи обычных спичек.

Сила трения скольжения используется также в транспортных тормозных системах; без нее было бы невозможно затормозить и остановить движение автомобиля или поезда. Сила трения скольжения порождает звуки в результате движения скрипичного смычка по струнам. Для увеличения трения скольжения смычок натирают канифолью.

2.3.5. Силы сопротивления при движении тела в жидкости или газе

До сих пор речь шла о силах трения, действующих вдоль поверхности соприкосновения твердых тел. Такое трение называют *сухим трением*. Существуют также силы так называемого *жидкого трения*. Они возникают при движении тела в жидкой или газообразной среде и направлены вдоль поверхности соприкосновения тела с жидкостью (газом) в сторону, противоположную движению тела. Эти силы тормозят движение тела в среде, поэтому их называют также *силами сопротивления*. Ниже мы будем использовать именно этот термин.

Подчеркнем, что не существует *силы сопротивления покоя* (когда тело покоится относительно окружающей его жидкой или газообразной среды). Сила сопротивления возникает лишь при движении тела относительно среды или движении среды относительно тела, что, по сути, одно и то же. Благодаря отсутствию силы сопротивления покоя мы вполне можем сдвинуть в воде тяжелое бревно, катер, барку, тогда как сдвинуть их на берегу нам не под силу.

Модуль силы сопротивления зависит от нескольких факторов:
размеров и формы тела;
состояния его поверхности;
свойств среды;
скорости движения тела относительно среды (или среды относительно тела).

Чем больше размеры тела, тем, очевидно, больше сила сопротивления. Чтобы уменьшить силу сопротивления, телу придуют *обтекаемую* форму, например, форму сигары. Такова форма подводной лодки. Идеальной с точки зрения обтекаемости может считаться форма тела дельфина. Говоря о свойствах среды (жидкости или газа), отметим *плотность среды* ρ и ее *вязкость* (или, иными словами, *внутреннее трение*). Вязкость η — физическая величина, характеризующая трение между соседними слоями жидкости (газа), скользящими друг относительно друга. Единицей вязкости является $\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$. (Подробнее об этой величине см. в главе 7.)

С увеличением скорости движения тела относительно среды (среды относительно тела) сила сопротивления возрастает. При *достаточно медленных движениях*, при которых жидкость (газ) плавно обтекает тело, сила сопротивления *прямо пропорциональна скорости*. Английский физик Джордж Стокс установил, что сила сопротивления \vec{F}_c , испытываемая твердым шаром радиусом R при медленном движении со скоростью \vec{v} в среде, обладающей вязкостью η , может быть представлена соотношением:

$$\vec{F}_c = -6\pi\eta R \vec{v}. \quad (2.18)$$

Это соотношение впоследствии было названо *законом Стокса*. Знак «минус» здесь показывает, что сила \vec{F}_c направлена противоположно мгновенной скорости \vec{v} .

Если движение происходит с *достаточно большой скоростью*, при которой сзади тела возникают турбулентные завихрения, то сила сопротивления становится *пропорциональной квадрату*

ту скорости v^2 . В этом случае модуль силы сопротивления \vec{F}_c может быть представлен в виде

$$F_c = CS\rho v^2, \quad (2.19)$$

где ρ — плотность среды, S — площадь поперечного сечения тела, C — безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела (например, для шара $C = 0,2$, для диска $C = 1,1-1,2$). Сила \vec{F}_c направлена противоположно скорости тела \vec{v} , что можно учесть, переписав соотношение (2.19) в виде:

$$\vec{F}_c = CS\rho v \vec{v}. \quad (2.20)$$

2.3.6. Вывод формулы для силы сопротивления



Формулу (2.20) можно получить, рассматривая, вместо движения тела в неподвижном газе (или жидкости), поток газа, налетающий на неподвижное тело. Предположим, что частицы газа массой m каждая движутся перпендикулярно неподвижному диску площадью S . За промежуток времени Δt к диску подлетят частицы, содержащиеся в объеме $V = Sv\Delta t$. Обозначим через n число частиц в единице объема газа; $n = \rho/m$, где ρ — плотность газа. За время Δt о диск ударятся N частиц:

$$N = nV = \frac{S\rho v\Delta t}{m}. \quad (2.21)$$

При ударе о диск на частицу действует сила \vec{f} , равная, согласно (2.7), изменению ее импульса за промежуток времени Δt : $\vec{f} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$. Будем полагать, что удар частицы о диск является абсолютно неупругим (ударившись о диск, частица прилипает к нему) и, значит, $\overrightarrow{\Delta(m\vec{v})} = 0 - m\vec{v} = -m\vec{v}$. Таким образом,

$$\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

Согласно третьему закону Ньютона (мы подробно обсудим его в § 2.4), каждая частица газа действует на диск с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. Учитывая удары всех частиц, достигших диска в течение времени Δt , находим силу \vec{F}_c , действующую на диск со стороны потока газа (это и есть сила сопротивления): $\vec{F}_c = -\vec{f}N$. Подставив сюда (2.21) и (2.22), получим

$$\vec{F}_c = S\rho v \vec{v}. \quad (1^*)$$

Этот результат совпадает с (2.20) для $C = 1$ с точностью до знака. Учитывая, что в (2.20) движется не газ относительно покоящегося тела, а тело относительно газа, заменим в (1*) \vec{v} на $-\vec{v}$ и в итоге придем к соотношению (2.20).

2.3.7. Падение тела в воздухе

В § 1.6 мы рассматривали свободное падение тела, т. е. движение его только под действием силы тяжести. При этом мы пренебрегали силой сопротивления, с какой воздух действует на падающее тело, а также выталкивающей (архимедовой) силой. Пренебрегая по-прежнему архимедовой силой, убедимся, что сила сопротивления при падении тела в воздухе играет важную роль. Будем рассматривать падение с некоторой высоты без начальной скорости.

Заметим, что при падении тел в воздухе сила сопротивления оказывается практически с самого начала падения пропорциональной квадрату скорости. Поэтому будем использовать соотношение (2.20), в котором ρ — плотность воздуха.

На падающее в воздухе тело массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления \vec{F}_c . В момент времени, когда мгновенная скорость тела есть \vec{v} , ускорение \vec{a} определяется, согласно второму закону Ньютона, соотношением

$$m\vec{a} = m\vec{g} - CS\rho v\vec{v}. \quad (2.23)$$

Спроецируем это векторное равенство на направление ускорения \vec{g} ; получим

$$ma = mg - CS\rho v^2. \quad (2.24)$$

По мере падения тела модуль силы тяжести mg не изменяется, тогда как модуль силы сопротивления $CS\rho v^2$ растет с увеличением v . Когда эти два модуля сравниваются, ускорение обратится в нуль, и дальнейшее падение тела, как бы долго оно ни длилось, будет совершаться *равномерно* с некоторой постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{уст}}$ (ее называют *установившейся скоростью* или *предельной скоростью падения*). Чтобы найти модуль установившейся скорости, надо, очевидно, положить $a = 0$ в (2.24). В результате находим

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{mg}{CS\rho}}. \quad (2.25)$$

Используя (2.25), найдем v_y для падающей капли дождя, рассматривая ее в виде водяного шара радиусом R . Так как $C = 0,2$, $S = \pi R^2$, $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_{\text{в}}$, где $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды, то из (2.25) следует:

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{4Rg}{3 \cdot 0,2} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{6,7 Rg\rho_{\text{в}}}{\rho}}.$$

Учтем, что $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$. После этого установившуюся скорость, выраженную в м/с, можно представить

в виде $v_{\text{уст}} = \sqrt{50,5 R}$ м/с, где R выражается в мм. Для дождевой капли радиусом 2 мм получаем, что $v_{\text{уст}} = 10$ м/с. Итак, капля дождя радиусом 2 мм падает с установившейся скоростью 10 м/с. Эта скорость устанавливается после того, как капля, начав падать, пролетит всего несколько метров. Она будет сохраняться вплоть до удара капли о поверхность земли (если, конечно, не учитывать возможного испарения капли в пути).

Представим теперь, что та же капля падает с высоты $H = 2$ км в безвоздушном пространстве. В этом случае, согласно (1.35), капля должна упасть на земную поверхность с конечной скоростью $v_1 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1000}$ м/с ≈ 200 м/с. Вряд ли удары таких капель показались бы нам безобидными.

Ещё пример. С большой высоты прыгает парашютист массой 70 кг. Как показывает опыт, в (2.25) можно положить $CS\rho = 0,2$ кг/м. Значит, установившаяся скорость будет равна приблизительно 60 м/с. Она устанавливается после того, как парашютист пролетит, не раскрывая парашюта, примерно 500 м. Допустим, парашютист совершает затыжной прыжок с высоты 7 км и до высоты около 500 м падает, не раскрывая парашюта. Это означает, что он пролетел расстояние вниз по вертикали, равное примерно 6 км, равномерно со скоростью 60 м/с. Такое равномерное падение продолжалось около 100 с, т. е. более полутора минут. Если бы парашют не раскрылся, парашютист ударился бы о землю, имея скорость 60 м/с, и, конечно, погиб бы. Но он раскрыл парашют, и падение затормозилось до скорости 5—6 м/с, с какой парашютист пролетел последние до приземления десятки метров.

2.4. ДЕЙСТВИЕ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ

2.4.1. Попарное возникновение сил

Сила служит мерой действия на данное тело со стороны другого тела. Как отмечалось в п. 2.2.1, понятие силы относится к паре тел — к телу, на которое действует данная сила (назовем его телом A), и к телу, со стороны которого эта сила действует (назовем его телом B). Такое утверждение нуждается в уточнении. Дело в том, что если происходит действие тела B на тело A , то одновременно происходит действие тела A на тело B . Если появилась сила, приложенная к телу A со стороны тела B (пусть это будет условно «сила действия»), то одновременно появляется и сила, приложенная к телу B со стороны тела A (ее можно условно назвать «силой противодействия»). Понятно, что названия «действие» и «противодействие» относительны, их можно поменять местами.

Важно, что тела A и B *взаимодействуют* и при этом возникают не одна, а *сразу две* силы (от B к A и от A к B). Короче говоря, *силы возникают обязательно попарно.*

С примерами попарного возникновения сил мы уже познакомились в § 2.3. Висящая на нити гиря действует на нить с силой, называемой *силой натяжения нити*. Одновременно со стороны нити действует на гирию *сила реакции нити*, являющаяся по своей природе силой упругости. Лежащая на столе книга действует на крышку стола с силой, называемой *силой нормального давления*. Одновременно со стороны крышки стола действует на книгу *сила реакции опоры* (сила упругости).

Легко привести сколько угодно примеров попарного возникновения сил. Мы начинаем давить ладонью на стену — тут же возникает сила, с которой стена давит на нашу ладонь. Мы ударяем ногой по футбольному мячу и тут же ощущаем обратное действие на ногу со стороны мяча. Мы забиваем молотком гвоздь в доску. Во время удара молоток действует на гвоздь, загоняя его в доску. Одновременно гвоздь действует на молоток, «заставляя» его снизить скорость движения до нуля.

2.4.2. Третий закон Ньютона — закон равенства действия и противодействия

Итак, всякие действия тел друг на друга носят характер *взаимодействия*. Каждое из двух взаимодействующих тел, действуя с некоторой силой на другое тело, в то же время подвергается действию силы со стороны этого «другого тела». Указанные силы приложены к *разным телам* и направлены в *противоположные стороны*.



Что можно сказать о модуле этих сил?

Легко убедиться на простом опыте, что обе рассматриваемые силы *равны по модулю*.

Зацепим друг за друга два динамометра их крючками и, взявшись за кольца, растягиваем пружины динамометров, следя за их показаниями. Мы увидим, что при любом растяжении показания динамометров совпадают. Следовательно, сила, с которой правый динамометр действует на левый, равна по модулю силе, с которой левый динамометр действует на правый.

Теперь можно сформулировать **третий закон Ньютона**, называемый также **законом равенства действия и противодействия**:

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Приведем формулировку закона самого Ньютона:

«Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.»

Пусть на первое тело (его масса m_1) действует сила \vec{F}_1 со стороны второго тела (его масса m_2). Согласно третьему закону Ньютона, на второе тело должна действовать со стороны первого сила \vec{F}_2 , равная по модулю силе \vec{F}_1 , но направленная в противоположную сторону:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (2.26)$$

Используя второй закон Ньютона, перепишем это соотношение в виде

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \quad (2.27)$$

Второе тело сообщает первому ускорение \vec{a}_1 , а первое сообщает второму ускорение \vec{a}_2 . Из (2.27) следует, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.28)$$

Таким образом, *отношение модулей ускорений взаимодействующих тел равно обратному отношению их масс*. Ускорение более массивного тела меньше ускорения менее массивного.

На находящееся вблизи земной поверхности тело массой m действует сила тяжести \vec{F}_T , сообщающая телу ускорение свободного падения \vec{g} , модуль которого равен $9,8 \text{ м/с}^2$. Сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$ — это сила, с какой земной шар притягивает к себе тело массой m . Согласно третьему закону Ньютона, с такой же по модулю силой тело массой m притягивает к себе земной шар. Масса земного шара $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Из (2.28) следует, что модуль a ускорения, приобретаемого земным шаром благодаря притяжению его телом массой m , можно оценить из соотношения $a = \frac{mg}{M}$. Если,

например, $m = 1 \text{ кг}$, то $a = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ м/с}^2$. Вряд ли можно принимать во внимание столь ничтожное ускорение. Можно с полным основанием считать, что $a = 0$. Но сила притяжения земного шара телом массой m не равна нулю. Только подумать: килограммовая гиря и огромный земной шар действуют друг на друга с *одинаковыми* по модулю силами!

2.4.3. Силы реакции как противодействия

Слово «реакция» в переводе с латинского как раз и означает «противодействие» (буквально: «противоположное действие» — reaction). На примере нескольких конкретных задач поговорим о силах реакции нити и реакции опоры и рассмотрим силы, по отношению к которым указанные реакции являются «противодействиями».

Задача 1. По наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 2.12) соскальзывает без трения брусок массой m . Требуется найти ускорение бруска и силу нормального давления бруска на плоскость.

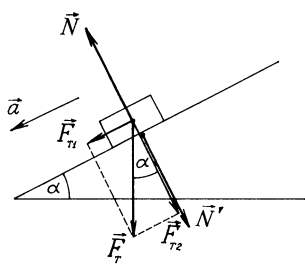


Рис. 2.12

□ На брусок действуют сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} , направленная перпендикулярно к наклонной плоскости. Так как брусок движется поступательно, будем рассматривать его как материальную точку и поэтому будем полагать, что силы \vec{N} и \vec{F}_T приложены в одной и той же точке, в качестве которой выберем центр тяжести бруска. Разложим силу \vec{F}_T на направления вдоль наклонной плоскости (составляющая силы — вектор \vec{F}_{T1}) и перпендикулярно к ней (вектор \vec{F}_{T2}); понятно, что

$$F_{T1} = mg \sin \alpha \text{ и } F_{T2} = mg \cos \alpha.$$

Брусок движется с ускорением \vec{a} в направлении вдоль плоскости. Согласно второму закону Ньютона, $ma = F_{T1}$ и, следовательно,

$$a = g \sin \alpha. \quad (2.29)$$

В направлении, перпендикулярном к плоскости, ускорение отсутствует; следовательно,

$$N = F_{T2} = mg \cos \alpha. \quad (2.30)$$

Обозначим силу нормального давления бруска на плоскость через \vec{N}' . Согласно третьему закону Ньютона, $\vec{N}' = -\vec{N}$ и, значит,

$$N' = mg \cos \alpha. \quad \blacksquare$$

Задача 2. По горизонтальной плоскости движутся без трения бруски массами m_1 и m_2 , соединенные нитью bc (рис. 2.13).

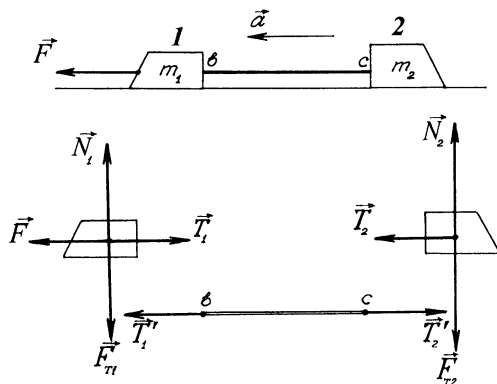


Рис. 2.13

К бруску массой m_1 приложена горизонтально направленная постоянная сила тяги \vec{F} . Требуется найти ускорение системы брусков и силу натяжения нити.

□ На брусок 1 действуют: сила тяжести $\vec{F}_{\tau 1} = m_1 \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N}_1 , сила тяги \vec{F} , сила реакции нити \vec{T}_1 . На брусок 2 действуют: сила тяжести $\vec{F}_{\tau 2} = m_2 \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N}_2 , сила реакции нити \vec{T}_2 . На нить действуют силы натяжения \vec{T}'_1 и \vec{T}'_2 . Силой тяжести нити ввиду малости пренебрегаем. Из третьего закона Ньютона следует, что

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1; \quad \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2. \quad (1^*)$$

Согласно второму закону Ньютона, $\vec{N}_1 + \vec{F}_{\tau 1} = 0$ и $\vec{N}_2 + \vec{F}_{\tau 2} = 0$ — силы реакции опоры и силы тяжести брусков взаимно уравновешены и поэтому в данной задаче фактически не участвуют.

Обозначим через \vec{a} ускорение брусков и в соответствии со вторым законом Ньютона запишем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для бруска 1:} \quad m_1 a = F - T_1; \\ \text{для бруска 2:} \quad m_2 a = T_2. \end{array} \right\} \quad (2^*)$$

Если бы учитывалась масса нити m , то систему уравнений (2*) следовало бы дополнить уравнением: $ma = T'_1 - T'_2$. Но поскольку принято, что $m = 0$, то $T'_1 = T'_2$. С учетом (1*) заключаем, что

$$T_1 = T'_1 = T'_2 = T_2. \quad (3^*)$$

Введем для этих модулей общее обозначение T , после чего перепишем (2*) в виде

$$\left. \begin{aligned} m_1 a &= F - T; \\ m_2 a &= T. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Отсюда находим модули ускорения и силы натяжения нити:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}; \quad T = \frac{F m_2}{m_1 + m_2}. \quad \blacksquare$$

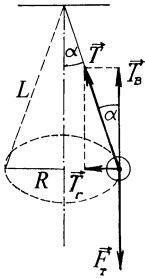


Рис. 2.14

Задача 3. Тело массой m , подвешенное на нити длиной L , равномерно движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом R (рис. 2.14). Требуется найти силу натяжения нити и скорость движения тела по окружности.

□ На тело действуют сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$ и сила реакции нити \vec{T} . Разложим силу \vec{T} на горизонтальную и вертикальную составляющие: \vec{T}_Γ и \vec{T}_B , соответственно. Легко видеть, что

$$\frac{T_\Gamma}{T} = \frac{R}{L}; \quad \frac{T_B}{T} = \frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{L}. \quad (4^*)$$

Силы \vec{T}_B и \vec{F}_T взаимно уравновешены, а сила \vec{T}_Γ сообщает телу центростремительное ускорение, модуль которого равен $\frac{v^2}{R}$, где v — модуль скорости тела. Это позволяет записать, с учетом (4*), систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T\sqrt{L^2 - R^2}}{L} &= mg; \\ \frac{TR}{L} &= \frac{mv^2}{R}. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим:

$$T = \frac{mgL}{\sqrt{L^2 - R^2}}; \quad v = R \sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - R^2}}}.$$

Если учесть, что $\frac{R}{L} = \sin\alpha$; $\frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{L} = \cos\alpha$, где α — угол отклонения нити от вертикали, то полученные результаты можно переписать в виде:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \quad v = \sin\alpha \sqrt{\frac{gL}{\cos\alpha}}. \quad \blacksquare$$

Задача 4. Через блок перекинута нить (рис. 2.15), к концам которой подвешены грузы массами m_1 и m_2 , причем $m_2 > m_1$. Массой блока и трением на оси блока можно пренебречь. Требуется найти ускорение системы грузов, силы реакции нитей, а также силу реакции оси блока, действующую на блок.

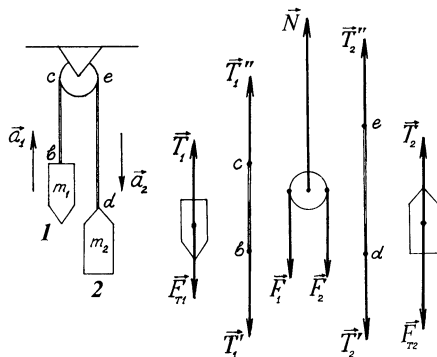


Рис. 2.15

□ На груз 1 действуют сила тяжести $\vec{F}_{T1} = m_1 \vec{g}$ и сила реакции нити \vec{T}_1 . На груз 2 действуют сила тяжести $\vec{F}_{T2} = m_2 \vec{g}$ и сила реакции нити \vec{T}_2 . На левый участок нити действуют силы натяжения \vec{T}_1' и \vec{T}_1'' , а на правый участок — силы натяжения \vec{T}_2' и \vec{T}_2'' . На блок действуют силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 и сила реакции оси блока \vec{N} . Из третьего закона Ньютона следует, что

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}_1' &= -\vec{T}_1 \text{ (взаимодействуют груз 1 и нить),} \\ \vec{T}_2' &= -\vec{T}_2 \text{ (взаимодействуют груз 2 и нить),} \\ \vec{T}_1'' &= -\vec{F}_1 \text{ (взаимодействуют левая нить и блок),} \\ \vec{T}_2'' &= -\vec{F}_2 \text{ (взаимодействуют правая нить и блок).} \end{aligned} \right\} (5^*)$$

Под действием разности сил \vec{F}_2 и \vec{F}_1 блок начинает ускоренно вращаться. Мы поговорим об этом позднее, в п. 4.2.4, а пока будем всякий раз полагать, что можно пренебречь массой блока и считать, что $F_1 = F_2$. Отсюда следует с учетом (5*):

$$T_1 = T_1' = T_1'' = F_1 = F_2 = T_2'' = T_2' = T_2. \quad (6^*)$$

Введем для этих модулей общее обозначение T . Пренебрежение массой блока существенно упрощает задачу, поскольку теперь

можно ограничиться рассмотрением только тех сил, которые действуют на грузы. Используя второй закон Ньютона, запишем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для груза 1: } m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1; \\ \text{для груза 2: } m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2. \end{array} \right\} \quad (7^*)$$

Здесь \vec{a}_1 и \vec{a}_2 — ускорения грузов 1 и 2, соответственно ($\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$; модули ускорений обозначим через a). Так как $m_2 > m_1$, то вектор \vec{a}_1 направлен вверх, а вектор \vec{a}_2 — вниз. Спроецируем векторы в (7*) на направление ускорения \vec{g} ; получим систему скалярных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для груза 1: } -m_1 a = m_1 g - T; \\ \text{для груза 2: } m_2 a = m_2 g - T. \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

Отсюда находим:

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}; \quad (2.33)$$

$$T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.34)$$

Как легко видеть из рисунка, модуль силы реакции блока равен

$$N = 2T = \frac{4gm_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8^*)$$

Если бы массы грузов были одинаковыми ($m_1 = m_2 = m$), то ускорение отсутствовало бы (грузы были бы неподвижны или двигались бы равномерно). В этом случае соотношения (2.34) и (8*) превращаются в соотношения $T = mg$, $N = 2mg$. ■

Задача 5. Брусок массой m_1 скользит вверх по наклонной плоскости с углом наклона α под действием перекинутой через блок нити, к концу которой подвешен груз массой m_2 (рис. 2.16). Трением бруска о плоскость и массой блока можно пренебречь. Требуется найти ускорения бруска и груза и силу натяжения нити.

□ На брусок действуют: сила тяжести $\vec{F}_{\tau 1} = m_1 \vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила реакции нити \vec{T}_1 . На груз действуют сила тяжести $\vec{F}_{\tau 2} = m_2 \vec{g}$ и сила реакции нити \vec{T}_2 , а на нить — силы натяжения \vec{T}_1 и \vec{T}_2 . На наклонную плоскость действует сила нормального давления \vec{N}' . Ускорение бруска обозначим через \vec{a}_1 , а ускорение гру-

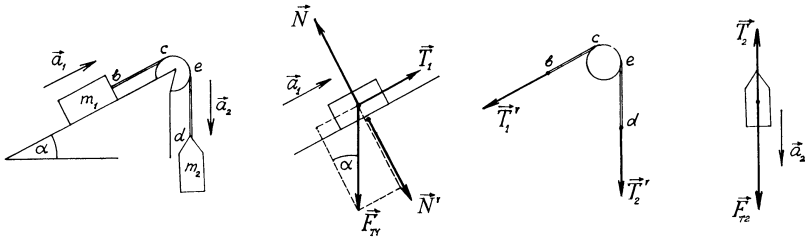


Рис. 2.16

за — через \vec{a}_2 ($a_1 = a_2$, поэтому введем общее для модулей ускорений обозначение a). Согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1; \vec{T}'_2 = -\vec{T}_2; \vec{N}' = -\vec{N}.$$

Так как массой блока, а также нити пренебрегаем, то

$$T_1 = T_1' = T_2' = T_2.$$

Введем общее обозначение T .

Применив второй закон Ньютона к движению бруска, а затем груза, получим систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для бруска: } m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + m_1 \vec{g}; \\ \text{для груза: } m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2. \end{array} \right\}$$

Первое уравнение спроецируем на направление вектора \vec{a}_1 и учтем, что $a_1 = a$ и $T_1 = T$. Второе уравнение спроецируем на направление вектора \vec{a}_2 и учтем, что $a_2 = a$ и $T_2 = T$. В результате вместо системы векторных уравнений будем иметь систему скалярных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для бруска: } m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha; \\ \text{для груза: } m_2 a = m_2 g - T. \end{array} \right\} \quad (2.35, a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{для бруска: } m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha; \\ \text{для груза: } m_2 a = m_2 g - T. \end{array} \right\} \quad (2.35, б)$$

Отсюда находим:

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}; \quad (9^*)$$

$$T = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \alpha). \quad (10^*)$$

Из (9*) видно, что брусок и груз будут покоиться или равномерно двигаться, если выполняется условие

$$m_2 = m_1 \sin \alpha. \quad (11^*)$$

При $m_2 > m_1 \sin \alpha$ брусок скользит вверх по плоскости с ускорением (9*), а при $m_2 < m_1 \sin \alpha$ он будет скользить вниз по плоскости с ускорением $a = \frac{g(m_1 \sin \alpha - m_2)}{m_1 + m_2}$. ■

2.4.4. Вес тела

Понятие «вес тела» нередко ошибочно отождествляют с понятием «масса тела». В отличие от массы вес — величина векторная; это есть сила.

Вес тела есть сила, с которой тело давит на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес вследствие притяжения этого тела к Земле.

Рассмотрим примеры.

1. На крышке стола лежит книга. На нее действуют сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$ и сила реакции опоры (сила упругости) \vec{N} , направленная вертикально вверх. Силы уравновешены, следовательно,

$$\vec{F}_T + \vec{N} = 0. \quad (1^*)$$

Со стороны книги на крышку стола действует сила нормального давления \vec{N} . По третьему закону Ньютона,

$$\vec{N} = -\vec{N}'. \quad (2^*)$$

Подставляя (2*) в (1*), заключаем, что

$$\vec{N}' = \vec{F}_T. \quad (3^*)$$

По определению, сила нормального давления на крышку стола \vec{N} как раз и есть *вес книги*, лежащей на столе. Введем для веса обозначение \vec{P} и перепишем (3*) в виде

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (2.36)$$

2. Гири подвешена к потолку на нити. На нее действуют сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$ и сила реакции нити (сила упругости) \vec{T} , направленная вертикально вверх. Силы уравновешены, следовательно,

$$\vec{F}_T + \vec{T} = 0. \quad (4^*)$$

На нить действует со стороны гири сила натяжения \vec{T}' . По третьему закону Ньютона,

$$\vec{T} = -\vec{T}'. \quad (5^*)$$

Подставляя (5*) в (4*), заключаем, что

$$\vec{T}' = \vec{F}_T. \quad (6^*)$$

По определению, сила натяжения нити \vec{T}' есть вес гири, подвешенной к нити, т. е. сила \vec{P} . Мы опять получили соотношение (2.36).

Если тело подвесить не к нити, а к динамометру (см. рис. 2.5), то сила упругости динамометра зафиксирует вес тела. Именно так часто измеряют вес тела.

Хотя вес тела в обоих рассмотренных выше случаях оказался равным силе тяжести, однако вес отнюдь не есть сила тяжести. В отличие от силы тяжести вес тела приложен не к телу, а к горизонтальной опоре или вертикальному подвесу. К тому же вес и сила тяжести имеют *разную природу*. Сила тяжести возникает при действии земного шара на тело, а вес возникает при действии тела на опору или подвес и является противодействием по отношению к силам упругости опоры или подвеса.

Примечание

Предостережем читателей от еще одной ошибки. Иногда делают вывод, что вес тела есть сила нормального давления на опору или сила натяжения нити. Такой вывод, однако, неверен. Сила нормального давления на опору и сила натяжения нити (подвеса) могут рассматриваться как вес тела, действующего на опору или нить, только тогда, когда они направлены вертикально вниз, а для этого опора должна быть *горизонтальной*, а натянутая нить *вертикальной*. Так, не является весом тела сила нормального давления \vec{N} на рисунках 2.14 и 2.18. На рисунке 2.18 сила натяжения нити \vec{T}_1 не является весом тела, тогда как сила натяжения нити \vec{T}_2 является весом тела. Силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 на рисунке 2.17 являются весом соответствующих грузов, а силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 на рисунке 2.15 к весу тел не относятся.

2.4.5. Всегда ли вес тела равен силе тяжести?

Сразу ответим на поставленный вопрос: не всегда. Соотношение (2.36) справедливо лишь тогда, когда тело вместе с горизонтальной опорой (или вертикальным подвесом) либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно, либо движется с ускорением, вектор которого не имеет составляющей в вертикальном направлении.

Если ускорение тела вместе с горизонтальной опорой (или вертикальным подвесом) имеет вертикальную составляющую \vec{a} , направленную вверх, то наступает *перегрузка* — модуль P веса тела возрастает:

$$P = mg + ma, \quad (2.37)$$

где m — масса тела. Если же вертикальная составляющая ускорения направлена вниз, то модуль веса тела равен

$$P = mg - ma. \quad (2.38)$$

Из (2.38) видно, что если тело свободно падает (его ускорение есть ускорение свободного падения \vec{g}), то в этом случае $P = 0$. Как

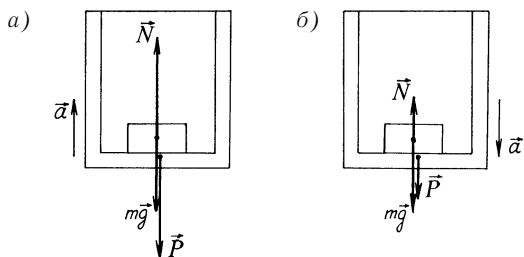


Рис. 2.17

говорят, состояние свободного падения есть *состояние невесомости* (состояние «отсутствия веса тела»).

Убедимся в справедливости соотношений (2.37) и (2.38). Предположим, что тело массой m покоится на полу лифта, имеющего ускорение, направленное вертикально вверх. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} (рис. 2.17, а). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1^*)$$

Спроецируем векторы в (1*) на направление вектора \vec{g} ; получим скалярное равенство $mg - N = -ma$, из которого следует, что

$$N = mg + ma. \quad (2^*)$$

Так как $P = N$, то (2*) превращается в соотношение (2.37).

Если бы лифт двигался с ускорением \vec{a} , направленным вертикально вниз (рис. 2.17, б), то спроецировав (1*) на направление вектора \vec{g} , мы получили бы равенство $mg - N = ma$ и, следовательно,

$$N = mg - ma. \quad (3^*)$$

Учитывая, что $P = N$, приходим к соотношению (2.38).

Результаты (2.37) и (2.38) можно было бы также получить, подвесив тело нитью к потолку лифта. В этом случае весом тела являлось бы натяжение нити. Заменяв нить динамометром, можно было бы измерить вес тела для случаев, когда ускорение противоположно по направлению ускорению \vec{g} и когда эти ускорения имеют одно и то же направление.

Задача 1. К концам нити, перекинутой через блок, подвешены грузы 1 и 2 (рис. 2.18). Груз 1 имеет массу $m_1 = 1$ кг, его вес равен $P = 12$ Н. Требуется найти массу груза 2. Массой блока можно пренебречь.

□ Согласно условию задачи $P > m_1 g$; следовательно, ускорение груза 1 направлено вверх, а груза 2 — вниз. Обозначим через m_2 массу груза 2. С учетом (2.37) запишем для груза 1 равенство:

$$P = m_1(g + a), \quad (4^*)$$

где a — модуль ускорения каждого груза. Вес груза 2 равен весу P груза 1, так как эти веса есть силы натяжения соответствующих нитей, а последние равны друг другу в случае, когда массой блока можно пренебречь. С учетом (2.38) представим вес груза 2 в виде:

$$P = m_2(g - a). \quad (5^*)$$

Используя (4*) и (5*), составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{m_1} &= g + a; \\ \frac{P}{m_2} &= g - a. \end{aligned} \right\}$$

Складывая почленно уравнения этой системы, исключим a ; получим

$$\frac{P}{m_1} + \frac{P}{m_2} = 2g.$$

Отсюда следует, что

$$m_2 = \frac{m_1 P}{2m_1 g - P} = 1,6 \text{ кг.} \quad \blacksquare$$

Задача 2. Клин массой M скользит без трения по наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 2.19). На горизонтальной верхней грани клина стоит гирька массой m , удерживаемая на клине силой трения покоя. Требуется найти вес гирьки и силу трения покоя.

□ Гирька движется вместе с клином с ускорением \vec{a} , направленным вниз по наклонной плоскости и равным по модулю $a = g \sin \alpha$ (см. (2.29)). Разложим

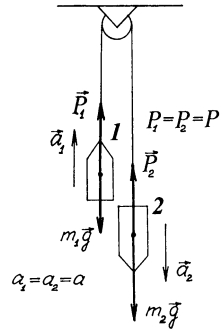


Рис. 2.18

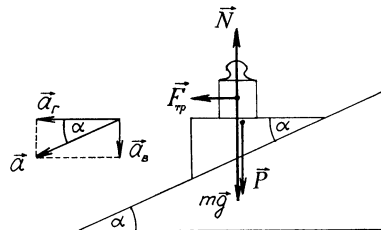


Рис. 2.19

вектор \vec{a} на горизонтальную (\vec{a}_r) и вертикальную (\vec{a}_b) составляющие. Легко видеть, что

$$a_r = a \cos \alpha = g \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad a_b = a \sin \alpha = g \sin^2 \alpha. \quad (6^*)$$

На гирьку действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} , сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Все силы (в том числе сила трения покоя) приложены на рисунке в центре тяжести гирьки, поскольку используется модель материальной точки. В соответствии со вторым законом Ньютона,

$$\left. \begin{aligned} ma_r &= F_{\text{тр}}; \\ ma_b &= mg - N. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая (6*), перепишем эту систему уравнений в виде:

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{тр}} &= mg \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \\ mg \sin^2 \alpha &= mg - N. \end{aligned} \right\}$$

Перепишем второе уравнение системы в виде:

$$N = mg \cos^2 \alpha.$$

Вес гирьки \vec{P} — это сила \vec{N} (сила нормального давления гирьки на клин). Согласно третьему закону Ньютона, $N' = N$. Итак,

$$P = mg \cos^2 \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} mg \sin 2\alpha. \quad \blacksquare$$

Задача 3. К концам нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами M (рис. 2.20). На один из грузов поставили гирьку массой m . Требуется найти вес гирьки. Массой блока пренебрегаем.

□ Модуль a ускорения каждого тела, участвующего в задаче, один и тот же. Его можно выразить, заменив в (2.33) m_1 на M , а m_2 на $M + m$:

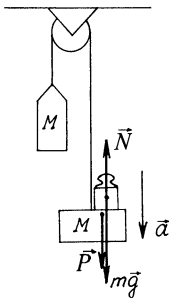


Рис. 2.20

$$a = \frac{gm}{2M + m}. \quad (7^*)$$

На гирьку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . В соответствии со вторым законом Ньютона,

$$ma = mg - N.$$

С учетом (7*) находим отсюда:

$$N = \frac{2Mmg}{2M + m}.$$

Вес гирьки \vec{P} есть сила нормального давления \vec{N}' , а модуль последней равен N (по третьему закону Ньютона). Таким образом,

$$P = \frac{2Mmg}{2M+m}. \quad \blacksquare$$

2.4.6. Роль силы трения покоя в возникновении движения

В п. 2.3.4 отмечалось, что движение автомобиля происходит благодаря силе трения покоя. На первый взгляд, это может показаться удивительным — ведь хорошо известно, что силы трения препятствуют относительному движению соприкасающихся тел.

? Каким же образом сила трения покоя обеспечивает движение автомобиля?

Это нетрудно объяснить, обратившись к третьему закону Ньютона.

На рисунке 2.21 показано одно из ведущих колес автомобиля. Мотор сообщает этому колесу силу, стремящуюся повернуть колесо вокруг оси в направлении против часовой стрелки. С этой силой колесо действует на дорожное покрытие, стремясь оттолкнуть его от себя; на рисунке указанная сила обозначена через \vec{F} , она действует со стороны колеса на дорожное покрытие и направлена вправо. В соответствии с третьим законом Ньютона, со стороны дорожного покрытия должна действовать на колесо сила, направленная влево. Такой силой является сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, возникающая при условии достаточно хорошего сцепления шины автомобиля с дорожным покрытием. Она-то и толкает автомобиль, заставляя его двигаться в направлении влево. Если бы дорога была идеально гладкой, исключая возникновение трения покоя, то колесо автомобиля вращалось бы вокруг оси, а сам он оставался на месте.

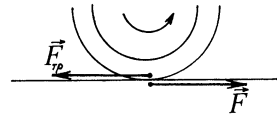


Рис. 2.21

Можно сказать, что автомобиль движется, все время отталкиваясь от дорожного покрытия. Это «отталкивание» оказывается возможным благодаря возникновению силы трения покоя.

Когда мы делаем шаг, мы тоже как бы отталкиваемся от поверхности земли. Мы как бы толкаем земной шар назад, а он, согласно третьему закону Ньютона, толкает нас вперед. Решающую роль играет тут сила трения покоя. Хорошо известно, как трудно и даже невозможно шагать по чистому гладкому льду.

? Иногда спрашивают: каким образом лошадь везет сани, коль скоро сани тянут лошадь назад с той же по модулю силой, с какой лошадь тянет сани вперед?

Отвечая на этот вопрос, учтем, что в данном случае взаимодействуют не только лошадь и сани, но и лошадь и дорожное покрытие, сани и дорожное покрытие. Так что надо рассматривать не одно, а три попарных взаимодействия. Все шесть сил показаны на рисунке 2.22. Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 действуют на лошадь со стороны, соответственно, саней и дорожного покрытия. Силы \vec{F}_2 и \vec{F}_6 действуют на сани со стороны, соответственно, лошади и дорожного покрытия. Силы \vec{F}_4 и \vec{F}_5 действуют на дорожное покрытие со стороны, соответственно, лошади и саней. В соответствии с третьим законом Ньютона,

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \vec{F}_3 = -\vec{F}_4; \vec{F}_5 = -\vec{F}_6.$$

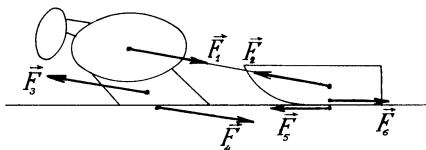


Рис. 2.22

Лошадь везет сани вовсе не потому, что действует на сани с большей силой, нежели сани на лошадь (эти силы равны по модулю). Лошадь везет сани, поскольку отталкивается от дорожного покрытия с силой, которая по модулю больше силы, с какой покрытие тормозит сани, т. е. благодаря тому, что $F_3 > F_6$. Сила \vec{F}_3 — сила трения покоя, сила \vec{F}_6 — сила трения скольжения.

Вспомним известную русскую игру «перетягивание каната». Обе группы игроков действуют через канат друг на друга с одной и той же по модулю силой. Выигрывает та группа, которая сильнее отталкивается от поверхности, т. е. та, у которой сила трения покоя оказывается больше.

2.5. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И СИЛЫ ИНЕРЦИИ

2.5.1. Специфика рассмотрения движения в неинерциальных системах отсчета (силы инерции)

Оказавшись в железнодорожном вагоне, мы можем стать не только пассажиром, но и человеком, наблюдающим движение тел в неинерциальной системе отсчета. Пока вагон неподвижен, можно считать связанную с ним систему отсчета инерциальной. При-

крепим к краю столика в купе нитку, на конце которой висит гайка. Гайка будет висеть неподвижно, поскольку взаимно уравновешены обе действующие на нее силы (сила тяжести и сила реакции нити). Но вот вагон плавно тронулся и начал двигаться с некоторым ускорением, постепенно набирая скорость. Мы увидим, как гайка, висятая на нити, слегка отклонится в сторону, противоположную движению вагона. Из этого можно заключить, что в неинерциальной системе (в данном случае в системе отсчета, связанной с вагоном) первый закон Ньютона не выполняется. Ведь на гайку по-прежнему действуют только силы тяжести и реакции нити, а она не сохранила своего состояния покоя. Не выполняется теперь и второй закон Ньютона, поскольку отклонение гайки от прежнего ее положения указывает на то, что она получила ускорение, не испытав воздействия со стороны другого тела.

Возможно, кто-то придет к выводу, что надо или отказаться от рассмотрения движения в неинерциальных системах отсчета, или считать, что в этих системах ускорение тела может быть вызвано не только силами, но и какими-то иными причинами. Отказываться от рассмотрения движения в неинерциальных системах нежелательно, поскольку во многих случаях движение в таких системах выглядит достаточно просто. Тем более нежелательно отказываться от второго закона Ньютона, принять, что причиной ускорения тела могут быть не только силы, действующие на тело, и разрабатывать для неинерциальных систем какую-то новую механику. Почему бы не считать, что отклонение гайки на нити связано с тем, что в движущемся с ускорением вагоне действует, наряду с обычными силами, некая *дополнительная* сила? Ее возникновение обусловлено не взаимодействием тел, а тем, что вагон движется ускоренно. Так в физике возникло понятие *силы инерции*.

Пусть \vec{a} — ускорение тела массой m относительно инерциальной системы отсчета, $\sum_{j=1}^N \vec{F}_j$ — равнодействующая приложенных к телу обычных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$ (сил, обусловленных действием на данное тело со стороны других N тел). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j. \quad (2.39)$$

Обозначим через \vec{a} ускорение рассматриваемого тела в некоторой неинерциальной системе отсчета. Понятно, что $m\vec{a}' \neq \sum_{j=1}^N \vec{F}_j$, ведь $\vec{a}' \neq \vec{a}$. Дополним равнодействующую сил $\sum_{j=1}^N \vec{F}_j$ таковой силой $\vec{F}_и$ (назовем ее *силой инерции*), чтобы второй закон

Ньютона сохранился и в неинерциальной системе отсчета, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$m\vec{a}' = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j + \vec{F}_и. \quad (2.40)$$

Легко сообразить, что такая сила должна определяться соотношением

$$\vec{F}_и = m(\vec{a}' - \vec{a}). \quad (2.41)$$

Действительно, подставив (2.41) в (2.40), мы получим (2.39).

Итак, сила инерции тела равна *произведению массы тела на разность его ускорений относительно неинерциальной и инерциальной систем отсчета*.

! Обратим внимание: сила инерции вполне реальна, поскольку подобно обычным силам *вызывает ускорение тела*. Вместе с тем эта сила принципиально отлична от обычных сил. Она не связана с взаимодействием тел и «возникает» в одиночестве — без соответствующего противодействия. Это означает, что в отношении силы инерции неприменим третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия).

2.5.2. Неинерциальные системы отсчета, движущиеся прямолинейно с постоянным ускорением

Пусть система отсчета движется относительно неподвижной (инерциальной) системы прямолинейно с постоянным ускорением \vec{a}_c . Ускорение \vec{a}' тела в этой системе есть

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_c, \quad (2.42)$$

где \vec{a} — ускорение тела в неподвижной системе. Подставляя (2.42) в (2.41), находим выражение для силы инерции:

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_c, \quad (2.43)$$

где m — масса тела.

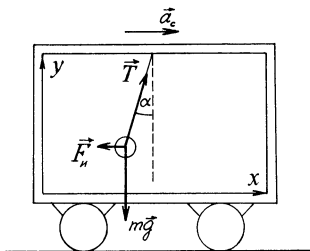


Рис. 2.23

Задача. Тело массой m подвешено на нити к потолку вагона (рис. 2.23), движущегося с ускорением \vec{a}_c . Требуется найти угол отклонения нити от вертикали.

□ Пока вагон неподвижен, нить висит вертикально. При движении вагона с ускорением \vec{a}_c нить отклоняется от вертикали на угол α . Его можно найти, ис-

ходя из того, что в системе отсчета, связанной с вагоном, тело покоится, находясь под действием трех сил: силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции нити \vec{T} (она направлена вдоль нити), силы инерции $\vec{F}_и$ (см. рисунок). В соответствии со вторым законом Ньютона векторная сумма этих трех сил должна быть равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_и = 0. \quad (1^*)$$

С учетом (2.43) спроецируем векторы в (1*) на x -ось и на y -ось; получим два скалярных равенства:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для проекций на } x\text{-ось: } T\sin\alpha - ma_c = 0; \\ \text{для проекций на } y\text{-ось: } -mg + T\cos\alpha = 0. \end{array} \right\}$$

Перепишем эти равенства в виде:

$$\left. \begin{array}{l} T\sin\alpha = ma_c; \\ T\cos\alpha = mg \end{array} \right\}$$

и поделим первое на второе. В результате находим, что

$$tg\alpha = \frac{a_c}{g}. \quad \blacksquare$$

На полу лифта, движущегося с ускорением \vec{a}_c , лежит тело массой m . Относительно лифта тело покоится; следовательно, сумма действующих на тело сил тяжести, реакции опоры и инерции должна равняться нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_c = 0. \quad (2^*)$$

Пусть ускорение \vec{a}_c направлено вверх. Спроецировав векторы в (2*) на направление вектора \vec{g} , получим $mg - N + ma_c = 0$, откуда следует, что

$$N = mg + ma_c. \quad (3^*)$$

Пусть ускорение \vec{a}_c направлено вниз. Спроецировав векторы в (2*) на направление вектора \vec{g} , получим $mg - N - ma_c = 0$, откуда следует, что

$$N = mg - ma_c. \quad (4^*)$$

Замечание

Выражения (3*) и (4*), полученные наблюдателем в лифте, совпадают с полученными в п. 2.4.5 наблюдателем из неподвижной системы отсчета соотношениями (2*) и (3*). Для первого наблюдателя рассматриваемое тело покоилось, а для второго оно двигалось с ускорением лифта. Оба наблюдателя зафиксировали возрастание веса тела, если ускорение лифта направлено вверх, и уменьшение веса, если ускорение лифта направлено вниз.

2.5.3. Центробежная сила инерции

Предположим, что неинерциальная система — горизонтальный диск радиусом R , равномерно вращающийся с угловой скоростью ω . На краю диска закреплено тело массой m , рассматриваемое как материальная точка. Ускорение \vec{a}' тела относительно вращающейся системы отсчета равно нулю; поэтому соотношение (2.41) для силы инерции упрощается:

$$\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}. \quad (2.44)$$

Здесь \vec{a} — ускорение тела относительно неподвижной системы отсчета. Это есть центростремительное ускорение, его модуль равен (см. (1.22)):

$$a = \omega^2 R. \quad (2.45)$$

Направление вектора \vec{a} противоположно направлению радиус-вектора \vec{R} материальной точки, изображающей тело, закрепленное на диске. Учитывая это, заменим скалярное соотношение (2.45) на следующее векторное соотношение:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{R}. \quad (2.46)$$

Подставив (2.46) в (2.44), находим

$$\vec{F}_{\text{и}} = m\omega^2 \vec{R}. \quad (2.47)$$

Определяемую выражением (2.47) силу инерции называют *центробежной силой инерции* (будем обозначать ее через $\vec{F}_{\text{цб}}$).

Рассмотрим закрепленное на вращающемся диске тело массой m в неподвижной системе отсчета. На тело действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила \vec{F} , удерживающая тело на вращающемся диске (это может быть, например, сила трения покоя или сила реакции стенки, находящейся на краю диска). Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение \vec{a} , поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона можем записать:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{т}} + \vec{N} + \vec{F}. \quad (2.48)$$

Так как

$$\vec{F}_{\text{т}} + \vec{N} = 0 \quad (1^*)$$

(силы тяжести и реакции опоры взаимно уравновешены), то (2.48) можно упростить: $m\vec{a} = \vec{F}$. С учетом (2.46) перепишем последнее равенство в виде

$$-m\omega^2 \vec{R} = \vec{F}. \quad (2.49)$$

Силу \vec{F} , сообщаемую телу массой m центростремительное ускорение $-\omega^2\vec{R}$, называют *центростремительной силой*.

Теперь рассмотрим то же самое тело в системе отсчета, связанной с вращающимся диском. Чтобы можно было использовать второй закон Ньютона в данной неинерциальной системе, дополним совокупность действующих на тело сил (сумму сил $\vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}$) силой инерции $\vec{F}_{цб}$. Поскольку тело в данной системе отсчета покоится, то в соответствии со вторым законом Ньютона можем записать:


$$\vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{цб} = 0 \quad (2.50)$$

или, с учетом (1*),

$$\vec{F} + \vec{F}_{цб} = 0. \quad (2^*)$$

Используя (2.47), перепишем (2*) в виде:

$$\vec{F} + m\omega^2\vec{R} = 0. \quad (2.51)$$

 Обратим внимание: с математической точки зрения соотношения (2.49) и (2.51) тождественны, но с точки зрения физики они различны. Соотношение (2.49) утверждает, что центростремительная сила \vec{F} (сила трения покоя или сила реакции стенки) сообщает телу массой m центростремительное ускорение $-\omega^2\vec{R}$. Соотношение (2.51) утверждает, что центростремительная сила \vec{F} и сила инерции $m\omega^2\vec{R}$ взаимно уравновешены, благодаря чему тело покоится. В неподвижной системе отсчета тело движется с ускорением $-\omega^2\vec{R}$, а во вращающейся системе оно покоится.

Из (2*) видно, что центростремительная сила \vec{F} и центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$ равны по модулю и противоположны по направлению. Важно понимать, что природа этих двух сил различна. Центростремительная сила \vec{F} возникает благодаря действию на рассматриваемое тело со стороны другого тела (со стороны диска). Центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$ возникает вследствие того, что диск, на котором находится рассматриваемое тело, имеет центростремительное ускорение.

2.5.4. Сила Кориолиса во вращающихся системах отсчета

Предположим, что тело не закреплено на вращающемся диске, а каким-либо образом *движется* по нему. В этом случае си-

лу инерции удобно представлять в виде суммы *двух сил* — уже знакомой нам *центробежной силы инерции* и еще одной силы инерции, называемой *силой Кориолиса*. Эта сила названа в честь открывшего и объяснившего ее французского ученого Гюстава Кориолиса.

Центробежная сила инерции \vec{F} определяется только *положением* тела во вращающейся системе отсчета (точнее сказать, определяется радиусом-вектором \vec{R} тела) и не зависит от *скорости* тела \vec{v}' в этой системе отсчета. В п. 2.5.3 было получено выражение для $\vec{F}_{цб}$ в случае, когда $\vec{v}' = 0$ (тело покоилось на вращающемся диске) — см. (2.47). Поскольку \vec{F} не зависит от \vec{v}' , выражение (2.47) годится также для случаев, когда $\vec{v}' \neq 0$. Итак, центробежная сила инерции тела, произвольно движущегося по отношению к вращающейся системе отсчета, описывается выражением

$$\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}. \quad (2.52)$$

Отметим, что сила Кориолиса (обозначим ее через $\vec{F}_к$), напротив, от *положения* тела во вращающейся системе не зависит, а определяется *скоростью* тела \vec{v}' в этой системе отсчета. Приведем без вывода выражение для силы Кориолиса в общем случае:

$$\vec{F}_к = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}), \quad (2.53)$$

где выражение в скобках ($\vec{v}' \times \vec{\omega}$) означает *векторное произведение* векторов \vec{v}' и $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости; он направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта (см. рис. 1.8).

Так как вектор, представляющий собой векторное произведение двух других векторов, ориентирован перпендикулярно к плоскости сомножителей, то из (2.53) заключаем, что *направление силы Кориолиса перпендикулярно как к вектору скорости тела во вращающейся системе, так и к оси вращения системы*.

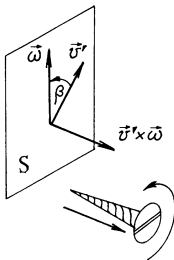


Рис. 2.24

Векторы \vec{v}' , $\vec{\omega}$ и $\vec{v}' \times \vec{\omega}$ показаны на рисунке 2.24, где через S обозначена плоскость векторов \vec{v}' и $\vec{\omega}$, а через β — меньший из углов между этими векторами. Вектор $\vec{v}' \times \vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости S . Чтобы выяснить, в какую сторону он направлен, надо применить правило правого винта. Модуль вектора $\vec{v}' \times \vec{\omega}$ равен

$$|\vec{v}' \times \vec{\omega}| = v'\omega \sin \beta. \quad (2.54)$$

Если $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$, то $\beta = \frac{\pi}{2}$; в этом случае

$$|\vec{v}' \times \vec{\omega}| = v'\omega. \quad (2.55)$$

Если векторы \vec{v} и $\vec{\omega}$ параллельны или антипараллельны, то $\beta = 0$ или $\beta = \pi$; в этом случае $|\vec{v}' \times \vec{\omega}| = 0$, т. е. сила Кориолиса отсутствует.

Не следует сомневаться в реальности сил инерции. Хотя за ними не скрываются какие-либо взаимодействия тел, однако ускорения, сообщаемые этими силами телам в неинерциальных системах отсчета, совершенно реальны. С действием сил инерции можно ознакомиться на аттракционе «карусель». Человек, сидящий на карусели, хорошо ощущает на себе действие центробежной силы инерции, стремящейся выбросить его наружу. Попробуем пройтись по полу вращающейся карусели — и мы убедимся, что очень трудно удержаться в равновесии. Кроме центробежной силы инерции, направленной по радиусу от центра карусели, на нас будет действовать сила Кориолиса. Она будет «валить» нас на бок. Чтобы не упасть, мы будем вынуждены идти, «переплетая» ноги.

2.5.5. Вывод выражения для силы Кориолиса в частном случае



Выражение (2.53) для силы Кориолиса нетрудно вывести в случае, когда тело массой m , представляемое материальной точкой, равномерно движется вдоль края диска радиусом R , равномерно вращающегося с угловой скоростью ω . По отношению к неподвижной системе отсчета тело равномерно движется по окружности радиусом R со скоростью, модуль которой равен

$$v = v' + \omega R, \quad (1^*)$$

где v' — модуль скорости тела относительно диска. В неподвижной системе тело имеет ускорение, модуль a которого равен $a = \frac{v^2}{R}$. Подставляя сюда (1*), находим

$$a = \frac{(v')^2}{R} + 2v'\omega + \omega^2 R. \quad (2^*)$$

Обозначим через \vec{F} центростремительную силу, обеспечивающую движение тела по окружности радиусом R (это может быть, например, сила реакции нити, привязанной к телу). По второму закону Ньютона $ma = F$ или, с учетом (2*),

$$m \frac{(v')^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R = F. \quad (3^*)$$

Так как $m \frac{(v')^2}{R} = ma'$, где a' — модуль центростремительного ускорения тела относительно диска, то (3*) можно переписать в виде:

$$ma' = F - m\omega^2 R - 2mv'\omega. \quad (4^*)$$

Из (4*) видно, что для использования второго закона Ньютона во вращающейся системе отсчета надо дополнить силу \vec{F} двумя силами инерции. Их модули вошли в (4*) со знаком минус; значит, эти силы направлены в обратную сторону по отношению к вектору \vec{F} (они направлены по радиусу от центра вращения). Первая из этих сил (ее модуль равен $m\omega^2 R$) — центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$. Модуль второй силы инерции равен $2mv'\omega$. Поскольку в рас-

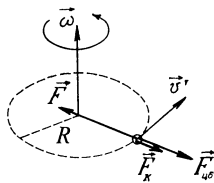


Рис. 2.25

считываемом случае $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$ и, значит, справедливо соотношение (2.55), можно заключить, что

$$2mv'\omega = 2m|\vec{v}' \times \vec{\omega}|.$$

Таким образом, вторая сила инерции есть сила Кориолиса $\vec{F}_{к}$.

Данный случай иллюстрирует рисунок 2.25.

2.5.6. Закон Бэра

? Почему реки, текущие в меридиональном направлении (с севера на юг или с юга на север) подмывают в *Северном* полушарии *правый* берег, а в *Южном* — *левый*?

Ответ на этот вопрос был дан в 1857 году российским ученым Карлом Максимовичем Бэром. На массу m , движущуюся в точке A со скоростью v по меридиану к северу, будет действовать сила Кориолиса, определяемая соотношением (2.53), где ω — угловая скорость земного шара; эта сила стремится отклонить массу m вправо (рис. 2.26). Сила Кориолиса стремится отклонить вправо также и массу m , движущуюся в точке B по меридиану к югу. Если рассматривать в качестве m движущуюся массу речной воды, то получим *закон Бэра*.

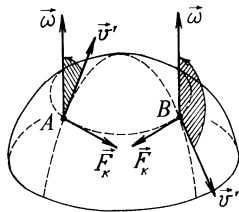


Рис. 2.26

Поскольку сила Кориолиса пропорциональна движущейся массе, закон Бэра замечен лишь в долинах крупных рек. Его хорошо подтверждает строение берегов Днепра, Дона, Волги, Оби, Иртыша, Енисея, Лены.

2.6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА В МЕХАНИКЕ

2.6.1. Изменение импульса системы тел

Полагая силу \vec{F} постоянной, воспользуемся соотношением (2.7) для второго закона Ньютона, которое запишем в виде:

$$\vec{p} - \vec{p}' = \vec{F} \Delta t. \quad (2.56)$$

Здесь $\vec{p} - \vec{p}'$ — изменение импульса тела за промежуток времени Δt , в течение которого постоянная сила \vec{F} действовала на тело массой m ; $\vec{p}' = m\vec{v}'$ — начальный импульс, $\vec{p} = m\vec{v}$ — конечный импульс (\vec{v}' — начальная скорость тела, \vec{v} — его конечная скорость). Из (2.56) видно, что одинаковые изменения импульса тела можно получить как в результате действия на тело большой силы за малый промежуток времени, так и в результате действия малой силы за большой промежуток.

Рассмотрим систему трех взаимодействующих тел, полагая Δt достаточно малым. Впоследствии это ограничение будет снято, а пока оно нужно, чтобы использовать соотношение (2.56). Представим для каждого из трех тел второй закон Ньютона в виде (2.56). Получим следующую систему векторных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13})\Delta t; \\ \vec{p}_2 - \vec{p}'_2 &= (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23})\Delta t; \\ \vec{p}_3 - \vec{p}'_3 &= (\vec{F}_3 + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32})\Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Здесь \vec{F}_i — сумма *внешних сил*, действующих на i -е тело; \vec{F}_{ij} — сила, с которой i -е тело системы действует на j -е тело; $i, j = 1, 2, 3$. В отличие от сил \vec{F}_i , силы \vec{F}_{ij} называют *внутренними силами*. Они являются внутренними для данной системы тел.

Сложим левые, а также правые части уравнений (2.57); получим

$$\begin{aligned} &\vec{p} - \vec{p}' = \\ &= [\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32})]\Delta t. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Здесь $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ — конечный импульс системы, $\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3$ — начальный импульс системы. Согласно третьему закону Ньютона (закону равенства действия и противодействия),

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}, \quad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}.$$

В результате (2.58) принимает вид:

$$\vec{p} - \vec{p}' = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\Delta t.$$

Этот результат легко обобщается на случай, когда система состоит не из трех, а из N тел:

$$\vec{p} - \vec{p}' = \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) \Delta t. \quad (2.59)$$

Получен весьма важный результат:

суммарный импульс системы тел могут изменить только внешние по отношению к системе силы.

Внутренние силы изменяют импульсы отдельных тел системы, но не изменяют импульса системы. Если сумма внешних сил $\sum_i \vec{F}_i$ постоянна, то соотношение (2.59) справедливо для любого промежутка времени Δt .

2.6.2. Закон сохранения импульса

Предположим, что внешние силы или отсутствуют (говорят, что система является замкнутой, или изолированной), или они действуют на тело, но их сумма равна нулю. Во всех таких случаях соотношение (2.59) преобразуется к виду:

$$\vec{p} - \vec{p}' = 0. \quad (1^*)$$

Соотношение (1*) означает, что изменение импульса системы тел за любой промежуток времени равно нулю. Следовательно, импульс такой системы вообще *не изменяется*, т. е. *сохраняется*, что можно выразить с помощью равенства:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i(t) = \text{const}. \quad (2.60)$$



Обратим внимание: скорости $\vec{v}_i(t)$ отдельных тел системы отнюдь не постоянны, тела обмениваются импульсами друг с другом, однако векторная сумма импульсов всех тел системы остается неизменной (сохраняется). Соотношение (2.60) выражает **закон сохранения импульса системы**, который может быть сформулирован следующим образом:

Если сумма внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то импульс системы сохраняется.

Заметим, что в частном случае, когда система «состоит» из одного тела, этот закон превращается в первый закон Ньютона (закон инерции).

Закон сохранения импульса системы можно применять во многих случаях, даже если $\sum_i \vec{F}_i \neq 0$. Если сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю *сумма проекций* этих сил на некоторое направление, то будет сохраняться проекция импульса системы на это направление. На Земле и вблизи ее поверхности на все тела действует сила тяжести. В отсутствие уравновешивающей силы она изменяет вертикальную составляющую импульса \vec{p} системы. Но горизонтальная составляющая импульса \vec{p} сохраняется, если нет внешних сил, имеющих горизонтальные проекции. Кроме того, во многих практически важных случаях, когда время взаимодействия тел в системе весьма мало (например, при взрыве снаряда или при соударении двух тел), внешние силы попросту *не успевают* сколь-либо заметно изменить импульс системы и поэтому могут не приниматься во внимание.

Подчеркнем, что в законе сохранения импульса (2.60) *силы вообще не присутствуют*. Значит, применяя этот закон, мы можем обойтись без выяснения механизма взаимодействия тел в системе, природы возникающих при этом сил. Это позволяет достаточно просто решать задачи, где важен не процесс взаимодействия тел системы, а лишь *окончательный результат* такого взаимодействия.

2.6.3. Абсолютно неупругие соударения

Абсолютно неупругими называют соударения, в результате которых соударяющиеся тела слипаются и далее движутся как единое целое. Рассмотрим задачу об абсолютно неупругом соударении двух тел, рассматриваемых как материальные точки.

Задача. Тело массой m_1 , имевшее скорость \vec{v}_1 , абсолютно неупруго соударяется с телом массой m_2 , имевшим скорость \vec{v}_2 (рис. 2.27). Векторы \vec{v}_1 и \vec{v}_2 ориентированы под углом β друг к другу. Требуется найти скорость слипшихся тел после соударения.

□ Перед соударением система тел имела импульс $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$, а пос-

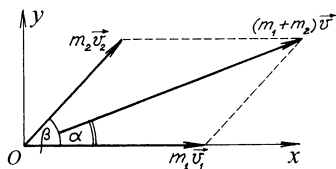


Рис. 2.27

ле соударения $(m_1 + m_2)\vec{v}$, где \vec{v} — искомая скорость. Согласно закону сохранения импульса, $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$ и, следовательно,

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.61)$$

Из (2.61) видно, что вектор \vec{v} находится в плоскости векторов \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Введем в этой плоскости координатные оси, направив x -ось, например, вдоль вектора \vec{v}_1 (см. рисунок). Спроецировав векторы \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v} на x -ось и на y -ось, превратим векторное равенство (2.61) в два скалярных:

$$v \cos \alpha = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos \beta}{m_1 + m_2}; \quad v \sin \alpha = \frac{m_2 v_2 \sin \beta}{m_1 + m_2}. \quad (1^*)$$

Здесь α — угол между векторами \vec{v}_1 и \vec{v} , а β — угол между векторами \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Возведем оба равенства в квадрат и сложим; получим

$$v^2(m_1 + m_2)^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \beta.$$

Отсюда следует, что

$$v = \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \beta}. \quad (2^*)$$

Поделив второе равенство в (1*) на первое, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 v_2 \sin \beta}{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos \beta}. \quad (3^*)$$

Если тела двигались перед соударением навстречу друг другу (в этом случае $\beta = \pi$), то из (2*) и (3*) получим

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad \alpha = 0 \text{ или } \alpha = 2\pi.$$

При $m_1 v_1 > m_2 v_2$ направление вектора \vec{v} совпадает с направлением вектора \vec{v}_1 , а при $m_1 v_1 < m_2 v_2$ имеют одинаковое направление векторы \vec{v} и \vec{v}_2 . При $m_1 v_1 = m_2 v_2$ слипшиеся тела оказываются неподвижными.

Если направления скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 совпадают и при этом $v_1 > v_2$, то из (2*) и (3*) следует, что

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \alpha = 0. \quad \blacksquare$$

2.6.4. Явление отдачи

Явление отдачи наблюдается, когда тело под действием внутренних сил распадается на две части, разлетающиеся друг от друга. Простой пример: из ствола орудия пороховые газы выбрасывают снаряд. Снаряд летит в одну сторону, а орудие, если оно не закреплено, откатывается назад — оно испытало отдачу. До выстрела орудия мы имели «тело», состоящее из самого орудия и снаряда внутри ствола. Произошел «распад» исходного тела — под действием внутренних сил оно «распалось» на две части (орудие и снаряд), движущиеся самостоятельно.

Вообразим следующую картину. Стоящий на скользком льду человек бросает в некотором направлении камень. Испытав отдачу, человек начнет скользить по льду в противоположном направлении. «Тело» человек + камень под действием мышечного усилия человека «распалось» на две части — на человека и камень. Отметим, что человек с камнем был поставлен на скользкий лед для того, чтобы существенно уменьшить силу трения и иметь дело с ситуацией, когда сумма внешних сил близка к нулю и работают лишь внутренние силы — человек действует на камень, бросая его, а камень действует в соответствии с третьим законом Ньютона на человека. В результате и наблюдается явление отдачи.

Это явление можно объяснить с помощью закона сохранения импульса. Отвлекаясь от какой-либо жизненной ситуации, рассмотрим два тела с массами m_1 и m_2 , покоящиеся относительно некоторой инерциальной системы отсчета (пусть это будет Земля). Будем полагать, что действием на тело со стороны внешних сил можно пренебречь. Предположим, что в результате действия внутренних сил система распалась — тело массой m_1 приобрело скорость \vec{v}_1 , а тело массой m_2 — скорость \vec{v}_2 . До распада импульс системы равнялся нулю ($\vec{p} = 0$); после распада его можно представить в виде $\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$. Из закона сохранения импульса следует, что $\vec{p} = \vec{p}'$, т. е. $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$. Отсюда получаем:

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1. \quad (2.62)$$

Как и следовало ожидать, векторы \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены противоположно. Если, например, \vec{v}_1 — скорость, с какой человек на льду бросил в горизонтальном направлении камень массой m_1 , то \vec{v}_2 — скорость человека массой m_2 , которую он приобрел вследствие отдачи. Так как $m_1 \ll m_2$, то из (2.62) следует, что $|\vec{v}_2| \ll |\vec{v}_1|$.

Теперь предположим, что связка тел с массами M и m движется равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета. В результате действия внутренних сил (природа их в данном случае не имеет значения) связка распадается; тело с массой m приобретает скорость \vec{u} относительно тела с массой M , так что его скорость относительно неподвижной системы отсчета оказывается равной $\vec{v} + \vec{u}$. Скорость тела с массой M в этой системе отсчета представим как $\vec{v} + \vec{v}_1$. Рассматривая систему тел как замкнутую, воспользуемся законом сохранения импульса, согласно которому

$$(M + m)\vec{v} = M(\vec{v} + \vec{v}_1) + m(\vec{v} + \vec{u}).$$

После раскрытия скобок и сокращений одинаковых слагаемых получаем соотношение

$$M\vec{v}_1 = -\vec{u}m. \quad (2.63)$$

Из (2.63) видно, что направления векторов \vec{v}_1 и \vec{u} противоположны.

Интересен частный случай, когда вектор \vec{u} направлен навстречу вектору \vec{v} . В данном случае тело массой M будет после распада связки продолжать двигаться в направлении вектора \vec{v} , при этом модуль его скорости увеличится вследствие отдачи и будет равен $v + \frac{um}{M}$.

2.6.5. От явления отдачи к реактивному движению и формуле Мещерского

От явления отдачи естественно перейти к рассмотрению *реактивного движения* на примере *движения ракеты*. В самых общих чертах это движение объясняется достаточно просто. При сгорании топлива из сопла ракеты вырываются с весьма большой скоростью газы. Вследствие отдачи ракета движется в направлении, противоположном направлению истечения газов из сопла.

Обозначим через \vec{v} скорость ракеты относительно Земли в некоторый момент времени t . Скорость ракеты в момент $t + \Delta t$ обозначим через $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Изменение скорости ракеты произошло в результате того, что из нее была выброшена масса газа ΔM со скоростью \vec{u} по отношению к ракете. Скорость \vec{u} называют *скоростью истечения*. По завершении промежутка времени Δt масса ракеты вместе с топливом уменьшилась на ΔM . Промежуток Δt полагаем достаточно малым, чтобы можно было считать, что масса ракеты с топливом постоянна на данном промежутке и в конце его меняется скачком в результате мгновенного выброса массы газа ΔM (впоследствии мы перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и тем самым заменим импульсивный выброс газов их непрерывным истечением из сопла ракеты). Если масса ракеты с топливом в момент t равна M , то в момент $t + \Delta t$ она будет равна $M - \Delta M$.

Итак, в момент времени t есть ракета с топливом, имеющая массу M и скорость \vec{v} относительно Земли. В момент $t + \Delta t$ есть, во-первых, ракета с топливом, имеющая массу $M - \Delta M$ и скорость $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ относительно Земли, и, во-вторых, порция газа, имеющая массу ΔM и скорость $\vec{v} + \vec{u}$ относительно Земли. Пренебрегая взаимодействием ракеты с внешними телами (позднее мы учтем такое взаимодействие), воспользуемся законом сохранения импульса и запишем:

$$M\vec{v} = (M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta M(\vec{v} + \vec{u}). \quad (2.64)$$

Раскрывая скобки, получаем

$$M\vec{v} = M\vec{v} + M\Delta\vec{v} - \Delta M\vec{v} - \Delta M\Delta\vec{v} + \Delta M\vec{v} + \Delta M\vec{u}. \quad (2.65)$$

Произведения $M\vec{v}$, а также $\Delta M\vec{v}$ сокращаются. Произведением $\Delta M\Delta\vec{v}$ можно пренебречь, так как здесь перемножаются две малых величины; как принято говорить, такое произведение представляет собой величину *второго порядка малости*. В результате соотношение (2.65) преобразуется к виду (сравните с (2.63)):

$$M\Delta\vec{v} = -\vec{u}\Delta M. \quad (2.66)$$

Поделим обе части этого равенства на Δt ; получим

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\vec{u}\frac{\Delta M}{\Delta t}. \quad (2.67)$$

Учтем, что $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$, и затем перейдем в обеих частях равенства (2.67) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$M(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = -\vec{u}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}. \quad (2.68)$$

Предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$ есть *мгновенное ускорение* $\vec{a}(t)$ ракеты (напомним формулу (1.14)). Величину $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ назовем средним за промежуток времени Δt *расходом топлива*. Величина

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} \quad (2.69)$$

— *мгновенный расход топлива* для момента времени t . С учетом сделанных замечаний представим (2.68) в виде:

$$M(t)\vec{a}(t) = -\vec{u}(t)\mu(t). \quad (2.70)$$

Ускорение $\vec{a}(t)$ вызывается силой

$$\vec{F}_p(t) = -\vec{u}(t)\mu(t), \quad (2.71)$$

которую называют *реактивной силой*. Она пропорциональна расходу топлива и скорости истечения газа и направлена противоположно скорости истечения.

Если на летящую ракету действует, кроме реактивной силы $\vec{F}_p(t)$, некоторая *внешняя сила* $\vec{F}(t)$, то соотношение (2.70) следует заменить соотношением:

$$M(t)\vec{a}(t) = \vec{F}_p(t) + \vec{F}(t). \quad (2.72)$$

Это соотношение представляет собой *обобщение* второго закона Ньютона для движения тела переменной массы. Оно получило название *формулы Мещерского* (по имени российского ученого Ивана Всеволодовича Мещерского, исследовавшего механику тел переменной массы).

2.6.6. Движение центра масс системы тел

Рассмотрим систему, состоящую из N тел (точнее сказать, материальных точек) с массами m_1, m_2, \dots, m_N . Обозначим соответственно через $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ радиусы-векторы этих тел в момент t . *Центром масс* (иначе говоря, *центром инерции*) системы тел называют точку, радиус-вектор $\vec{r}_C(t)$ которой определяется соотношением:

$$\vec{r}_C(t)m = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t), \quad (2.73)$$

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$. Центр масс (центр инерции) системы совпадает с

ее центром тяжести при условии, что все тела системы имеют одно и то же ускорение свободного падения. Для этого нужно, чтобы размеры системы были много меньше радиуса Земли, что обычно выполняется на практике (см. п. 3.4.4).

Радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C(t + \Delta t)$ определяется соотношением:

$$\vec{r}_C(t + \Delta t)m = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t + \Delta t).$$

Вычтем (2.73) из этого равенства и поделим получившееся равенство на Δt :

$$m \frac{\vec{r}_C(t + \Delta t) - \vec{r}_C(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\vec{r}_i(t + \Delta t) - \vec{r}_i(t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, отсюда получим

$$m \vec{v}_C(t) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i(t). \quad (2.74)$$

Здесь $\vec{v}_C(t)$ — мгновенная скорость центра масс системы.

Если сумма внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то, согласно закону сохранения импульса,

$$m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) + \dots + m_N \vec{v}_N(t) = \vec{p} = \text{const}$$

и, следовательно, скорость центра масс не будет зависеть от времени:

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (2.75)$$

Из (2.75) видно, что центр масс системы, которую можно рассматривать как замкнутую, или покоится в инерциальной системе отсчета, или движется относительно нее равномерно и прямолинейно.

Итак, из закона сохранения импульса следует, что *под действием внутренних сил скорость движения центра масс системы не изменяется. Изменение скорости центра масс может быть обусловлено только внешними по отношению к данной системе силами.*



Понятно, почему легендарный барон Мюнхгаузен не смог бы вытащить самого себя из болота. Сила, с которой он тянул себя за волосы, — это внутренняя сила системы, именуемой «барон Мюнхгаузен». Она не может сообщить центру масс системы (и значит, самому барону) скорость, направленную вверх или в какую-либо иную сторону.

Более интересен пример, касающийся вращения Луны вокруг Земли. Силы притяжения Луны к Земле и Земли к Луне являются внутренними силами в системе Земля + Луна. Поэтому они не могут влиять на движение Земли с Луной по орбите вокруг Солнца. Это движение происходит под действием внешней для данной системы силы — силы притяжения Солнца. Отметим, что представление о Земле, движущейся по почти круговой орбите вокруг Солнца, и Луне, обращающейся вокруг Земли, оказывается не вполне точным. В действительности *вокруг Солнца движется по почти круговой орбите центр масс Земли и Луны*, а Земля и Луна обращаются при этом вокруг указанного центра масс.

Найдем расстояние l от центра Земли до центра масс системы Земля + Луна. Положим в (2.73) $N = 2$ и спроецируем это равенство на x -ось, проведенную через центры Земли и Луны и имеющую начало в центре Земли (рис. 2.28). Мы получим соотношение

$$l \cdot (m_1 + m_2) = 0 \cdot m_1 + L m_2. \quad (1^*)$$

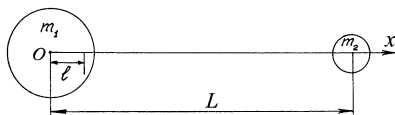


Рис. 2.28

Здесь m_1 и m_2 — массы Земли и Луны, соответственно, а L — расстояние между их центрами. Учитывая, что масса Земли в 81 раз больше массы Луны, перепишем (1*) в виде:

$$l = \frac{L m_2}{m_1 + m_2} = L \frac{1}{81 + 1} \approx \frac{L}{82}.$$

Так как $L = 384\,000$ км, то получаем, что $l \approx 4680$ км. Радиус земного шара равен примерно 6370 км. Следовательно, центр масс системы Земля + Луна заметно отстоит от центра Земли, хотя и остается внутри земного шара.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

2.1. Пустой стакан накрыт листком плотной бумаги, а на листок положен пятак. Если резко выдернуть листок, пятак упадет в стакан. Как это можно объяснить, используя второй закон Ньютона?

2.2. Камень бросили под углом к горизонту. На него действует

только сила тяжести, направленная вертикально вниз. Почему же камень летит по параболической траектории и ни в одной точке траектории его скорость не направлена вертикально вниз?

2.3. Могут ли оказаться противоположными направления ско-

рости тела и равнодействующей сил, приложенных к телу?

2.4. Докажите, что плотность не является аддитивной величиной.

2.5. Может ли центр тяжести тела находиться вне тела?

2.6. Тело равномерно скользит вниз по наклонной плоскости с углом наклона α . Чему равен коэффициент трения скольжения?

2.7. Сани тянут за веревку по горизонтальной поверхности. Зависит ли модуль силы трения скольжения от угла, образуемого натянутой веревкой с горизонтальной плоскостью?

2.8. Найдите модуль силы реакции нити в случаях а) и б), изображенных на рисунке 2.29.

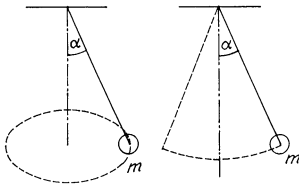


Рис. 2.29

Даны масса m тела и угол α отклонения нити от вертикали.

2.9. Решите задачу 1 из п. 2.4.3, усложнив ее указанием, что есть трение скольжения, характеризуемое коэффициентом μ .

2.10. На тело, покоящееся на наклонной плоскости, действуют три силы: тяжести, реакции опоры, трения покоя. Какие силы являются противодействием по отношению к указанным силам и к каким телам они приложены?

2.11. Тепловоз движет вагон, толкая его сзади. Укажите и назовите силы, действующие на вагон. Какие силы являются по отношению к ним противодействиями?

2.12. Буксир движет баржу, толкая ее сзади. Почему система «буксир — баржа» движется, коль скоро сила, с которой буксир давит на баржу, равна по модулю силе, с которой баржа давит на буксир?

2.13. Мяч падает на пол и отскакивает от него. Какая сила заставляет мяч отскакивать от пола?

2.14. Решите задачу 5 из п. 2.4.3, усложнив ее указанием, что есть трение скольжения, характеризуемое коэффициентом μ .

2.15. Является ли вес тела аддитивной величиной?

2.16. К концам нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами M . Ответьте на вопросы: а) чему равен вес каждого груза? б) почему и как увеличится вес левого груза, если на правый положить гирьку массой m ? в) как изменятся веса грузов, если нить оборвется?

2.17. К концам нити, перекинутой через блок, подвешены грузы 1 и 2. Модули их ускорений и весов равны $a = 2 \text{ м/с}^2$ и $P = 15 \text{ Н}$, соответственно. Найдите массы грузов.

2.18. К концам нити, перекинутой через блок, подвешены грузы 1 и 2. Груз 1 имеет массу $m_1 = 2 \text{ кг}$ и ускорение \vec{a} , равное по модулю 4 м/с^2 и направ-

ленное вверх. Найдите массу и вес груза 2.

2.19. На полу лифта лежит тело массой 1 кг. В течение первых четырех секунд лифт поднимался с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$. В течение последних двух секунд подъема лифт двигался равнозамедленно. Что можно сказать о весе тела на разных этапах подъема лифта? Можно ли заметить изменения веса тела при подъеме, используя рычажные весы?

2.20. Кирпич массой M лежит на горизонтальной плоскости. Он давит на плоскость с силой $M\vec{g}$, которая и есть вес кирпича. Если на кирпич поставить гирьку массой m , то на плоскость будет оказываться давление с силой $(M + m)\vec{g}$. Следует ли считать эту силу весом кирпича? Иначе говоря, увеличивается ли вес кирпича из-за того, что на него поставили гирьку?

2.21. На тележке установлен подвес, к которому на нити подвешен шарик. Тележка скатывается по наклонной плоскости с углом наклона α . Докажите, что во время движения тележки нить с шариком окажется ориентированной перпендикулярно к наклонной плоскости.

2.22. На краю горизонтального диска радиусом R подвешен шарик на нити длиной l . При равномерном вращении диска нить отклоняется от вертикали на угол α . Какова угловая скорость вращения диска?

2.23. Почему, с точки зрения физики, воздушные гимнасты в конце выступления опускаются не на твердую арену, а на маты или натянутую сетку?

2.24. С тележки массой M , находящейся на горизонтальном полу, бросают под углом α к горизонту камень массой m с начальной скоростью v_0 . Чему равна по модулю скорость тележки, какую она приобретет вследствие отдачи?

2.25. Решите задачу из п. 2.6.3, полагая, что перед соударением тела двигались под прямым углом друг к другу и что массы тел равны.

2.26. На вершине столба высотой H лежит тело массой M . В него попадает летящая горизонтально пуля, имеющая массу m и скорость v_0 . На каком расстоянии от подножия столба упадет тело с застрявшей в нем пулей? Трением тела о поверхность вершины столба пренебречь.



МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА: СТАТИКА

До сих пор мы оставались, по сути дела, в рамках модели материальной точки, ограничиваясь рассмотрением поступательного движения тел. Лишь в отдельных случаях мы выходили за рамки этой модели (например, при введении понятий центра тяжести и плотности тела, а также при обсуждении сил упругости, трения и сопротивления в жидкости или газе). Теперь мы снимем указанное ограничение и воспользуемся *моделью абсолютно твердого тела*, т. е. тела, в котором расстояния между любыми точками остаются неизменными при действии каких-либо сил.

В действительности таких тел не бывает. Любое реальное тело подвергается деформациям при действии приложенных к нему сил. Деформации не всегда можно заметить невооруженным глазом. Но они существуют, коль скоро существуют силы упругости, выступающие, в частности, как силы реакции опоры или силы реакции нитей. Условность модели абсолютно твердого тела заключается в том, что в рамках этой модели возникновение тех или иных сил, действующих на тело или со стороны тела, *не связывается с его деформациями*. Силы есть, а деформаций нет.

Понятно, что отмеченная условность присуща также и модели материальной точки (какая деформация может быть у точки?). Условность этой модели заключалась еще и в том, что силы, действующие на тело, предполагались приложенными в одной и той же точке. Обращалось внимание на направления и модули сил, но не уточнялись точки приложения сил. Начиная работать с абсолютно твердым телом (для краткости будем далее говорить о твердом теле или просто о теле), мы будем интересоваться не только направлением и модулем той или иной силы, но и *точкой ее приложения*.

3.1. МОМЕНТ СИЛЫ

3.1.1. Момент силы относительно точки

Величина, называемая *моментом силы*, определена, если заданы, во-первых, сила и, во-вторых, точка в пространстве (внутри тела или вне его), относительно которой рассматривается данный момент силы.

Момент силы \vec{F} относительно точки B (обозначим его через $\vec{\Phi}$) определяют соотношением

$$\vec{\Phi} = \vec{r}_B \times \vec{F}, \quad (3.1)$$

где \vec{r}_B — вектор, проведенный из точки B в точку приложения силы \vec{F} (см. рисунок 3.1, а). Косым крестом здесь обозначено *векторное произведение* вектора \vec{r}_B на вектор \vec{F} . Обозначим через S плоскость, в которой находятся вектор \vec{F} и точка B (а значит, и вектор \vec{r}_B). Вектор $\vec{\Phi}$ перпендикулярен к этой плоскости. Чтобы выяснить, в какую сторону от плоскости он направлен, надо воспользоваться правилом правого винта: если вращать вектор \vec{r}_B к вектору \vec{F} по меньшей дуге, то направление вектора $\vec{\Phi}$ будет совпадать с направлением перемещения правого винта вдоль его оси. На рисунке 3.1, б показаны направление вращения вектора \vec{r}_B и направление вектора $\vec{\Phi}$. Если плоскость S есть плоскость страницы данной книги, то вектор оказывается в данном случае направленным от читателя, за страницу книги.

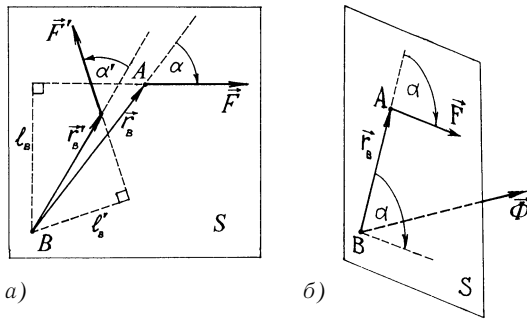


Рис. 3.1

Модуль вектора момента силы

$$\vec{\Phi} = r_B F \sin \alpha = l_B F. \quad (3.2)$$

Здесь α — меньший из двух углов между направлениями векторов \vec{r}_B и \vec{F} (большой угол есть $2\pi - \alpha$). Величину

$$l_B = r_B \sin \alpha \quad (3.3)$$

называют *плечом момента силы*. Это есть кратчайшее расстояние от точки B до линии действия силы \vec{F} . Если точка B оказывается на линии действия силы, то $l_B = 0$. Момент силы относительно точки на линии действия силы равен нулю.

Примечание

Кроме силы \vec{F} , на рисунке 3.1, а показана еще одна сила, лежащая в плоскости S — сила \vec{F}' . Момент силы \vec{F}' относительно точки B есть $\vec{\Phi}' = \vec{r}_B' \times \vec{F}'$. Нетрудно сообразить, что вектор $\vec{\Phi}$ направлен навстречу читателю; его направление противоположно направлению вектора $\vec{\Phi}'$. По аналогии с (3.2) модуль вектора $\vec{\Phi}'$ можно представить в виде $\vec{\Phi}' = r_B' F' \sin \alpha' = l_B' F'$. Все величины, входящие в это соотношение, показаны на рисунке 3.1, а.

3.1.2. Сложение моментов сил

Если на тело действуют N сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_N$), то результирующий момент относительно точки B (обозначим его через $\vec{\Phi}$) есть *векторная сумма моментов отдельных сил*, рассматриваемых относительно данной точки:

$$\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

Здесь \vec{r}_{Bi} — вектор, проведенный из точки B в точку приложения силы \vec{F}_i ; $\vec{\Phi}_i$ — момент силы \vec{F}_i относительно точки B .

Предположим, что точка B и все силы находятся в *одной плоскости*; пусть это будет плоскость страницы данной книги. Прямую, перпендикулярную к плоскости, будем рассматривать в качестве z -оси и будем полагать, что она направлена от читателя (за страницу книги).

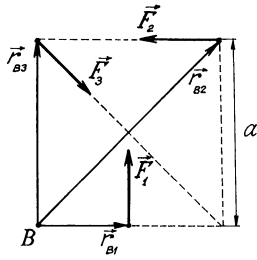


Рис. 3.2

На рисунке 3.2 представлен конкретный пример: на пластину в форме квадрата со сторонами a действуют три силы (\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3), находящиеся, как и точка B , в плоскости квадрата. Силы создают моменты относительно B :

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_1 &= \vec{r}_{B1} \times \vec{F}_1; \quad \vec{\Phi}_2 = \vec{r}_{B2} \times \vec{F}_2; \quad \vec{\Phi}_3 = \\ &= \vec{r}_{B3} \times \vec{F}_3.\end{aligned}$$

Из рисунка видно, что моменты $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ стремятся вращать тело вокруг B против часовой стрелки; в соответствии с правилом правого винта они направлены *антипараллельно* z -оси и, значит, их z -проекции равны, соответственно, $-\frac{a}{2}F_1$ и $-aF_2$. Момент $\vec{\Phi}_3$ стремится вращать тело вокруг B по часовой стрелке, он направлен *параллельно* z -оси, его z -проекция равна $+\frac{a}{\sqrt{2}}F_3$. Итак, z -проекция Φ_z результирующего момента $\vec{\Phi}$ ($\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_3$) равна

$$\begin{aligned}\Phi_z &= -\frac{a}{2}F_1 - aF_2 + \frac{a}{\sqrt{2}}F_3 = \\ &= -l_{B1}F_1 - l_{B2}F_2 + l_{B3}F_3,\end{aligned}\tag{1*}$$

где l_{Bi} — плечо момента $\vec{\Phi}_i$ относительно B . Перепишем (1*) в виде

$$\vec{\Phi}_z = \sum_{i=1}^3 \xi_i l_{Bi} F_i.\tag{2*}$$

Здесь $\xi_i = 1$, если момент $\vec{\Phi}_i$ параллелен z -оси, и $\xi_i = -1$, если антипараллелен. Соотношение (2*) немедленно обобщается на случай N сил в одной плоскости:

$$\Phi_z = \sum_{i=1}^N \xi_i \Phi_i = \sum_{i=1}^N \xi_i l_{Bi} F_i.\tag{3.5}$$

Здесь $\xi_i \Phi_i$ — z -проекция момента $\vec{\Phi}_i$, l_{Bi} — плечо момента $\vec{\Phi}_i$; $\xi_i = 1$, если вектор $\vec{\Phi}_i$ параллелен z -оси; $\xi_i = -1$, если антипараллелен.

На рисунке 3.1, а были представлены две силы (силы \vec{F} и \vec{F}'). В соответствии с (3.5) z -проекция результирующего момента этих сил относительно B равна

$$\Phi_z = l_B F - l'_B F'. \quad (3.6)$$

3.1.3. Момент силы относительно оси

Соотношения (3.1), (3.2) определяют момент $\vec{\Phi}$ силы \vec{F} , рассматриваемый относительно точки B . Момент $\vec{\Phi}$ перпендикулярен плоскости S , в которой находятся точка B и сила \vec{F} . Пусть через точку B проходит z -ось, составляющая угол δ с вектором $\vec{\Phi}$ (рис. 3.3, а). Проекция вектора $\vec{\Phi}$ на z -ось:

$$\Phi_z = \Phi \cos \delta = l_B F \cos \delta. \quad (3.7, a)$$

Эту проекцию называют *моментом силы \vec{F} относительно z -оси*.

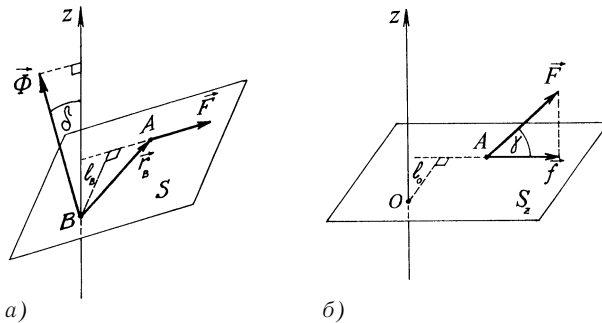


Рис. 3.3

Итак, наряду с *моментом силы относительно точки* рассматривают *момент силы относительно оси*. Момент силы относительно некоторой оси, проходящей через точку B , есть *проекция на эту ось* вектора момента данной силы, рассматриваемого относительно точки B .

Из (3.7, а) следует: $\Phi_z = \Phi$ при $\delta = 0$.

Модуль момента силы относительно точки равен моменту этой силы относительно оси, которая проходит через данную точку и перпендикулярна плоскости точки и силы.

Как это видно из (3.7, а), для получения момента силы \vec{F} относительно некоторой оси надо знать модуль момента $\vec{\Phi}$ этой силы относительно какой-нибудь точки на оси и угол, какой составляет с осью вектор $\vec{\Phi}$. Однако можно найти момент силы \vec{F} относительно заданной оси *напрямую* (не обращаясь к моменту относительно точки на оси). Пусть заданы силы \vec{F} и ось. Мысленно проведем через точку A приложения силы плоскость, перпендикулярную заданной оси, и рассмотрим вектор \vec{f} , получающийся, если спроектировать вектор \vec{F} на указанную плоскость. На рисунке 3.3, б в качестве заданной оси выбрана z -ось; перпендикулярная к ней плоскость, проходящая через точку A , обозначена через S_z ; O — точка пересечения z -оси с плоскостью S_z ; γ — угол между векторами \vec{F} и \vec{f} ; l_0 — длина перпендикуляра, опущенного из A на линию действия силы \vec{f} . Момент силы \vec{F} относительно z -оси определяют с помощью соотношения

$$\Phi_z = \xi l_0 f = \xi l_0 F \cos \gamma, \quad (3.7, б)$$

где $\xi = 1$, если момент, создаваемый силой \vec{f} относительно O , параллелен z -оси; $\xi = -1$, если антипараллелен. В случае, изображенном на рисунке 3.3, б, $\xi = -1$.

Соотношения (3.7, а) и (3.7, б) приводят к одному и тому же результату. Примем это без доказательства.

Исходя из (3.7, б) заключаем, что если сила \vec{F} параллельна (антипараллельна) z -оси, то угол γ равен 90° или 180° и, следовательно, $\Phi_z = 0$. Легко сообразить, что $\Phi_z = 0$ во всех случаях, когда z -ось и сила \vec{F} оказываются в одной плоскости (в этих случаях $l_0 = 0$).

Учитывая сделанные замечания, отметим, что (3.5) и (3.6) определяют соответствующие результирующие моменты относительно z -оси.

3.1.4. Пара сил

Парой сил называют совокупность двух сил, у которых модули равны, направления противоположны, линии действия параллельны. Разумеется, равнодействующая сил обращается в данном случае в нуль, однако не равен нулю результирующий момент сил (*момент пары сил*).

На рисунке 3.4 изображена пара сил, образованная силами \vec{F}_1 и \vec{F}_2 ; $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$; $F_1 = F_2 \equiv F$. Через S обозначена плоскость, в которой находятся силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (плоскость пары сил).

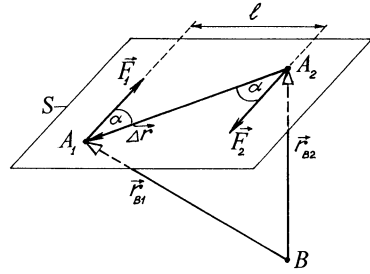


Рис. 3.4

Найдем момент пары сил относительно произвольно выбранной точки B . Момент силы \vec{F}_1 относительно этой точки есть $\vec{\Phi}_1 = \vec{r}_{B1} \times \vec{F}_1$, а момент силы \vec{F}_2 есть $\vec{\Phi}_2 =$

$= \vec{r}_{B2} \times \vec{F}_2$. В соответствии с (3.4) можно представить момент пары сил в виде векторной суммы двух моментов:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 = \vec{r}_{B1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{B2} \times \vec{F}_2. \quad (1^*)$$

Учитывая, что $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, преобразуем это соотношение:

$$\vec{\Phi} = \vec{r}_{B1} \times \vec{F}_1 - \vec{r}_{B2} \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_{B1} - \vec{r}_{B2}) \times \vec{F}_1 = \vec{\Delta r} \times \vec{F}_1.$$

Итак,

$$\vec{\Phi} = \vec{\Delta r} \times \vec{F}_1. \quad (3.8)$$

Здесь $\vec{\Delta r} = \vec{r}_{B1} - \vec{r}_{B2}$ — вектор, проведенный из точки приложения силы \vec{F}_2 (точки A_2) в точку приложения силы \vec{F}_1 (точку A_1).

Из (3.8) следует, что момент пары сил не зависит от выбора точки, по отношению к которой рассматривались в (1*) моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Обратим внимание: хотя моменты сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 рассматривались относительно некоторой точки B , однако *момент пары, образованной этими силами, никакого отношения к точке B не имеет!* Из (3.8) следует также, что момент пары сил перпендикулярен плоскости пары.

Модуль момента пары сил есть (см. рисунок)

$$\Phi = \Delta r F \sin \alpha = lF. \quad (3.9)$$

Здесь l — плечо пары сил; оно равно расстоянию между линиями действия сил, образующих пару. В случае, показанном на рисунке 3.4, момент пары сил (момент $\vec{\Phi}$) направлен вниз, под плоскость S .

Можно рассматривать момент пары сил как момент силы \vec{F}_1 относительно точки приложения силы \vec{F}_2 или как момент силы \vec{F}_2 относительно точки приложения силы \vec{F}_1 . Так как момент пары сил равен векторной сумме моментов

этих сил относительно *произвольной* точки пространства, то мы вправе выбрать в качестве таковой точку A_2 . Тогда из суммы моментов выпадет момент силы \vec{F}_2 и останется момент силы \vec{F}_1 . А если рассматривать моменты сил относительно точки A_1 , то из суммы моментов выпадет момент силы \vec{F}_1 и останется момент силы \vec{F}_2 .

Хотя момент пары сил можно найти, рассматривая сумму моментов сил, образующих пару, однако само понятие «момент пары сил» принципиально отличается от понятия «момент силы». Момент силы рассматривают относительно какой-то точки, и эту точку принято считать началом вектора момента силы (он перпендикулярен к плоскости, проходящей через вектор силы и упомянутую точку). Момент пары сил определен *безотносительно к какой-либо точке*. У вектора момента пары сил нет какого-либо определенного начала. Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости, в которой находятся векторы сил, образующих данную пару.

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (3.2) следует, что

**единица
момента силы** = **единица силы** × **единица длины**.

Таким образом, единица момента силы — *ньютон-метр* (обозначение: Н · м); $1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$.

Ньютон-метр равен моменту силы, создаваемому силой 1 Н относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы.

3.2. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.2.1. Перенос точки приложения силы вдоль ее линии действия

Для удобства наблюдения возьмем в качестве твердого тела кусок толстой фанеры массой m , положение центра тяжести которого известно (его можно найти методом, излагавшимся в п. 2.3.1). Подвесим кусок фанеры в некоторой точке A (рис. 3.5, *а*). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (она приложена в центре тяжести C) и сила реакции нити \vec{T}_1 (она приложена в точке A). Легко убедиться, что когда тело находится в равновесии, действующие на него силы имеют общую линию действия и их точки приложения лежат на этой линии. Используя динамометр, находим, что $T_1 = mg$. Перенесем точку приложения силы T_1 вдоль линии CA ; пусть теперь это будет точка A' (рис. 3.5, *б*). Можно убедиться, что при таком переносе точки приложения силы T_1 равновесие тела не нарушилось и остались прежними модуль и направление силы.

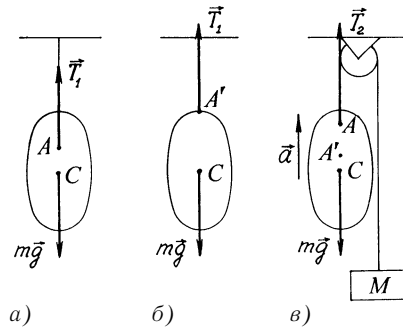


Рис. 3.5

Прделаем еще один опыт. К одному концу нити, перекинутой через блок, подвесим рассматриваемое тело массой m , а к другому — груз массой M , большей, чем масса m (рис. 3.5, в). Под действием сил \vec{T}_2 и $m\vec{g}$ тело приобретет ускорение $a = \frac{T_2 - mg}{m}$, на-

правленное вверх. Если мы перенесем точку приложения силы \vec{T}_2 вдоль линии CA (например, из A в A'), то сможем убедиться, что ни направление, ни модуль ускорения тела не изменились.

Мы приходим к выводу: *точку приложения силы к твердому телу можно переносить вдоль ее линии действия* — от этого результат действия сил на тело не изменится. Если тело находилось в равновесии, то оно останется в равновесии. Если тело имело какое-то ускорение, то оно будет продолжать движение с тем же ускорением.

3.2.2. Перенос точек приложения сил в общем случае

Перенос точки приложения силы вдоль ее линии действия не влияет на равновесие или движение твердого тела.

? А если перенести точку приложения силы в точку, *не находящуюся на линии действия силы*?

На рисунке 3.6 на тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A . Предполагается перенести точку приложения силы (разумеется, вместе с самой силой) в точку B , которую выбираем произвольно. Приложим мысленно в точке B две уравновешивающие друг друга силы — силы \vec{F}' и \vec{F}'' ($\vec{F}' = \vec{F}$; $\vec{F}' + \vec{F}'' = 0$).

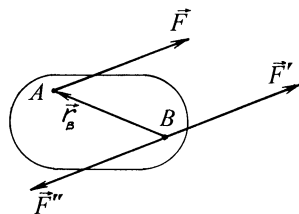


Рис. 3.6

Силу \vec{F}' можно рассматривать как силу \vec{F} , у которой точка приложения перенесена из A в B . Силы \vec{F} и \vec{F}'' образуют пару сил; момент этой пары совпадает с моментом силы \vec{F} относительно точки B . Таким образом, действие на тело силы \vec{F} , приложенной в точке A , оказывается эквивалентным *одновременному действию на это тело силы и пары сил* — силы, равной по модулю и направлению силе \vec{F} , но приложенной в точке B , и пары сил, момент которой совпадает с моментом силы \vec{F} относительно точки B , т. е. с моментом $\vec{\Phi} = \vec{r}_B \times \vec{F}$.

Предположим теперь, что на тело действуют N сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$. Их точки приложения: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$, соответственно. Для любой из этих сил применимы рассуждения, приведенные выше для силы \vec{F}_1 . Следовательно, справедливо следующее правило:

Действие сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$ на твердое тело можно заменить действием на тело равнодействующей всех этих сил

$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$, приложенной в произвольной точке B , и результирующим моментом сил, равным сумме моментов указанных сил относительно точки B , т. е. сумме моментов

$\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i$

3.2.3. Два условия равновесия твердого тела

Полученное выше правило позволяет сформулировать в общем случае условия равновесия твердого тела, на которое действуют N сил, приложенных в различных точках. Это правило говорит, что можно заменить указанные силы на их равнодействующую, приложенную в произвольной точке B , и на результирующий момент заданных сил относительно этой точки. Отсюда следуют два условия равновесия твердого тела: *первое условие* — должна быть равна нулю упомянутая равнодействующая сил, *второе условие* — должен быть равен нулю упомянутый результирующий момент сил.

Первое условие равновесия может быть сформулировано так:

Для равновесия тела необходимо, чтобы сумма приложенных к нему сил была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0. \quad (3.10)$$

Сформулируем **второе условие равновесия** (правило моментов):

Для равновесия тела необходимо, чтобы сумма моментов приложенных к нему сил, рассматриваемая относительно любой точки, была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i = 0. \quad (3.11)$$

Здесь \vec{r}_{Bi} — вектор, проведенный из точки B в точку приложения силы \vec{F}_i ; произвольно выбранная точка B — это точка, относительно которой рассматриваются моменты сил (напоминаем, что она может находиться как внутри тела, так и вне его).

Если все силы, приложенные к телу, находятся в одной плоскости (обозначим ее через S), то вместо векторной суммы в (3.11) можно использовать алгебраическую сумму, аналогичную сумме в (3.5):

$$\sum_{i=1}^N \xi_i l_{Bi} F_i = 0, \quad (3.12)$$

где l_{Bi} — плечо момента силы \vec{F}_i относительно точки B , находящейся в плоскости S ; $l_{Bi} F_i$ — модуль этого момента. Сумма в (3.12) есть сумма проекций моментов на направление z -оси, проходящей через точку B перпендикулярно к плоскости S (иначе говоря, сумма моментов сил относительно z -оси).

Будем полагать, что плоскость S совпадает с плоскостью страницы данной книги и z -ось направлена от читателя (за страницу книги). В этом случае $\xi_i = 1$ для моментов, направленных от читателя, и $\xi_i = -1$ для моментов, направленных навстречу читателю. Моменты, направленные от читателя, стремятся вращать тело вокруг точки B (вокруг z -оси, проходящей через точку B) в направлении *по часовой стрелке*, тогда как моменты, направленные навстречу читателю, стремятся вращать тело вокруг точки B *против*

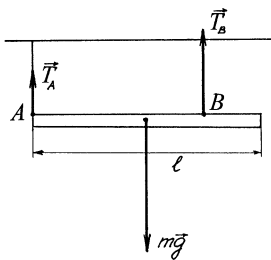


Рис. 3.7

часовой стрелки. Легко понять смысл правила моментов (3.12): моменты, стремящиеся вращать тело по часовой стрелке, должны быть уравновешены моментами, стремящимися вращать тело против часовой стрелки.

Задача 1. Балка длиной l и массой m подвешена на двух вертикальных тросах в точках A и B ; $AB = \frac{3}{4}l$ (рис. 3.7). Требуется найти силы реакции тросов.

□ На балку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и искомые силы \vec{T}_A и \vec{T}_B (см. рисунок). Условие равновесия (3.10) имеет в данном случае вид: $m\vec{g} + \vec{T}_A + \vec{T}_B = 0$. Спроецировав это равенство на направление вектора \vec{g} , получаем скалярное равенство:

$$mg - T_A - T_B = 0. \quad (1^*)$$

Чтобы найти T_A и T_B , одного уравнения недостаточно. Поэтому обратимся к правилу моментов (3.12), рассматривая моменты, например, относительно точки A . В этом случае соотношение (3.12) принимает вид:

$$\frac{1}{2}lmg - \frac{3}{4}lT_B = 0. \quad (2^*)$$

Используя (1*) и (2*), находим

$$T_A = \frac{1}{3}mg, \quad T_B = \frac{2}{3}mg.$$

Заметим, что задачу можно решить еще проще, если, не прибегая к условию равновесия (3.10), дважды воспользоваться правилом моментов — сначала относительно точки A , а затем относительно точки B . ■

Задача 2. Балка длиной l и массой m закреплена левым концом в стене и удерживается в горизонтальном положении тросом, составляющим с балкой угол α (рис. 3.8). К правому концу балки подвешен груз массой M . Требуется найти силу натяжения троса и действующую на балку силу реакции стены.

□ На балку действуют: силы тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$, сила реакции троса \vec{T} и сила реакции стены \vec{F} . Все силы находятся в одной плоскости (плоскости рисунка). Условие равновесия (3.10):

$$\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} + M\vec{g} = 0.$$

Спроецировав это равенство на координатные оси, получим два скалярных равенства — соответственно для x -проекции и y -проекции сил:

$$F_x - T \cos \alpha = 0; \quad (3^*)$$

$$F_y + T \sin \alpha - (m + M)g = 0. \quad (4^*)$$

Имеем два уравнения и три неизвестных (F_x , F_y , T). Третье уравнение получим, воспользовавшись правилом моментов (3.12) относительно точки 0 (см. рисунок). В этом случае соотношение (3.12) принимает вид:

$$\frac{1}{2} l m g + l m g - T l \sin \alpha = 0. \quad (5^*)$$

Из (5*) находим модуль силы реакции троса:

$$T = \frac{\left(\frac{1}{2}m + M\right)g}{\sin \alpha}. \quad (6^*)$$

Такова же по модулю и сила натяжения троса. С учетом (6*) получим из (3*) x -проекцию силы \vec{F} :

$$F_x = T \cos \alpha = \left(\frac{1}{2}m + M\right)g \operatorname{ctg} \alpha,$$

а из (4*) — y -проекцию этой силы:

$$F_y = (M + m)g - T \sin \alpha = \frac{1}{2} m g.$$

Обозначим через φ угол между балкой и направлением силы \vec{F} . Находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{m}{m + 2M} \operatorname{tg} \alpha.$$

Модуль силы \vec{F} есть

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{1}{2} m g \sqrt{\left(1 + 2\frac{M}{m}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}. \quad \blacksquare$$

3.2.4. Почему брусок не опрокидывается на наклонной плоскости?



На наклонной плоскости с углом наклона α лежит брусок в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h и длиной l (рис. 3.9, а). Почему он не опрокидывается? Чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить, где находится точка приложения силы реакции опоры \vec{N} .

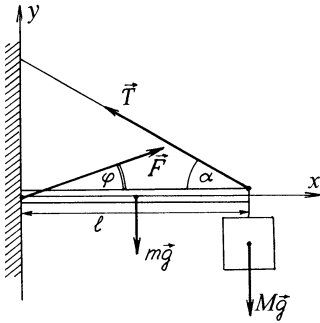


Рис. 3.8

На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. В п. 2.3.1 отмечалось, что притяжение Земли действует на все частицы тела, так что $m\vec{g}$ есть равнодействующая сил тяжести, приложенных ко всем частицам тела; точкой приложения этой равнодействующей является центр тяжести C . Силы реакции опоры и трения покоя действуют на брусок во всех точках поверхности соприкосновения бруска с плоскостью, так что под \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ надо понимать соответствующие равнодействующие сил. Точки приложения этих равнодействующих должны находиться на упомянутой поверхности соприкосновения. На рисунке 3.9, а они должны находиться где-то на отрезке BD .

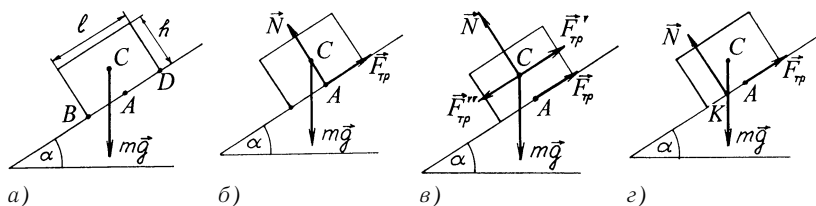


Рис. 3.9

Допустим, что в качестве точек приложения сил \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ выбрана точка A (рис. 3.9, б). Поскольку можно переносить точку приложения силы вдоль ее линии действия, ничто не мешает выбрать в качестве точки приложения силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ любую точку на отрезке BD . Пусть это будет точка A . А вот в качестве точки приложения силы \vec{N} точка A не годится.

Чтобы убедиться в этом, обратимся к рисунку 3.9, в. Здесь точка приложения силы \vec{N} перенесена из A в центр тяжести бруска C ; такой перенос правомерен, поскольку совершается вдоль линии действия силы \vec{N} . Приложим в точке C две уравновешивающие друг друга силы: $\vec{F}'_{\text{тр}}$ и $\vec{F}''_{\text{тр}}$ ($\vec{F}'_{\text{тр}} = \vec{F}_{\text{тр}}$; $\vec{F}'_{\text{тр}} + \vec{F}''_{\text{тр}} = 0$). Совокупность пяти сил, показанных на рисунке 3.9, в, должна оказывать на брусок такое же действие, как и совокупность трех сил на рисунке 3.9, б. Понятно, что $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}'_{\text{тр}} = 0$, а силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{F}''_{\text{тр}}$ образуют пару сил, которая создает момент, стремящийся вращать брусок против часовой стрелки (стремящийся опрокинуть брусок). По модулю этот момент равен

$$\Phi_{\text{тр}} = \frac{1}{2} h F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} h m g \sin \alpha. \quad (1^*)$$

Поскольку брусок покоится, то на него должен действовать такой же по модулю уравновешивающий момент, стремящийся вращать брусок по часовой стрелке. В схеме сил на рисунке 3.9, в такой момент отсутствует; поэтому такая схема неверна. Соответственно, неверна и предложенная на рисунке 3.9, б схема сил. Точка A не является точкой приложения силы \vec{N} .

Нетрудно убедиться, что точкой приложения силы \vec{N} является точка K пересечения линии действия силы тяжести $m\vec{g}$ с наклонной плоскостью (рис. 3.9, z). В этом случае возникает момент силы \vec{N} , стремящийся вращать брусок вокруг точки C по часовой стрелке, равный по модулю

$$\Phi_{\text{он}} = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot N. \quad (2^*)$$

Так как $N = mg \cos \alpha$, то из (1*) и (2*) заключаем, что $\Phi_{\text{он}} = \Phi_{\text{тр}}$. Теперь выполняется не только условие равновесия (3.10), но и правило моментов: момент $\vec{\Phi}_{\text{тр}}$, обусловленный силой трения покоя, уравновешивается моментом $\vec{\Phi}_{\text{он}}$, обусловленным силой реакции опоры. Момент, обусловленный силой тяжести, в данном случае равен нулю (поскольку моменты рассматриваются относительно центра тяжести C).

Точка приложения силы \vec{N} (точка пересечения линии действия силы тяжести с наклонной плоскостью) должна, очевидно, находиться в пределах поверхности соприкосновения бруска с плоскостью. Если окажется, что отрезок AK больше $\frac{l}{2}$, то момент $\vec{\Phi}_{\text{он}}$ не возникнет. В этом случае момент, создаваемый силой трения покоя, приведет к опрокидыванию бруска.

3.2.5. Виды равновесия тела

Выделяют три вида равновесия твердого тела — *устойчивое*, *неустойчивое* и *безразличное*. *Устойчивым* называют равновесие, при котором относительно небольшие смещения или повороты тела приводят к возникновению силы или момента силы, *возвращающих тело в исходное положение*. Если же даже при незначительных смещениях или поворотах тела, находящегося в равновесии, возникает сила или момент, *разрушающие равновесие*, то такое равновесие называют *неустойчивым*. Если, наконец, смещения или повороты *не нарушают существующего равновесия*, то перед нами *безразличное* равновесие.

Продемонстрируем устойчивое и неустойчивое равновесия на простом примере куска фанеры, подвешенного на нити (рис. 3.10, a). Такой пример мы рассматривали в п. 3.2.1; там было установлено, что равновесие тела не нарушается, если перенести точку A приложения силы реакции нити вдоль прямой CA (C — центр тяжести тела). Обратим внимание: на рисунках 3.4, a и 3.4, b точка подвеса нити (точка A) находилась *выше* центра тяжести тела C . Именно благодаря этому равновесие висящего на нити куска фанеры было устойчивым. Попробуем нарушить это равновесие, отведя нить от вертикали на некоторый угол α . Равновесие, конечно, нарушится, но при этом возникает возвра-

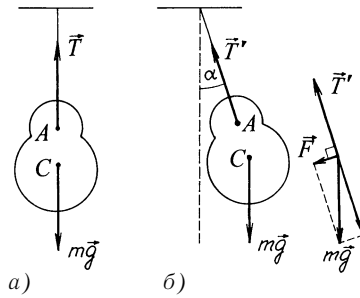


Рис. 3.10

щая сила $\vec{F} = \vec{T}' + m\vec{g}$ (рис. 3.10, б). Заметим, кстати, что $T' \neq T$. Если $T = mg$, то $T' = mg \cos \alpha$.

Предположим теперь, что точка подвеса A (точка приложения силы реакции нити) перенесена вдоль вертикальной прямой так, что она оказалась *ниже* центра тяжести тела C (рис. 3.11, а). Тело продолжает оставаться в равновесии, однако теперь равновесие тела стало неустойчивым. Всякое (даже весьма незначительное!) отклонение нити от вертикали приведет к возникновению момента силы тяжести относительно точки. Как видно из рисунка 3.11, б, модуль этого момента равен

$$lmg = h \sin \alpha \cdot mg,$$

где h — расстояние между точками A и C . В результате исходное равновесие тела исчезнет, и кусок фанеры повернется вокруг точки подвеса A , перейдя в новое положение устойчивого равновесия, показанное на рисунке 3.11, в.

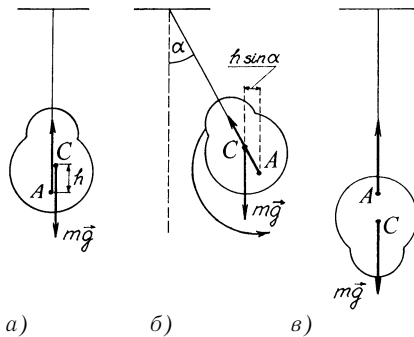


Рис. 3.11

Шарик на дне ямки (он показан пунктиром на рисунке 3.12, *a*) находится в положении устойчивого равновесия. При смещении шарика из этого положения возникает сила $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$, возвращающая шарик на дно ямки. Шарик на вершине горки (показан пунктиром на рисунке 3.12, *б*) находится в положении неустойчивого равновесия. При его смещении из этого положения возникает сила $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$, и шарик скатывается с горки. Шарик на горизонтальной плоскости (рис. 3.12, *в*) находится в безразличном равновесии. При смещении его из исходного положения сила реакции опоры продолжает уравниваться силой тяжести шарика.

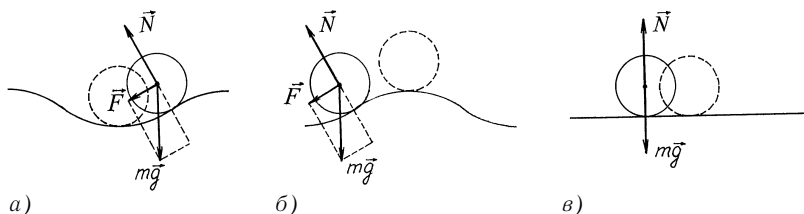


Рис. 3.12

Отметим, что степень устойчивости равновесия различна в разных ситуациях. У книги, лежащей плашмя, устойчивость равновесия больше, чем у той же книги, поставленной вертикально. У нормально стоящей бутылки устойчивость равновесия больше, чем у той же бутылки, поставленной горлышком вниз. А положенная набок бутылка будет находиться на горизонтальном столе в безразличном равновесии.

3.3. СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

3.3.1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

На тело действуют две параллельные силы \vec{F}_A и \vec{F}_B , направленные вертикально вниз; *A* и *B* — точки их приложения (рис. 3.13, *a*). Складывая указанные силы, получим их равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B. \quad (3.13)$$

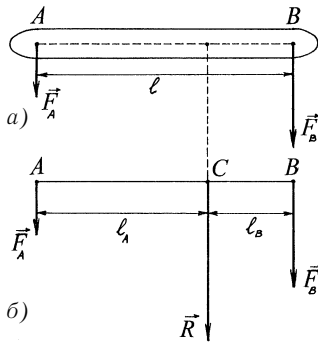


Рис. 3.13

Так как силы \vec{F}_A и \vec{F}_B одинаково направлены, то

$$R = F_A + F_B. \quad (3.14)$$

Проблема заключается в том, чтобы найти точку приложения силы \vec{R} . Будем исходить из того, что равнодействующая \vec{R} должна создавать относительно любой точки такой же момент, какой создают вместе силы \vec{F}_A и \vec{F}_B . Выберем в качестве упомянутой точки точку приложения силы \vec{R} ; обозначим ее через C . Отно-

сительно точки C сила \vec{R} момента не создает; следовательно, сумма моментов сил \vec{F}_A и \vec{F}_B относительно C должна быть равна нулю (моменты сил \vec{F}_A и \vec{F}_B должны быть взаимно скомпенсированными). Введем обозначения: $AB = l$, $AC = l_A$, $CB = l_B$. Момент силы \vec{F}_A относительно C равен по модулю $\Phi_A = l_A F_A$; он стремится вращать тело против часовой стрелки. Момент силы \vec{F}_B относительно C равен по модулю $\Phi_B = l_B F_B$; он стремится вращать тело по часовой стрелке. Чтобы эти моменты оказались скомпенсированными, необходимо выполнение условия

$$l_A F_A = l_B F_B, \quad (3.15)$$

которое можно переписать в виде:

$$\frac{l_A}{l_B} = \frac{F_B}{F_A}. \quad (3.16)$$

Таким образом, *равнодействующая двух одинаково направленных параллельных сил равна по модулю сумме этих сил, направлена в ту же сторону и приложена в точке, которая делит расстояние между точками приложения сил в отношении, обратном отношению сил* (рис. 3.13, б).

Расстояние точки приложения равнодействующей от точки A (т. е. отрезок l_A) легко найти из (3.15), учтя, что $l_B = l - l_A$:

$$l_A F_A = (l - l_A) F_B; \quad l_A (F_A + F_B) = l F_B; \\ l_A = l \frac{F_B}{F_A + F_B} = \frac{l F_B}{R}. \quad (3.17)$$

3.3.2. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны

Предположим теперь, что на тело действуют параллельные силы \vec{F}_A и \vec{F}_B , имеющие противоположные направления (рис. 3.14, а). Пусть $F_B > F_A$. В этом случае из (3.13) получаем для модуля равнодействующей \vec{R} соотношение:

$$R = F_B - F_A. \quad (3.18)$$

Равнодействующая сил направлена в сторону большей силы (в данном случае в сторону силы \vec{F}_B , т. е. вертикально вверх).

Искомая точка приложения равнодействующей (точка C) есть

точка, по отношению к которой моменты сил \vec{F}_A и \vec{F}_B оказываются взаимно скомпенсированными. Обозначим: $AC = l_A$ и $BC = l_B$, после чего модули указанных моментов могут быть представлены в виде:

$$\Phi_A = l_A F_A \quad \text{и} \quad \Phi_B = l_B F_B.$$

Момент $\vec{\Phi}_A$ стремится вращать тело вокруг C против часовой стрелки, а момент $\vec{\Phi}_B$ — по часовой стрелке. Моменты оказываются взаимно скомпенсированными, если $l_A F_A = l_B F_B$, или, иными словами, если $\frac{l_A}{l_B} = \frac{F_B}{F_A}$. С такими же равенствами мы имели дело

в п. 3.3.1. Но там из них следовало, что точка приложения равнодействующей сил (точка C) должна находиться между точками A и B , а здесь из указанных равенств следует, что точка C должна находиться вне отрезка AB за точкой приложения большей силы (за точкой B). Итак, *равнодействующая двух параллельных сил, имеющих противоположные направления, равна по модулю разности модулей этих сил, направлена в сторону большей силы и приложена в точке, находящейся за большей силой; расстояния от точки приложения равнодействующей до точек приложения сил находятся в отношении, обратном отношению сил* (рис. 3.14, б).

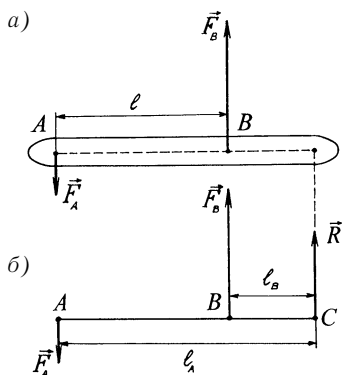


Рис. 3.14

Расстояние от точки приложения равнодействующей до точки приложения силы \vec{F}_A определяем, учитывая, что $l_A F_A = l_B F_B$ и $l_B = l_A - l$:

$$l_A F_A = (l_A - l) F_B; \quad l_A (F_A - F_B) = -l F_B;$$

$$l_A = \frac{l F_B}{F_B - F_A} = \frac{l F_B}{R}. \quad (3.19)$$

Если постепенно уменьшать модуль силы \vec{F}_B , устремляя его к модулю силы \vec{F}_A , то, как легко видеть из (3.18) и (3.19), модуль равнодействующей сил будет уменьшаться, стремясь к нулю, а расстояние l_A будет неограниченно возрастать. Таким образом, при $F_B \rightarrow F_A$ вектор \vec{R} будет, постепенно уменьшаясь, отодвигаться в бесконечность. При $F_B = F_A$ равнодействующая сил оказывается равной нулю. В этом случае совокупность сил \vec{F}_A и \vec{F}_B превращается в *пару сил* и принципиально не может быть заменена одной силой.

3.3.3. Обобщение на случай многих параллельных сил

Рассмотрим случай нахождения равнодействующей параллельных сил, когда этих сил не две, а больше. Поскольку точку приложения силы можно переносить в твердом теле вдоль ее линии действия, то выстроим точки приложения всех параллельных сил по некоторой прямой, перпендикулярной к направлению сил. Эту прямую будем рассматривать как координатную x -ось.



Как найти x -координату точки приложения равнодействующей силы?

Примечание

Можно было бы выполнить этот поиск следующим образом. Сначала найти точку приложения равнодействующей \vec{R}' двух сил, например, сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 ; затем найти равнодействующую \vec{R}'' сил \vec{R}' и \vec{F}_3 ; затем найти равнодействующую сил \vec{R}'' и \vec{F}_4 и т. д. В конечном счете мы учтем все силы, приложенные к телу, и получим в результате попарных сложений искомую равнодействующую всех сил \vec{R} . Понятно, что такой способ отыскания x -координаты точки приложения равнодействующей \vec{R} довольно хлопотен, когда количество параллельных сил относительно велико. Существует, однако, достаточно простой способ решения данной проблемы, позволяющий обойтись без попарных сложений сил. Рассмотрим этот способ.

На тело действуют N параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$, лежащих в одной плоскости (обозначим ее через S). Расположим точки приложения сил на x -оси — некоторой прямой в плоскости S , перпендикулярной к направлению сил (рис. 3.15). Координаты точек приложения сил обозначены на рисунке через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Все силы направлены параллельно или антипараллельно y -оси. Третья координатная ось (z -ось) направлена перпендикулярно к плоскости S таким образом, чтобы тройка координатных осей образовала *правую систему* координат (о правой системе координат см. в Приложении, п. Б.4, рис. Б.10, а). Если обозначенная через S xy -плоскость является плоскостью рисунка, то z -ось будет направлена за страницу книги, прочь от читателя.

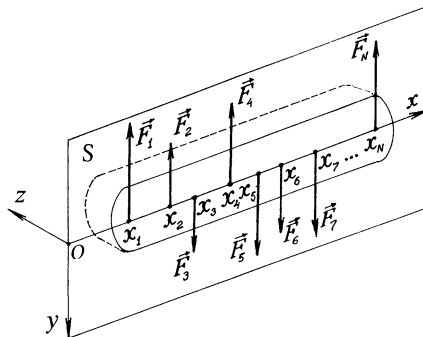


Рис. 3.15

Через F_i обозначаем модуль i -й параллельной силы, а через $\xi_i F_i$ — y -проекцию этой силы. Если y -ось на рисунке будет направлена вниз, то для сил, направленных вниз, следует положить $\xi_i = 1$, а для сил, направленных вверх, $\xi_i = -1$. Проекция равнодействующей силы \vec{R} на y -ось равна

$$R = \sum_{i=1}^N \xi_i F_i. \quad (3.20)$$

Моменты сил будем рассматривать относительно начала координат O . Они направлены параллельно или антипараллельно z -оси (соответственно от читателя или к читателю). Проекция на z -ось результирующего момента всех параллельных сил равна алгебраической сумме, аналогичной сумме в (3.5). Эта z -проекция имеет вид:

$$\Phi_z = \sum_{i=1}^N \xi_i x_i F_i. \quad (3.21)$$

Если сила \vec{F}_i направлена вниз, ее момент стремится вращать тело вокруг точки O по часовой стрелке. Он направлен параллельно z -оси, его z -проекция входит в сумму (3.21) со знаком «плюс» ($\xi_i = 1$). Если сила \vec{F}_i направлена вверх, ее момент стремится вращать тело вокруг точки O против часовой стрелки. Он направлен антипараллельно z -оси, его z -проекция входит в сумму (3.21) со знаком «минус» ($\xi_i = -1$).

Обозначим через x_0 искомую x -координату равнодействующей силы \vec{R} . Мы найдем ее, исходя из того, что z -проекция $x_0 R$ момента равнодействующей относительно O должна быть равна z -проекции результирующего момента $\vec{\Phi}$, выражаемой формулой (3.21):

$$x_0 R = \sum_{i=1}^N \xi_i x_i F_i.$$

С учетом (3.20) перепишем это равенство в виде:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i x_i F_i}{\sum_{i=1}^N \xi_i F_i}. \quad (3.22)$$

Применим результат (3.22) к рассмотренному ранее случаю двух одинаково направленных параллельных сил. В этом случае: $N = 2$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $F_1 = F_A$, $F_2 = F_B$. Подставив эти значения в (3.22), получим $x_0 = \frac{lF_B}{F_A + F_B}$, т. е. придем к уже известному соотношению (3.17).

В случае двух параллельных сил, направленных противоположно, имеем: $N = 2$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $F_1 = F_A$, $F_2 = F_B$. Используя (3.22), получаем $x_0 = \frac{-lF_B}{F_A - F_B} = \frac{lF_B}{F_B - F_A}$, т. е. приходим к соотношению (3.19).

Поясним, почему, говоря о *сложении* параллельных сил, мы ограничились силами, находящимися в одной плоскости (координатной xy -плоскости). Под «сложением параллельных сил» мы подразумевали *замену* совокупности этих сил *одной силой*, проекция которой на y -ось равна алгебраической сумме y -проекций параллельных сил. Речь шла о том, чтобы найти точку приложения указанной равнодействующей силы. Это удастся сделать только при условии, что силы находятся в одной плоскости. Причем удастся найти (обратим внимание на это обстоятельство!) лишь x -координату равнодействующей, тогда

как y -координата остается неопределенной, поскольку в твердом теле силу можно свободно переносить вдоль ее линии действия.

Если же параллельные силы не находятся в одной плоскости, то их совокупность *невозможно заменить одной силой* (равнодействующей силой), так как возникают моменты пар сил. Рассмотрим следующий простой пример. Пусть на тело действуют три параллельные силы $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ (рис. 3.16, а).

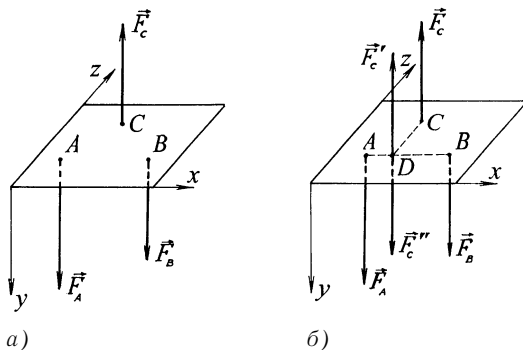


Рис. 3.16

Попробуем «сложить» их. В точке D , находящейся на отрезке AB , приложим к телу взаимно уравновешивающиеся силы \vec{F}'_C и \vec{F}''_C , из которых одна (сила \vec{F}'_C) равна по модулю и направлению силе \vec{F}_C (рис. 3.16, б). Совокупность пяти сил на рисунке 3.16, б оказывает на тело такое же действие, как и совокупность трех сил на рисунке 3.16, а, так что «сложить» исходные три силы — это всё равно, что «сложить» силы $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C, \vec{F}'_C, \vec{F}''_C$. При сложении сил $\vec{F}_A, \vec{F}'_C, \vec{F}_B$ возникает *равнодействующая*, направленная по y -оси, а пара сил \vec{F}_C и \vec{F}''_C создает *момент*, направленный по x -оси.

3.4. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.4.1. Центр тяжести системы материальных точек, расположенных на прямой линии

В п. 2.3.1 отмечалось, что положение центра тяжести однородных тел простой формы (например, шара, куба, цилиндра, квадратной или круглой пластин и т. д.) совпадает с геометрическими

центрами тел. Если тело составлено из таких простых тел, то его можно уподобить системе жестко связанных друг с другом материальных точек, массы которых равны массам соответствующих простых тел.

Найдем центр тяжести системы материальных точек, расположенных на прямой линии. Сориентируем систему точек так, чтобы определяющая ее прямая линия была горизонтальной, и будем рассматривать ее в качестве координатной x -оси (рис. 3.17).

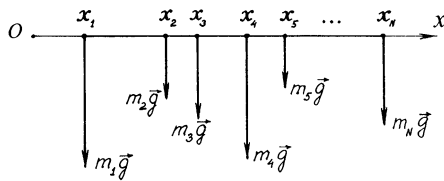


Рис. 3.17

Система состоит из N материальных точек массами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$. Координаты этих точек равны, соответственно, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Обозначим через x_C координату центра тяжести системы. Понятно, что x_C есть не что иное, как координата x_0 точки приложения параллельных сил тяжести $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, m_3\vec{g}, \dots, m_N\vec{g}$, изображенных на рисунке. Следовательно, координата x_C определяется соотношением (3.22), в котором следует положить $F_i = m_i g$ и для всех i принять $\xi_i = 1$:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^N x_i m_i g}{\sum_{i=1}^N m_i g}. \quad (3.23)$$

Сократив g в (3.23), получаем

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^N x_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (3.24)$$

Задача 1. Тело вращения составлено из четырех цилиндров на общей оси (рис. 3.18, а). Радиусы оснований цилиндров: r_1, r_2, r_3, r_4 , а высоты равны h . Все цилиндры изготовлены из одного и того же металла. Требуется найти положение центра тяжести тела.

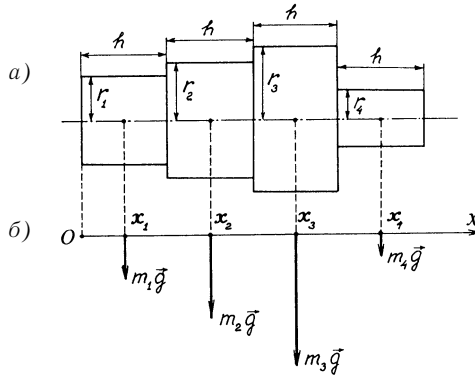


Рис. 3.18

□ На тело действуют силы тяжести $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, m_3\vec{g}, m_4\vec{g}$. Они образуют систему параллельных сил, изображенную на рисунке 3.18, б, где x -ось есть ось вращения тела (на этой оси находятся центры тяжести цилиндров). Через m_i обозначена масса i -го цилиндра; $m_i = \pi r_i^2 h \rho$, где ρ — плотность металла, из которого изготовлены цилиндры. Координату x_C центра тяжести тела найдем, используя соотношение (3.24):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^4 r_i^2 x_i}{\sum_{i=1}^4 r_i^2}. \quad (1^*)$$

Из рисунка 3.18, б видно, что $x_1 = \frac{h}{2}, x_2 = \frac{3h}{2}, x_3 = \frac{5h}{2}, x_4 = \frac{7h}{2}$.

Учитывая это, перепишем (1*) в виде:

$$x_C = \frac{h(r_1^2 + 3r_2^2 + 5r_3^2 + 7r_4^2)}{2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)}. \quad \blacksquare$$

Задача 2. Дана пластина в виде круга радиусом r , внутри которого вырезаны два круглых отверстия радиусами $\frac{r}{4}$ и $\frac{r}{2}$ (рис. 3.19, а). Требуется найти центр тяжести пластины.

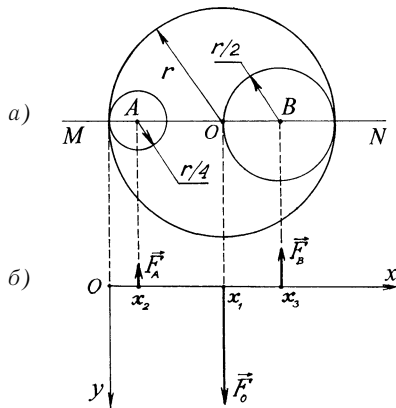


Рис. 3.19

□ Пластина симметрична относительно прямой MN ; значит, искомый центр тяжести находится на этой прямой. Если бы не было отверстий, то он оказался бы в центре пластины. Пластину с вырезанными в ней отверстиями представим как сплошную пластину, на которую наряду с ее силой тяжести \vec{F}_O , приложенной в точке O , дополнительно действуют две направленные вверх силы, приложенные в точках A и B и равные по модулю силам тяжести соответствующих вырезанных кругов. Обозначим эти дополнительные силы через \vec{F}_A (для круга радиусом $r/4$) и \vec{F}_B (для круга радиусом $r/2$). В результате получаем схему с тремя параллельными силами, показанную на рисунке 3.19, б, где x -ось есть прямая MN . Координата x_C центра тяжести тела (пластины с вырезанными отверстиями) есть координата точки приложения равнодействующей указанных трех параллельных сил. Воспользовавшись соотношением (3.22), запишем

$$x_C = \frac{x_1 F_O - x_2 F_A - x_3 F_B}{F_O - F_A - F_B}. \quad (2^*)$$

Модули сил равны:

$$F_O = \pi r^2 d \rho g, \quad F_A = \frac{1}{16} \pi r^2 d \rho g, \quad F_B = \frac{1}{4} \pi r^2 d \rho g, \quad (3^*)$$

где d — толщина пластины, ρ — плотность вещества пластины.

Координаты x_i равны:

$$x_1 = r, x_2 = \frac{r}{4}, x_3 = \frac{3r}{2}. \quad (4^*)$$

Подставляя (3*) и (4*) в (2*), находим $x_C = \frac{39r}{44}$. ■

3.4.2. Центр тяжести двумерной системы материальных точек

Найдем координаты x_C и y_C центра тяжести пластины, форма которой дана на рисунке 3.20, а. Эту пластину можно мысленно разбить на два квадрата с центрами тяжести A (масса m_A , координаты x_A и y_A) и D (масса m_D , координаты x_D и y_D) и прямоугольник с центром тяжести B (масса m_B , координаты x_B и y_B). Фактически нам предстоит найти центр тяжести двумерной системы трех материальных точек (точек A , D , B), координаты и массы которых известны.

Мысленно поставим пластину вертикально к горизонтальной плоскости так, чтобы связанная с ней x -ось была ориентирована горизонтально. Схема сил, действующих на пластину в этом случае, дана на рисунке 3.20, б. Исходя из этой схемы и воспользовавшись соотношением (3.24), представим координату x_C центра тяжести пластины в виде:

$$x_C = \frac{x_A m_A + x_B m_B + x_D m_D}{m_A + m_B + m_D}. \quad (1^*)$$

Мысленно повернем на 90° вокруг O пластину вместе с осями координат так, чтобы теперь y -ось оказалась ориентированной горизонтально (рис. 3.21, а). Схема сил, действующих на пластину в этом случае, показана на рисунке 3.21, б. Исходя из данной схемы, представим координату y_C центра тяжести пластины в виде соотношения, аналогичного соотношению (1*):

$$y_C = \frac{y_A m_A + y_B m_B + y_D m_D}{m_A + m_B + m_D}. \quad (2^*)$$

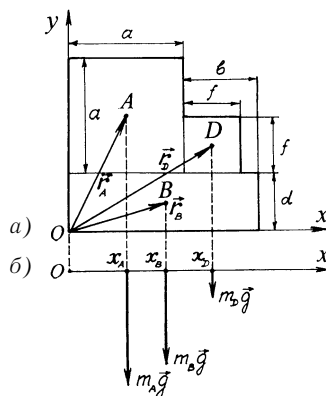


Рис. 3.20

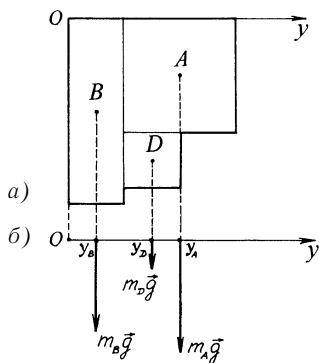


Рис. 3.21

лучим y_C . (Читатель может, при желании, сделать эти подстановки самостоятельно.)

Предположим, что тело представляет собой систему из N жестко связанных друг с другом материальных точек, расположенных в одной плоскости, которую будем рассматривать в качестве координатной xy -плоскости. Предположим также, что известны массы m_i и координаты x_i и y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) материальных точек. Координаты x_C и y_C центра тяжести такого тела можно найти с помощью следующих соотношений, являющихся обобщениями соотношений (1*) и (2*):

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^N x_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^N y_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (3.25)$$

Задача. Тело представляет собой четыре шара с одинаковыми массами, соединенные жесткими невесомыми стержнями, которые образуют трапецию (рис. 3.22). Высота трапеции c ,

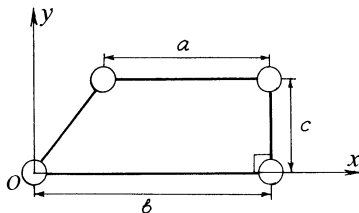


Рис. 3.22

Легко сообразить, что

$$m_A = a^2 d \rho,$$

$$m_B = (a + b) c d \rho, \quad m_D = f^2 d \rho, \quad (3^*)$$

где d — толщина пластины, ρ — плотность вещества пластины.

Из рисунков 3.20 и 3.21 видно, что

$$x_A = \frac{a}{2}, \quad x_B = \frac{a+b}{2}, \quad x_D = a + \frac{f}{2}; \quad (4^*)$$

$$y_A = d + \frac{a}{2}, \quad y_B = \frac{d}{2}, \quad y_D = \frac{d+f}{2}. \quad (5^*)$$

Подставив (3*) и (4*) в (1*), получим x_C . Подставив (3*) и (5*) в (2*),

длины оснований a и b . Требуется найти центр тяжести такого тела.

□ Будем использовать систему координатных осей, изображенную на рисунке, и обозначим через x_C и y_C искомые координаты центра тяжести тела. Соотношения (3.25) принимают в данном случае следующий вид:

$$x_C = \frac{0 + (a-b)m + 2am}{4m}, \quad y_C = \frac{0 + 2cm}{4m}.$$

Таким образом, $x_C = \frac{1}{4}(3a - b)$, $y_C = \frac{c}{2}$. ■

3.4.3. Центр тяжести тела в общем случае

На рисунке 3.20, a изображены радиусы-векторы точек A, B, D : $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_D$. Обозначим через \vec{r}_C радиус-вектор центра тяжести тела. Используя в п. 3.4.2 скалярные соотношения для координат центра тяжести пластины заменим теперь векторным соотношением:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A m_A + \vec{r}_B m_B + \vec{r}_D m_D}{m_A + m_B + m_D},$$

которое легко обобщается на систему из N материальных точек:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (3.26)$$

Обратим внимание на то, что соотношение (3.26) можно использовать, не выдвигая условия, чтобы все материальные точки располагались в координатной xy -плоскости. Если точки находятся в этой плоскости, то радиусы-векторы в (3.26) будут иметь только x -проекции и y -проекции. Если же точки не сосредоточены в пределах xy -плоскости, то радиусы-векторы будут иметь также z -проекции; в этом случае векторное равенство (3.26) будет адекватно не двум, а трем скалярным равенствам — к соотношениям (3.25) добавится соотношение:

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^N z_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (3.27)$$

Перейдем к рассмотрению сплошного твердого тела массой m . Мысленно разобьем его на элементарные массы (будем называть их «частицами»), каждую из которых можно представлять материальной точкой. Теперь суммы по N материальным точкам в (3.26) можно заменить на суммы по всем частицам тела, и выражение для радиуса-вектора центра тяжести можно представить в виде:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i \vec{r}_i m_i, \quad (3.28)$$

где \vec{r}_i и m_i — радиус-вектор и масса i -й частицы.

Сравнивая (3.28) с (2.73), приходим к заключению, что *центр тяжести тела и его центр масс (центр инерции) — это одно и то же*. Такое заключение верно, однако, не всегда.

3.4.4. Центр тяжести и центр масс тела



Как было замечено в п. 2.6.6, центр тяжести системы совпадает с ее центром масс (центром инерции) *при условии, что размеры системы много меньше размеров земного шара*. Поясним, почему необходимо выполнение такого условия. Для этого обратимся к соотношениям (3.23) и (3.24). Соотношение (3.23) определяет x -координату центра тяжести системы (именно центра тяжести!). Соотношение же (3.24) определяет x -координату центра масс; оно получается из (2.73), если спроецировать последнее равенство на x -ось.

Чтобы перейти от (3.23) к (3.24), нам потребовалось совсем немного: вынести за скобки и сократить модуль g ускорения свободного падения в (3.23). При выполнении этой операции подразумевалось, что для всех частей тела (системы) ускорение свободного падения \vec{g} *одно и то же*. Это действительно так, если размеры тела много меньше радиуса Земли (что и наблюдается практически во всех случаях, которые мы рассматривали и будем рассматривать). Во всех этих случаях центр тяжести тела совпадает с его центром масс.

Если же размеры системы тел сопоставимы с радиусом Земли, то тогда ускорения свободного падения для разных частей системы могут различаться как по модулю, так и по направлению. В такой ситуации для центра масс системы будет по-прежнему работать соотношение (3.24), тогда как для центра тяжести пришлось бы пользоваться соотношением

$$x_c = \frac{\sum_i x_i m_i g_i}{\sum_i m_i g_i}.$$

3.5. ПРОСТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

? Поставим вопрос: можно ли преобразовать относительно небольшую силу (например, силу человеческих рук) в достаточно большую силу, способную поднять значительный груз? Положительный ответ на этот вопрос был получен уже во времена первых цивилизаций. Начиная с глубокой древности, люди создавали всё более совершенные *механизмы*, являющиеся, по сути дела, приспособлениями, предназначенными для *преобразования силы*.

Рассмотрим *простые механизмы* (простые «преобразователи силы»). Среди них отметим рычаги, блоки, ворот, наклонную плоскость, винт. Как правило, они используются для того, чтобы можно было, *используя малую силу, уравновесить большую и тем самым получить выигрыш в силе*.

3.5.1. Рычаги

На рисунке 3.23, *a* представлен *рычаг первого рода*. На него действуют три силы: \vec{R} , \vec{f} , \vec{F} . Сила \vec{R} — сила реакции опоры; с такой силой опора действует на рычаг в точке O , называемой *точкой опоры рычага*. Сила \vec{f} приложена к рычагу в точке A . Она создает момент $\vec{\Phi}$, стремящийся вращать рычаг вокруг O против часовой стрелки; $\Phi = Lf$, где L — плечо момента силы \vec{f} . Сила \vec{F} приложена к рычагу в точке B . Она создает момент $\vec{\Phi}'$, стремящийся вращать рычаг вокруг O по часовой стрелке; $\Phi' = lF$, где l — плечо момента силы \vec{F} . Условие равновесия (3.12) в применении к рассматриваемому рычагу имеет вид:

$$-Lf + lF = 0. \quad (3.29)$$

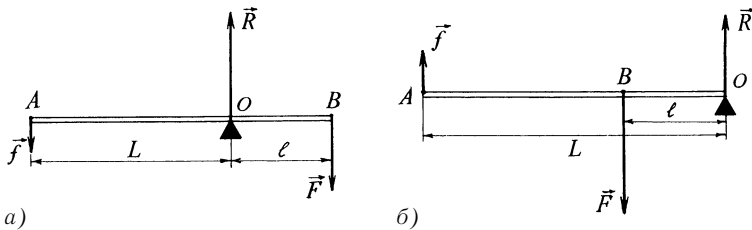


Рис. 3.23

Отсюда следует так называемое *правило рычага*, выражаемое пропорцией:

$$\frac{f}{F} = \frac{l}{L}. \quad (3.30)$$

На рисунке 3.23, б представлен *рычаг второго рода*. В отличие от рычага первого рода, точки приложения сил \vec{f} и \vec{F} (точки A и B) находятся здесь не по разные стороны от точки опоры O , а по одну сторону, причем ближе к O будет точка приложения той из сил \vec{f} и \vec{F} , которая больше (в данном случае $F > f$). Приложенная в точке A сила \vec{f} создает момент $\vec{\Phi}$, стремящийся вращать рычаг вокруг O по часовой стрелке, а сила \vec{F} , приложенная в B , создает момент $\vec{\Phi}'$, стремящийся вращать рычаг вокруг O против часовой стрелки; $\Phi = Lf$ и $\Phi' = lF$. Условие равновесия (3.12) имеет в данном случае вид:

$$Lf - lF = 0. \quad (3.31)$$

Отсюда немедленно получаем правило рычага (3.30).



В чем же состоит «выигрыш в силе» при использовании рычага? Какая сила здесь «преобразуется»? В какую силу она «преобразуется»?

Предположим, используется рычаг второго рода для того, чтобы приподнять с земли тяжелый груз (рис. 3.24). Рассмотрим два тела: рычаг и груз массой M . На груз действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} со стороны рычага; согласно третьему закону Ньютона $\vec{N} + M\vec{g} = 0$ и, значит, $N = Mg$. На рычаг действуют: сила реакции опоры \vec{R} , сила \vec{f} (эту силу мы прикладываем к концу рычага, стремясь приподнять груз) и вес груза \vec{P} ; силой тяжести рычага пренебрежем.

Вес \vec{P} играет роль силы \vec{F} , показанной на рисунке 3.23, а. В соответствии с третьим законом Ньютона, $\vec{P} = -\vec{N}$ и, следовательно, $P = N$.

Сравнительно небольшая сила \vec{f} , прилагаемая нами к рычагу, «преобразуется» в большую силу \vec{N} , с которой *рычаг действует на груз*; она равна по модулю весу груза. Приподнимая

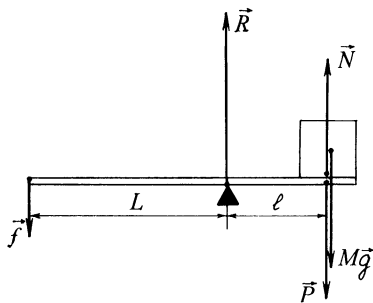


Рис. 3.24

груз без помощи рычага, нужно приложить к нему силу, равную по модулю P . Однако можно добиться того же, прикладывая к рычагу силу \vec{f} , которая по модулю во столько же раз меньше силы \vec{P} , во сколько плечо L больше плеча l . *Выигрыш в силе* измеряется отношением $\frac{P}{f}$, или иначе говоря, отношением $\frac{L}{l}$.

Примеры использования рычагов весьма многочисленны. Рычагами первого рода являются, например, ножницы, весло гребца, стрела подъемного крана, железнодорожный шлагбаум, коромысло аптекарских весов. Рычагами второго рода являются, например, обычная тачка, педаль автомобиля, клавиши пианино или печатающего устройства, локтевая кость.

3.5.2. Блоки

Понятно, что рычаг может помочь приподнять тяжелый груз. Однако практически невозможно использовать рычаг для подъема груза, скажем, на уровень второго этажа. В подобных случаях можно воспользоваться *блоками*.

Рассмотрим систему из двух блоков — *неподвижного* (положение его оси зафиксировано на некоторой высоте) и *подвижного* (рис. 3.25, а). Будем полагать, что система находится в равновесии. На рисунке показаны: неподвижный блок (блок 1), подвижный блок (блок 2), три участка троса (обозначены через 0, 1, 2) и груз массой M , подвешенный к подвижному блоку. К тросу в точке A приложена сила \vec{T}_0 ; с этой силой рабочий тянет трос вниз и обеспечивает равновесие всей системы. Массой блоков и троса будем пренебрегать.

На рисунке 3.25, б показаны все силы, действующие на блоки и участки троса, а также сила \vec{S} , с которой участок 2 троса действует на верхнюю балку. Все T -силы действуют на участки троса, стремясь растянуть их; это *силы натяжения*. На участок 0 действуют силы \vec{T}_0 и \vec{T}'_0 , на участок 1 — силы \vec{T}_1 и \vec{T}'_1 , на участок 2 — силы \vec{T}_2 и \vec{T}'_2 . Все F -силы приложены к блокам; они стремятся вращать блоки вокруг осей. Силы \vec{F}_0 и \vec{F}'_1 приложены к блоку 1, а силы \vec{F}_1 и \vec{F}'_2 — к блоку 2. Кроме F -сил, на блок 1 действует сила реакции оси \vec{N} , а на блок 2 — сила тяжести груза $M\vec{g}$.

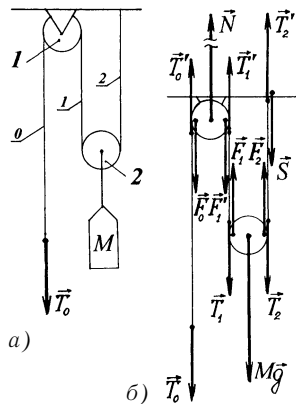


Рис. 3.25

Пренебрегая массой троса, можем считать, что силы, приложенные к концам того или иного участка троса, равны по модулю. Возьмем, например, участок θ . Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{T}_0 + \vec{T}_0' = m\vec{a}, \quad (3.32)$$

где m — масса участка, \vec{a} — его ускорение. Но массой троса мы пренебрегаем. Этого достаточно, чтобы считать, что $\vec{T}_0 + \vec{T}_0' = 0$ и, значит, $T_0 = T_0'$. К тому же система находится в равновесии, так что в ней отсутствуют ускорения. Таким образом,

$$T_0 = T_0'; T_1 = T_1'; T_2 = T_2'. \quad (1^*)$$

В состоянии равновесия блоки не вращаются, поэтому

$$F_0 = F_1'; F_1 = F_2. \quad (2^*)$$

Впрочем, равенства (2*) следуют уже из того факта, что массой блоков пренебрегли (мы обсудим это позднее, см. п. 4.2.4). Согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{T}_0' = -\vec{F}_0; \vec{F}_1' = -\vec{T}_1'; \vec{T}_1 = -\vec{F}_1; \vec{F}_2 = -\vec{T}_2; \vec{T}_2' = -\vec{S}.$$

Следовательно,

$$T_0' = F_0; F_1' = T_1'; T_1 = F_1; F_2 = T_2; T_2' = S. \quad (3^*)$$

Учитывая равенства (1*)—(3*), заключаем, что

$$T_0 = T_0' = F_0 = F_1' = F_1 = T_1 = F_2 = T_2 = T_2' = S. \quad (4^*)$$

Мы убедились, что модули всех T -сил и всех F -сил, а также модуль силы \vec{S} равны по модулю силе \vec{T}_0 , с какой рабочий тянет за трос в точке A .

Из равновесия блока 1 следует, что $\vec{F}_0 + \vec{F}_1' + \vec{N} = 0$, а из равновесия блока 2 получаем:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + M\vec{g} = 0. \quad (5^*)$$

Спроецировав равенство (5*) на направление вектора \vec{g} , находим:

$$Mg - F_1 - F_2 = 0. \quad (6^*)$$

С учетом (4*) перепишем это соотношение в виде:

$$Mg - 2T_0 = 0, \text{ или } T_0 = \frac{1}{2}Mg. \quad (7^*)$$

Как видим, при использовании системы, состоящей из неподвижного и подвижного блоков, силу $M\vec{g}$ можно уравновесить вдвое меньшей силой \vec{T}_0 . Тем самым можно получить выигрыш в силе, равный $\frac{Mg}{T_0} = 2$.

Требуется, однако, не просто уравновесить груз, а *поднять его вверх*, например, на уровень второго этажа здания, где находится ось неподвижного блока. Для этого рабочий начинает выбирать трос, в результате чего блок 2 будет вместе с грузом подниматься. Обратим внимание: если подъем груза *происходит равномерно*, то равенство (7*) в процессе подъема не нарушается.

Это легко показать, если учесть, что равенства (1*) и (2*) выполняются уже из-за приравнивания нулю масс троса и блоков, а равенства (3*) вытекают из третьего закона Ньютона. Таким образом, равенства (4*) вообще не предполагают равновесия системы. Равновесием мы воспользовались, чтобы получить (5*). Но это соотношение работает не только при равновесии, а и при равномерном подъеме груза. Вот если бы блок 2 поднимали с ускорением \vec{a} , то в соответствии со вторым законом Ньютона следовало бы вместо (5*) рассматривать соотношение $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + M\vec{g} = M\vec{a}$.



При подъеме груза можно получить выигрыш в силе более, чем в 2 раза, если воспользоваться *полиспастом*. Он состоит из двух групп блоков, каждая из которых имеет общую ось. Одна группа составляет неподвижную часть полиспаста (положение оси этой группы фиксировано), а другая группа — подвижную часть полиспаста. Блоки в каждой группе могут вращаться независимо один от другого. Трос пропускают поочередно через блоки неподвижной и подвижной частей полиспаста и закрепляют одним концом на обойме неподвижной части или на потолке. На рисунке 3.26 показан полиспаст, состоящий из шести блоков — трех в неподвижной части и трех в подвижной.

К полиспасту применимы все рассуждения, приведенные выше для системы из двух блоков. Рабочий тянет трос, прикладывая к нему силу \vec{T}_0 . К подвижной части полиспаста подвешен груз массой M . Кроме силы тяжести $M\vec{g}$, на эту часть полиспаста действуют F -силы, количество которых равно числу участков троса, протянувшихся вверх от подвижной части полиспаста, т. е. полному числу блоков в полиспасте. Если полиспаст содержит $2N$ блоков (N в неподвижной части и N в подвижной), то условие равновесия для подвижной части будет иметь вид:

$$M\vec{g} + \sum_{i=1}^{2N} \vec{F}_i = 0. \quad (8^*)$$

Спроецировав (8*) на направление вектора \vec{g} , получим

$$Mg - \sum_{i=1}^{2N} F_i = 0. \quad (9^*)$$

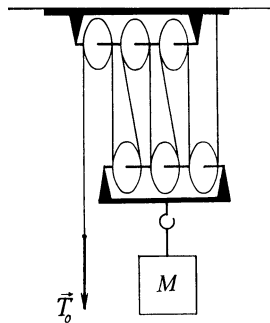


Рис. 3.26

Так как $F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_{2N} = T_0$, то из (9*) следует, что

$$Mg - 2NT_0 = 0, \text{ или } T_0 = \frac{Mg}{2N}. \quad (10^*)$$

Из (10*) видно, что поднимая груз с помощью полиспаста, состоящего из $2N$ блоков, получаем выигрыш в силе в $2N$ раз.

Системы блоков применяют не только для подъема грузов, но и для *увеличения силы натяжения* троса (например, силы натяжения контактного провода на электрифицированном участке железнодорожного пути). Пример такой системы иллюстрирует рисунок 3.27. На блок 1 действуют силы: $\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{N}_1$; на блок 2 действуют силы: $\vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{N}_2$. Понятно, что $F_1 = Mg$, где M — масса оттягивающего груза. Равновесие блоков позволяет заключить: $\vec{F}_1 + \vec{F}_1' + \vec{N}_1 = 0$ и $\vec{F}_2 + \vec{F}_2' + \vec{N}_2 = 0$. Спроецировав эти векторные равенства на x -ось, получим:

$$\left. \begin{aligned} N_1 - F_1 - F_1' &= 0; \\ N_2 - F_2 - F_2' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Блоки не вращаются; следовательно, $F_1 = F_1'$ и $F_2 = F_2'$. Так как $F_2 = N_1$ и $F_1 = Mg$, то можем переписать систему уравнений (11*) в виде:

$$\left. \begin{aligned} N_1 - 2Mg &= 0; \\ N_2 - 2N_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем, что модуль N_2 силы, с которой контактный провод действует на блок 2, равен $N_2 = 4Mg$. С такой же по модулю силой блок 2 действует на провод. Сила натяжения контактного провода оказывается в данном случае в 4 раза больше силы тяжести оттягивающего груза.

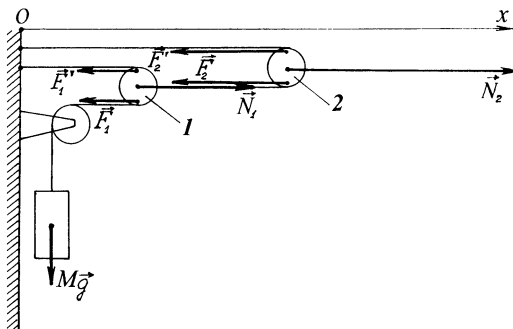


Рис. 3.27

3.5.3. Ворота

Простой механизм, называемый *воротом*, показан схематически на рисунке 3.28. К блоку радиусом r прикреплен стержень длиной L , который можно вращать вместе с блоком вокруг оси блока, прикладывая в точке A силу \vec{F} . Сила \vec{F} — это сила, с которой на ворот действует человек. Точка A описывает окружность (см. пунктир на рисунке); при этом сила \vec{F} сохраняет все время направление по касательной к окружности и остается постоянной по модулю. По мере вращения ворота на блок наматывается трос, на конце которого висит груз массой M . В результате груз поднимается. В роли груза может выступать, например, ведро с водой, которое с помощью ворота поднимают из колодца.

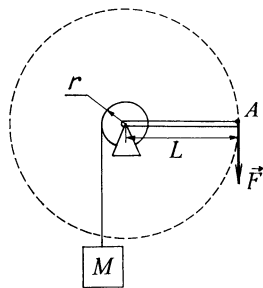


Рис. 3.28

Условие равновесия (3.12) имеет в применении к вороту, представленному на рисунке, следующий вид: $-Mgr + LF = 0$. Таким образом, $F = \frac{Mgr}{L}$. Этот результат справедлив как для покоящегося ворота, так и для ворота, вращающегося равномерно. Прикладывая к вороту в точке A силу \vec{F} , можно поднять из колодца или шахты груз, сила тяжести которого в $\frac{L}{r}$ раз больше силы \vec{F} .

3.5.4. Наклонная плоскость

Наклонную плоскость можно рассматривать как простой механизм, позволяющий преобразовать одну силу в другую, имеющую больший модуль.

Представим, что лежащий на земле ящик массой M нужно переместить на железнодорожную платформу, пол которой находится на высоте h над землей. Воспользуемся наклонной плоскостью с углом наклона α , предполагая, что трением ящика о нее можно пренебречь. Будем тянуть ящик вдоль наклонной плоскости с силой \vec{F} (рис. 3.29). Кроме силы \vec{F} , на ящик действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции оп-

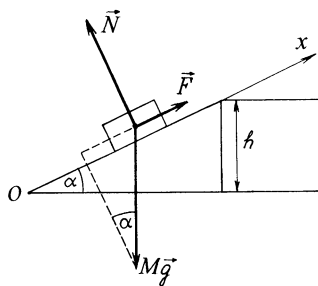


Рис. 3.29

ры \vec{N} . Ящик движется поступательно, поэтому можно полагать, что все эти силы приложены в одной точке (в центре масс). Движение равномерное, поэтому

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = 0. \quad (3.33)$$

Спроецировав (3.33) на направление x -оси, получаем: $-Mg \sin \alpha + F = 0$. Таким образом,

$$F = Mg \sin \alpha. \quad (3.34)$$

Из (3.34) видно, что можно втащить ящик на платформу, прикладывая силу \vec{F} , которая в $\frac{1}{\sin \alpha}$ раз меньше силы тяжести ящика.

Выигрыш в силе (обозначим его через k) составляет, таким образом,

$$k = \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (3.35)$$

Если $\alpha = 30^\circ$, то $k = 2$. Если $\alpha = 15^\circ$, то $k \approx 3,9$. Если $\alpha = 10^\circ$, то $k \approx 5,8$. Чем меньше угол α , тем больше выигрыш в силе. При $\alpha \rightarrow 0$ он будет неограниченно возрастать, коль скоро отсутствует трение (разумеется, при этом будет неограниченно возрастать длина наклонной плоскости).

Если трением нельзя пренебречь, то вместо (3.33) следует использовать соотношение, учитывающее силу трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$:

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} = 0. \quad (3.36)$$

Спроецировав (3.36) на x -ось и y -ось, получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F &= 0; \\ -Mg \cos \alpha + N &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему и учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$ (μ — коэффициент трения скольжения), находим

$$F = Mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha). \quad (3.37)$$

Таким образом, выигрыш в силе при учете трения скольжения составляет

$$k = \frac{1}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}. \quad (3.38)$$

Подставив сюда $\mu = 0,4$ (коэффициент трения скольжения дерева по дереву варьируется в пределах от 0,3 до 0,5), получим $k \approx 1,2$ для $\alpha = 30^\circ$, $k \approx 1,5$ для $\alpha = 15^\circ$, $k \approx 1,8$ для $\alpha = 10^\circ$.

Трение существенно снижает выигрыш в силе. При уменьшении α он не будет неограниченно расти, а будет стремиться к $\frac{1}{\mu}$.

Предположим теперь, что наклонную плоскость используют, чтобы *вкатить* на платформу цилиндрическую бочку массой M и радиусом r . Это можно сделать, подталкивая руками положенную набок бочку. Но мы воспользуемся тросом. Закрепим один конец троса на вершине наклонной плоскости (на краю платформы) в точке B , обернем бочку тросом, возьмем другой конец троса в точке A в руку и будем тянуть трос на себя с силой \vec{T}_1 (рис. 3.30). На участ-

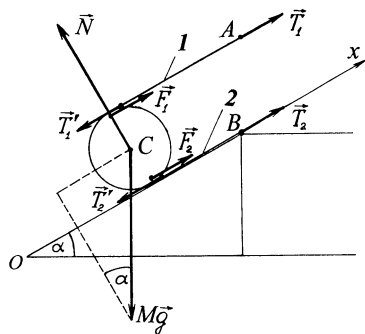


Рис. 3.30

ток 1 троса действует, кроме силы \vec{T}_1 , также сила \vec{T}'_1 , а на участок 2 действуют силы натяжения \vec{T}_2 и \vec{T}'_2 . На бочку действуют четыре силы: $M\vec{g}$, \vec{N} , \vec{F}_1 , \vec{F}_2 . Условия равновесия бочки можно представить в виде:

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0; \quad (1^*)$$

$$rF_1 - rF_2 = 0. \quad (2^*)$$

Заметим, что условие (2*) есть правило моментов, рассматриваемых относительно C .

Спроецируем (1*) на x -ось; получим

$$-Mg \sin \alpha + F_1 + F_2 = 0. \quad (3^*)$$

Учитывая, что, согласно (2*), $F_1 = F_2$, и принимая во внимание, что $T_1 = T'_1$ и что, в соответствии с третьим законом Ньютона, $T'_1 = F_1$, перепишем соотношение (3*) в виде

$$-Mg \sin \alpha + 2T_1 = 0,$$

откуда находим:

$$T_1 = \frac{1}{2} Mg \sin \alpha. \quad (3.39)$$

Таким образом, выигрыш в силе оказывается равным

$$k = \frac{2}{\sin \alpha}. \quad (3.40)$$

Сравнивая (3.40) с (3.35), приходим к выводу, что при вкатывании бочки на платформу с применением троса выигрыш в силе оказывается в 2 раза больше, чем в случае, когда ту же бочку для предотвращения трения ставят на тележку и поступательно перемещают по наклонной плоскости.

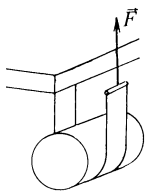


Рис. 3.31

Если бы бочку поднимали на нужную высоту, так как это показано на рисунке 3.31 (на практике так не делают), то мы имели бы дело фактически с вариантом подъема с помощью подвижного блока. Сама бочка заменяла бы подвижный блок. Выигрыш в силе был бы равен $k_1 = 2$. Если бочку поставить на тележку и воспользоваться наклонной плоскостью с углом наклона α , то выигрыш в силе будет равен $k_2 = \frac{1}{\sin \alpha}$ (см. (3.35)).

В случае, показанном на рисунке 3.30, выигрыш в силе равен $k = \frac{2}{\sin \alpha}$. Как мы видим,

$$k = k_1 k_2.$$

Таким образом, простой механизм на рисунке 3.30 можно рассматривать как сочетание двух простых механизмов — наклонной плоскости и блока.

3.5.5. Винт

Наклонная плоскость сбоку выглядит как прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен углу α , характеризующему наклон плоскости. Представим себе мысленно, что боковую поверхность цилиндра радиуса r обвили таким прямоугольным треугольником, один из катетов которого (катет BC , являющийся одной из сторон угла α) равен $2\pi r$ (рис. 3.32). В результате обертывания катет BC превратится в окружность радиуса r , другой катет (катет AB) будет лежать на образующей цилиндрической поверхности в виде отрезка длиной

$$h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha, \quad (1^*)$$

а гипотенуза превратится в *винтовую линию*. Величину h называют *шагом* винтовой линии (шагом винта).

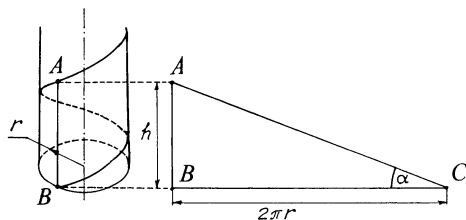


Рис. 3.32

Винт — это цилиндрическое тело, на боковую поверхность которого нанесена *резьба* в виде винтовой линии (винтовая резьба). В качестве простого механизма применяют винт с навинчиваемой на него *гайкой*. При вращении гайка перемещается вдоль оси винта. Сделав один полный оборот, она перемещается вдоль оси на длину, равную шагу h винта. Это похоже на то, как если бы груз массой, равной массе гайки, поднялся или опустился на высоту h , скользя по наклонной плоскости, угол наклона α которой определяется соотношением (1*). Силой трения между винтом и гайкой, как правило, можно пренебречь, поскольку трущиеся поверхности резьбы тщательно шлифуются и густо смазываются. Поэтому при подъеме гайки массой m вдоль оси вертикально ориентированного винта нужно прикладывать к гайке в направлении касательной силу, равную по модулю $F = mg \sin \alpha$ (мы воспользовались здесь результатом (3.34), полученным при рассмотрении наклонной плоскости). Выигрыш в силе будет равен $\frac{1}{\sin \alpha}$.

Рассмотрим хорошо знакомый всем простой механизм, называемый *домкратом*. Здесь одновременно с подъемом вращающейся на винте гайки предстоит приподнять достаточно тяжелое тело (например, автомобиль). Для вращения гайки используют гаечный ключ, играющий роль ворота, действующего в горизонтальной плоскости. Для приподнимания тела массой M потребуется прикладывать к концу гаечного ключа, имеющего длину L , силу, равную по модулю

$$F = (Mg \sin \alpha) \frac{r}{L}, \quad (3.41)$$

где α — угол, определяемый соотношением (1*). Выигрыш в силе при использовании домкрата равен, как это видно из (3.41), произведению выигрыша в силе для наклонной плоскости без трения и выигрыша в силе для ворота. Домкрат можно рассматривать как сочетание двух простых механизмов — наклонной плоскости и ворота.

Обычно угол α в (1*) весьма мал; он составляет 1—3°. Поэтому можно полагать, что $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ и заменить (3.41) соотношением:

$$F = (Mg \operatorname{tg} \alpha) \frac{r}{L} = Mg \frac{h}{2\pi L}. \quad (3.42)$$

Полагая $h = 0,5$ см, $L = 40$ см, получаем отсюда, что $F \approx 0,002 Mg$. Прикладывая к ручке домкрата (концу гаечного ключа) силу, равную силе тяжести тела массой 10 кг, можно приподнять тело массой 5000 кг.

Чтобы лучше просматривалась аналогия между винтом и наклонной плоскостью, мы полагали выше, что винт покоится и на него навинчивается гайка; мы имели в виду, что силу нужно прикладывать именно к гайке. В действительности, однако, обычно гайка фиксирована (неподвижна), а силу прикладывают к винту (точнее говоря, к рукоятке, связанной с винтом) и поворачивают винт. Так, при использовании домкрата происходит подъем не гайки, а винта вместе с опирающейся на него осью автомобиля. Легко сообразить, что результаты (3.41) и (3.42) при этом сохраняются.

В заключение заметим, что винты применяются также в различных приспособлениях для сдавливания (пресс) или крепления (болты и шурупы для дерева). Разумеется, при использовании винта для крепления его резьбу ничем не смазывают, так как в данном случае сила трения важна: она увеличивает скрепляющее действие винта.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

3.1. Может ли меньшая сила создать больший момент?

3.2. На тело действует только пара сил. Что можно сказать о движении центра масс тела в инерциальной системе отсчета?

3.3. Момент $\vec{\Phi}$ некоторой силы относительно некоторой точки A перпендикулярен к плоскости S . Что можно сказать о моменте этой силы относительно проходящей через точку A оси в случаях: а) ось находится в плоскости S ; б) ось перпендикулярна к плоскости S ; в) ось составляет угол α с вертикалью к плоскости S ?

3.4. К тонкой пластине, имеющей форму квадрата со стороной $a = 8$ см, приложены в точке B сила \vec{F}_1 ($F_1 = 3$ Н) и в точке O сила \vec{F}_2 ($F_2 = 6$ Н)

(рис. 3.33). Чему равен модуль результирующего момента относительно: а) точки C , б) точки A , в) точки D ?

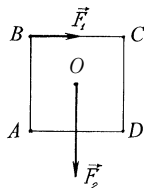


Рис. 3.33

3.5. Условие задачи такое же, как и в задаче 3.4. Чему равен модуль результирующего момента относительно: а) оси CD , б) оси AC , в) оси, проходящей через C и перпендикулярной к пластине, г) оси, проходящей через C и составляющей угол 60° с вертикалью к плоскости пластины?

3.6. Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , изображенные на рисунке 3.33, можно заменить равнодействующей силой $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и парой сил. Чему равен модуль момента пары сил, если равнодействующая $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ будет приложена: а) в точке O , б) в точке B , в) в точке D ?

3.7. Куб массой m с длиной ребер a лежит на горизонтальной плоскости. Основание куба — квадрат $ABCD$. Чему равен модуль момента силы тяжести куба относительно: а) точки A , б) центра квадрата $ABCD$, в) точки, находящейся посередине между A и B ? Сделайте чертеж и покажите на нем направления этих моментов.

3.8. Условие задачи совпадает с условием задачи 3.7. Чему равен модуль момента силы тяжести куба относительно: а) ребра куба AB , б) диагонали основания куба AC , в) оси, проходящей через точку A и перпендикулярной к плоскости основания куба, г) диагонали боковой грани куба?

3.9. Модуль момента относительно некоторой точки оказался в два раза больше модуля момента относительно оси, проходящей через эту точку. Что можно сказать о направлении оси?

3.10. Объясните, почему кукла неваляшка («Ванька-встанька») возвращается всякий раз в положение равновесия, как бы ее ни наклоняли.

3.11. Центр тяжести грузовика находится на высоте h ,

расстояние между колесами по оси равно l . Какому условию должен удовлетворять угол α , под которым плоскость холма наклонена к горизонту, чтобы при движении по такому склону параллельно ему грузовик не опрокинулся набок?

3.12. Два человека переносят на своих плечах трубу. Первый подставил плечо под конец трубы, а второй — под точку, отстоящую от другого конца трубы на четверть ее длины. Во сколько раз сила давления трубы на второго человека больше, чем на первого?

3.13. Решите задачу 1 из п. 3.2.3, дополнив условие задачи указанием, что в точке B на балке стоит человек массой M .

3.14. Тело, положенное на одну чашку неравноплечих весов, уравнивается гирями общей массой m_1 , а то же самое тело, положенное на другую чашку весов, уравнивается гирями общей массой m_2 . Чему равна масса тела?

3.15. К гладкой вертикальной стене прислонена лестница массой m . Угол между лестницей и горизонтальной поверхностью равен α . Чему равен модуль силы реакции стенки, действующей на лестницу?

3.16. Каким должен быть коэффициент трения покоя однородного стержня о пол, чтобы стержень был в равновесии в положении, показанном на ри-

сунке 3.34? Стержень удерживается нитью, длина которой равна длине стержня. Угол между нитью и стержнем прямой. Точки A и C расположены на одной вертикали.

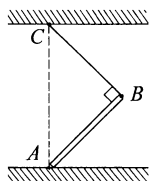


Рис. 3.34

3.17. Горел-инженер, купивший где-то свой диплом, предложил применить для подъема груза систему блоков, показанную на рисунке 3.35. Чем плоха такая система блоков?

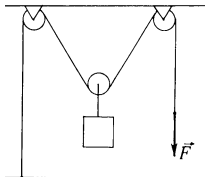


Рис. 3.35

3.18. К гвоздю, вбитому в стену, привязана нить, намотанная на катушку, которая висит, касаясь стены (рис. 3.36). Радиус цилиндрической части катушки $r = 1$ см, радиус ее щечек $R = 8$ см. Нить составляет со стеной угол $\alpha = 30^\circ$. Найдите минимальное значение коэффициента трения между стеной и катушкой. Подсказка. Воспользуйтесь условием равновесия моментов относительно оси катушки и учтите, что

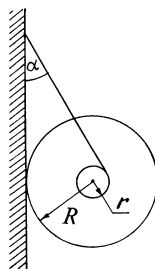


Рис. 3.36

равна нулю сумма проекций сил на направление, перпендикулярное к стене.

3.19. Тело — однородный стержень с нанизанными на него N одинаковыми шарами, центры которых отстоят друг от друга на a . На каком расстоянии от центра крайнего шара находится центр тяжести тела?

3.20. Тело — невесомый стержень с нанизанными на него пятью шарами массами 100 г, 200 г, 300 г, 400 г, 500 г. Расстояние между центрами соседних шаров 15 см. На каком расстоянии от центра наиболее легкого шара находится центр тяжести тела?

3.21. В круглой пластине радиусом $r = 10$ см вырезан квадрат со сторонами $a = 8$ см. Центр квадрата находится на расстоянии $l = 4$ см от центра круга. На каком расстоянии от этого центра находится центр тяжести пластины с вырезанным квадратом?

3.22. Найдите координаты центра тяжести изображенной на рисунке 3.37 круглой пластины, в которой вырезаны два круглых отверстия; $r = 11$ см.

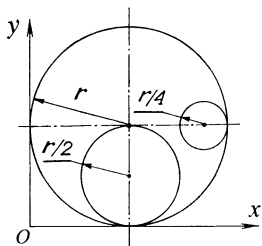


Рис. 3.37

3.23. Форма и размеры пластины даны на рисунке 3.38. Найдите координаты центра тяжести пластины ($a = 5$ см).

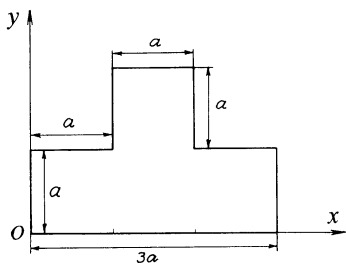


Рис. 3.38

3.24. К люльке с сидящим в ней рабочим привязан конец троса, перекинутого через неподвижный блок, укрепленный в верхней части здания. Рабочий поднимает сам себя за счет того, что тянет за другой

конец троса. Получается ли при этом выигрыш в силе?

3.25. Чему равна сила натяжения контактного провода в системе блоков, изображенной на рисунке 3.39? Масса оттягивающего груза равна $M = 30$ кг.

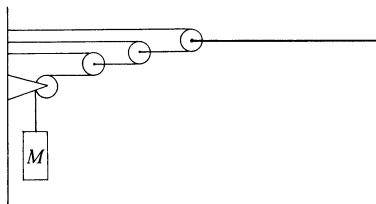


Рис. 3.39

3.26. Брусок, оставленный на наклонной плоскости с углом наклона α , соскальзывает с нее равномерно. Чему равен выигрыш в силе при использовании этой наклонной плоскости для того, чтобы поднять данный брусок на некоторую высоту?

3.27. Почему легче вкатить бочку на платформу способом, показанным на рисунке 3.30, нежели просто катить бочку по наклонной плоскости, толкая ее сзади?

3.28. Подумайте, как измерить массу банана с помощью измерительной линейки, гири массой 100 г и прочной тонкой нити.

4

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА: КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

4.1. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1.1. Общие замечания о движении твердого тела

Движения твердых тел весьма разнообразны и могут иметь довольно сложный характер. Наиболее простыми являются *поступательное* и *вращательное* движения; они были определены в § 1.1. Каким бы сложным ни было движение твердого тела, его можно рассматривать как результат *сложения* двух составляющих движений — поступательного и вращательного. Возможно, правильнее говорить не о сложении указанных простых движений, а об их *наложении* друг на друга.

Рассмотрение кинематики и динамики твердого тела основывается на утверждении, которое может быть сформулировано следующим образом:

движение твердого тела можно представить как поступательное движение центра масс тела, на которое накладывается вращательное движение тела вокруг его центра масс.

В дальнейшем мы подробно обсудим смысл этого общего утверждения, представим его в виде соответствующих уравнений движения и раскроем на конкретных примерах. Сначала мы познакомимся с вращательным движением тела вокруг неподвижной оси, затем вокруг оси, движущейся поступательно, и, наконец, вокруг точки (в частности, вокруг центра масс тела). Заметим, что вращательное движение, определенное в § 1.1, есть вращательное движение вокруг неподвижной оси.

При поступательном движении тела *все его точки движутся одинаково*, так что можно ограничиться рассмотрением движения

одной точки (например, центра масс тела). Только в случае поступательного движения можно говорить о *скорости тела* или *ускорении тела*. При любом другом движении разные точки тела имеют, вообще говоря, разные скорости и разные ускорения и поэтому понятия «скорость тела» или «ускорение тела» не имеют смысла.

Кинематика и динамика тела, движущегося поступательно, не требуют специального обсуждения, поскольку сводятся фактически к кинематике и динамике материальной точки, рассмотренным в первой и второй главах. Поэтому обратимся к вращательному движению твердого тела и прежде всего к кинематике тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

4.1.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Любая точка твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, движется по *окружности*. Кинематика материальной точки, движущейся по окружности, рассматривалась в первой главе. В пп. 1.4.2 и 1.4.3 были введены понятия *центростремительного* ($\vec{a}_{\text{цс}}$) и *касательного*, или *тангенциального* ($\vec{a}_{\text{т}}$) ускорений точки. Ускорения $\vec{a}_{\text{цс}}$ и $\vec{a}_{\text{т}}$, а также *скорость* точки \vec{v} характеризовали точку, движущуюся по окружности определенного радиуса, т. е. находящуюся на определенном расстоянии от оси вращения. Естественно, что они не могут характеризовать вращение вокруг этой оси *тела как целого*. Следовательно, для описания вращающегося тела (именно тела, а не отдельной точки!) необходимо ввести иные характеристики.

Таковыми являются *угловая скорость* $\vec{\omega}$ и *угловое ускорение* $\vec{\beta}$. Они определены для вращающегося тела в целом, т. е. для *каждой* точки данного тела. В любой выбранный момент времени разные точки тела имеют одну и ту же угловую скорость $\vec{\omega}$ и одно и то же угловое ускорение $\vec{\beta}$, но при этом характеризуются разными векторами \vec{v} , $\vec{a}_{\text{цс}}$, $\vec{a}_{\text{т}}$.

В п. 1.4.4 было введено понятие угловой скорости для материальной точки, движущейся равномерно по окружности радиусом R (см. (1.20)). Если представить, что эта точка находится во вращающемся теле на расстоянии R от оси вращения, то соотношение (1.20) будет определять модуль угловой скорости не только указанной точки, но и тела в целом. При этом $\Delta\varphi$ в (1.20) надо рассматривать как угол поворота равномерно вращающегося тела за промежуток времени Δt .

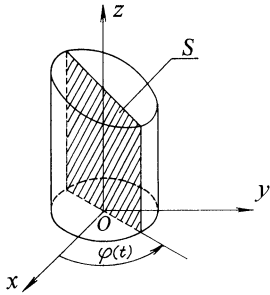


Рис. 4.1

Отвлечемся теперь от обсуждения материальной точки, движущейся по некоторой окружности, и предположим, что в инерциальной системе отсчета рассматривается вращение твердого тела вокруг координатной z -оси. Мысленно выделим в теле некоторую плоскость S , проходящую через ось вращения (она показана на рисунке 4.1 штриховкой). При вращении тела будет вращаться и плоскость S — будет изменяться угол φ , образуемый данной плоскостью с координатной xz -плоскостью. Пусть в некоторый момент времени t этот угол (иначе говоря, *угловая координата*) есть $\varphi(t)$. За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ плоскость S (а значит, и само тело) повернется на угол $\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$. Отношение этого угла к Δt есть *средняя угловая скорость* тела, а также любой точки тела за промежуток времени от t до $t + \Delta t$:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Если тело вращается *равномерно*, то $\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ не зависит от t ; поэтому обозначим эту разность просто как $\Delta\varphi$. Отношение $\Delta\varphi$ к Δt есть, очевидно, *постоянная во времени угловая скорость*:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (4.2)$$

(это есть уже известное соотношение (1.20)).

В случае *неравномерного* вращения тела используют *мгновенную угловую скорость* $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

Мгновенная угловая скорость $\omega(t)$ есть предел последовательности средних угловых скоростей ω_{cp} при $\Delta t \rightarrow 0$.

Быстроту изменения угловой скорости во времени измеряют величиной β , являющейся модулем *углового ускорения* $\vec{\beta}$. При *равнопеременном* вращении тела β — постоянная величина; в этом случае угловая скорость изменяется во времени по *линейному закону*:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (4.4)$$

где ω_0 — угловая скорость в момент $t = 0$. Если отсчитывать время не от нуля, а от некоторого значения t , то следует в (4.4) за-

менить ω_0 , $\omega(t)$ и t на $\omega(t)$, $\omega(t + \Delta t)$ и Δt , соответственно. В результате соотношение (4.4) примет вид:

$$\omega(t + \Delta t) = \omega(t) + \beta \Delta t, \quad (4.5)$$

откуда следует, что

$$\beta = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

Если в процессе вращения тела его угловая скорость изменяется не по линейному закону, то β в (4.6) следует рассматривать как *среднее угловое ускорение* за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$ это среднее угловое ускорение превращается в *мгновенное угловое ускорение* $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}. \quad (4.7)$$

Напомним, что угловая скорость и ускорение можно рассматривать в качестве характеристик как вращающегося тела в целом, так и любой точки в этом теле. Выберем точку на расстоянии R от оси вращения. За промежуток времени от t до $t + \Delta t$ тело повернется на угол $\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$; при этом выбранная точка опишет дугу окружности длиной

$$\Delta S = [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]R.$$

Модуль скорости $v(t)$ рассматриваемой точки есть, очевидно,

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$; следовательно,

$$v(t) = \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \right] R. \quad (4.8)$$

С учетом (4.3) перепишем (4.8) в виде:

$$v(t) = \omega(t)R \quad (4.9)$$

(такое соотношение мы уже использовали ранее — см. (1.21, а)).

Из (1.19, б) и (4.9) находим выражение для модуля касательного (тангенциального) ускорения $a_t(t)$ точки, находящейся во вращающемся теле на расстоянии R от оси вращения:

$$a_t(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right] R. \quad (4.10)$$

С учетом (4.7) перепишем (4.10) в виде:

$$a_t(t) = \beta(t)R. \quad (4.11)$$

Модуль центростремительного ускорения рассматриваемой точки есть

$$a_{\text{цс}}(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \omega^2(t)R. \quad (4.12)$$

В заключение напомним, что *угловая скорость является вектором*. Вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта — напомним рисунок 1.9. При рассмотрении в п. 2.5.4 силы Кориолиса мы учитывали векторный характер угловой скорости. *Угловое ускорение тоже вектор*. Направление вектора $\vec{\beta}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$, если модуль $\omega(t)$ со временем возрастает. В противном случае направление вектора $\vec{\beta}$ противоположно направлению вектора $\vec{\omega}$.

О единицах физических величин

Из соотношения (4.6) следует, что

$$\text{единица углового ускорения} = \frac{\text{единица угловой скорости}}{\text{единица времени}}.$$

Следовательно, единица углового ускорения в СИ есть *радиан на секунду в квадрате* (обозначение: рад/с²). Радиан на секунду в квадрате равен угловому ускорению равнопеременно вращающегося тела, при котором за время 1 с угловая скорость тела изменяется на 1 рад/с.

Задача (рис. 4.2). Шкив 1 радиусом R вращается равномерно, делая n оборотов за время T . Он соединен ременной передачей со шкивом 2 радиусом r . Со шкивом 2 жестко соединен шкив 3 радиусом R . Шкив 3 соединен ременной передачей со шкивом 4 радиусом r . Ремни не проскальзывают. Требуется найти угловую скорость шкива 4, а также модули скорости и центростремительного ускорения точки E на расстоянии $\frac{r}{2}$ от центра шкива 4.

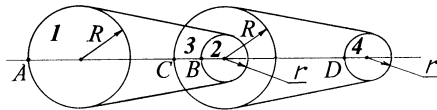


Рис. 4.2

□ Сделав n оборотов за время T , шкив повернулся на угол $2\pi n$ (в радианах). Значит, угловая скорость ω_1 шкива 1 есть $\omega_1 = \frac{2\pi n}{T}$.

Согласно (4.9), модуль v_A скорости точки A равен $v_A = \omega_1 R$. Таков же модуль v_B скорости точки B на шкиве 2, поскольку ремни не проскальзывают. Следовательно, угловая скорость шкива 2 есть

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r} = \frac{v_A}{r} = \frac{\omega_1 R}{r}.$$

Угловая скорость шкива 3 равна угловой скорости шкива 2:

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{\omega_1 R}{r}.$$

Модуль v_C скорости точки C на шкиве 3: $v_C = \omega_3 R = \frac{\omega_1 R^2}{r}$.

Таков же модуль v_D скорости точки D на шкиве 4: $v_D = \frac{\omega_1 R^2}{r}$.

Отсюда находим угловую скорость шкива 4:

$$\omega_4 = \frac{v_D}{r} = \frac{\omega_1 R^2}{r^2} = \frac{2\pi n R^2}{T r^2}.$$

Модуль v_E скорости точки E :

$$v_E = \frac{1}{2} \omega_4 r = \frac{\omega_1 R^2}{2r} = \frac{\pi n R^2}{T r}.$$

Модуль центростремительного ускорения точки E :

$$a_{\text{ис}} = \frac{1}{2} \omega_4^2 r = \frac{\omega_1^2 R^4}{2r^3} = \frac{2\pi^2 n^2 R^4}{T^2 r^3}. \quad \blacksquare$$

4.1.3. Плоское (плоскопараллельное) движение тела

Плоским, или *плоскопараллельным* движением твердого тела называют движение, при котором каждая точка тела движется в определенной плоскости, причем плоскости, в которых движутся различные точки, либо совпадают, либо параллельны друг другу. Характерный пример плоского движения — качение цилиндра или колеса по плоскости. Это движение является результатом сложения поступательного движения оси цилиндра (колеса) и вращательного движения вокруг оси; при движении ось остается перпендикулярной определенной плоскости. Заметим, что движение оси может быть как прямолинейным, так и криволинейным. В первом случае колесо катится по плоскости, а во втором — по дороге с подъемами и спусками.

Обсудим кинематику цилиндра радиусом основания R , катящегося без проскальзывания по плоскости. Будем полагать, что скорость \vec{v}_C движения цилиндра постоянна по модулю и направлению. Это есть скорость *поступательной составляющей* движения цилиндра. Угловую скорость *вращательной составляющей* предстоит найти.

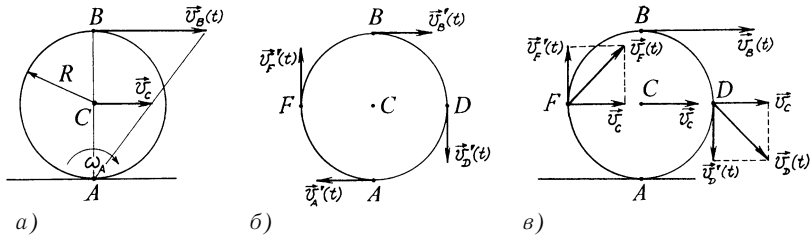


Рис. 4.3

Прежде всего выясним, каковы скорости точек цилиндра A , C , B , показанных на рисунке 4.3, a , который относится к некоторому моменту времени t . Скорость точки C есть \vec{v}_C как в выбранный момент времени, так и во все другие. Точка A в момент t *соприкасается* с плоскостью. Так как проскальзывания нет, скорость точки A в этот момент равна нулю. Обратим внимание: цилиндр в момент t отнюдь не покоится, все его точки имеют какие-то мгновенные скорости, но точка соприкосновения с плоскостью находится в состоянии мгновенного покоя:

$$\vec{v}_A(t) = 0. \quad (1^*)$$

Все остальные точки цилиндра участвуют в момент t во вращательном движении вокруг A . Говорят, что A есть *мгновенный центр вращения* (фактически речь идет о *мгновенной оси вращения* — прямой, параллельной оси цилиндра и соприкасающейся в данный момент с плоскостью). За сколь угодно малый промежуток времени Δt точка A уйдет от соприкосновения с плоскостью и приобретет скорость. В момент $t + \Delta t$ в соприкосновении с плоскостью окажется другая точка цилиндра и теперь она станет мгновенным центром вращения. Наблюдатель из неподвижной (лабораторной) системы отсчета мог бы назвать это вращение *мгновенным вращением*, понимая под словом «мгновенное» то же, что понимают, используя понятие «мгновенная скорость»: «мгновенное» — это «рассматриваемое в данный момент времени». Точку A можно было бы называть в момент t как *мгновенным центром вращения*, так и *центром мгновенного вращения*.

Угловую скорость мгновенного вращения вокруг A легко найти, поскольку известна скорость точки C . Как и прочие точки, точка C участвует в момент t в мгновенном вращении вокруг A . А поскольку модуль ее скорости равен v_C , то, согласно (4.9), угловая скорость ω_A мгновенного вращения равна $\omega_A = \frac{v_C}{R}$. Точка B также участвует в момент t в мгновенном вращении вокруг A ; следова-

тельно, $v_B = 2\omega_A R = 2\frac{v_C}{R}R = 2v_C$. Вектор \vec{v}_B перпендикулярен к AB . Таким образом,

$$\vec{v}_B(t) = 2\vec{v}_C. \quad (2^*)$$

Мгновенные скорости точек B и C показаны на рисунке 4.3, *a*.

Исключим мысленно поступательную составляющую движения цилиндра, для чего *перейдем в систему отсчета, связанную с осью цилиндра*. Эта система движется относительно неподвижной системы со скоростью \vec{v}_C . Поэтому справедливо следующее *правило сложения скоростей*:

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_C, \quad (4.13)$$

где $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}'(t)$ — мгновенные скорости какой-либо точки цилиндра в неподвижной и движущейся системах отсчета, соответственно.

Используя правило сложения скоростей, а также результаты (1*) и (2*), находим скорости точек A , C , B в системе, связанной с осью:

$$\vec{v}'_B(t) = \vec{v}_B(t) - \vec{v}_C = 2\vec{v}_C - \vec{v}_C = \vec{v}_C; \quad (3^*)$$

$$\vec{v}'_A(t) = \vec{v}_A(t) - \vec{v}_C = 0 - \vec{v}_C = -\vec{v}_C; \quad (4^*)$$

$$\vec{v}'_C = \vec{v}_C - \vec{v}_C = 0.$$

Теперь найдем угловую скорость ω вращательной составляющей движения цилиндра. Поскольку ω есть угловая скорость цилиндра в системе отсчета, в которой ось цилиндра покоится (т. е. в системе, которая движется со скоростью \vec{v}_C), можно воспользоваться результатами (3*) и (4*), из которых следует, с учетом (4.9), что $\omega = \frac{v_C}{R}$. Обратим внимание на то, что

$$\omega = \omega_A. \quad (4.14)$$

Угловая скорость цилиндра, вращающегося вокруг оси в системе отсчета, связанной с осью, равна угловой скорости цилиндра, вращающегося в каждый момент времени вокруг центра мгновенного вращения в неподвижной системе отсчета.

Зная ω , можно для любой точки цилиндра найти мгновенную скорость \vec{v}' в системе отсчета, связанной с осью. На рисунке 4.3, *b* показаны скорости \vec{v}'_A , \vec{v}'_B , \vec{v}'_F , \vec{v}'_D (соответственно для точек A , B , F , D); все они равны по модулю $\omega R = v_C$ и направлены по касательной к окружности.

Используя указанные скорости и правило сложения скоростей (4.13), можно найти мгновенные скорости этих точек (равно как и

других) в неподвижной системе отсчета. Так, для точек F и D получаем:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_F' + \vec{v}_C \quad (v_F = \sqrt{2} v_C);$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_D' + \vec{v}_C \quad (v_D = \sqrt{2} v_C).$$

На рисунке 4.3, v показаны, наряду с уже известной нам скоростью \vec{v}_B , также скорости \vec{v}_F и \vec{v}_D .

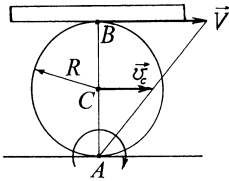


Рис. 4.4

Задача 1 (рис. 4.4). Горизонтальная доска прижимает цилиндр радиусом R к плоскости. Доска движется с постоянной скоростью \vec{V} в горизонтальном направлении и тем самым заставляет цилиндр катиться по плоскости. Проскальзывания нет. Требуется найти скорость оси цилиндра, а также его угловую скорость в системе отсчета, связанной с осью.

□ Так как проскальзывания нет, точка A неподвижна в данный момент времени, а точка B имеет скорость, совпадающую со скоростью доски: $v_A = 0$, $\vec{v}_B = \vec{V}$. Точка A — мгновенный центр вращения. Угловая скорость вращения вокруг A равна $\omega_A = \frac{v_B}{2R} = \frac{V}{2R}$.

Отсюда находим модуль скорости оси цилиндра: $v_C = \omega_A R = \frac{V}{2}$.

Вектор \vec{v}_C параллелен вектору \vec{V} ; следовательно, $\vec{v}_C = \frac{1}{2} \vec{V}$. Угловую скорость ω цилиндра в системе отсчета, связанной с его осью, получим, воспользовавшись результатом (4.14): $\omega = \omega_A = \frac{V}{2R}$. ■

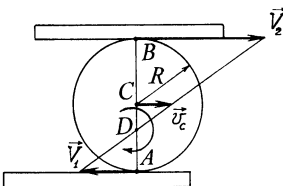


Рис. 4.5

Задача 2 (рис. 4.5). Две параллельные доски равномерно движутся в противоположные стороны со скоростями \vec{V}_1 и \vec{V}_2 . Между досками зажат цилиндр радиусом R , катящийся по доскам без проскальзывания. Требуется найти скорость оси цилиндра, а также его угловую скорость в системе отсчета, связанной с осью. Принять, что $V_2 > V_1$.

□ Точка A цилиндра имеет скорость нижней доски, а точка B — верхней: $\vec{v}_A = \vec{V}_1$, $\vec{v}_B = \vec{V}_2$. Мгновенный центр вращения (обозна-

чим его через D) найдем, исходя из того, что вращение точек A и B вокруг D происходит с одной и той же угловой скоростью и поэтому справедливо равенство:

$$\frac{v_A}{AD} = \frac{v_B}{2R - AD}. \quad (5^*)$$

Отсюда видно, что точка D находится на пересечении прямой AB и прямой, соединяющей концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B (см. рисунок). Мгновенное вращение цилиндра вокруг D происходит с угловой скоростью $\omega_D = \frac{v_A}{AD}$. Величину AD находим, воспользовавшись пропорцией (5*):

$$AD = 2R \frac{v_A}{v_A + v_B} = 2R \frac{V_1}{V_1 + V_2}. \quad (6^*)$$

Следовательно,

$$\omega_D = \frac{v_A v_A + v_B}{R \cdot 2v_A} = \frac{v_A + v_B}{2R} = \frac{V_1 + V_2}{2R}. \quad (7^*)$$

В мгновенном вращении вокруг D участвует наряду с остальными точками также центр цилиндра C ; его скорость \vec{v}_C направлена по горизонтали вправо (см. рисунок), а модуль находим из следующего соотношения:

$$v_C = \omega_D \cdot OD = \omega_D(R - AD). \quad (8^*)$$

Подставляя (6*) и (7*) в (8*), получаем

$$v_C = \frac{V_1 + V_2}{2R} R \left(1 - \frac{2V_1}{V_1 + V_2}\right) = \frac{V_2 - V_1}{2}. \quad (9^*)$$

Чтобы найти угловую скорость цилиндра ω в системе отсчета, связанной с его осью, переходим в эту систему и используем правило (4.13). С учетом (9*) находим модуль v_B' скорости точки B в данной системе:

$$v_B' = v_B - v_C = V_2 - \frac{V_2 - V_1}{2} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega = \frac{v_B'}{R} = \frac{V_1 + V_2}{2R}.$$

Заметим, что угловую скорость ω можно найти еще проще, если воспользоваться результатом (4.14), учитывая, что в данном случае мгновенным центром вращения является точка D :

$$\omega = \omega_D = \frac{V_1 + V_2}{2R}. \quad \blacksquare$$

4.1.4. Импульс твердого тела

Представим твердое тело массой m в виде огромной совокупности частиц, каждую из которых можно рассматривать как материальную точку (этот прием мы использовали в п. 3.4.3 и будем применять в дальнейшем). *Импульс тела* $\vec{p}(t)$ есть сумма импульсов всех этих частиц

$$\vec{p}(t) = \sum_i \vec{p}_i(t) = \sum_i m_i \vec{v}_i(t), \quad (4.15)$$

где m_i , $\vec{v}_i(t)$, $\vec{p}_i(t)$ — соответственно масса, мгновенная скорость и импульс i -й частицы; $\sum_i m_i = m$. По аналогии с (2.74) представим мгновенную *скорость центра масс тела* в виде:

$$\vec{v}_C(t) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i(t). \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) следует, что

$$\vec{p}(t) = m \vec{v}_C(t). \quad (4.17)$$

Импульс твердого тела равен импульсу материальной точки, масса которой равна массе тела, а скорость равна скорости центра масс тела.

Замечание

Формула (4.17) справедлива не только для твердого тела, но и для любой совокупности материальных точек, поскольку при ее установлении не выдвигалось требование неизменности расстояний между отдельными частицами.

4.2. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.2.1. Основной закон динамики вращательного движения

Рассмотрим сначала простой случай: вокруг закрепленной в подшипниках неподвижной оси вращается невесомый твердый стержень, на конце которого находится материальная точка массой m , отстоящая от оси вращения на расстоянии R . Она описывает окружность радиусом R в плоскости, перпендикулярной к

оси вращения. Пусть на материальную точку действует сила \vec{F} , постоянная по модулю и направленная в каждый момент времени по касательной к траектории точки. По второму закону Ньютона, $ma_{\tau} = F$, где a_{τ} — модуль тангенциального ускорения, создаваемого силой \vec{F} . Это соотношение можно переписать, с учетом (4.11), в виде: $mR\beta = F$, где β — угловое ускорение стрелки. Умножив обе части равенства на R , получим соотношение

$$mR^2\beta = \Phi. \quad (4.18)$$

Здесь $\Phi = RF$ — момент силы \vec{F} относительно оси вращения.

Результат (4.18) обобщим на тело произвольной формы, вращающееся вокруг неподвижной (закрепленной в подшипниках) оси. Мысленно представим тело в виде совокупности жестко связанных друг с другом частиц и рассмотрим некоторую i -ую частицу. Она имеет массу m_i и движется по окружности радиусом R_i в плоскости, перпендикулярной к оси вращения; обозначим через O_i центр этой окружности. Пусть \vec{F}_i — равнодействующая *внешних* по отношению к телу сил, приложенных к i -й частице тела, а \vec{F}'_i — равнодействующая *внутренних* сил, действующих на нее. Обозначим через $\vec{\Phi}_i$ и $\vec{\Phi}'_i$ рассматриваемые относительно O_i моменты сил \vec{F}_i и \vec{F}'_i , соответственно.

Координатную z -ось направим по оси вращения так, чтобы вращение тела происходило против часовой стрелки для наблюдателя, который смотрит навстречу оси; в этом случае направление z -оси совпадает с направлением вектора угловой скорости тела. Применив соотношение (4.18) к i -й частице твердого тела, получим

$$m_i R_i^2 \beta = \Phi_{iz} + \Phi'_{iz}, \quad (4.19)$$

где Φ_{iz} и Φ'_{iz} — моменты относительно оси вращения, т. е. z -проекции моментов $\vec{\Phi}_i$ и $\vec{\Phi}'_i$, рассматриваемых относительно O_i (напомним п. 3.1.3).

Чтобы перейти к вращающемуся телу как целому, надо просуммировать (4.19) по всем частицам, составляющим тело:

$$\beta \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i \Phi_{iz} + \sum_i \Phi'_{iz}. \quad (4.20)$$

Сумма моментов внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i \Phi'_{iz} = 0. \quad (4.21)$$

Примечание

Результат (4.21) следует из того факта, что все внутренние силы в общей совокупности частиц тела можно мысленно разбить на пары «действие — противодействие», а суммарный момент для каждой пары, рассматриваемый относительно произвольной точки, равен нулю. В самом деле, если в такой паре заменить мысленно «действие» на «противодействие», то момент силы, оставаясь прежним по модулю, изменит направление на противоположное.

Сумма $\sum_i \Phi_{iz}$ есть в действительности сумма лишь по тем частицам тела, радиусы-векторы которых оказались точками приложения внешних по отношению к телу сил. При этом силу тяжести тела можно полагать приложенной к частице, радиус-вектор которой есть радиус-вектор центра масс тела. В результате сумма $\sum_i \Phi_{iz}$ должна быть заменена суммой по конечному (обычно небольшому) числу слагаемых — по числу внешних сил, приложенных к телу. Обозначим это число через N , а внешние силы — через \vec{F}_j ($j = 1, 2, 3, \dots, N$). Спроецируем внешние силы на плоскость, перпендикулярную к оси вращения тела, т. е. к z -оси, и обозначим полученные составляющие силы через \vec{f}_j . Модуль силы \vec{f}_j равен $f_j = F_j \cos \gamma_j$, где γ_j — угол между силой \vec{F}_j и плоскостью, перпендикулярной к z -оси. На рисунке 4.6 представлена, для примера, некоторая j -я частица; она движется по пунктирной окружности в плоскости S_j с центром O_j и находится в рассматриваемый момент времени в точке A_j . К частице приложена внешняя сила \vec{F}_j .

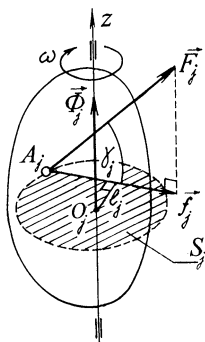


Рис. 4.6

Полезно сопоставить данный рисунок с рисунком 3.3, б. Сила \vec{f}_j создает относительно O_j момент $\vec{\Phi}_j$; его проекция на z -ось равна

$$\Phi_{jz} = l_j f_j = l_j F_j \cos \gamma_j, \quad (4.22)$$

где l_j — длина перпендикуляра, опущенного из точки O_j на линию действия силы \vec{f}_j .

В общем случае следует исходить из соотношения (3.7, б) и заменить (4.22) соотношением:

$$\Phi_{jz} = \xi_j l_j f_j = \xi_j l_j F_j \cos \gamma_j, \quad (4.23)$$

где, напомним, $\xi_j = 1$, если момент силы \vec{f}_j относительно O_j параллелен z -оси, и $\xi_j = -1$ —

если антипараллелен. В случае, приведенном на рисунке 4.6, $\xi_j = 1$.

Обозначим сумму $\sum_i \Phi_{iz}$ (точнее сказать, сумму $\sum_{j=1}^N \Phi_{jz}$) через Φ_z и, учитывая (4.22), представим:

$$\Phi_z = \sum_{j=1}^N \Phi_{jz} = \sum_{j=1}^N \xi_j l_j F_j \cos \gamma_j. \quad (4.24)$$

Используя (4.21) и (4.24), перепишем соотношение (4.20) в виде:

$$\beta \sum_i m_i R_i^2 = \Phi_z. \quad (4.25)$$

Входящую в это соотношение величину

$$J = \sum_i m_i R_i^2 \quad (4.26)$$

называют *моментом инерции тела* относительно оси вращения. Эту величину можно рассматривать как меру инертности вращающегося около данной оси тела.

Принимая во внимание, что Φ_z может изменяться во времени и, значит, в общем случае β есть мгновенное ускорение $\beta(t)$, перепишем (4.25), с учетом (4.26), в виде:

$$\beta(t) = \frac{\Phi_z(t)}{J}. \quad (4.27)$$

Соотношение (4.27) выражает **основной закон динамики вращательного движения твердого тела** вокруг неподвижной оси:

Угловое ускорение вращающегося относительно заданной оси тела, рассматриваемое в данный момент времени, прямо пропорционально результирующему моменту относительно той же оси всех внешних сил, приложенных к телу в данный момент, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения.



Обратим внимание: формула (4.27) *аналогична* формуле (2.1) для второго закона Ньютона, являющегося основным законом динамики материальной точки, а также поступательного движения твердого тела. Поэтому основной закон динамики вращательного движения называют также *вторым законом Ньютона для вращательного движения*. Вместо мгновенного ускорения $\vec{a}(t)$ в (4.27) входит мгновенное угловое ускорение $\beta(t)$; вместо

равнодействующей сил в данный момент времени $\vec{F}(t)$ входит результирующий момент $\Phi_z(t)$ внешних сил, вращающий тело вокруг заданной оси; вместо массы тела m входит момент инерции тела J относительно оси вращения.

4.2.2. Момент инерции тела

Проводя аналогию между ролью массы тела в его поступательном движении и момента инерции тела в его вращательном движении, отметим, что есть тут и принципиальная разница. Масса тела не зависит от того, как происходит поступательное движение тела, а момент инерции *зависит от того, вокруг какой оси вращается тело*. Момент инерции тела изменяется как при переносе оси вращения, так и при изменении ее направления в пространстве.

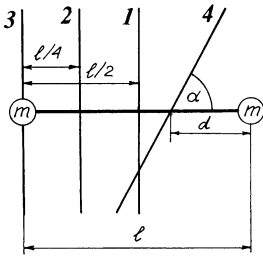


Рис. 4.7

Рассмотрим идеализированное тело, представляющее собой две материальные точки с массами m , находящиеся на концах невесомого твердого стержня длиной l (можно представить себе два маленьких тяжелых шарика, укрепленных на концах тонкой стальной спицы). Используя соотношение (4.26), находим моменты инерции такого тела относительно разных осей вращения, показанных на рисунке 4.7:

$$\text{ось } 1: \quad J_1 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} ml^2; \quad (1^*)$$

$$\text{ось } 2: \quad J_2 = m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3}{4}l\right)^2 = \frac{5}{8} ml^2; \quad (2^*)$$

$$\text{ось } 3: \quad J_3 = ml^2; \quad (3^*)$$

$$\begin{aligned} \text{ось } 4: \quad J_4 &= m(l-d)^2 \sin^2 \alpha + md^2 \sin^2 \alpha = \\ &= m \sin^2 \alpha (l^2 + 2d^2 + 2ld). \end{aligned} \quad (4^*)$$

Моменты инерции J_1, J_2, J_3, J_4 выражаются суммами (4.26), состоящими всего из двух слагаемых. Суммы (4.26) для реальных тел с массой, распределенной по объему тела, вычисляют, прибегая к интегрированию. Приведем без вывода некоторые результаты таких вычислений:

момент инерции тонкого диска массой m и радиусом R относительно перпендикуляра к плоскости диска, проходящего через его центр:

$$J = \frac{1}{2} mR^2; \quad (4.28)$$

таков же момент инерции цилиндра массой m и радиусом R относительно оси симметрии цилиндра, проходящей через центр основания;

момент инерции цилиндра массой m , радиусом R , длиной l относительно перпендикуляра к оси цилиндра, проходящего через центр тела:

$$J = m\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}l^2\right); \quad (4.29)$$

момент инерции тонкого диска массой m и радиусом R относительно любого из диаметров диска:

$$J = \frac{1}{4}mR^2. \quad (4.30)$$

Формулу (4.30) можно получить из (4.29) при $l \rightarrow 0$ (при «превращении» цилиндра длиной l в плоский диск с такими же массой и радиусом);

момент инерции шара массой m и радиусом R относительно любого из диаметров шара:

$$J = \frac{2}{5}mR^2; \quad (4.31)$$

момент инерции прямоугольного параллелепипеда (бруска) массой m со сторонами a , b , c относительно перпендикуляра к грани со сторонами a и b , проходящего через центр тела:

$$J = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2); \quad (4.32)$$

момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно перпендикуляра к стержню, проходящему через его центр, имеет вид

$$J = \frac{1}{12}ml^2. \quad (4.33)$$

4.2.3. Теорема Штейнера для момента инерции тела

Теорема Якоба Штейнера (швейцарский математик XIX столетия) формулируется так:

Момент инерции тела J' относительно произвольной оси вращения равен моменту инерции тела J относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела m на квадрат расстояния a между указанными осями:

$$J' = ma^2 + J. \quad (4.34)$$



Приведем доказательство теоремы Штейнера.

Тело массой m произвольной формы вращается вокруг оси $M'N'$ (рис. 4.8). Проведем через центр масс C тела ось MN , параллельную оси вращения $M'N'$, и рассмотрим произвольную i -ю частицу тела массой m_i , характеризующуюся в данный момент времени радиусом-вектором \vec{r}_i , проведенным из центра масс тела. Проведем через i -ю частицу плоскость, перпендикулярную к осям MN и $M'N'$; обозначим ее через S_i . Точку пересечения плоскости S_i с осью MN обозначим через A_i , а с осью $M'N'$ — через A'_i . Наряду с \vec{r}_i введем также радиусы-векторы \vec{R}_i , \vec{R}'_i , \vec{a} и \vec{h}_i (см. рисунок).

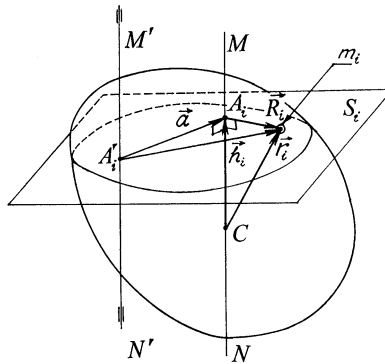


Рис. 4.8

Из рисунка видно, что $\vec{R}'_i = \vec{a} + \vec{R}_i$. Возведем обе части этого равенства в квадрат и умножим на m_i ; получим

$$m_i(R'_i)^2 = m_i a^2 + 2m_i \vec{a} \cdot \vec{R}_i + m_i R_i^2. \quad (1^*)$$

Просуммируем последнее равенство по всем частицам тела

$$\sum_i m_i (R'_i)^2 = a^2 \sum_i m_i + 2 \sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{R}_i + \sum_i m_i R_i^2. \quad (2^*)$$

Используя (4.28) и учитывая, что $\sum_i m_i = m$, перепишем это соотношение в виде:

$$J' = ma^2 + 2 \sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{R}_i + J. \quad (3^*)$$

Здесь J' и J — моменты инерции тела относительно, соответственно, оси $M'N'$ и оси MN , параллельной оси $M'N'$, отстоящей от нее на расстоянии a и проходящей через центр масс C . Так как $\vec{R}_i = \vec{r}_i - \vec{h}_i$, то можно представить сумму $\sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{R}_i$ в виде:

$$\sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{R}_i = \sum_i m_i \vec{a} \cdot (\vec{r}_i - \vec{h}_i) = \vec{a} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) - \sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{h}_i. \quad (4^*)$$

Поскольку $\vec{a} \perp \vec{h}_i$, то $\vec{a} \cdot \vec{h}_i = 0$. Сумма $\sum_i m_i \vec{r}_i$ есть умноженный на m радиус-вектор центра масс тела, рассматриваемый из этого же центра. Понятно, что он равен нулю. Таким образом, $\sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{R}_i = 0$. Учитывая этот результат, получаем из (3*) соотношение (4.34), что и требовалось доказать.

Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно перпендикуляра к стержню, проходящего через его центр (т. е. через центр масс стержня), равен, согласно (4.33), $J = \frac{1}{12} ml^2$.

Воспользуемся теоремой Штейнера и найдем момент инерции этого стержня относительно перпендикуляра к стержню, проходящего через один из его концов:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (4.35)$$

На рисунке 4.9 показаны пять осей вращения (они обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5), относительно которых рассматриваются вращения тонкого диска массой m и радиусом R .

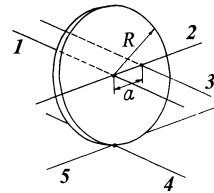


Рис. 4.9

? Чему равен момент инерции диска относительно каждого из пяти вращений?

Момент инерции J_1 относительно оси 1 и момент инерции J_2 относительно оси 2 считаем известными: $J_1 = \frac{1}{2} mR^2$ (см. (4.28)) и $J_2 = \frac{1}{4} mR^2$ (см. (4.3)). Зная J_1 и J_2 и воспользовавшись теоремой Штейнера, найдем остальные моменты инерции: относительно оси 3:

$$J_3 = J_1 + ma^2 = m \left(\frac{1}{2} R^2 + a^2 \right); \quad (4.36)$$

относительно оси 4:

$$J_4 = J_1 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2; \quad (4.37)$$

относительно оси 5:

$$J_5 = J_2 + mR^2 = \frac{5}{4}mR^2. \quad (4.38)$$

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (4.26) следует, что

$$\text{единица момента инерции} = \text{единица массы} \times \text{единица скорости}^2.$$

Следовательно, единица момента инерции в СИ есть килограмм-метр в квадрате (обозначение: $\text{кг} \cdot \text{м}^2$). Килограмм-метр в квадрате равен моменту инерции материальной точки массой 1 кг, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси вращения равен сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от этой оси.

4.2.4. Учет динамики вращения блока

При решении задач с блоками мы отмечали, что если пренебрегать массой блока, то можно считать равными по модулю силы натяжения нити слева и справа от блока. На примере конкретной задачи покажем, как нужно учитывать динамику вращения блока вокруг своей оси в случае, когда массой блока пренебрегать нельзя.

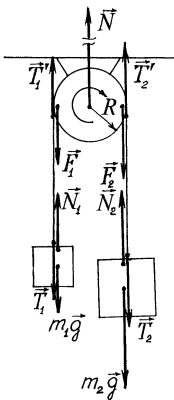


Рис. 4.10

Задача (рис. 4.10). Через блок массой m и радиусом R перекинута нить с подвешенными грузами массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Можно считать, что нить невесома, нерастяжима и не скользит по блоку. Требуется найти модуль ускорения грузов и модули сил натяжения нитей по разные стороны от блока.

□ На груз m_1 действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила реакции нити \vec{N}_1 , а на груз m_2 — сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила реакции нити \vec{N}_2 . На участок 1 нити действуют силы натяжения \vec{T}_1 и \vec{T}_1' , а на участок 2 — силы натяжения \vec{T}_2 и \vec{T}_2' . На блок действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции оси

блока \vec{N} и силы реакции нитей \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Все силы показаны на рисунке.

Учитывая, что $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$ (поскольку пренебрегли массой нити) и что $\vec{N}_1 = -\vec{T}_1$ и $\vec{F}_1 = -\vec{T}_1'$ (по третьему закону Ньютона), заключаем:

$$N_1 = F_1 = T_1' = T_1. \quad (1^*)$$

С учетом того, что $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$ и что, по третьему закону Ньютона, $\vec{N}_2 = -\vec{T}_2$ и $\vec{F}_2 = -\vec{T}_2'$, заключаем:

$$N_2 = F_2 = T_2' = T_2. \quad (2^*)$$

Обозначим через \vec{a}_1 ускорение груза m_1 (оно направлено вверх), а через \vec{a}_2 ускорение груза m_2 (направлено вниз). Нить нерастяжима, поэтому

$$a_1 = a_2 \equiv a. \quad (3^*)$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 \quad \text{и} \quad m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2.$$

Спроецировав эти соотношения на направление вектора \vec{g} и принимая во внимание (1*)—(3*), получим систему уравнений:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g; \quad (4^*)$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2. \quad (5^*)$$

Применим к блоку основной закон динамики вращательного движения. Силы $m\vec{g}$ и \vec{N} не создают момента относительно оси блока. Его создают силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Результирующая проекция моментов этих сил на ось вращения блока есть $\Phi = RF_2 - RF_1$. В соответствии с (4.27) представим:

$$J\beta = RF_2 - RF_1, \quad (6^*)$$

где β — угловое ускорение блока, J — его момент инерции, равный, согласно (4.28), $\frac{1}{2}mR^2$. Поскольку нить не скользит по блоку, модуль тангенциального ускорения на окружности блока равен a ; отсюда следует, что $\beta = \frac{a}{R}$. В результате соотношение (6*) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{2}ma = F_2 - F_1 = T_2 - T_1. \quad (7^*)$$

Отсюда видно, что если массой блока пренебречь ($m = 0$), то $F_1 = F_2$ и, как следствие, будут одинаковы модули сил натяжения нити по разные стороны от блока.

Сложив почленно уравнения (4*), (5*) и (7*), находим ускорение:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g. \quad (4.39)$$

Зная a , найдем модули сил натяжения для участков 1 и 2 нити:

$$T_1 = m_1 g \frac{2m_2 + \frac{1}{2}m}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m};$$

$$T_2 = m_2 g \frac{2m_1 + \frac{1}{2}m}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}. \quad (4.40) \blacksquare$$

4.3. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА В МЕХАНИКЕ

4.3.1. Момент импульса материальной точки

Если материальная точка имеет массу m и скорость \vec{v} , то ее импульс равен

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (4.41)$$

Момент импульса \vec{L} такой материальной точки, рассматриваемый относительно некоторой точки O , определяют с помощью соотношения:

$$\vec{L} = \vec{r}_0 \times \vec{p}, \quad (4.42)$$

где \vec{r}_0 — радиус-вектор, проведенный из O в данную материальную точку; с помощью косоугольного произведения обозначается векторное произведение вектора \vec{r}_0 на вектор \vec{p} . Слово «момент» в понятии «момент импульса» появилось по аналогии с понятием «момент силы», определяемым соотношением

$$\vec{\Phi} = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \quad (4.43)$$

которое было введено в п. 3.1.1. Напомним, что в (4.43) \vec{r}_0 есть радиус-вектор, проведенный в точку приложения силы \vec{F} из

точки O , относительно которой данный момент силы рассматривается.

Проведем через точку O координатную z -ось. Проекция вектора \vec{L} на z -ось (обозначим ее через L_z) есть *момент импульса материальной точки относительно z -оси*. Аналогично может быть введен в рассмотрение момент Φ_z силы \vec{F} относительно z -оси (напомним п. 3.1.3).

Пусть вокруг неподвижной оси (z -оси) вращается материальная точка массой m , находящаяся на конце невесомого жесткого стержня длиной R . Точка описывает окружность радиусом R . Найдём момент импульса L_z точки относительно z -оси, если известно, что в рассматриваемый момент времени скорость точки равна \vec{v} .

Чертеж на рисунке 4.11 дан в плоскости, которая перпендикулярна плоскости окружности, описываемой точкой, и проходит через диаметр этой окружности. Плоскость рисунка выбрана так, чтобы в рассматриваемый момент времени вектор скорости точки \vec{v} оказался направленным перпендикулярно к плоскости рисунка прочь от наблюдателя. Поэтому материальная точка изображена на рисунке в виде кружочка с крестиком внутри (наблюдатель как бы смотрит вслед улетающей от него стреле и видит оперение стрелы в виде крестика). На оси вращения (на z -оси) произвольно выбрана точка O и из нее проведен в материальную точку радиус-вектор \vec{r}_0 . Момент импульса \vec{L} относительно точки O , согласно (4.41) и (4.42), равен

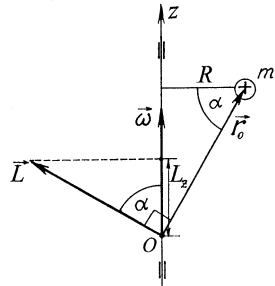


Рис. 4.11

$$\vec{L} = m(\vec{r}_0 \times \vec{v}). \quad (4.44)$$

Легко сообразить, вспомнив свойства векторного произведения векторов, что вектор \vec{L} будет находиться в плоскости рисунка (в плоскости вектора \vec{r}_0 и z -оси) и при этом он будет перпендикулярен вектору \vec{r}_0 (см. рисунок). Так как $\vec{r}_0 \perp \vec{v}$, то модуль вектора \vec{L} равен

$$L = mr_0 v. \quad (1^*)$$

Учитывая, что $v = R\omega$, перепишем (1*) в виде:

$$L = mr_0 R \omega. \quad (2^*)$$

Обозначим через α угол, образуемый вектором \vec{L} с z -осью. Из рисунка видно, что $R = r_0 \cos \alpha$. Отсюда следует, что

$$L = mR^2\omega \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (3^*)$$

Зная модуль вектора \vec{L} , находим его проекцию на z -ось:

$$L_z = L \cos \alpha = mR^2\omega. \quad (4.45)$$

4.3.2. Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения

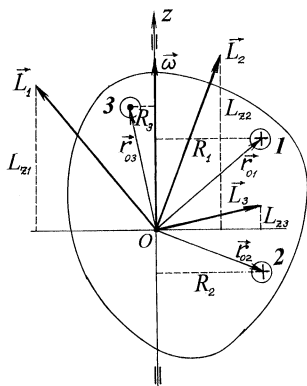


Рис. 4.12

Обобщим результат (4.45) на твердое тело произвольной формы, вращающееся вокруг закрепленной в подшипниках (и значит, неподвижной) оси. Как обычно, представим тело в виде совокупности частиц и будем рассматривать ось вращения в качестве координатной z -оси, направленной параллельно вектору угловой скорости. Выберем произвольно три частицы в теле (частицы 1, 2, 3), оказавшиеся в одной плоскости, и выполним для них чертеж, аналогичный тому, что был выполнен ранее для отдельной материальной точки (рис. 4.12).

Частицы 1 и 2 оказались на рисунке справа от z -оси, их скорости направлены в данный момент времени прочь от наблюдателя (поэтому частицы изображены кружочками с крестиком). Частица 3 оказалась слева от z -оси, ее скорость направлена навстречу наблюдателю (поэтому она изображена кружочком с точкой внутри; точка — это как бы острие стрелы, летящей навстречу наблюдателю). Моменты импульса каждой частицы относительно произвольно выбранной на z -оси точки O описываются соотношениями, аналогичными соотношению (4.44):

$$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_{0i} \times \vec{v}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.46)$$

Здесь m_i — масса i -й частицы, \vec{v}_i — ее скорость в рассматриваемый момент времени, \vec{r}_{0i} — радиус-вектор частицы, проведенный из точки O . Векторы $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3$ показаны на рисунке ($\vec{L}_1 \perp \vec{r}_{01}, \vec{L}_2 \perp \vec{r}_{02}, \vec{L}_3 \perp \vec{r}_{03}$). Из рисунка видно, что проекции L_{z1}, L_{z2}, L_{z3} этих векторов на z -ось положительны. Заметим, что рисунок с

тремя частицами как раз и приведен, чтобы убедиться в этом и затем суммировать L_{zi} для всех частиц тела, не беспокоясь о знаке z -проекции. Итак, для каждой из рассмотренных частиц (и вообще для любой частицы тела) справедливо соотношение, аналогичное соотношению (4.45):

$$L_{zi} = m_i R_i^2 \omega. \quad (4.47)$$

Используя (4.46), выразим момент импульса тела относительно O в виде суммы по всем частицам, составляющим тело:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_{0i} \times \vec{v}_i). \quad (4.48)$$

Используя (4.47), выразим z -проецию момента импульса тела, т. е. момент импульса тела относительно z -оси (оси вращения тела):

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega. \quad (4.49)$$

С учетом (4.26) перепишем (4.49) в виде

$$L_z = J\omega. \quad (4.50)$$

Момент импульса тела относительно некоторой оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Важно обратить внимание на то, что направление момента импульса тела относительно O (момента $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$) *не совпадает* с на-

правлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, т. е. с направлением z -оси. Это продемонстрировал рисунок 4.12 на примере трех частиц. Итак, в общем случае, когда произвольны форма тела и ось вращения, следует помнить, что $\vec{L} \neq J\vec{\omega}$ (хотя выполняется соотношение (4.50)).

Иное дело, если тело обладает *осью симметрии* и ось вращения *совпадает* с осью симметрии. В этом случае для любой частицы в теле найдется в пару ей симметричная по отношению к оси вращения частица и поэтому векторная сумма $\vec{L}_i + \vec{L}_i'$ моментов импульса этих двух частиц относительно произвольной точки на оси вращения окажется направленной по оси вращения, т. е. по направлению угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 4.13). В результате будет выполняться не только соотношение (4.50), но и соотношение

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.51)$$

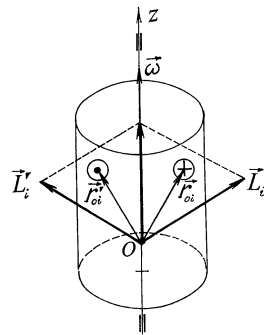


Рис. 4.13

4.3.3. Момент импульса в основном законе динамики вращательного движения

Принимая во внимание, что соотношение (4.50) рассматривается для некоторого момента времени t , перепишем (4.50) в виде:

$$L_z(t) = J\omega(t). \quad (4.52)$$

Здесь $L_z(t)$ — мгновенный момент импульса тела относительно z -оси, $\omega(t)$ — мгновенная угловая скорость.

Обратимся к основному закону динамики вращательного движения: $J\dot{\omega}(t) = \Phi_z(t)$. С учетом (4.7) перепишем выражение для этого закона в виде:

$$J \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \Phi_z(t). \quad (4.53)$$

Подставляя сюда (4.52), находим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_z(t + \Delta t) - L_z(t)}{\Delta t} = \Phi_z(t). \quad (4.54)$$

Используя результат (4.54), можем дать еще одну формулировку основного закона динамики вращательного движения:

Мгновенная быстрота изменения момента импульса тела относительно некоторой оси равна результирующему моменту относительно той же оси всех внешних сил, действующих на тело в данный момент времени.

(Вместо слов «быстрота изменения момента импульса» говорят также «скорость изменения момента импульса». Мы предпочитаем использовать здесь слово «быстрота», поскольку словом «скорость» названа физическая величина, характеризующая быстроту перемещения.)

Если Φ_z не зависит от времени, соотношение (4.54) принимает вид:

$$L_z(t + \Delta t) - L_z(t) = \Phi_z \Delta t \quad (4.55)$$

для любых значений t и Δt .

Примечание

Соотношение (4.54) для вращения тела относительно z -оси аналогично соотношению (2.6) для поступательного движения тела (или движения материальной точки). Чтобы перейти от (2.6) к (4.54), надо заменить импульс $\vec{p}(t)$ на z -проекцию $L_z(t)$ момента импульса тела, а равнодействующую сил $\vec{F}(t)$ — на результирующий момент $\Phi_z(t)$ относительно оси вращения, создаваемый внешними силами, приложенными к телу. Соотношения (4.27), (4.54), (4.55) выражают математически один и тот же закон — основной закон динамики

вращательного движения тела. Точно так же соотношения (2.1), (2.6), (2.7) выражают математически один и тот же закон — второй закон Ньютона.

Заметим, что формулировка (4.54) основного закона динамики вращательного движения является более общей по сравнению с формулировкой (4.27), так как не предполагает, что момент инерции тела постоянен во время вращения. Если он постоянен, формула (4.54) преобразуется в формулу (4.27).

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (4.42) следует, что

$$\text{единица момента импульса} = \text{единица длины} \times \text{единица импульса}$$

Следовательно, единица момента импульса в СИ есть *килограмм-метр в квадрате в секунду* (обозначение: $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$). Килограмм-метр в квадрате в секунду равен моменту импульса материальной точки, обладающей импульсом $1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}$ и находящейся на расстоянии 1 м от точки, относительно которой рассматривается момент импульса.

4.4. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

4.4.1. Главные оси инерции и главные моменты инерции твердого тела

До сих пор не выдвигались какие-либо требования к форме вращающегося тела. При выводе соотношений (4.27) и (4.50) предполагалось, что тело имеет произвольную форму и вращается вокруг произвольно выбранной оси, закрепленной в подшипниках. Обратим внимание на то, что хотя выкладки делались для тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, однако в формулировках выводов (например, в формулировках основного закона вращательного движения) говорилось не о закрепленной оси, а о «некоторой оси вращения». Дело в том, что фиксирование оси вращения не является обязательным при выводе упомянутых формулировок. Среди «некоторых осей вращения» могут быть не только *закрепленные* оси, но и *свободные* оси тела.

Так называют оси, *положение которых в пространстве сохраняется неизменным при вращении вокруг них тела в отсутствие внешнего воздействия*. Свободными осями могут служить *главные оси инерции тела*, определяемые его формой и прежде всего наличием осей симметрии. Если не ограничиваться исполь-

зованием закрепленных осей, то оказывается принципиально важной форма тела, а точнее говоря, расположение в теле главных осей инерции.

Можно доказать (мы это не будем делать), что у тела любой формы есть три взаимно перпендикулярные *главные оси инерции*. Все они проходят через центр масс тела. Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции* (их обозначают через J_1, J_2, J_3). Проведем мысленно всевозможные прямые через центр масс данного тела. Прямая, относительно которой момент инерции тела оказывается наибольшим (обозначим его через J_{\max}) или наименьшим (обозначим через J_{\min}), есть одна из главных осей инерции рассматриваемого тела. Для тела произвольной формы справедливо соотношение:

$$J_{\max} = J_1 \geq J_2 \geq J_3 = J_{\min}. \quad (4.56)$$

Если тело обладает осевой симметрией, т. е. является телом вращения (цилиндр, конус, колокол, рюмка, любая шахматная фигура кроме коня, таблетка, диск и т. п.), то его ось симметрии, вращаясь вокруг которой тело все время совмещается само с собой, является одной из главных осей инерции тела, а именно осью, соответствующей максимальному главному моменту инерции $J_1 = J_{\max}$. Двумя другими главными осями симметрии будут прямые, проходящие через центр масс тела и перпендикулярные как друг к другу, так и к указанной выше главной оси инерции. Соответствующие главные моменты инерции будут равны: $J_2 = J_3 = J_{\min}$.

Главными осями инерции прямоугольного параллелепипеда являются перпендикуляры к его граням, проходящие через центры граней (рис. 4.14, а). Эти перпендикуляры — оси симметрии 2-го порядка (осью симметрии n -го порядка называют прямую, при повороте вокруг которой на угол $\frac{2\pi}{n}$ тело совмещается само с собой). Главные моменты инерции прямоугольного параллелепи-

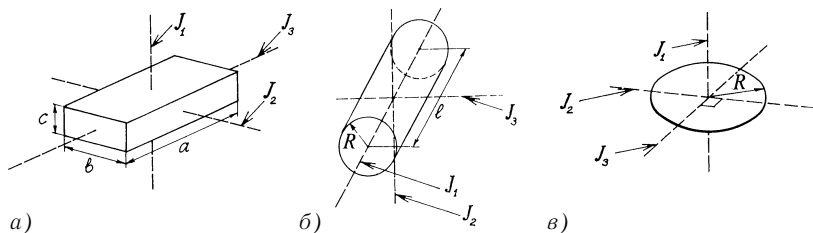


Рис. 4.14

педа массой m со сторонами a , b , c могут быть представлены, с учетом (4.34), в виде:

$$J_1 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2); \quad J_2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2);$$

$$J_3 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2). \quad (4.57)$$

У цилиндра одна из главных осей инерции направлена вдоль его оси, а две другие — любые взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр масс тела и лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра (рис. 4.14, б). Учитывая (4.28) и (4.30), представим главные моменты инерции цилиндра массой m , радиусом R и длиной l в виде:

$$J_1 = \frac{1}{2} mR^2; \quad J_2 = J_3 = m\left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} l^2\right). \quad (4.58)$$

У тонкого диска одна из главных осей инерции — перпендикуляр к плоскости диска, проходящий через его центр, а две другие — любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс и лежащие в плоскости, параллельной плоскости диска (рис. 4.14, в). Учитывая (4.28) и (4.30), представим главные моменты инерции диска массой m и радиусом R :

$$J_1 = \frac{1}{2} mR^2; \quad J_2 = J_3 = \frac{1}{4} mR^2. \quad (4.59)$$

У шара одинаковы все три главных момента инерции. Согласно (4.31), для шара массой m и радиусом R они равны

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5} mR^2. \quad (4.60)$$

Главные оси инерции шара — три любые взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через его центр масс.

4.4.2. Векторы момента импульса и угловой скорости

Если тело вращается вокруг одной из главных осей инерции, то

$$\vec{L}_C = J \vec{\omega}, \quad (4.61)$$

где \vec{L}_C — момент импульса тела относительно его центра масс, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, J — соответствующий главный момент инерции.

Для тел, не имеющих осей симметрии, примем данное утверждение без доказательства. Если же тело обладает осевой симметрией или, подобно прямоугольному параллелепипеду, имеет оси симметрии 2-го порядка, то в этом случае соотноше-

ние (4.61) немедленно следует из (4.51). Ведь \vec{L} в (4.51) — момент импульса относительно любой точки на оси симметрии и, значит, на главной оси инерции тела. Так как последняя проходит через центр масс, то его можно выбрать в качестве «любой точки».

4.4.3. Вращательный дисбаланс

При фиксировании оси вращения стараются учесть расположение главных осей инерции в теле. Главное требование: *ось вращения должна совпадать с одной из главных осей инерции тела*. В отсутствие совпадения будет наблюдаться нежелательное явление, называемое *вращательным дисбалансом*.

? Что такое вращательный дисбаланс и почему он нежелателен?

Рассмотрим вращение своеобразной гантели — невесомого стержня, на концах которого находятся материальные точки массами m . Обсудим три случая.

Случай первый. Главная ось инерции «гантели» (перпендикуляр к стержню, проходящий через центр масс «гантели») составляет угол θ с осью вращения (рис. 4.15, а). На рисунке: $KМ$ — ось вращения, закрепленная при помощи втулок K и M , AB — главная ось инерции «гантели», C — ее центр масс. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с вращающейся «гантелью», учтем центробежные силы инерции $\vec{F}'_{цб}$ и $\vec{F}'_{цб}$ и рассмотрим условие равновесия моментов сил относительно C , которые действуют на «гантель» и жестко связанную с ней ось вра-

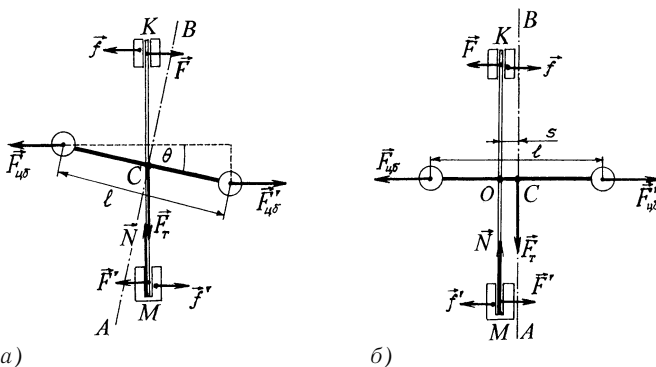


Рис. 4.15

щения. Очевидно, что как сила тяжести «гантели» \vec{F}_T , так и сила реакции опоры \vec{N} не вносят вклада в рассматриваемые моменты. Относительно точки C создает момент пара сил, образованная центробежными силами инерции (модуль момента равен $F_{цб}l \sin \alpha$, где l — длина стержня). Этот момент стремится повернуть «гантель» вместе с осью вращения в направлении против часовой стрелки (см. рисунок). Понятно, что должен существовать компенсирующий момент сил, действующий в направлении по часовой стрелке. Такой момент создают силы бокового давления на ось вращения со стороны втулок — силы \vec{F} и \vec{F}' на рисунке. Согласно третьему закону Ньютона, ось будет действовать на втулки с равными по модулю и противоположно направленными силами — с силой $\vec{f} = -\vec{F}$ на втулку K и с силой $\vec{f}' = -\vec{F}'$ на втулку M . Вместе с вращением «гантели» силы \vec{f} и \vec{f}' вращаются вокруг оси KM и, естественно, способствуют расшатыванию и изнашиванию втулок.

Случай второй. Главная ось инерции «гантели» параллельна оси вращения KM , но отстоит от нее на расстоянии s (рис. 4.15, б). Переходя в систему отсчета, связанную с «гантелью», и введя центробежные силы инерции, рассмотрим условие равновесия моментов сил относительно точки O . Так как линии действия сил $\vec{F}_{цб}$, $\vec{F}'_{цб}$, \vec{N} проходят через точку O , то указанные силы не создают моментов относительно O . Относительно O создает момент сила тяжести «гантели» \vec{F}_T ; он стремится повернуть «гантель» с осью вращения в направлении по часовой стрелке. Модуль этого момента равен $2mgs$. Компенсирующие моменты, действующие в направлении против часовой стрелки, создают силы бокового давления на ось вращения со стороны втулок — силы \vec{F} и \vec{F}' . По третьему закону Ньютона, ось будет действовать на втулки K и M соответственно с силами \vec{f} и \vec{f}' ($\vec{f} = -\vec{F}$, $\vec{f}' = -\vec{F}'$). Эти силы будут, очевидно, постепенно расшатывать и изнашивать втулки.

Случай третий. Главная ось инерции «гантели» совпадает с осью вращения KM . Нетрудно сообразить, что в этом случае не возникают силы бокового давления втулок на ось вращения. Соответственно не возникают и противодействующие силы со стороны оси на втулки. В принципе, мы могли бы вообще убрать втулки — и тогда наша «гантель» уподобилась бы вращающемуся волчку.

Рассмотренный здесь третий случай — это случай, когда вращение тела вокруг закрепленной оси *сбалансировано*. Это тот самый случай, когда выполняется соотношение (4.61) для вращающегося тела. В случаях же первом или втором наблюдается вра-

щательный дисбаланс, проявляющийся в возникновении бокового давления со стороны оси вращения на втулки. В этих случаях соотношение (4.61) не выполняется (хотя, конечно, остается справедливым соотношение (4.50)).

На практике при применении быстро вращающихся массивных тел (например, роторов турбин и электродвигателей, а также колес автомобилей и железнодорожных вагонов) весьма важно исключить вращательный дисбаланс. Если ротор или колесо хорошо сбалансированы (их главные центры инерции достаточно точно совпадают с закрепленными осями вращения), то они будут вращаться плавно, без биений.

4.5. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ВЕКТОРНОМ ВИДЕ

Основной закон динамики вращательного движения, выражаемый формулой (4.27) или в более общем виде формулой (4.54), — это *скалярный* закон. В нем участвуют *скалярные величины*: проекции момента импульса и момента силы на направление фиксированной оси вращения. Предполагая в дальнейшем рассмотреть также вращение тела вокруг свободных осей, т. е. незакрепленных главных осей инерции тела, найдем выражение для *основного закона вращательного движения в векторном виде*. В этом законе момент импульса тела и момент силы выступают как *векторы*.

Приведем два случая, когда момент импульса рассматривается относительно произвольной неподвижной точки и центра масс тела.

С л у ч а й п е р в ы й. Начнем с рассмотрения момента импульса материальной точки массой m относительно некоторой неподвижной точки O . В этом случае он определяется соотношением, аналогичным соотношению (4.44):

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t),$$

где $\vec{p}(t)$ — импульс материальной точки, $\vec{r}(t)$ — ее радиус-вектор, проведенный из O . Пусть на точку действует сила $\vec{F}(t)$ (ее природа сейчас несущественна). Это приводит к изменению импульса точки

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) \approx \vec{F}(t) \Delta t,$$

где Δt — малый промежуток времени. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ данное приближенное равенство превращается в строгое выражение для второго закона Ньютона (напомним (2.6)):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}(t). \quad (1^*)$$

Обозначим через $\overrightarrow{\Delta L}$ изменение момента импульса материальной точки за промежутки времени от t до $t + \Delta t$; $\overrightarrow{\Delta L} = \vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t)$. Можно показать, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t). \quad (2^*)$$

Выведем соотношение (2*). Учитывая, что $\vec{L}(t + \Delta t) = \vec{r}(t + \Delta t) \times \vec{p}(t + \Delta t)$ и используя обозначения $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, $\overrightarrow{\Delta p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$, представим:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta L} &= \vec{r}(t + \Delta t) \times \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \\ &= [\vec{r}(t) + \overrightarrow{\Delta r}] \times [\vec{p}(t) + \overrightarrow{\Delta p}] - \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \\ &= \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) + \overrightarrow{\Delta r} \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \overrightarrow{\Delta p} + \overrightarrow{\Delta r} \times \overrightarrow{\Delta p} - \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \\ &= \overrightarrow{\Delta r} \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \overrightarrow{\Delta p} + \overrightarrow{\Delta r} \times \overrightarrow{\Delta p}. \end{aligned}$$

Слагаемым $\overrightarrow{\Delta r} \times \overrightarrow{\Delta p}$ можно пренебречь, поскольку при перемножении двух малых величин получается величина второго порядка малости. Поделив обе части равенства $\overrightarrow{\Delta L} = \overrightarrow{\Delta r} \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \overrightarrow{\Delta p}$ на Δt , получим

$$\frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \right) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} \right).$$

Учитывая (1*) и (1.6), перепишем это соотношение в виде:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \vec{v}(t) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{F}(t).$$

Первое слагаемое в правой части равенства обращается в нуль, так как $\vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$, а векторное произведение вектора самого на себя равно нулю. В результате приходим к соотношению (2*).

Согласно (4.43), векторное произведение $\vec{r}(t) \times \vec{F}(t)$ есть момент $\vec{\Phi}(t)$ относительно 0, создаваемый силой $\vec{F}(t)$. Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} = \vec{\Phi}(t). \quad (4.62)$$

Это соотношение выражает **закон для момента импульса материальной точки**.

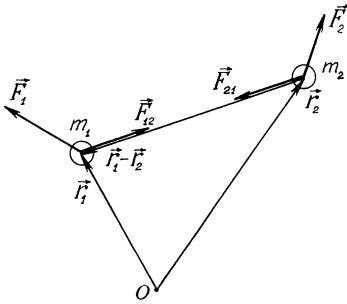


Рис. 4.16

Обратим внимание: момент импульса материальной точки и момент силы рассматривались относительно произвольной неподвижной точки.

Рассмотрим две материальные точки массами m_1 и m_2 , между которыми действуют внутренние силы $\vec{F}_{12}(t)$ и $\vec{F}_{21}(t)$. Кроме того, на каждую точку действует внешняя сила; на точку массой m_1 действует

сила $\vec{F}_1(t)$, а на точку массой m_2 —

сила $\vec{F}_2(t)$ (рис. 4.16). Обозначим через \vec{L}_1 и \vec{L}_2 моменты импульса материальных точек относительно неподвижной точки O , а через \vec{L} суммарный момент импульса системы: $\vec{L}(t) = \vec{L}_1(t) + \vec{L}_2(t)$. Согласно (4.62), представим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t} = \vec{r}_1(t) \times \vec{F}_1(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{F}_{12}(t);$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2(t) + \vec{r}_2(t) \times \vec{F}_{21}(t).$$

Складывая эти равенства и учитывая, что в соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = r_1(t) \times F_1(t) + r_2(t) \times \vec{F}_2(t) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}(t). \quad (3^*)$$

Так как линии действия векторов $\vec{F}_{12}(t)$ и $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ совпадают (см. рисунок), то

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times F_{12}(t) = 0. \quad (4^*)$$

Итак, моменты внутренних сил взаимно компенсируются и остаются моменты только внешних сил:

$$\Phi_1(t) = \vec{r}_1(t) \times \vec{F}_1(t) \text{ и } \Phi_2(t) = \vec{r}_2(t) \times \vec{F}_2(t). \quad (5^*)$$

Учитывая (4*) и (5*), перепишем (3*) в виде:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} = \vec{\Phi}_1(t) + \vec{\Phi}_2(t). \quad (4.63)$$

Это соотношение выражает закон для момента импульса системы из двух взаимодействующих материальных точек.

Результат (4.63) легко обобщается на случай, когда рассматривается твердое тело. Мысленно разбиваем тело на совокупность частиц, каждую из которых можно уподобить материальной точке. Обозначим через $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ момент импульса i -й частицы, а через $\vec{\Phi}_i(t)$ момент внешней силы, действующей на i -ю частицу (если, конечно, на данную частицу внешняя сила действует). Далее воспользуемся соотношением (4.63), в котором заменим $\vec{L}(t)$ и $\vec{\Phi}_1(t) + \vec{\Phi}_2(t)$ на соответствующие суммы по всем частицам тела, т. е. на $\sum_i \vec{L}_i(t)$ и $\sum_i \vec{\Phi}_i(t)$. В результате получим **основной закон динамики вращательного движения для момента импульса тела относительно произвольно выбранной неподвижной точки**:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} = \vec{\Phi}(t). \quad (4.64)$$

Здесь:

$$\vec{L}(t) = \sum_i \vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t); \quad (4.64, a)$$

$$\vec{\Phi}(t) = \sum_i \vec{\Phi}_i(t) = \sum_i \vec{r}_i(t) \times \vec{F}_i(t) \quad (4.64, б)$$

($\vec{r}_i(t)$ — радиус-вектор i -й частицы тела, проведенный из неподвижной точки, $\vec{F}_i(t)$ — внешняя сила, действующая на i -ю частицу).

Мгновенная быстрота изменения момента импульса тела, рассматриваемого относительно некоторой неподвижной точки, равна суммарному моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на тело в данный момент времени.

Формула (4.64) похожа на формулу (4.54), в которой фигурировали момент импульса тела и суммарный момент внешних сил относительно не точки, а некоторой оси. В отличие от (4.54), закон (4.64) является **векторным законом**.

Случай второй. Предположим теперь, что момент импульса тела рассматривается не относительно некоторой неподвижной точки O , а *относительно центра масс тела* C . Радиус-вектор $\vec{r}_i(t)$ i -й частицы тела, проведенный из неподвижной точки O , и радиус-вектор $\vec{r}_{iC}(t)$ той же точки, проведенный из центра масс C , связаны соотношением

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_{iC}(t) + \vec{r}_C(t), \quad (4.65)$$

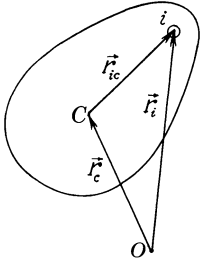


Рис. 4.17

где $\vec{r}_C(t)$ — радиус-вектор центра масс тела (рис. 4.17). Момент импульса тела относительно неподвижной точки O будем по-прежнему обозначать через $\vec{L}(t)$, а для момента импульса относительно центра масс введем обозначение $\vec{L}_C(t)$. Понятно, что

$$\vec{L}(t) = \sum_i \vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t); \quad (1^*)$$

$$\vec{L}_C(t) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{p}_i(t). \quad (2^*)$$

Можно показать, что

$$\vec{L}(t) = \vec{L}_C(t) + \vec{r}_C(t) \vec{p}(t); \quad (4.66)$$

$$\vec{\Delta L} = \vec{\Delta L}_C + \vec{\Delta r}_C \times \vec{p}(t) + \vec{r}_C(t) \times \vec{\Delta p}; \quad (4.67)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta L}_C}{\Delta t} + \sum_i \vec{r}_C(t) \times \vec{F}_i(t). \quad (3^*)$$

Здесь $\vec{p}(t) = \sum_i \vec{p}_i$ — импульс тела (напомним, что $\vec{p}(t) = m \vec{v}_C(t)$, где m — масса тела, $\vec{v}_C(t)$ — скорость его центра масс), $\vec{F}_i(t)$ — внешняя сила, действующая на i -ю частицу.

Сделаем выкладки, в ходе которых будут получены соотношения (4.66), (4.67), (3*). Используя (4.65), перепишем (1*) в виде:

$$\vec{L}(t) = \sum_i [\vec{r}_{iC}(t) + \vec{r}_C(t)] \times \vec{p}_i(t) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{p}_i(t) + \vec{r}_C(t) \times \vec{p}(t).$$

С учетом (2*) получаем отсюда соотношение (4.66). Далее рассмотрим $\vec{L}(t + \Delta t)$, где Δt — малый промежуток времени. С учетом (4.66) запишем:

$$\begin{aligned} \vec{L}(t + \Delta t) &= \vec{L}_C(t + \Delta t) + [\vec{r}_C(t) + \vec{\Delta r}_C] \times [\vec{p}(t) + \vec{\Delta p}] = \\ &= \vec{L}_C(t + \Delta t) + \vec{r}_C(t) \times \vec{p}(t) + \vec{\Delta r}_C \times \vec{p}(t) + \vec{r}_C(t) \times \vec{\Delta p} + \vec{\Delta r}_C \times \vec{\Delta p}. \end{aligned} \quad (4^*)$$

Слагаемым $\vec{\Delta r}_C \times \vec{\Delta p}$ пренебрежем как величиной второго порядка малости, после чего, вычитая $\vec{L}(t)$ из (4*) и используя (4.66), приходим к соотношению (4.67). Разделим (4.67) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta L}_C}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}_C}{\Delta t} \right) \times \vec{p}(t) + \vec{r}_C(t) \times \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta p}}{\Delta t} \right). \quad (5^*)$$

Поскольку $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}_C}{\Delta t} = \vec{v}_C(t)$ и $\vec{p}(t) = m\vec{v}_C(t)$, то

$$\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}_C}{\Delta t} \right) \times \vec{p}(t) = 0. \quad (6^*)$$

Учтем далее, что

$$r_C(t) \times \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} \right) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{F}_i(t). \quad (7^*)$$

Подставив (6*) и (7*) в (5*), получим соотношение (3*).

Используя (4.65), преобразуем (3*) к виду:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}_C}{\Delta t} + \sum_i \vec{r}_i(t) \times \vec{F}_i(t) - \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{F}_i(t). \quad (8^*)$$

Первая сумма в правой части равенства (8*) есть суммарный момент $\vec{\Phi}(t)$ внешних сил относительно неподвижной точки O , а вторая сумма — суммарный момент $\vec{\Phi}_C(t)$ внешних сил относительно центра масс тела. Поэтому перепишем (8*) в виде:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}_C}{\Delta t} + \Phi(t) - \Phi_C(t). \quad (9^*)$$

Согласно (4.64), $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \Phi(t)$. Учитывая это, из (9*) получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{L}_C(t+\Delta t) - \overrightarrow{L}_C t}{\Delta t} = \vec{\Phi}_C(t). \quad (4.68)$$

Здесь:

$$\vec{L}_C(t) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{p}_i(t); \quad (4.68, a)$$

$$\Phi_C(t) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{F}_i(t) \quad (4.68, б)$$

($\vec{r}_{iC}(t)$ — радиус-вектор i -й частицы тела, проведенный из центра масс тела, $\vec{F}_i(t)$ — внешняя сила, действующая на i -ю частицу).

Соотношение (4.68) выражает основной закон динамики вращательного движения для момента импульса тела относительно его центра масс.

Мгновенная быстрота изменения момента импульса тела, рассматриваемого относительно центра масс тела, равна суммарному моменту действующих на тело внешних сил, также рассматриваемому относительно центра масс тела.

4.6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА В МЕХАНИКЕ

4.6.1. Закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг закрепленной оси

Пусть в момент времени t_1 момент импульса тела или системы тел относительно закрепленной оси (z -оси) есть $L_z(t_1)$, а в момент t_2 есть $L_z(t_2)$. Согласно (4.55), разность $L_z(t_2) - L_z(t_1)$ равна

$$L_z(t_2) - L_z(t_1) = \Phi_z(t_2 - t_1), \quad (4.69)$$

где Φ_z — постоянный на промежутке времени от t_1 до t_2 суммарный момент внешних сил относительно z -оси. Так как тело вращается вокруг закрепленной в подшипниках оси, то принципиально нельзя исключить действие на него внешних сил. Однако можно допустить, что на тело действуют такие внешние силы, результирующий момент которых относительно оси вращения равен нулю:

$$\Phi_z = 0. \quad (4.70)$$

Если выполняется условие (4.70), то из (4.69) заключаем, что для произвольных моментов времени t_2 и t_1 момент импульса одинаков, т. е. момент импульса тела сохраняется:

$$L_z = J\omega = \text{const}. \quad (4.71)$$

Мы пришли к **закону сохранения момента импульса тела**, вращающегося вокруг закрепленной оси. Его можно сформулировать следующим образом:

Если результирующий момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то момент импульса тела (системы тел) относительно этой оси сохраняется во времени.

Отметим одно интересное отличие закона сохранения момента импульса от закона сохранения импульса. Согласно закону сохранения импульса, внутренние силы не могут изменить скорость поступательного движения тела. Однако было бы неправильно утверждать, что внутренние силы не могут изменить угловую скорость вращающегося тела. Если вращающееся тело не является твердым и одни его части могут под действием внутренних сил изменить свое положение относительно других частей, то в этом случае наряду с изменением момента инерции тела изменится его угловая скорость. Следует иметь в виду, что закон сохранения момента импульса говорит о сохранении не самой угловой скорости, а *произведения момента инерции тела на угловую скорость*.

Рассмотрим наглядный пример: экспериментатор сидит на вращающемся стуле, держа в вытянутых в разные стороны руках по гантели. Второй человек сообщает стулу с экспериментатором некоторое вращение. Если во время вращения экспериментатор поднесет руки с гантелями к груди и тем самым уменьшит собственный момент инерции, то его угловая скорость заметно увеличится.

Если тело состоит из нескольких частей, способных самостоятельно вращаться вокруг одной и той же оси, то L_z в (4.71) превращается в алгебраическую сумму

$$\sum_j L_{zj} = \sum_j J_j \omega_j = \text{const}, \quad (4.72)$$

где J_j и ω_j — момент инерции и z -проекция угловой скорости j -й части тела, соответственно. Моменты импульса частей тела, вращающихся в одну сторону, берутся с одним знаком, а в другую сторону — с другим знаком.

Если частей тела только две, то (4.72) принимает вид:

$$L_{z1} - L_{z2} = J_1 \omega_1 - J_2 \omega_2 = \text{const}. \quad (4.73)$$

Допустим, что вначале момент импульса системы из двух тел с моментами инерции J_1 и J_2 был равен нулю. В соответствии с законом сохранения момента импульса он должен оставаться равным нулю и после того, как начали действовать внутренние силы, которые привели тело с моментом инерции J_1 во вращение с угловой скоростью ω_1 . Чтобы общий момент импульса системы остался равным нулю, тело с моментом инерции J_2 должно начать

вращаться в обратную сторону с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{\omega_1 J_1}{J_2}$.

Приведем два примера, иллюстрирующих проявление закона сохранения момента импульса в подобных ситуациях.

Первый пример. Известно, что когда автомобиль с задними ведущими колесами трогается с места, он как бы «оседает» на задние колеса, а когда останавливается — «оседает» на передние колеса. Это явление можно объяснить, используя закон сохранения момента импульса. Когда автомобиль трогается с места, его задние колеса приобретают благодаря действию внутренних сил (начал работать мотор) момент импульса относительно задней оси, отвечающий вращению против часовой стрелки. Немедленно у корпуса автомобиля возникает обратный по направлению момент импульса, отвечающий вращению по часовой стрелке (рис. 4.18, а). Когда автомобиль останавливается, действие тормоза приводит к появлению у передних колес момента импульса, отвечающего вращению по часовой стрелке. У корпуса автомобиля немедленно возникает обратный по направлению момент импульса,

отвечающий вращению против часовой стрелки (рис. 4.18, б). При очень резком торможении на переднюю пару колес может даже произойти перевортывание автомобиля (он может совершить кувырок по направлению движения).

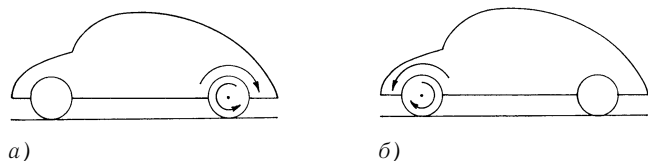


Рис. 4.18

Второй пример. Когда несущий винт вертолета начинает вращаться под действием внутренних сил, обусловленных работой двигателя, у фюзеляжа вертолета появляется, в силу закона сохранения момента импульса, момент импульса, направленный в обратную сторону. Можно вообразить такую картину: у зависшего над землей вертолета винт быстро вращается в одну сторону, а фюзеляж медленно вращается в обратную сторону. Момент инерции фюзеляжа много больше момента инерции винта, поэтому фюзеляж вращается с угловой скоростью, значительно меньшей

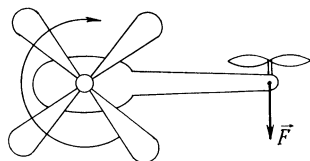


Рис. 4.19

угловой скорости вращения винта. Чтобы фюзеляж не начал вращаться, его требуется затормозить. Это обычно делают, используя внешнюю силу \vec{F} , создаваемую при взаимодействии с воздушной средой дополнительного винта, ось вращения которого перпендикулярна к оси вращения несущего винта (рис. 4.19). Вот почему у фюзеляжа вертолета есть довольно длинный «хвост» с дополнительным боковым винтом на конце. Чем длиннее этот «хвост», тем меньшая сила \vec{F} потребует для того, чтобы предотвратить вращение корпуса вертолета при работающем несущем винте. Боковой винт может отсутствовать. Тогда применяют два несущих винта, вращающихся в противоположных направлениях.

4.6.2. Закон сохранения момента импульса тела в векторном виде

Предположим, что суммарный момент действующих на тело внешних сил, рассматриваемый относительно центра масс тела,

не зависит от времени. В этом случае соотношение (4.68) принимает вид

$$\vec{L}_C(t + \Delta t) - \vec{L}_C(t) = \vec{\Phi}_C \Delta t \quad (4.74)$$

для любых значений t и Δt . Если выполняется условие

$$\vec{\Phi}_C = 0, \quad (4.75)$$

то из (4.74) следует, что для любых t и Δt : $\vec{L}_C(t + \Delta t) = \vec{L}_C(t)$. Мы пришли к закону сохранения момента импульса тела, согласно которому момент относительно центра масс тела равен

$$\vec{L}_C = \overrightarrow{\text{const}}. \quad (4.76)$$

Если суммарный момент внешних сил относительно центра масс тела равен нулю, то момент импульса тела относительно его центра масс сохраняется во времени.

Примечание

В рассуждениях, подводящих к закону сохранения момента импульса, здесь (как и в п. 4.6.1) присутствует своеобразный промежуточный этап: на основе предположения о постоянстве во времени суммарного момента сил, действующих на тело, используется соотношение (4.74) (в п. 4.6.1 использовалось соотношение (4.69)). Однако можно было бы вполне обойтись без указанного промежуточного этапа и упомянутых соотношений. Достаточно воспользоваться соотношением (4.68). Из него следует, что если $\vec{\Phi}_C = 0$, то быстрота изменения момента импульса тела (рассматриваемого в данном случае относительно центра масс) равна нулю. А нулевая быстрота изменения момента импульса как раз и означает отсутствие его изменения, т. е. сохранение момента импульса во времени.

Рассматривая момент импульса тела относительно произвольной неподвижной точки, можно аналогичным путем прийти к еще одному векторному закону сохранения момента импульса, исходя из (4.64):

$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{const}}, \text{ если } \vec{\Phi} = 0 \quad (4.77)$$

(здесь \vec{L} и $\vec{\Phi}$ — соответственно момент импульса тела и суммарный момент внешних сил, рассматриваемые относительно произвольной неподвижной точки). Вот формулировка этого закона сохранения:

Если суммарный момент внешних сил относительно некоторой неподвижной точки равен нулю, то момент импульса тела относительно этой точки сохраняется во времени.

Предположим, что тело каким-то образом заставили вращаться (раскрутили) вокруг одной из его главных осей инерции. Предположим также, что равен нулю суммарный момент внешних сил относительно центра масс тела, т. е. выполнено условие (4.75). Из (4.75) следует, что $\vec{L}_C = \overline{\text{const}}$, а из того факта, что тело вращается вокруг главной оси инерции, следует, что момент импульса \vec{L}_C и угловая скорость вращения тела $\vec{\omega}$ связаны соотношением $\vec{L}_C = J\vec{\omega}$, где J — соответствующий главный момент инерции тела (напомним (4.61)). Исходя из этих двух равенств, заключаем, что

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_C}{J} = \overline{\text{const}}. \quad (4.78)$$

Когда суммарный момент внешних сил, рассматриваемый относительно центра масс тела, равен нулю, угловая скорость вращения тела вокруг какой-либо из его главных осей инерции сохраняется по модулю и направлению.

В данном случае ось вращения тела оказывается неподвижной, хотя она и не закреплена. Это и есть *свободная ось вращения*. Такое вращение тела называют *свободным вращением* или, иначе, *инерционным вращением*.

Достаточно яркий пример инерционного вращения — вращение Земли и других планет вокруг собственных осей, т. е. вокруг главных осей инерции. (Напомним, что у шара любой его диаметр является главной осью инерции с главным моментом инерции $J = \frac{2}{5}mR^2$, где m — масса шара, а R — его радиус.)

Направление свободной оси вращения земного шара практически не изменяется со временем; оно образует угол $66,5^\circ$ с плоскостью орбиты Земли. Свободная ось вращения Венеры ориентирована перпендикулярно к плоскости орбиты планеты, а свободная ось вращения Урана лежит практически в плоскости орбиты планеты.

Велосипедист во время движения сохраняет вертикальную ориентацию благодаря тому, что сохраняется направление момента импульса (а значит, и угловой скорости) вращающихся колес. Пожалуй, наиболее впечатляющим примером практического применения векторного закона сохранения момента импульса, рассматриваемого относительно центра масс тела, являются гироскопы.

4.6.3. Гироскоп

Гироскоп представляет собой тело, обладающее осевой симметрией (тело вращения), которое быстро вращается в специальном подвесе, позволяющем произвольно ориентировать оси вращения гироскопа в любом направлении в пространстве. Гироскоп с подвесом показан на рисунке 4.20. Внешнее кольцо *1* может вращаться вокруг закрепленной на стойке *2* оси AA_1 . Внутри кольца *1* находится внутреннее кольцо *3*, ось вращения которого BB_1 перпендикулярна к оси AA_1 . Внутри кольца *3* вращается во-

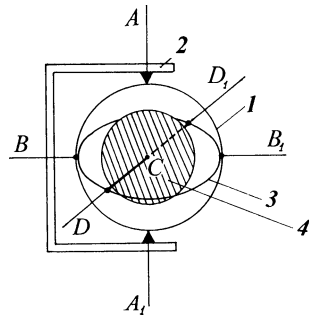


Рис. 4.20

кругу оси DD_1 гироскоп *4*; ось DD_1 перпендикулярна к оси BB_1 . Поворачивая соответствующим образом кольца *1* и *3*, можно сориентировать ось вращения гироскопа DD_1 в заданном направлении.

Благодаря такому устройству подвеса оказывается равным нулю рассматриваемый относительно центра масс гироскопа суммарный момент сил, действующих на гироскоп. Поэтому момент импульса гироскопа относительно его центра масс сохраняется: $\vec{L}_C = \overline{\text{const}}$. А поскольку ось DD_1 является главной осью инерции гироскопа, то произвольно заданное направление оси вращения гироскопа будет оставаться постоянным во времени, как бы ни изменялись в пространстве положение и ориентация стойки *2*. Ось вращения гироскопа является его свободной осью; вектор угловой скорости есть $\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_C}{J} = \overline{\text{const}}$, где J — максимальный главный момент инерции гироскопа.



Гироскоп — основной элемент всех гироскопических приборов, к которым относятся указатели курса, поворота, горизонта, автопилоты, гирокомпасы и т. д. Корпус таких приборов может как угодно поворачиваться, но ось быстро вращающегося (с частотой до нескольких тысяч оборотов в секунду) гироскопа будет сохранять неизменным свое направление. Гироскопические приборы применяются для автоматического управления движением кораблей и самолетов. Гироскоп, находящийся внутри ракеты, позволяет контролировать и корректировать ее полет.

4.6.4. Прецессия волчка

Предположим, что при раскручивании обычного волчка мы постарались сделать так, чтобы его ось вращения (она же главная ось инерции волчка) была ориентирована *вертикально*. На волчок

действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, причем последние две силы приложены в точке касания волчка с полом. Учитывая это, воспользуемся законом динамики вращательного движения (4.64). В качестве неподвижной точки O выберем точку приложения сил \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$, т. е. точку пересечения оси волчка с полом. Силы \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ не вносят вклада в суммарный момент сил относительно O . Момент силы тяжести волчка тоже равен нулю при условии, что ось вращающегося волчка строго вертикальна. Следовательно, момент импульса \vec{L} волчка относительно точки O в данном случае *сохраняется* ($\vec{L} = \text{const}$) и выполняется соотношение

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{J} = \text{const}, \quad (1^*)$$

где J — момент инерции волчка относительно его оси, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости. Ось вращения волчка является его свободной осью; вертикальное направление оси вращения (а значит, и вектора угловой скорости) сохраняется во времени.

Но вот мы *отклонили* ось быстро вращающегося волчка на некоторый угол θ от вертикали. Мы увидим, что при этом волчок не падает; он продолжает вращаться с угловой скоростью ω вокруг своей оси, но сама ось начинает вращаться с относительно небольшой угловой скоростью вокруг вертикали, описывая в пространстве коническую поверхность (рис. 4.21, а). Обозначим через $\vec{\Omega}$ вектор угловой скорости вращения оси волчка вокруг вертикали. Отметим, что $\Omega \ll \omega$ и что указанное вращение оси волчка происходит в ту же сторону, что и вращение волчка вокруг своей оси. Это явление называют *прецессией волчка*, а угловую скорость $\vec{\Omega}$ — *угловой скоростью прецессии*.

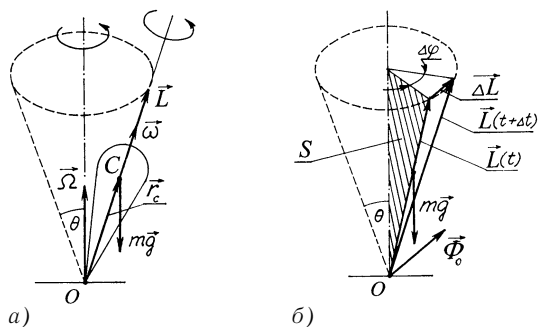


Рис. 4.21

Появление прецессии означает, что направление оси вращения волчка уже не сохраняется неизменным и, значит, теперь эта ось не является свободной осью волчка. Теперь $\vec{L} \neq \overline{\text{const}}$ и $\vec{\omega} \neq \overline{\text{const}}$, хотя продолжает выполняться соотношение

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{J} \quad (2^*)$$

(ведь ось волчка остается одной из его главных осей инерции).

? Почему теперь перестал выполняться закон сохранения момента импульса, рассматриваемого относительно точки O ?

Причина очевидна — при наклоне оси вращения появился момент силы относительно O , обусловленный силой тяжести волчка $m\vec{g}$:

$$\vec{\Phi}_0(t) = \vec{r}_C(t) \times m\vec{g}, \quad (3^*)$$

где $\vec{r}_C(t)$ — радиус-вектор центра масс волчка, проведенный из точки O . Направлен вектор $\vec{\Phi}_0(t)$ перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}_C(t)$ и $m\vec{g}$ в соответствии с правилом правого винта. На рисунке 4.21, b плоскость векторов $\vec{r}_C(t)$ и $m\vec{g}$ обозначена через $S(t)$ и показана штриховкой. Модуль вектора $\vec{\Phi}_0(t)$ не зависит от времени; он равен

$$\Phi_0 = r_C m g \sin \theta, \quad (4^*)$$

где r_C — расстояние от точки O до центра масс волчка C .

Выберем достаточно малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$. За этот промежуток времени момент $\vec{\Phi}_0(t)$ обеспечивает изменение момента импульса волчка $\vec{\Delta L}$, определяемое, согласно (4.64), соотношением

$$\vec{\Delta L} = \vec{\Phi}_0(t) \Delta t. \quad (5^*)$$

Вектор $\vec{\Delta L}$ направлен, как и вектор $\vec{\Phi}_0(t)$, перпендикулярно плоскости $S(t)$. Это изменение момента импульса $\vec{\Delta L}$ означает, что за промежуток времени Δt вектор момента импульса волчка $\vec{L}(t)$ должен повернуться вокруг вертикальной оси на угол (см. рисунок)

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta}. \quad (6^*)$$

С учетом (4*) и (5*) получаем из (6*):

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Phi_0}{L \sin \theta} = \frac{r_C m g}{L}. \quad (7^*)$$

Вектор $\vec{L}(t)$ вращается вокруг вертикальной оси вместе с плоскостью $S(t)$; при этом модуль L этого вектора остается неизменным. Согласно (2*), $L = J\omega$. Подставляя это соотношение в (7*), находим

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{r_C mg}{J\omega}.$$

Понятно, что $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \Omega$. Таким образом, мы получаем связь между модулями угловой скорости прецессии Ω и угловой скорости волчка ω :

$$\Omega = \frac{r_C mg}{J\omega}. \quad (4.78, a)$$

Чем больше ω , тем медленнее происходит прецессия.



Обратим внимание: сила тяжести тянет вращающийся волчок вниз, но это приводит к тому, что конец вектора момента импульса волчка \vec{L} (а значит, и конец оси вращения волчка) *смещается не вниз, а в горизонтальном направлении* и начинает описывать окружность вокруг вертикали, проходящей через точку O .

Можно сказать, что под действием силы тяжести ось волчка поворачивается книзу, но это привело к смещению конца оси в горизонтальном направлении. При любой попытке повернуть ось волчка (и вообще любого гироскопа) наблюдается это своеобразное явление, называемое *гироскопическим эффектом*. Если, например, гироскоп вращается вокруг координатной z -оси, а какая-то сила стремится повернуть его ось вокруг x -оси, то ось гироскопа будет поворачиваться вокруг y -оси.

4.7. ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

4.7.1. Основные уравнения динамики твердого тела

Представлению движения твердого тела в общем случае как *поступательного движения центра масс тела, на которое накладывается вращательное движение тела вокруг его центра масс*, соответствует описание динамики твердого тела при помощи **двух векторных уравнений** — соответственно для импульса тела $\vec{p}(t)$ и для момента импульса тела $\vec{L}_C(t)$ относительно центра масс тела.

Первое уравнение имеет вид:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \vec{F}(t). \quad (4.79)$$

Здесь:

$$\vec{p}(t) = \sum_i \vec{p}_i(t), \quad (4.79, a)$$

$$\vec{F}(t) = \sum_i \vec{F}_i(t). \quad (4.79, б)$$

Тело мысленно представляем состоящим из материальных точек (частиц); $\vec{p}_i(t)$ и $\vec{F}_i(t)$ — соответственно импульс i -й частицы и внешняя сила, действующая на i -ю частицу.

Напомним, что $\vec{p}(t) = m\vec{v}_C(t)$: импульс твердого тела равен импульсу материальной точки, масса которой равна массе m тела, а скорость равна скорости $\vec{v}_C(t)$ центра масс тела. Легко видеть, что уравнение (4.79) есть не что иное, как второй закон Ньютона для материальной точки, являющейся центром масс тела и имеющей массу всего тела.

Поскольку $\vec{p}(t) = m\vec{v}_C(t)$, для постоянной массы тела уравнение (4.79) можно переписать в виде:

$$m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_C(t+\Delta t) - \vec{v}_C(t)}{\Delta t} = \vec{F}(t), \text{ или } m\vec{a}_C(t) = \vec{F}(t), \quad (4.80)$$

где $\vec{a}_C(t)$ — ускорение центра масс тела.

Второе уравнение — это уравнение (4.68):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{L}_C(t+\Delta t) - \vec{L}_C(t)}{\Delta t} = \vec{\Phi}_C(t).$$

Здесь (см. (4.68, *a*) и (4.68, *б*)):

$$\vec{L}_C(t) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{p}_i(t),$$

$$\vec{\Phi}_C(t) = \sum_i \vec{r}_{iC}(t) \times \vec{F}_i(t),$$

где $\vec{r}_{iC}(t)$ — радиус-вектор i -й частицы тела, проведенный из центра масс тела. Это есть основной закон динамики вращательного движения для момента импульса тела относительно его центра масс.

Уравнения (4.79) и (4.80) описывают *поступательное движение центра масс тела*, а уравнение (4.68) — *вращательное движение тела вокруг его центра масс*.

4.7.2. Основные уравнения динамики плоского движения

В общем случае динамика твердого тела описывается *двумя векторными* уравнениями (4.80) (или (4.79)) и (4.68), т. е. *шестью скалярными* уравнениями, которые получаются, если спроецировать указанные векторные уравнения на три координатные оси (x -, y -, z -оси).

В случае *плоского (плоскопараллельного)* движения все точки тела и в том числе его центр масс движутся в плоскостях, параллельных одной и той же плоскости. В качестве координатной xy -плоскости рассмотрим плоскость, в которой движется центр масс тела. Поступательное движение центра масс описывается двумя скалярными уравнениями:

$$ma_{Cx}(t) = F_x(t), \quad (4.81)$$

$$ma_{Cy}(t) = F_y(t), \quad (4.82)$$

где a_{Cx} и a_{Cy} — соответствующие проекции вектора \vec{a}_C .

Направление момента импульса тела при плоском движении перпендикулярно xy -плоскости. Следовательно, L_{Cx} и L_{Cy} равны нулю и поэтому надо рассматривать только скалярное уравнение для $L_{Cz}(t)$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L_{Cz}(t + \Delta t) - L_{Cz}(t)}{\Delta t} = \Phi_{Cz}(t), \quad (4.83)$$

которое для постоянного момента инерции относительно z -оси можно представить в виде:

$$J \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \Phi_{Cz}(t), \text{ или } J\beta(t) = \Phi_{Cz}(t). \quad (4.84)$$

Отметим, что (4.83) и (4.84) — это уже известные нам уравнения (4.54) и (4.27), соответственно. Но только теперь z -ось не закреплена в подшипниках, а проходит через центр масс тела.

Итак, динамика плоского движения описывается не двумя векторными уравнениями (4.80) и (4.68), которым соответствуют шесть скалярных уравнений, а всего лишь *тремя скалярными* уравнениями — *двумя* для поступательного движения центра масс тела в xy -плоскости (уравнениями (4.81) и (4.82)) и *одним* для вращения тела вокруг z -оси, проходящей через центр масс тела (уравнением (4.84) или в более общем виде уравнением (4.83)).

4.7.3. Скатывание цилиндра (колеса) по наклонной плоскости

В качестве конкретного примера плоского движения рассмотрим скатывание цилиндра (колеса) массой m и радиусом R по наклонной плоскости с углом наклона α . Будем полагать, что скатывание происходит без проскальзывания. На цилиндр действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.22). Так как скатывание происходит без проскальзывания, то $\vec{F}_{\text{тр}}$ есть сила трения покоя.

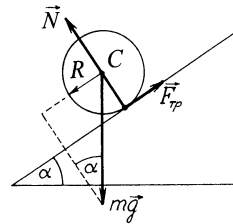


Рис. 4.22

Модуль скорости $\vec{v}_C(t)$ центра масс цилиндра в момент времени t равен

$$v_C(t) = R\omega_A(t), \quad (1^*)$$

где $\omega_A(t)$ — угловая скорость цилиндра относительно точки A , являющейся в момент t мгновенным центром вращения. Обозначим через $\omega(t)$ мгновенную угловую скорость цилиндра в системе отсчета, связанной с осью (угловую скорость вращения вокруг оси, проходящей через центр масс цилиндра). Согласно (4.14),

$$\omega(t) = \omega_A(t). \quad (4.85)$$

С учетом (4.85) перепишем соотношение (1*) в виде:

$$v_C(t) = R\omega(t). \quad (2^*)$$

Модуль угловой скорости центра масс цилиндра равен произведению его радиуса на угловую скорость вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Модуль ускорения \vec{a}_C центра масс цилиндра есть

$$a_C = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_C(t + \Delta t) - v_C(t)}{\Delta t}.$$

Подставляя сюда (2*), получим:

$$a_C = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}$$

или, с учетом (4.6),

$$a_C = R\beta, \quad (4.86)$$

где β — угловое ускорение цилиндра в системе отсчета, связанной с его осью (a_C и β в данном случае постоянны, поскольку приложенные к цилиндру силы не изменяются во времени).

Говоря о динамике движения цилиндра, отметим, что можно обойтись одним скалярным уравнением для поступательного движения центра масс, так как он движется по прямолинейной траектории. В итоге имеем два скалярных уравнения, описывающих динамику скатывания цилиндра:

$$ma_C = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}; \quad (4.87)$$

$$J\beta = RF_{\text{тр}}, \quad (4.88)$$

где J — момент инерции цилиндра относительно оси вращения.

Система трех уравнений (уравнений (4.86)—(4.88)) содержит три неизвестных ($F_{\text{тр}}$, a_C , β). Решая эту систему, находим:

$$F_{\text{тр}} = mg \frac{J \sin \alpha}{J + mR^2}; \quad (4.89, a)$$

$$a_C = g \frac{mR^2 \sin \alpha}{J + mR^2}; \quad (4.89, б)$$

$$\beta = \frac{gmR^2 \sin \alpha}{J + mR^2}. \quad (4.89, в)$$

Подставив сюда $J = \frac{1}{2}mR^2$, получим:

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha; \quad (4.90, a)$$

$$a_C = \frac{2}{3}g \sin \alpha; \quad (4.90, б)$$

$$\beta = \frac{2}{3}g \frac{\sin \alpha}{R}. \quad (4.90, в)$$

4.7.4. Скатывание шара по наклонной плоскости

Как и в случае с цилиндром, будем полагать, что шар скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона α . Масса шара m , радиус шара R . На скатывающийся шар, как и на цилиндр, действуют три силы: сила тяжести, сила реакции опоры, сила трения покоя. Обозначим через a_C модуль ускорения центра масс шара, а через β — угловое ускорение вращения шара вокруг оси, проходящей через его центр. Выражения для a_C и β , а также силы трения находим из соотношений

(4.89, $a—в$), подставив в них выражение для момента инерции шара $J = \frac{2}{5} mR^2$. В результате получим:

$$F_{\text{тр}} = \frac{2}{7} mg \sin \alpha; \quad (4.91, a)$$

$$a_C = \frac{5}{7} g \sin \alpha; \quad (4.91, б)$$

$$\beta = \frac{5}{7} g \frac{\sin \alpha}{R}. \quad (4.91, в)$$

Задача. Шар скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона α . В верхней точке, находящейся на высоте h , шар покоился. За какое время шар достигнет нижней точки наклонной плоскости?

□ Искомое время есть время T , в течение которого центр масс шара, движущийся с ускорением a_C , пройдет расстояние $l = \frac{h}{\sin \alpha}$, рав-

ное длине наклонной плоскости. Согласно (1.26), $l = \frac{1}{2} a_C T^2$. Следова-

тельно, $T = \sqrt{\frac{2l}{a_C}} = \sqrt{\frac{2h}{a_C \sin \alpha}}$. Подставляя сюда (4.91, б), находим:

$$T = \frac{\sqrt{14h}}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{g}{5}}. \text{ Результат не зависит ни от массы, ни от радиуса шара. } \blacksquare$$

4.7.5. Условие отсутствия проскальзывания катящегося тела

Тела будут не *скатываться* по плоскости, а *скользить* по ней, если коэффициент трения скольжения μ для наклонной плоскости и цилиндра или шара равен нулю (плоскость подобна идеально гладкому льду). Так как в данном случае трение покоя отсутствует, то не может возникнуть момент, который заставил бы тело вращаться вокруг оси, проходящей через его центр масс.

Согласно (4.86) и (4.88), модуль $F_{\text{тр}}$ силы трения покоя при качении цилиндра или шара радиусом R без проскальзывания равен

$$F_{\text{тр}} = \frac{J\beta}{R} = \frac{J a_C}{R^2}, \quad (4.92)$$

где J и a_C — соответственно момент инерции и модуль ускорения центра масс цилиндра (шара). Для отсутствия проскальзывания

необходимо, чтобы определяемая соотношением (4.92) сила трения покоя оказалась *меньше максимальной силы трения покоя*, равной по модулю μN , где μ — коэффициент трения скольжения данного тела по данной плоскости, N — модуль силы реакции опоры. Таким образом, *условие отсутствия проскальзывания катящегося тела* имеет вид:

$$\frac{J a_C}{R^2} < \mu N. \quad (4.93)$$

Если катится цилиндр массой m , то нужно в (4.93) подставить $J = \frac{1}{2} mR^2$. В результате получим неравенство:

$$\frac{1}{2} m a_C < \mu N. \quad (4.93, a)$$

Если катится шар массой m , то нужно в (4.93) подставить $J = \frac{2}{5} mR^2$. В результате получим неравенство:

$$\frac{2}{5} m a_C < \mu N. \quad (4.93, б)$$

При скатывании цилиндра по наклонной плоскости с углом наклона α ускорение a_C определяется соотношением (4.90, б), а модуль N силы реакции опоры равен $mg \cos \alpha$. Учитывая это, получим из (4.93, а):

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha < \mu. \quad (4.94, a)$$

При скатывании шара ускорение a_C определяется соотношением (4.91, б). Учитывая это и полагая $N = mg \cos \alpha$, из (4.93, б) получим

$$\frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha < \mu. \quad (4.94, б)$$

Предположим, что цилиндр массой m и радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости под действием постоянной горизонтальной силы тяги \vec{F} ; коэффициент трения скольжения равен μ . Найдем условие отсутствия проскальзывания. Решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_C &= R\beta; \\ m a_C &= F - F_{\text{тр}}; \\ \frac{1}{2} m R^2 \beta &= R F_{\text{тр}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.95)$$

можно найти a_C , β , $F_{\text{тр}}$. Нетрудно видеть, что

$$a_C = \frac{2}{3} \frac{F}{m}. \quad (4.96)$$

Условие отсутствия проскальзывания (4.93, a) принимает в данном случае вид:

$$\frac{1}{3} F < \mu mg. \quad (4.97)$$

Задача (рис. 4.23). Цилиндр массой m_1 катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости под действием груза массой m_2 , который подвешен на нити, перекинутой через невесомый блок. Какому условию должен удовлетворять коэффициент трения скольжения цилиндра по плоскости, чтобы цилиндр катился без проскальзывания?

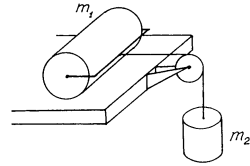


Рис. 4.23

□ На рисунке показаны силы, действующие на цилиндр и на груз. Чтобы найти требуемое условие для коэффициента трения скольжения μ , воспользуемся неравенством (4.97), которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{1}{3} T < \mu m_1 g. \quad (1^*)$$

Силу реакции нити T находим, решая систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_1 a &= T - F_{\text{тр}}; \\ m_2 a &= m_2 g - T; \\ F_{\text{тр}} &= \frac{1}{2} m_1 a, \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

где a — модуль ускорения груза и центра масс цилиндра (последнее уравнение в (2*) получается из (4.86) и (4.88)). В результате находим:

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{3m_1 + 2m_2}. \quad (3^*)$$

Подставив (3*) в (1*), получим требуемое условие:

$$\mu > \frac{m_2}{3m_1 + 2m_2}. \quad \blacksquare$$

4.7.6. Почему останавливаются шар и цилиндр, катящиеся по горизонтальной плоскости?



Рассмотрим, казалось бы, простую ситуацию. Толкнули шар; он катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, постепенно замедляясь, и в конце концов останавливается. Почему это происходит?

На шар действуют силы: тяжести $m\vec{g}$ (m — масса шара), реакции опоры \vec{N} и трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.24, а). Абсолютно твердый шар соприкасается с абсолютно твердой плоскостью в единственной точке (точке A на рисунке), которая является, очевидно, точкой приложения сил \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ в рассматриваемый момент времени. Ускорение центра масс шара есть $\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_{\text{тр}}}{m}$. Оно направлено навстречу направлению движения этого центра. Поэтому и происходит замедление движения катящегося шара. Казалось бы, ответ на поставленный выше вопрос очевиден.

Однако не будем торопиться с выводами и учтем, что на поступательное движение центра масс шара C накладывается вращение шара вокруг оси, проходящей через центр масс. Силы \vec{N} и $m\vec{g}$ не могут вращать шар вокруг C ; это делает сила $\vec{F}_{\text{тр}}$. Она создает момент, который вращает шар по часовой стрелке (см. рисунок) и равен по модулю

$$\Phi_{\text{тр}} = RF_{\text{тр}}, \quad (1^*)$$

где R — радиус шара. Этот момент должен вращать шар вокруг C с угловым ускорением $\beta = \frac{RF_{\text{тр}}}{J}$, где J — момент инерции шара.

Налицо парадокс. Получается, что сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ замедляет шар, если рассматривать поступательную составляющую движения шара, и она же ускоряет шар, если рассматривать вращательную составляющую его движения. В чем же дело?

Дело в том, что в данном случае нельзя считать шар и плоскость абсолютно твердыми, т. е. недеформируемыми. В действительности происходит деформация под воздействием силы тяжести шара и вместо точки контакта шара и плоскости возникает некоторая область контакта. Предположим для простоты, что деформируется только шар. Тогда вместо рисунка 4.24, а следовало бы рассматривать рисунок 4.24, б, имея в виду, что на нем размеры об-

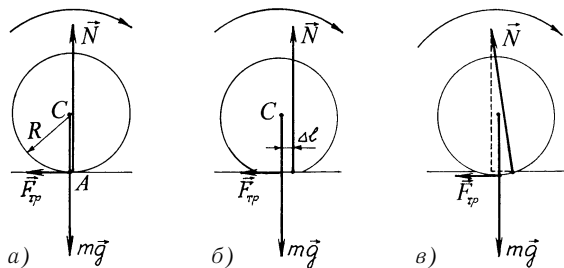


Рис. 4.24

ласти контакта сильно преувеличены ради наглядности. На рисунке точка приложения силы \vec{N} смещена вперед по направлению движения центра масс шара на некоторую величину Δl , поскольку шар, наваливаясь на переднюю часть области контакта, оказывает на нее большее давление, нежели на заднюю часть области. В результате возникает момент силы \vec{N} относительно C , равный по модулю

$$\Phi_N = \Delta l N = \Delta l mg. \quad (2^*)$$

Действие момента $\vec{\Phi}_N$ противоположно действию момента $\vec{\Phi}_{\text{тр}}$. Если $\Delta l mg > RF_{\text{тр}}$, то вращение шара вокруг C будет происходить равнозамедленно с угловым ускорением, равным по модулю

$$\beta = \frac{\Phi_N - \Phi_{\text{тр}}}{J} = \frac{\Delta l mg - RF_{\text{тр}}}{J}. \quad (3^*)$$

Из (3*) следует, что замедление вращения будет более быстрым при более сильно выраженной деформации шара (возрастает Δl) и для более массивных шаров.

Впрочем, не следует придавать большого значения результату (3*). Достаточно того, что он помог разрешить парадокс, о котором мы говорили. Действительность оказывается сложнее, так как при контакте *деформируется не только шар, но и поверхность, по которой он катится* (так что правильнее было бы использовать не рисунок 4.24, б, а рисунок 4.24, в). Когда шар катится по некоторой поверхности, он не только немного *сжимается*, но и немного *вдавливается* в поверхность. В результате он все время как бы вкапывается на горку. Одновременно происходит отрыв задней части шара от поверхности, чему препятствуют молекулярные силы сцепления шара с поверхностью. Оба явления создают эффект торможения — как если бы на шар действовала некоторая тормозящая сила. Ее принято именовать *силой трения качения*.

Опытным путем установлено, что модуль F_k силы трения качения можно выразить формулой:

$$F_k = \frac{\mu_k N}{R}, \quad (4.98)$$

где μ_k — так называемый *коэффициент трения качения*. Он имеет размерность длины и в СИ выражается в метрах. Этот коэффициент зависит от материала взаимодействующих тел и состояния их поверхностей. Чем тверже поверхности, тем меньше вдавливание и тем меньше трение качения. Обратим внимание на то, что вдавливание уменьшается также при уменьшении массы шара и увеличении его радиуса, что и выражает формула (4.98).

При рассмотрении скатывания шара или цилиндра по наклонной плоскости, а также их качения под действием некоторой силы тяги мы пренебрегли силой трения качения и пользовались моделью абсолютно твердого тела, которое катится по абсолютно твердой поверхности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

4.1. Пластина в форме квадрата $ABCD$ со стороной $a = 20$ см равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ (4 оборота в секунду) вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через точку D . Чему равны модули скорости точек A и B , а также центра квадрата?

4.2. Железнодорожный вагон катится по рельсам. Есть ли на колесе вагона точки, мгновенная скорость которых в неподвижной системе отсчета: а) равна нулю, б) направлена навстречу движению вагона?

4.3. Тело равномерно вращается, делая в минуту 20,5 оборотов. На какой угол повернется тело за 2 с? Выразите в радианах и градусах.

4.4. Тело вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\beta = 40 \text{ рад/с}^2$. Чему равна угловая скорость тела через $T = 5$ с от начала вращения? Сколько оборотов сделает тело за 5 с?

4.5. Ротор центрифуги начинает вращаться с некоторым ускорением и через 40 с достигает угловой скорости 2000 рад/с. Чему равно среднее угловое ускорение ротора за 40 с?

4.6. Угловое ускорение тела описывается выражением

$$\beta = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \text{ для любых } t$$

и Δt . Что можно сказать о характере вращения тела?

4.7. Две параллельные доски движутся в противоположные стороны с одинаковыми по модулю скоростями v . Между досками зажат цилиндр радиусом R . Проскальзывание между цилиндром и досками отсутствует. Чему равна угловая скорость вращения цилиндра относительно его оси? Чему равна скорость центра масс цилиндра?

4.8. Кривошип OC , вращаясь с постоянной угловой скоростью Ω , приводит в движение колесо радиусом R , катящееся без проскальзывания по неподвижному колесу радиусом R' (рис. 4.25). Чему равен модуль скорости точки B катящегося колеса? Чему равна угловая скорость вращения колеса вокруг его центра?

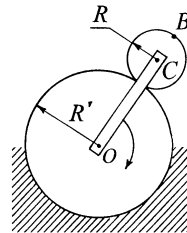


Рис. 4.25

4.9. Является ли момент инерции тела аддитивной величиной?

4.10. Тело представляет собой твердую невесомую квадратную рамку со стороной квадрата a ; в вершинах квадрата находят-

ся материальные точки масса-ми m . Чему равен момент инерции тела относительно оси, кото-рая: а) проходит через центр масс тела перпендикулярно к плос-кости квадрата, б) является диагональю квадрата, в) про-ходит через вершину квадрата перпендикулярно к его плос-кости, г) проходит через вер-шину квадрата параллельно его диагонали?

4.11. Чему равен момент инер-ции куба относительно перпен-дикуляра к грани, проходящего через ее центр? Масса куба m , длина ребра a .

4.12. Чему равен момент инер-ции куба относительно его реб-ра? Масса куба m , длина реб-ра a .

4.13. Тело представляет собой твердый невесомый стержень, на концах которого находятся ша-ры массами m и радиусами r . Расстояние между центрами шаров l . Чему равен момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр масс тела?

Подсказка. Искомый момент инерции складывается из моментов инерции каждого шара относительно рассматриваемой оси.

4.14. Чему равен момент инер-ции шара массой m и ради-усом r относительно прямой, являющейся касательной к по-верхности шара?

4.15. Выберем произвольно диа-метр земной орбиты. В каких пределах изменяется момент инерции земного шара относи-тельно выбранного диаметра

за время оборота Земли вокруг Солнца? Масса Земли m , ра-диус земного шара r , радиус орбиты R .

4.16. Тело — невесомый твер-дый стержень длиной l , на кон-цах которого находятся мате-риальные точки массами m_1 и m_2 . Найдите центр масс тела, не пользуясь условием равно-весия моментов сил тяжести, но используя теорему Штейне-ра для момента инерции тела.

4.17. На концах нити, переки-нутой через блок, подвешены грузы массами m_1 и m_2 . Найдите ускорение центра масс системы грузов в случае, когда массой блока можно пренеб-речь.

Подсказка. Искомое ускорение

$$\text{есть } \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}.$$

4.18. Решите предыдущую за-дачу, учитывая массу блока m .

4.19. Тело в виде твердого не-весомого стержня длиной l с материальными точками мас-сами m на концах вращается с угловой скоростью ω вокруг z -оси, проходящей через центр масс C , как показано на ри-

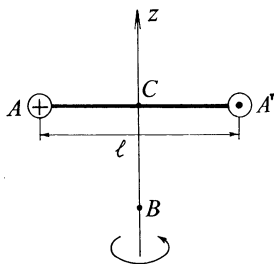


Рис. 4.26

сунке 4.26; $AC = BC$. Чему равен модуль момента импульса тела относительно точки B ? Куда направлен этот момент? Найдите также момент импульса тела относительно z -оси.

4.20. Чему равен модуль момента импульса правой материальной точки на рисунке 4.26, рассматриваемого относительно точки B ? Куда направлен этот момент? Те же вопросы для момента импульса относительно точки C .

4.21. Точильный камень массой $m = 2$ кг в форме цилиндра радиусом $r = 10$ см ускоряют при постоянном ускорении до угловой скорости $\omega = 4000$ рад/с за время $T = 4$ с. Найдите момент силы относительно оси вращения точильного камня, который должен создавать двигатель.

4.22. Колесо массой m и радиусом r стоит вертикально на полу, касаясь ступеньки высотой h ($h < r$). Какую минимальную силу в горизонтальном направлении надо приложить к оси колеса, чтобы оно вкатилось на ступеньку?

Подсказка. Следует рассмотреть моменты действующих на колесо сил относительно точки касания колеса со ступенькой.

4.23. Ротор центрифуги имеет момент инерции относительно оси вращения, равный $J = 0,03$ кг·м². Он вращается, делая $n = 250$ оборотов в секунду. Под действием момента сил трения $\Phi = 0,5$ Н·м ротор останавливается. Какое время потребовалось для его остановки? Чему равно число

оборотов, которое ротор успел совершить до остановки?

4.24. Тело, представленное в задаче 4.10, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, которая: а) проходит через центр масс тела перпендикулярно к плоскости квадрата, б) является диагональю квадрата. Чему равны моменты импульса тела относительно указанных осей?

4.25. В центре горизонтальной платформы массой M , имеющей форму диска радиусом R , закреплен куб массой m со стороны ребра a . Платформа с кубом вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Чему равен момент импульса системы «платформа—куб» относительно оси вращения?

4.26. Горизонтальная платформа массой M и радиусом R вращается с угловой скоростью ω . На краю платформы стоит человек массой m . С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек переместится в точку, находящуюся на расстоянии r от центра платформы? Человека можно здесь рассматривать как материальную точку.

4.27. Человек массой m находится на неподвижной круглой платформе массой M и радиусом R , которая может вращаться вокруг вертикальной оси симметрии платформы. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек начнет двигаться по окружности радиусом r со скоростью v относительно платформы?

Подсказка. Следует учесть, что в неподвижной системе отсчета модуль скорости движущегося по платформе человека равен ($v \rightarrow \omega r$), где ω — искомая угловая скорость платформы.

4.28. К краю круглой платформы массой M и радиусом R подвешен на нити длиной l ($l \ll R$) шарик массой m . Платформа вращается с угловой скоростью ω . С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если нить вдруг оборвется?

4.29. Волчок массой 150 г вращается с угловой скоростью 160 рад/с. Ось волчка прецессирует с угловой скоростью 0,8 рад/с. Чему равен момент инерции волчка, если его центр масс находится на расстоянии 5 см от точки касания волчка с полом?

4.30. По наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ катится

без проскальзывания обруч, толщина которого много меньше его радиуса. Чему равно ускорение центра масс обруча? Какому условию должен удовлетворять коэффициент трения скольжения μ обруча по плоскости, чтобы обруч катился без проскальзывания?

4.31. В задаче, для которой был использован рисунок 4.23, нужно учесть массу m блока и найти: а) ускорение груза, б) силы натяжения нити по разные стороны от блока, в) условие, которому должен удовлетворять коэффициент трения скольжения μ цилиндра по плоскости, чтобы цилиндр катился без проскальзывания.

4.32. Цилиндр или шар быстрее скатится по наклонной плоскости? Зависит ли ответ от массы и радиуса скатывающихся тел?

5

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

5.1. ЧТО ЕСТЬ ЭНЕРГИЯ?

Мы широко пользуемся словом «энергия». На каждом шагу мы встречаемся с разными видами энергии. Однако не так-то просто дать исчерпывающее определение понятия энергии.

5.1.1. «Энергейя» в переводе с греческого означает «деятельность»

Сама по себе энергия не есть деятельность. Но без нее *никакая деятельность невозможна*. Все, что сотворили люди, создано не только их разумом, но и с помощью энергии. И функционирует все созданное человеком тоже благодаря энергии. Работают заводы и комбинаты, мчатся автомобили и поезда, летят авиалайнеры и ракеты, вещают радиостанции и телестудии — везде используется энергия. В каждый дом поступает по электрическим проводам энергия. Повернуть переключатель на распределительном щите и «обесточить» квартиру — это значит лишить ее энергии и тем самым прекратить функционирование осветителей и нагревателей, холодильника и стиральной машины, телевизора и компьютера.

Чтобы совершались многообразные процессы в нашем организме, необходима энергия. Мы получаем ее вместе с пищей. Иногда человек вдруг начинает ощущать резкий упадок сил и должен срочно съесть хотя бы кусок сахара. В таких случаях говорят, что у него обнаружилась «энергетическая яма», т. е. ему не хватает энергии.

По мере развития человеческого общества все более обостряется проблема использования существующих и поиска новых *источников энергии*. Есть специальная наука, называемая *энергетикой*. Она изучает вопросы получения, преобразования, переда-

чи, использования энергии. Мерой технического прогресса и материального благосостояния страны служит средняя потребляемая энергия, приходящаяся в год на одного человека.

Энергия обеспечивает не только деятельность людей, но и «деятельность природы». Течение рек и движение облаков, выпадение осадков и таяние снегов, возникновение ветров и тайфунов, образование гор и разрушение горных массивов, землетрясения и извержения вулканов, жизнедеятельность растений и животных — все это происходит благодаря энергии. Ее источником являются солнечное излучение и земные недра.

5.1.2. Энергия существует в разных видах и превращается из одного вида в другой

Есть не одна, а много разных энергий. Есть кинетическая энергия (энергия движущегося с некоторой скоростью тела). Есть потенциальная энергия тела, поднятого над землей, и потенциальная энергия деформированного тела, например, сжатой пружины. Есть внутренняя энергия тела, зависящая от его температуры (ее называют также тепловой энергией). Есть химическая энергия, содержащаяся в различных химических соединениях и, в частности, в горючих ископаемых и пищевых продуктах. Есть электрическая, световая, звуковая, атомная энергии.

? Возникает вопрос: об одной ли и той же физической величине следует говорить во всех этих случаях? Не имеем ли мы дело с *разными* физическими величинами, которые, к тому же, описываются разными формулами?

Важно подчеркнуть, что речь идет об *одной и той же физической величине, которая может существовать в разных видах*. Доказательством тому служит *способность энергии превращаться из одного вида в другой, сохраняясь в количественном отношении*.

Превращения энергии происходят во всех процессах в природе и технике. Можно получить энергию в одном виде, хранить ее в другом, передавать в третьем, расходовать в четвертом (или даже в нескольких видах). Так, можно получить энергию в виде электрической энергии (воспользовавшись обычной электрической розеткой), хранить ее в аккумуляторе в виде химической энергии и расходовать в виде световой энергии (в осветителях), тепловой энергии (в электронагревателях), кинетической энергии (в электродвигателях, например, в стиральной машине).

Мы сидим у костра. Берем в руку сухую ветку. В ней хранится химическая энергия, которая когда-то была световой энергией солнечных лучей. Кладем ветку в огонь, и она вспыхивает. У нас на

глазах запасенная в ветке химическая энергия превращается в световую и тепловую энергии. Какая-то часть превращается в звуковую энергию (ветка потрескивает), а какая-то — в кинетическую (ветка вздрагивает и выгибается).

5.1.3. Энергия способна накапливаться и храниться

Можно ли накопить и хранить, например, силу? Еще Ньютон отмечал, что «сила по прекращении действия на тело не остается в теле». Принципиально нельзя «накачать силу» в каком-либо тренажерном зале, чтобы впоследствии при необходимости ее «расходовать».

А вот энергию можно «накачать», можно *хранить* ее и *расходовать*. Это как раз и происходит, когда заряжают электрический аккумулятор, сжимают пружину или просто поднимают тело над землей. Во всех этих телах энергия накапливается и может сохраняться какое-то время. Потом аккумулятор разрядится, пружина распрямится, тело будет падать. Это значит, что хранившаяся в телах энергия будет израсходована, а точнее сказать, превратится в энергию другого вида, будет передана другим телам.

Нельзя говорить о «запасе силы», но можно говорить о *запасе энергии*. Световая энергия солнечных лучей превратилась в формировавшиеся на планете веками *энергоносители* — уголь, газ, нефть. *Запасы* энергоносителей — это, по сути дела, и есть запасы энергии, существующие в данном случае в виде химической энергии.

Слово «энергоноситель» не должно создавать представления об энергии как о некоей *материальной субстанции*. Материальной субстанцией является не сама энергия, а энергоноситель, т. е. вещество, *обладающее определенной способностью*. Например, способностью приводить в действие двигатель автомобиля. Эту способность (способность привести в действие двигатель или, в общем случае, *совершить какую-то работу*) следует рассматривать в качестве основной характеристики энергии.

Поскольку в куске угля хранится какое-то количество энергии, то можно подумать, что по сжиганию угля энергия исчезнет, будучи «израсходована». Уточним: исчезнет кусок угля, но содержавшаяся в нем энергия отнюдь не исчезнет. Она изменит вид и перейдет к другим телам. Химическая энергия куска угля превратится в тепловую энергию окружающего воздуха и камня, внутри которого сгорел тот уголь.

Сила рождается и исчезает; она рождается, когда возникает взаимодействие тел, и исчезает, когда взаимодействие прекращается.

Энергия не рождается и не исчезает; она переходит от одних тел к другим, превращается из одного вида в другой, оставаясь при этом неизменной в количественном отношении.

Такова сущность одного из наиболее важных законов природы — закона сохранения энергии. Можно сказать, что энергия неуничтожима подобно тому, как неуничтожимо проявляющееся в разных формах движение материи.

5.1.4. Энергия как общая мера различных форм движения материи

Как уже отмечалось, *скорость* есть мера (количественная характеристика) быстроты изменения положения тела, *ускорение* — мера быстроты изменения скорости, *сила* — мера действия одного тела на другое, *масса* — мера инертности поступательно движущегося тела, *момент инерции* — мера инертности вращающегося тела. А как относиться к энергии? Мерой чего она является? Может быть, следует считать энергию *мерой движения*?

На протяжении веков обсуждался вопрос о том, что следует полагать «мерой движения». Первая попытка определить «меру движения» была предпринята Галилео Галилеем, который ввел для нее специальную величину, названную им «моментом» (от латинского *momentum*, означающего «движущая сила, толчок»). Рене Декарт полагал мерой движения произведение массы тела на его скорость mv , т. е. импульс (количество движения) тела. Готфрид Лейбниц не согласился с этим и выбрал в качестве меры движения величину mv^2 , назвав ее «живой силой». Гюстав Кориолис

предложил считать мерой движения величину $\frac{mv^2}{2}$, называемую ныне кинетической энергией. Герман Гельмгольц расширил представление о мере движения, дополнив «живую силу» Лейбница «напряженной силой» (прообразом потенциальной энергии). Он писал: «Если живая сила проявляет себя только в движении тел, то напряженная сила — в упругих, химических, электрических и других явлениях». Сам термин «энергия» в смысле, близком к современному, ввел в науку Томас Юнг. Поддерживая точку зрения Лейбница, Юнг в своих «Лекциях по естественной философии» отмечал: «Произведение массы тела на квадрат его скорости естественно называть энергией».

Откроем современную энциклопедию на слове «энергия». Читаем: «Энергия — общая мера различных форм движения материи... Вследствие существования закона сохранения энергии понятие энергии связывает воедино все явления природы». По сути дела, такое общее определение энергии логически вытекает уже из того, что движение материи реализуется в различных формах, которые, будучи взаимосвязанными, переходят друг в друга. Коль скоро это так, то должно существовать нечто, что

связывало бы между собой разные формы движения материи, нечто сохраняющееся при взаимных переходах. Этим «нечто» естественно считать *энергию* — физическую величину, существующую в разных видах и способную превращаться из одного вида в другой, передаваться от тела к телу, сохраняясь в количественном отношении.

Чтобы перейти от общих замечаний об энергии к конкретной работе с этой физической величиной, продолжим разговор о силе и введем связанную с ней физическую величину, называемую *работой силы*.

5.2. РАБОТА СИЛЫ

Понятие работы широко применяется в человеческой практике. Фактически любой вид деятельности связывают с работой. Работают комбайнер в поле, рабочий у станка, шофер за рулем автомобиля, учитель у доски в классе, руководитель предприятия в своем кабинете, писатель за письменным столом и так далее, и так далее. Все они так или иначе трудятся. Слово «труд» может считаться синонимом слова «работа».

Мы же будем рассматривать работу с точки зрения физики. Конкретнее говоря, будем рассматривать *работу силы*.

5.2.1. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути

Предположим, что на тело действует сила \vec{F} , и точка приложения силы перемещается (вместе с телом) по некоторой траектории от точки M до точки N . Возможны разные случаи. Сила \vec{F} может быть постоянной по направлению и модулю, но может быть переменной (изменяющейся при перемещении точки приложения силы от M к N). Траектория точки приложения силы может быть прямолинейной, но может быть и криволинейной.

Начнем с рассмотрения случая, когда сила \vec{F} *постоянна*, а траектория точки ее приложения *прямолинейна*.

Работа постоянной силы \vec{F} на прямолинейном участке пути длиной s равна

$$A = Fs \cos \beta, \quad (5.1)$$

где β — угол между направлением силы и направлением, в каком перемещалась точка ее приложения.

Если указанные направления совпадают ($\beta = 0$), формула (5.1) принимает вид:

$$A = Fs. \quad (5.2)$$

Если $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\beta > 0$ и, следовательно, $A > 0$. В этом случае говорят, что сила совершила *положительную работу* на пути s .

Если $\beta = \frac{\pi}{2}$, то $A = 0$, т. е. *сила не совершила работы* на пути s .

Если $\frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$, то $A < 0$ — сила совершила на пути s *отрицательную работу*.

Обратим внимание на то, что работа является *скалярной* физической величиной. Нельзя сказать, что она куда-то направлена.

Наряду с понятием «*работа силы на участке пути*» используется понятие «*работа силы на перемещении*». Перемещение $\vec{\Delta r}$ есть вектор, проведенный из начальной точки пути M в конечную точку N .

Работа постоянной силы \vec{F} на перемещении $\vec{\Delta r}$ равна

$$A = F\Delta r \cos\beta, \quad (5.3)$$

где β — угол между векторами \vec{F} и $\vec{\Delta r}$.

Иначе говоря,

работа постоянной силы \vec{F} на перемещении $\vec{\Delta r}$ есть скалярное произведение векторов \vec{F} и $\vec{\Delta r}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}. \quad (5.4)$$

Легко видеть, что соотношение (5.3) (а значит, и (5.4)) эквивалентно соотношению (5.1), поскольку для прямолинейного участка пути $s = \Delta r$. Когда траектория точки приложения силы прямолинейна, понятия «*работа силы на участке пути*» и «*работа силы на перемещении*» имеют, очевидно, один и тот же смысл. Если же траектория точки приложения силы криволинейна, указанные понятия, вообще говоря, различаются. Ведь длина s траектории (длина пути) в этом случае больше модуля Δr перемещения (рис. 5.1). Впрочем, различие исчезает, если сила постоянна, о чем мы поговорим немного позднее (в п. 5.2.4).

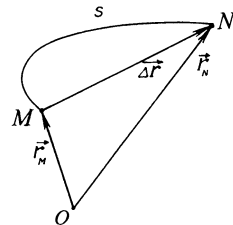


Рис. 5.1

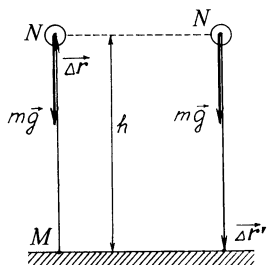


Рис. 5.2

Рассмотрим два примера (рис. 5.2). В первом тело массой m подбросили вертикально вверх; обозначим через $\vec{\Delta r}$ его перемещение до некоторой точки N . Во втором тело падает из точки N вертикально вниз; обозначим через $\vec{\Delta r}'$ его перемещение до точки падения. Точка N находится на высоте h , так что $\Delta r = \Delta r' = h$. В обоих случаях на тело действует только сила тяжести $m\vec{g}$. В первом случае эта сила совершила на перемещении $\vec{\Delta r}$ отрицательную работу:

$$A = m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r} = mgh \cos \pi = -mgh.$$

Во втором случае сила $m\vec{g}$ совершила на перемещении $\vec{\Delta r}'$ положительную работу:

$$A = m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r}' = mgh \cos 0 = mgh.$$

О единицах физических величин

Из соотношения (5.2) следует, что

$$\text{единица работы} = \text{единица силы} \times \text{единица длины}.$$

Напомним, что в СИ единица силы есть *килограмм-метр на секунду в квадрате* и имеет специальное название — *ньютон* ($1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$). Единица работы в СИ есть *ньютон-метр*, она имеет специальное название — *джоуль* (обозначение: Дж) в честь английского физика Джеймса Джоуля; $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Джоуль — работа, совершаемая силой в 1 Н при перемещении точки приложения силы на расстояние 1 м в направлении действия силы.

Джоуль является также единицей энергии.

5.2.2. Работа нескольких постоянных сил

Пусть на тело действуют N постоянных сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$). Обозначим через A_i работу силы \vec{F}_i на перемещении $\vec{\Delta r}$ вдоль прямолинейной траектории. С учетом (5.3) представим:

$$A_i = F_i \Delta r \cos \beta_i = F_i \Delta r, \quad (5.5)$$

где $F_i = F_i \cos \beta_i$ — проекция силы \vec{F}_i на направление перемещения $\vec{\Delta r}$, β_i — угол между векторами \vec{F}_i и $\vec{\Delta r}$. Полная работа (работа всех сил) на перемещении $\vec{\Delta r}$ равна

$$A = \sum_{i=1}^N A_i = \Delta r \sum_{i=1}^N F_i. \quad (5.6)$$

Алгебраическая сумма проекций сил \vec{F}_i равна проекции результирующей (равнодействующей) силы \vec{R} на направление вектора $\vec{\Delta r}$:

$$\sum_{i=1}^N F_i = R. \quad (5.7)$$

Таким образом,

$$A = \sum_{i=1}^N A_i = R \Delta r. \quad (5.8)$$

Результат (5.8) можно переписать, с учетом (5.4), в виде

$$A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N) \cdot \vec{\Delta r} = \vec{R} \cdot \vec{\Delta r}. \quad (5.9)$$

Итак, если на тело действуют несколько сил, то полная работа (работа всех сил) равна работе результирующей (равнодействующей) силы.

Задача (рис. 5.3). Тело массой m соскальзывает по наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения скольжения μ . Чему равна полная работа, совершенная над телом в результате его соскальзывания с высоты h ?

□ На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} ($N = mg \cos \alpha$), сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$). На рисунке все силы приложены в одной точке, поскольку тело движется поступательно. Наряду с силами, на рисунке показано перемещение $\vec{\Delta r}$. Полную работу найдем, воспользовавшись соотношением (5.8), где R — проекция равнодействующей сил $m\vec{g}$, \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ на направление $\vec{\Delta r}$:

$$R = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

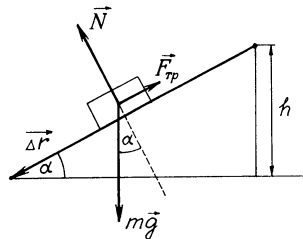


Рис. 5.3

Подставляя это выражение в (5.8) и учитывая, что $\Delta r = \frac{h}{\sin\alpha}$, получим искомую полную работу A :

$$A = mgh(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha). \quad (5.10)$$

Задача имеет решение, если $1 \geq \mu \operatorname{ctg}\alpha$, т. е. если $\operatorname{tg}\alpha \geq \mu$. При $\operatorname{tg}\alpha = \mu$ тело будет равномерно скользить; при этом положительная работа силы тяжести будет компенсироваться отрицательной работой силы трения. При $\operatorname{tg}\alpha < \mu$ тело будет покоиться на наклонной плоскости. Сила реакции опоры работы не совершает, поскольку $\vec{N} \perp \vec{\Delta r}$. ■

5.2.3. Работа переменной силы на произвольном участке пути

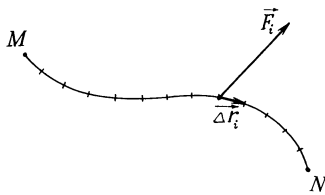


Рис. 5.4

Рассмотрим общий случай: сила \vec{F} переменная, точка приложения силы перемещается по произвольной (криволинейной) траектории. Разобьем мысленно весь участок траектории от начальной точки M до конечной точки N на участки, достаточно малые, чтобы можно было на каждом из них полагать силу постоянной, а траекторию прямолинейной. Обозначим через \vec{F}_i и $\vec{\Delta r}_i$ соответственно силу и перемещение для i -го малого участка (рис. 5.4). Для каждого малого участка можно использовать (5.4) и представить работу силы, совершенной на i -м участке, в виде

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta r}_i.$$

Работа, совершенная переменной силой \vec{F} на всем участке от M до N , равна, очевидно, алгебраической сумме работ ΔA_i по всем малым участкам:

$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta r}_i. \quad (5.11)$$

Мы говорим об *алгебраической* сумме, поскольку в сумме (5.11) могут находиться как положительные, так и отрицательные слагаемые.

5.2.4. Работа постоянной силы на произвольном участке пути

Рассмотрим случай, когда на всем криволинейном участке MN траектории точки приложения силы сама сила \vec{F} не изменяется

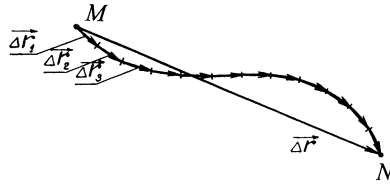


Рис. 5.5

ни по модулю, ни по направлению. В этом случае выражение (5.11) принимает вид

$$A = \vec{F} \cdot \left(\sum_i \Delta \vec{r}_i \right). \quad (5.12)$$

Векторная сумма $\sum_i \Delta \vec{r}_i$ есть вектор перемещения на участке (см. рис. 5.5):

$$\sum_i \Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}. \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в (5.12), получаем формулу (5.4) для работы силы на перемещении $\Delta \vec{r}$. Итак, мы убедились, что *работа постоянной силы на произвольном участке пути равна работе этой силы на перемещении, проведенном из начальной точки пути в конечную*.

Задача 1 (рис. 5.6). Брошенное под некоторым углом к горизонту тело массой m описало параболическую траекторию MN и упало на крышу дома, находящуюся на высоте h . Чему равна работа силы тяжести на участке пути от M до N ?

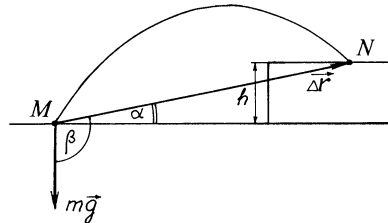


Рис. 5.6

□ Речь идет о работе постоянной силы (силы $m\vec{g}$), поэтому искомая работа A равна работе силы тяжести на перемещении $\Delta \vec{r}$ (см. рисунок):

$$A = m\vec{g} \cdot \Delta \vec{r} = mg\Delta r \cos \beta,$$

где β — угол между векторами $m\vec{g}$ и $\Delta \vec{r}$. Так как $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, то получаем

$$A = mg\Delta r \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -mg\Delta r \sin\alpha = -mgh. \quad \blacksquare$$

Задача 2 (рис. 5.7). Тело массой m соскальзывает без трения с горки высотой h , описывая траекторию MNN' , соответствующую профилю горки; точка N' находится на высоте h' ($h > h'$). Чему равна полная работа действующих на тело сил на участках пути MN и MN' ?

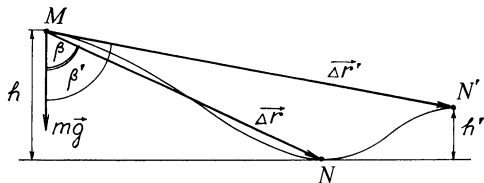


Рис. 5.7

□ На тело действуют две силы: *постоянная* сила тяжести $m\vec{g}$ и *переменная* сила реакции опоры \vec{N} . На каждом достаточно малом участке траектории тела сила \vec{N} направлена перпендикулярно к вектору перемещения на этом участке; следовательно, работа силы \vec{N} на данном участке, а значит, и на всем пути от M до N' равна нулю. Таким образом, искомые полные работы определяются в данном случае только работой силы тяжести, а поскольку эта сила постоянна, то можно воспользоваться работой силы $m\vec{g}$ на соответствующих перемещениях: $\Delta\vec{r}$ для участка пути MN и $\Delta\vec{r}'$ для участка пути MN' . В результате находим:

на участке пути MN

$$A = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} = mg\Delta r \cos\beta = mgh;$$

на участке пути MN'

$$A' = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}' = mg\Delta r' \cos\beta' = mg(h - h').$$

Обратим внимание: $A' < A$ — работа силы на более длинном пути может оказаться меньше работы той же силы на более коротком пути. ■

5.2.5. Графическое представление работы переменной силы на прямолинейном участке пути

Пусть точка приложения переменной силы \vec{F} перемещается от M до N по прямой линии — координатной x -оси. Обозначим через F_x проекцию силы \vec{F} на x -ось. Разобьем мысленно весь путь от M до N на участки, достаточно малые, чтобы для каждого участка

можно было считать силу приблизительно постоянной (хотя и разной для разных малых участков). Работу A , совершенную силой \vec{F} на пути от M до N , можно представить приближенно в виде алгебраической суммы работ ΔA_i , совершенных на малых участках:

$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta x}_i = \sum_i F_i \Delta x_i \cos \beta_i. \quad (5.14)$$

Здесь \vec{F}_i — сила на перемещении $\vec{\Delta x}_i$ для i -го малого участка, β_i — угол между векторами \vec{F}_i и $\vec{\Delta x}_i$ (рис. 5.8). Проекция силы \vec{F}_i на x -ось есть $F_{xi} = F_i \cos \beta_i$. Учитывая это, перепишем (5.14) в виде:

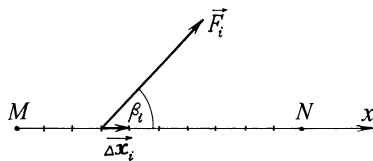
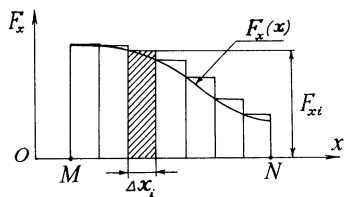


Рис. 5.8

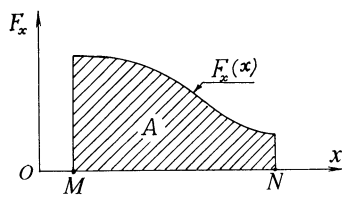
$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i F_{xi} \Delta x_i. \quad (5.15)$$

На рисунке 5.9, а плавной кривой изображена графически функция $F_x(x)$. Так как для каждого малого участка пути проекция F_{xi} постоянна, плавная кривая $F_x(x)$ может быть приближенно заменена набором ступенек. Работа $\Delta A_i = F_{xi} \Delta x_i$ численно равна площади прямоугольника, заштрихованного на рисунке. Работа A на всем пути от M до N численно равна в таком приближении сумме площадей соответствующих прямоугольников.

Если разбивать путь от M до N на все более и более малые участки, то ступенчатая линия будет все более приближаться к плавной кривой $F_x(x)$ и работа A будет приближаться численно к площади, ограниченной кривой $F_x(x)$ и x -осью на участке от M до N . Это есть площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 5.9, б.



а)



б)

Рис. 5.9

5.2.6. Работа силы упругости

К концу висящей вертикально пружины, обладающей коэффициентом упругости (иначе говоря, жесткостью) k , подвешено тело массой m . Пружина подверглась *другой деформации растяжения* и удлинилась. На подвешенное к пружине тело действуют две силы — постоянная сила тяжести $m\vec{g}$ и переменная по модулю *сила упругости пружины* (иными словами, сила реакции пружины) $\vec{F}(x)$. На рисунке 5.10, где даны силы $m\vec{g}$ и $\vec{F}(x)$, координатная x -ось направлена вертикально вниз; ее начало, т. е. точка $x = 0$, соответствует нижнему концу недеформированной пружины. В момент времени, когда удлинение пружины окажется равным x , проекция силы упругости $\vec{F}(x)$ на x -ось будет равна, согласно закону Гука,

$$F_x(x) = -kx \quad (5.16)$$

(напомним соотношение (2.13), где под $F_{\text{упр}}$ понимался модуль силы упругости пружины для удлинения $x = \Delta l$).

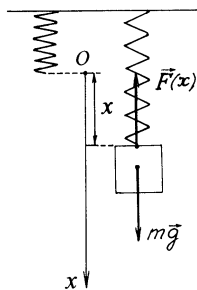


Рис. 5.10

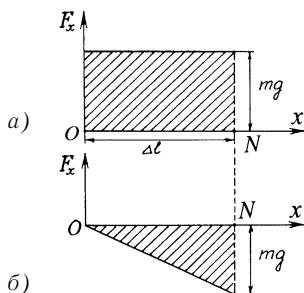


Рис. 5.11

Рассмотрим работу сил $m\vec{g}$ и $\vec{F}(x)$ на перемещении вдоль x -оси от точки O до точки N (от $x = 0$ до $x = \Delta l$). Работа A_1 силы $m\vec{g}$ положительна и равна

$$A_1 = mg\Delta l;$$

она численно равна площади заштрихованного прямоугольника на рисунке 5.11, *а*. Работа A_2 силы упругости $\vec{F}(x)$ отрицательна. С учетом (5.16), она численно равна взятой со знаком «минус» площади заштрихованного прямоугольного треугольника (рис. 5.11, *б*). Отсюда следует, что

$$A_2 = -\frac{k(\Delta l)^2}{2}. \quad (5.17)$$

Таким образом, полная работа действующих на тело сил, совершенная на перемещении от $x = 0$ до $x = \Delta l$, равна

$$A = A_1 + A_2 = mg\Delta l - k\frac{(\Delta l)^2}{2}.$$

5.2.7. Мощность

Обратимся к выражению (5.4) для работы постоянной силы \vec{F} на перемещении $\vec{\Delta r}$. Пусть это перемещение произошло за промежуток Δt — от некоторого момента времени t до момента $t + \Delta t$. Понятно, что $\vec{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, где $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t + \Delta t)$ — радиусы-векторы точки приложения силы \vec{F} в моменты времени t и $t + \Delta t$, соответственно. Учитывая это, перепишем формулу (5.4) в виде:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)). \quad (5.18)$$

? Поставим вопрос: насколько быстро сила \vec{F} совершила работу A ?

Мерой быстроты совершения работы является физическая величина, называемая мощностью. Мощность N_{cp} , при которой работа A совершается за время Δt , равна

$$N_{\text{cp}} = \frac{A}{\Delta t}. \quad (5.19)$$

Точнее сказать, это есть *средняя* за промежуток времени Δt мощность.

Для случая, когда сила \vec{F} постоянна, быстрота совершения работы зависит только от того, насколько быстро происходит перемещение точки приложения силы. В этом случае отношение (5.19) имеет вид

$$N_{\text{cp}} = \vec{F} \cdot \left(\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\text{cp}}. \quad (5.20)$$

Здесь $\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$ есть *средняя скорость по перемещению* точки приложения силы; она усредняется по промежутку времени Δt (см. соотношение (1.3)). Средняя за промежуток времени Δt мощность равна скалярному произведению вектора постоянной силы \vec{F} и вектора средней скорости по перемещению (вектора \vec{v}_{cp}).

Предел средней скорости по перемещению при $\Delta t \rightarrow 0$ есть мгновенная скорость $\vec{v}(t)$ (напомним п. 1.3.1). Переходя к этому

пределу в (5.20), получим физическую величину, называемую *мгновенной мощностью*:

$$N(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_{\text{cp}} = \vec{F} \cdot \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t). \quad (5.21)$$

Результат (5.21) обобщается на случай переменной силы \vec{F} . Если $\vec{F}(t)$ — сила, приложенная к телу в момент t , то выражение (5.21) для мгновенной мощности принимает вид:

$$N(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t). \quad (5.22)$$

Если тело движется поступательно, то «перемещение точки приложения силы, действующей на тело» и «перемещение тела» — это фактически одно и то же. Иное дело, когда движение тела имеет вращательную составляющую, например, катится по плоскости колесо. Среди прочих сил на него действует сила трения покоя. Мгновенная скорость точки приложения этой силы равна нулю во всякий момент времени и, значит, сила трения покоя работы не совершает. Согласно (5.22), мощность для силы трения покоя равна нулю. Но центр масс колеса движется! И единственной внешней силой, сообщающей автомобилю ускорение, является именно сила трения покоя, действующая на ведущие колеса. Возникает любопытная ситуация: сила трения покоя ускоряет автомобиль, но работы при этом не совершает. В каждый момент времени точка приложения силы трения покоя (точка соприкосновения колеса с дорогой) покоится относительно дороги. При движении автомобиля точка приложения силы трения покоя исчезает в одном месте на ободке и сразу появляется в другом.

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (5.19) следует, что

$$\text{единица мощности} = \frac{\text{единица работы}}{\text{единица времени}}.$$

В СИ единица мощности есть *ньютон-метр в секунду*, она имеет специальное наименование — *ватт* (обозначение: Вт) в честь английского механика и изобретателя Джеймса Уатта; 1 Вт = 1 Дж/с. Ватт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж.

5.3. ОТ РАБОТЫ К ЭНЕРГИИ И ОТ ЭНЕРГИИ К РАБОТЕ

5.3.1. «Золотое правило» механики и «принцип сохранения работы»

До сих пор мы говорили о работе, совершаемой некоторой силой на некотором перемещении ее точки приложения. Если имеется сила и происходит перемещение точки приложения силы, то

появляется скалярная физическая величина (положительная или отрицательная), называемая работой силы. Конечно, при условии, что направления силы и перемещения не оказываются взаимно перпендикулярными.

? А как появляется сама сила?

Она есть мера действия одного тела на другое и, значит, появляется тогда, когда одно тело действует на другое.

Пусть тело 1 действует на тело 2 с постоянной силой \vec{F} , в результате чего происходит перемещение $\vec{\Delta r}$ точки приложения силы (а значит, и тела 2). *Работу силы*, т. е. величину $A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$, можно рассматривать либо как *работу, совершаемую телом 1*, либо как *работу, совершаемую над телом 2*. Таким образом, говоря, что работу совершает сила, мы фактически имеем в виду, что *работу совершает некоторое тело* или *работа совершается над некоторым телом*.

После этих уточнений, связанных с понятием работы силы, рассмотрим на примере рычага знаменитое «золотое правило» механики.

Чтобы поднять груз массой M , находящийся на конце B рычага, человек действует с силой \vec{f} на конец A рычага (рис. 5.12, а). Эту ситуацию мы рассмотрели на рисунке 3.24 в п. 3.5.1. Там же была получена пропорция, которую можно представить так:

$$\frac{N}{f} = \frac{L}{l}, \quad (5.23)$$

где l и L — малое и большое плечи рычага, соответственно; $N = Mg$.

При подъеме с помощью рычага груза на некоторую высоту h точка приложения силы \vec{N} испытывает перемещение $\vec{\Delta r}_2$ ($\Delta r_2 = h$), а точка приложения силы \vec{f} — перемещение $\vec{\Delta r}_1$ (рис. 5.12, б). Так как $\frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = \frac{L}{l}$, то пропорцию (5.23) можно переписать в виде:

$$\frac{N}{f} = \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2}. \quad (5.24)$$

Из (5.24) следует: во сколько раз сила, прикладываемая человеком к рычагу, меньше силы, действующей со стороны рычага на поднимаемый груз, во столько же раз путь Δr_1 , который проходит

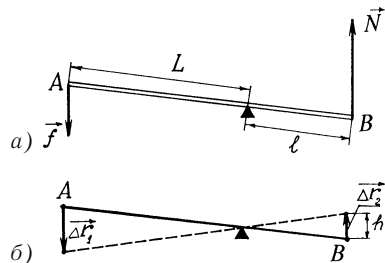


Рис. 5.12

вниз рука человека, больше пути Δr_2 , который груз проходит вверх. Иными словами, выигрыш в силе в точности соответствует проигрышу в пути. Это и есть «золотое правило» механики в применении к рычагу. Оно было сформулировано еще в древности так: «*то, что мы выигрываем в силе, мы проигрываем в пути*». Заметим, что это правило применимо не только к рычагу, но и ко всем простым механизмам (блок, ворот и т. п.).

«Золотое правило» механики (5.24) можно переписать в виде: $f\Delta r_1 = N\Delta r_2$. Это равенство есть не что иное, как равенство работ:

$$A_1 = A_2, \quad (5.25)$$

где $A_1 = f\Delta r_1$ — работа силы \vec{f} на перемещении $\vec{\Delta r}_1$, а $A_2 = N\Delta r_2$ — работа силы \vec{N} на перемещении $\vec{\Delta r}_2$. Равенство (5.25) можно трактовать как «принцип сохранения работы».

Любопытно, что хотя этот «принцип» вытекает непосредственно из древнего «золотого правила» механики, однако важность физической величины, называемой работой, была осознана значительно позднее — в XVIII—XIX столетиях. Да и сам термин «работа» был введен в науку впервые в 1826 году французским инженером Жаном Понселе, а до того применялись термины «момент действия» (Лазар Карно) и «механический эффект» (Роберт Майер).

«Принцип сохранения работы» (5.25) означает, что работа, совершаемая человеком над рычагом (работа A_1), равна работе, совершаемой рычагом над грузом (работе A_2). Как и «золотое правило» механики, этот «принцип» может быть применен к любому простому механизму. Его можно сформулировать следующим образом: *во всяком простом механизме, движущемся равномерно, работа передается без изменения*. Иначе говоря, работа силы, приводящей механизм в движение, равна работе, совершаемой механизмом.

Мы говорим здесь о равномерном движении механизма (рычага, подвижного блока, ворота и т. п.), поскольку при использовании простых механизмов не рассматриваются ускорения, а рассматривается равновесие или, что эквивалентно, равномерное движение с малой скоростью.

5.3.2. Можно ли запастись в теле способность совершать работу?

На примере рычага хорошо видно, что простые механизмы совершают работу лишь по мере того, как человек совершает работу над ними. Можно сказать, что рычаг «получает работу» на одном

из своих концов и тут же «отдает ее» на другом конце. Однако во многих случаях можно *запасти* в теле способность совершать работу. Совершенная над телом работа может как бы сохраняться в нем до тех пор, пока тело не отдаст ее в виде работы, которую оно совершит над другими телами.



Обратим внимание: здесь сказано, что работа в теле «как бы сохраняется», а «принцип сохранения работы» брался в кавычки. Дело в том, что сама по себе работа не сохраняется в теле, а сохраняется в нем нечто иное — то, что можно рассматривать как *способность тела совершать работу*. Как мы увидим чуть ниже, этим «нечто» является очень важная физическая величина.

В качестве примера механизма, в котором можно запасти способность совершать работу, приведем гиревый завод старинных стенных часов. Подтягивая гирию вверх, мы совершаем определенную работу. В результате механизм приобретает способность совершать в течение какого-то времени работу, необходимую для хода часов. По мере хода часов гирия постепенно опускается к полу и запас работоспособности механизма уменьшается. При заводе часов (при подъеме гири) гиревый механизм накапливает способность совершать работу, которая постепенно расходуется по мере хода часов.

5.3.3. Энергия тела как его способность совершать работу

Настал момент обозначить то «нечто», что может *сохраняться в теле, над которым совершена работа*. Это «нечто» есть физическая величина, называемая *энергией*. Как и работа, энергия — *скалярная* физическая величина и выражается она в тех же единицах, что и работа, т. е. в *джоулях* (в системе СИ).

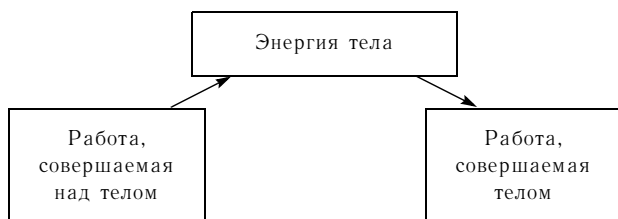
Всякий раз, когда мы поднимаем тело над землей, мы совершаем над ним работу, равную скалярному произведению силы \vec{F} , которую мы прикладываем к телу, и перемещения тела $\Delta\vec{r}$. Эта работа превращается в энергию тела. При последующем падении тела энергия превращается в работу силы тяжести тела (которая может быть использована, например, для забивания свай в землю).

Всякий раз, когда мы сжимаем упругую пружину, мы совершаем над ней работу. Эта работа превращается в энергию сжатой пружины. При последующем распрямлении пружины ее энергия превращается в работу силы упругости (которая может быть

использована, например, чтобы отбросить или подбросить какой-то шарик).

Всякий раз, когда мы разгоняем тело до некоторой скорости, мы совершаем над ним работу. Эта работа превращается в энергию движущегося тела. В процессе последующего замедления движения тела его энергия превращается в работу, которая может быть использована, например, для забивания гвоздя и его нагревания.

Во всех отмеченных случаях мы имеем дело с ситуацией, которую можно условно изобразить в виде следующей схемы:



Поднятое над землей тело, упруго деформированное тело, движущееся тело — это тела, получившие в результате работы, совершенной над ними, определенный запас энергии. Сразу отметим, что энергия в указанных случаях выступает в *разных видах*, поэтому для нее используют разные названия. Когда тело поднимают над землей, работа над телом превращается в *потенциальную энергию поднятого тела* (иногда говорят о *гравитационной потенциальной энергии*). Когда тело деформируют, работа над ним превращается в *потенциальную энергию упругой деформации* (иногда говорят об *упругой потенциальной энергии*). Когда тело разгоняют, работа над ним превращается в *кинетическую энергию*.

Согласно приведенной выше схеме, энергия тела может рассматриваться как физическая величина, характеризующая *способность тела совершать работу*. Напрашивается определение энергии тела как его способности совершать работу (термин «энергия» уподобляется тем самым термину «работоспособность»). Однако не будем торопиться с таким определением энергии. Как мы убедимся в дальнейшем, такое определение энергии оказалось бы слишком узким. Дело в том, что далеко не всегда энергия тела «расходуется» только на *совершение работы*. Она может «расходоваться» также на *телопередачу* или на *изменение числа частиц в теле*. Так что не следует сводить понятие энергии к понятию работоспособности.

5.4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ¹⁾

5.4.1. Теорема об изменении кинетической энергии

Если тело массой m имеет в момент t скорость $\vec{v}(t)$, то говорят, что оно обладает в данный момент времени *кинетической энергией*

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t). \quad (5.26)$$

Существует **теорема об изменении кинетической энергии** тела:

Изменение кинетической энергии тела равно полной работе сил, действующих на тело.

Докажем эту теорему, предположив, что на тело массой m , имевшее в момент $t = 0$ скорость \vec{v}_0 , действует постоянная равнодействующая сила \vec{F} . Обобщение на случай переменной равнодействующей силы будет рассмотрено в п. 5.4.2.

Так как движение тела равнопеременное, то в соответствии с (1.23)

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (5.27)$$

где \vec{a} — постоянное ускорение тела. За время t тело испытало перемещение

$$\vec{\Delta r} = \frac{1}{2}(\vec{v}(t) + \vec{v}_0)t. \quad (5.28)$$

Это соотношение легко получить, используя (5.27) и равенство $\vec{\Delta r} = \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, являющееся обобщением результата (1.26).

Учитывая, что $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (второй закон Ньютона), преобразуем (5.27): $\vec{F} = m\frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t}$. Умножим скалярно обе части этого равенства на $\vec{\Delta r}$: $\vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = m\frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t} \cdot \vec{\Delta r}$ — и воспользуемся

¹⁾ В пп. 5.4.1—5.4.5 будем рассматривать тело как материальную точку. В пп. 5.4.6 и 5.4.8 речь идет о кинетической энергии твердого тела, движение которого имеет вращательную составляющую.

для $\vec{\Delta r}$ в правой части равенства соотношением (5.28); получим:

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = \frac{1}{2} m(\vec{v}(t) - \vec{v}_0) \cdot (\vec{v}(t) + \vec{v}_0),$$

что можно представить в виде:

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = \frac{1}{2} mv^2(t) - \frac{1}{2} mv^2_0. \quad (5.29)$$

Правая половина этого равенства — изменение кинетической энергии за время t : $K(t) - K_0$. Левая половина равенства — полная работа, совершенная над телом за время t . Таким образом,

$$A = K(t) - K_0. \quad (5.30)$$

Теорема доказана.

Если работа A положительна, то $(K(t) - K_0) > 0$, т. е. происходит приращение кинетической энергии тела. Если A отрицательна, то наблюдается убыль кинетической энергии.

Отметим, что в теореме об изменении кинетической энергии *не учитывается природа сил*, действующих на тело. Под полной работой сил понимается работа равнодействующей силы, которая может оказаться, например, векторной суммой сил тяжести, упругости, трения. Кстати сказать, именно с такой ситуацией мы встречаемся, рассматривая тело, соскальзывающее по наклонной плоскости.

Задача. Тело массой $m = 600$ г соскальзывает с высоты $h = 1,5$ м по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45^\circ$, коэффициентом трения скольжения $\mu = 0,4$. Начальная скорость тела $v_0 = 2$ м/с. Чему равна кинетическая энергия тела в конце спуска?

□ Согласно теореме об изменении кинетической энергии, искомая кинетическая энергия K определяется равенством $K = A + K_0$, где A — полная работа на перемещении $\Delta r = \frac{h}{\sin \alpha}$, а $K_0 = \frac{1}{2} mv^2_0$ — начальная кинетическая энергия тела. Используя для A соотношение (5.10), получаем:

$$K = mgh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{2} mv^2_0 = 6,5 \text{ Дж.} \quad \blacksquare$$

5.4.2. Обобщение на случай работы переменной силы



Теорема об изменении кинетической энергии была доказана выше для постоянной равнодействующей \vec{F} . Воспользовавшись этим, трудно обобщить результат (5.30) на случай, когда сила \vec{F} , приложенная к

движущейся точке, изменяется при ее движении по траектории, которая в общем случае может быть криволинейной.

Разобьем мысленно промежуток времени от 0 до t на N малых промежутков τ ($\tau = t/N$) — настолько малых, чтобы в течение каждого из них сила \vec{F} могла бы считаться постоянной. Соответственно, перемещение $\vec{\Delta r}$ окажется суммой малых перемещений $\vec{\Delta r}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) (напомним рисунок 5.5). Для каждого малого перемещения $\vec{\Delta r}_i$ и промежутка времени τ можно воспользоваться результатом (5.30), который для i -го перемещения может быть представлен в виде:

$$\Delta A_i = K(i\tau) - K((i-1)\tau). \quad (1^*)$$

Просуммируем (1*) по i от 1 до N :

$$\sum_{i=1}^N \Delta A_i = \sum_{i=1}^N [K(i\tau) - K((i-1)\tau)]. \quad (2^*)$$

Сумма $\sum \Delta A_i$ есть полная работа A за промежуток времени от 0 до t (полная работа на перемещении $\vec{\Delta r}$). Сумма в правой половине равенства (2*) равна

$$K(\tau) - K_0 + K(2\tau) - K(\tau) + K(3\tau) - K(2\tau) + \dots + K(N\tau) - K((N-1)\tau).$$

Нетрудно убедиться, что в этой сумме взаимно уничтожаются все слагаемые за исключением двух: $K(N\tau) = K(\tau)$ и $-K_0$. Следовательно, соотношение (2*) имеет вид: $A = K(t) - K_0$ — точно такой же вид, как и в случае, когда сила \vec{F} постоянна.

5.4.3. Соударение абсолютно упругих шаров

Строго говоря, при рассмотрении соударения абсолютно упругих шаров не годятся ни модель материальной точки, ни модель абсолютно твердого тела, так как, соударяясь, шары упруго деформируются. При этом по крайней мере часть кинетической энергии, которую имели шары перед соударением, превращается в потенциальную энергию упругой деформации, а она, в свою очередь, превращается в кинетическую энергию шаров после соударения. Если, однако, не интересоваться процессом превращения энергии, то можно рассматривать соударение упругих шаров как соударение двух материальных точек при условии, что в результате соударения *не изменяется сумма кинетических энергий шаров*. Кинетическая энергия каждого шара изменяется, но *сумма* кинетических энергий шаров сохраняется. Позднее мы получим закон сохранения кинетической энергии при упругом соударении как частный случай закона сохранения механической энергии (см. п. 5.6.5).

Кроме того, воспользуемся тем, что при соударении шаров *сохраняется векторная сумма их импульсов*. В течение короткого времени, пока длится соударение, шары представляют собой, по сути дела, замкнутую систему, а для нее, как уже отмечалось (см. п. 2.6.2), применим закон сохранения импульса. Упругий характер деформации шаров здесь роли не играет.

Итак, абсолютно упруго соударяются шары массами m_1 и m_2 . Обозначим их скорости перед соударением через \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , соответственно, а после соударения — соответственно через \vec{u}_1 и \vec{u}_2 . Перед соударением система шаров обладала импульсом $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ и кинетической энергией $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$. После соударения она имеет импульс $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ и кинетическую энергию $\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$. Используя закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии, запишем соответственно:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2; \quad (5.31)$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2. \quad (5.32)$$

Ограничимся рассмотрением *центрального соударения* — когда векторы скорости шаров перед соударением лежат на прямой, проходящей через центры шаров (назовем ее *линией центров*). В этом случае на линии центров будут лежать также силы взаимодействия соударяющихся шаров, а значит, и векторы скорости шаров после соударения (в направлении, перпендикулярном к линии центров, изменение скорости не происходит, коль скоро отсутствует составляющая сил в этом направлении).

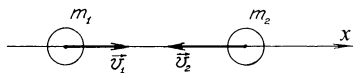


Рис. 5.13

Выберем в качестве координатной x -оси линию центров и ориентируем эту ось в направлении от шара массой m_1 к шару массой m_2 . На рисунке 5.13 изображены шары, летящие навстречу друг другу. Однако возможно также, что один шар будет догонять другого. Чтобы не уточнять заранее картину соударения, воспользуемся «хитрым» приемом: спроектируем все векторы скоростей на x -ось и сделаем выкладки для *проекций* скоростей. Векторам, направленным по x -оси, будут соответствовать положительные проекции, а векторам, направленным в противоположном по отношению к оси направлении, — отрицательные проекции.

Используя проекции на x -ось векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$, перепишем (5.31) и (5.32) в виде следующей системы скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}; \\ m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 &= m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Решим эту систему уравнений относительно u_{1x} и u_{2x} . Для этого удобно предварительно переписать ее в виде:

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_{1x} - v_{1x}) &= m_2(v_{2x} - u_{2x}); \\ m_1(u_{1x}^2 - v_{1x}^2) &= m_2(v_{2x}^2 - u_{2x}^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$u_{1x} + v_{1x} = v_{2x} + u_{2x}. \quad (5.35)$$

Далее умножим обе части уравнения (5.35) на m_2 и сложим результат почленно с первым уравнением в (5.34); получим

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \quad (5.36)$$

Умножив обе части уравнения (5.35) на $-m_1$ и сложив результат почленно с первым уравнением в (5.34), получим

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \quad (5.37)$$

Применим формулы (5.36) и (5.37) для трех частных случаев.

Первый случай: второй шар до удара покоился ($v_{2x} = 0$).

Получаем:

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}; \quad u_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}. \quad (5.38)$$

Первый шар при $m_1 > m_2$ движется после удара в прежнем направлении (но с меньшей скоростью), а при $m_1 < m_2$ он отскакивает назад. Второй шар начинает двигаться в ту же сторону, что и первый шар до соударения.

Второй случай: оба шара имеют одинаковую массу. Получаем:

$$u_{1x} = v_{2x}; \quad u_{2x} = v_{1x}. \quad (5.39)$$

При соударении шары обмениваются скоростями. Правильнее сказать, они обмениваются как импульсами, так и кинетическими энергиями.

Третий случай: оба шара имеют одинаковую массу, причем второй шар до соударения покоился. Получаем:

$$u_{1x} = 0; \quad u_{2x} = v_{1x}. \quad (5.40)$$

Налетающий шар при ударе останавливается, передав второму шару как свой импульс, так и свою кинетическую энергию.



Имея под рукой счеты с костяшками, нанизанными на спицы, можно проделать эффектный опыт. Расположим костяшки на спице так,

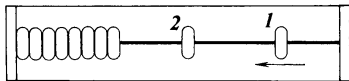


Рис. 5.14

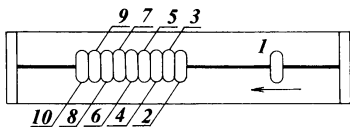


Рис. 5.15

как показано на рисунке 5.14. Щелкнем по костяшке 1. Мы увидим, что, ударившись о костяшку 2, костяшка 1 остановится, а костяшка 2 придет в движение. Еще более эффектен опыт, когда костяшки расположены на спице так, как показано на рисунке 5.15. Щелкнем по костяшке 1. Она ударится о костяшку 2 и тут же остановится, а отскочит костяшка 10. Дело в том, что при ударе костяшка 1 передала импульс костяшке 2, та тут же передала этот импульс костяшке 3, та передала его костяшке 4 и так далее. А в результате отскакивает костяшка 10.

При упругом ударе о неподвижную стену перпендикулярно к последней шар отскочит в противоположном направлении со скоростью, равной по модулю его скорости перед ударом. Это легко доказать, если воспользоваться первым соотношением из (5.38). Предварительно перепишем его в виде:

$$u_{1x} = \frac{m_1 - 1}{m_2} v_{1x}. \quad (1^*)$$

Если представить себе, что второй шар (тот, что до удара покоился) постепенно увеличивается, то в пределе, когда диаметр шара стремится к бесконечности, этот шар превратится в неподвижную

стенку. При этом $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$, и в итоге формула (1*) превращается

в формулу

$$u_{1x} = -v_{1x}. \quad (5.41)$$

Задача. Требуется доказать, что если массы упруго соударяющихся шаров равны, второй шар покоится, а удар нецентральный, то шары разлетаются после соударения во взаимно перпендикулярных направлениях.

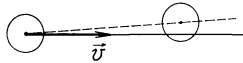


Рис. 5.16

□ Нецентральный удар демонстрирует рисунок 5.16, где пунктирной прямой показана линия центров. Обозначим через m массы шаров, через \vec{v} скорость налетающего шара,

а через \vec{u}_1 и \vec{u}_2 скорости шаров после соударения. Используя законы сохранения кинетической энергии и импульса, представим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}; \\ m\vec{v} &= m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

Сокращая общие множители, перепишем систему уравнений (2*) в виде:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= u_1^2 + u_2^2; \\ \vec{v} &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Возведем в квадрат второе уравнение в (3*); получим

$$v^2 = u_1^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + u_2^2.$$

С учетом первого уравнения в (3*), заключаем, что $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ и, следовательно, $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$, что и требовалось доказать. ■

5.4.4. Импульс тела и кинетическая энергия в классической механике Ньютона

Подведем некоторые итоги.

Используя понятие *силы*, можно, как мы убедились, придти к двум способным сохраняться физическим величинам — *импульсу тела* \vec{p} и его *кинетической энергии* K . Изменения этих величин описываются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{F}\Delta t; \\ \Delta K &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Здесь \vec{F} — векторная сумма сил, приложенных к телу (равнодействующая сила); промежуток Δt времени действия силы, равно как и перемещение тела $\Delta\vec{r}$ предполагаются достаточно малыми, так что можно считать силу \vec{F} постоянной.

Как это следует из первого соотношения в (5.42), *изменение $\Delta\vec{p}$ импульса тела равно импульсу силы $\vec{F}\Delta t$ за время Δt* . (Не следует путать *импульс силы* с *импульсом тела*; это разные физические величины!). Указанное соотношение есть не что иное, как второй закон Ньютона (см. (2.7)). Второе соотношение в (5.42) показывает, что *изменение ΔK кинетической энергии тела равно полной работе $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, совершенной над телом на перемещении $\Delta\vec{r}$* . Это есть

теорема (5.30) об изменении кинетической энергии, являющаяся следствием второго закона Ньютона.

Импульс тела в данный момент времени и его кинетическая энергия выражаются через мгновенную скорость \vec{v} тела и его массу m следующим образом:

$$\vec{p} = m\vec{v}; K = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.43)$$

Из (5.43) видно, что величины p и K связаны соотношением:

$$K = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.44)$$

Наличие этой связи не означает, однако, что законы сохранения импульса и кинетической энергии взаимосвязаны. Самостоятельность этих законов сохранения видна уже из того факта, что в неупругих соударениях закон сохранения импульса выполняется, а закон сохранения кинетической энергии не выполняется. Кроме того, надо иметь в виду, что закон сохранения импульса — это *векторный* закон, а закон сохранения кинетической энергии — *скалярный*.

Используя (5.42), установим связь между изменением кинетической энергии на малом перемещении $\vec{\Delta r}$ и изменением импульса за малый промежуток времени Δt :

$$\Delta K = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t = \vec{v} \cdot \vec{\Delta p}.$$

Итак,

$$\Delta K = \vec{v} \cdot \vec{\Delta(mv)}. \quad (5.45)$$

5.4.5. Релятивистская масса, релятивистский импульс, полная энергия тела

Скорость тела v , разумеется, зависит от системы отсчета, в которой рассматривается движение тела, однако масса m в соотношениях (5.43)—(5.45) от выбора системы отсчета не зависит. Последнее утверждение считалось само собой разумеющимся вплоть до начала XX столетия — до создания Альбертом Эйнштейном *специальной (частной) теории относительности*. На основе этой теории возникла *релятивистская механика* (от латинского *relativus*, означающего «относительный»). Классическая механика Ньютона оказалась *частным случаем* релятивистской механики, когда выполняется условие:

$$v \ll c, \quad (5.46)$$

где c — скорость света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Если условие (5.46) не выполняется, то, согласно принципам специальной теории относительности, *масса тела должна зависеть от его скорости v в выбранной системе отсчета* (т. е. должна зависеть от того, в какой системе отсчета рассматривается тело). Зависимость массы от скорости описывается формулой:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.47)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$. Величину m называют *релятивистской массой*, а m_0 — *массой покоя* тела. Тело имеет массу m_0 в системе отсчета, в которой оно покоится. График зависимости $m(v)$ дан на рисунке 5.17. Используя (5.47), легко подсчитать, что даже если, например, $v = 0,01 c$ (скорость v равна 3000 км/с, что примерно в 100 раз больше скорости современной космической ракеты), то $m = 1,00005 m_0$, т. е. релятивистская масса превысит массу покоя всего на 0,005%. Как видим, диапазон скоростей, в пределах которого работает классическая механика и можно полагать $m = m_0$, оказывается весьма широким.

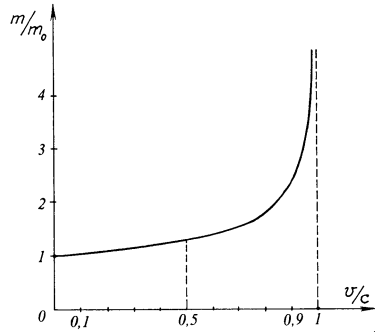


Рис. 5.17

С точки зрения релятивистской механики, соотношения (5.43)—(5.45) для классической механики следует переписать в виде:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v}; \quad K = \frac{1}{2} m_0 v^2; \quad (5.43, a)$$

$$K = \frac{p^2}{2m_0}; \quad (5.44, a)$$

$$\Delta K = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\Delta(m_0 \vec{v})}. \quad (5.45, a)$$

При переходе к релятивистской механике импульс $\vec{p} = m_0 \vec{v}$ нужно заменить *релятивистским импульсом*:

$$\vec{p} = m \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.48)$$

и, соответственно, изменение импульса $\Delta(\vec{m}_0\vec{v})$ заменить в (5.45, а) на изменение релятивистского импульса:

$$\Delta K = \vec{v} \cdot \Delta(\vec{m}_0\vec{v}). \quad (5.49)$$

Кроме того, появляется новая физическая величина, называемая *полной энергией тела* (точнее говоря, полной энергией тела, не подвергающегося внешним воздействиям):

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.50)$$

Это есть знаменитая **формула Эйнштейна**, выражающая эквивалентность массы и энергии:

полная энергия изолированного тела равна его массе, умноженной на квадрат скорости света (см. (5.50)):

$$\Delta E = \Delta mc^2. \quad (5.51)$$

Если изменяется энергия тела, то изменяется и его масса; если изменяется масса тела, то изменяется его энергия. Такое, с точки зрения классической механики, невозможно.

Известно, что, если $\xi \ll 1$, то

$$(1 \pm \xi)^\Omega \approx 1 \pm \Omega\xi \quad (5.52)$$

при любом Ω . Воспользуемся этим соотношением для $\xi = \beta^2$ и $\Omega = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

и перепишем (5.50) в случае, когда $\beta \ll 1$ ($v \ll c$):

$$E = mc^2 \approx m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2}. \quad (5.53)$$

Если условие (5.46) не выполняется, то вместо (5.53) будем иметь равенство:

$$E = m_0c^2 + K, \quad (5.54)$$

где K — кинетическая энергия тела в релятивистской механике. Из (5.54) следует общее определение кинетической энергии тела: *кинетическая энергия есть разность полной энергии и энергии покоя:*

$$K = mc^2 - m_0c^2. \quad (5.55)$$

Поскольку m_0c^2 — постоянная величина, то из (5.55) следует, что

$$\Delta K = \Delta(mc^2) = c^2\Delta m. \quad (5.56)$$

В классической механике работа $\vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$, совершенная над телом, равна изменению его кинетической энергии. В релятивистской механике работа $\vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$ равна как изменению кинетической энергии, так и *изменению полной энергии тела* (изменению массы, умноженному на c^2).

Заметим, что используя (5.55), нетрудно получить соотношение

$$(5.49). \text{ Представим (5.47) в виде } m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \text{ и возведем обе части}$$

этого равенства в квадрат; получим

$$(mc)^2 - (mv)^2 = m_0^2c^2. \quad (1^*)$$

Воспользуемся тем, что изменение квадрата любой переменной величины f за малый промежуток времени приближенно равно (с учетом (3.52)):

$$\Delta(f^2) = (f + \Delta f)^2 - f^2 \approx 2f\Delta f. \quad (5.57)$$

Используя (5.57), перепишем (1*) в виде:

$$2mc\Delta(mc) - 2mv\Delta(mv) = 0. \quad (2^*)$$

Сокращая множитель $2m$, получаем

$$\Delta(mc^2) = v\Delta(mv) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\Delta(mv)}. \quad (3^*)$$

Учитывая (5.56) и (3*), заключаем, что $\Delta K = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\Delta(mv)}$, т. е. приходим к соотношению (5.49).

В заключение найдем зависимость полной энергии E от релятивистского импульса \vec{p} . Из (5.48) и (5.50) следует, что

$$\frac{p^2}{E^2} = \frac{v^2}{c^4}. \quad (4^*)$$

Перепишем (5.50) в виде $E \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0c^2$ и возведем обе части этого равенства в квадрат; получим

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{E^2 - m_0^2c^4}{E^2}. \quad (5^*)$$

Подставляя (5*) в (4*), находим $\frac{p^2}{E^2} = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{E^2 c^2}$. Таким образом,

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (5.58)$$

При выполнении условия (5.46) получаем из (5.58), с учетом (5.52):

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}. \quad (5.59)$$

Результат (5.59), как мы убеждаемся, согласуется с (5.54).

5.4.6. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Возвратимся в классическую механику и найдем выражение для кинетической энергии вращающегося твердого тела.

Пусть твердое тело массой m вращается с угловой скоростью ω вокруг закрепленной оси. Как обычно, мысленно представим тело состоящим из множества частиц. Обозначим через m_i и R_i соответственно массу i -й частицы и ее расстояние до оси вращения. Модуль скорости этой частицы равен $v_i = \omega R_i$, а кинетическая энергия равна

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2. \quad (5.60)$$

Кинетическая энергия тела K равна *сумме кинетических энергий частиц, из которых состоит тело*. Следовательно,

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2. \quad (5.61)$$

Согласно (4.26), стоящая в правой части (5.61) сумма есть момент инерции тела J относительно оси вращения. Таким образом,

$$K = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (5.62)$$

Если тело вращается *неравномерно*, то его кинетическая энергия $K(t)$ в момент времени t будет определяться формулой:

$$K(t) = \frac{J \omega^2(t)}{2}, \quad (5.63)$$

где $\omega(t)$ — мгновенная угловая скорость вращения. Формула (5.63) справедлива при условии, что во время вращения момент инерции J остается постоянным. В противном случае надо в (5.63) заменить J на $J(t)$.

5.4.7. Вращательный аналог теоремы об изменении кинетической энергии

Предположим, что тело вращается равнопеременно с угловым ускорением β . Угловая скорость тела в момент $t = 0$ равна ω_0 . В соответствии с (4.6) изменение угловой скорости за время от 0 до t есть

$$\omega(t) - \omega_0 = \beta t. \quad (5.64)$$

Угол поворота тела $\Delta\varphi$ за время t при равнопеременном вращении равен

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\omega(t) + \omega_0)t.$$

Используя (5.63), представим изменение кинетической энергии тела за время t в виде

$$K(t) - K_0 = \frac{1}{2}J\omega^2(t) - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = (\omega(t) - \omega_0)(\omega(t) + \omega_0)\frac{J}{2}. \quad (5.65)$$

С учетом (5.64) и (5.65) получаем отсюда: $K(t) - K_0 = J\beta\Delta\varphi$. Воспользовавшись основным законом динамики вращательного движения (4.27), полученный результат представим в виде

$$\Phi_z\Delta\varphi = K(t) - K_0. \quad (5.66)$$

Здесь Φ_z — результирующий момент относительно оси вращения всех внешних сил, приложенных к телу. Величина $\Phi_z\Delta\varphi$ есть *полная работа, совершенная над телом внешними силами на угловом перемещении $\Delta\varphi$* . Соотношение (5.66) является *вращательным аналогом* теоремы об изменении кинетической энергии (5.30).

Задача. Через блок массой m перекинута невесомая нить, к концам которой подвешены грузы массами m . В момент $t = 0$ на один из грузов поставили гирию массой m . Чему равна кинетическая энергия блока в момент времени t ?

□ До момента $t = 0$ система грузов находилась в равновесии и кинетическая энергия блока равнялась нулю. После того, как на один из грузов поставили гирию, блок начал равноускоренно вращаться. Согласно (5.64)—(5.66), искомая кинетическая энергия блока $K(t)$ определяется соотношением:

$$K(t) = \frac{1}{2}\Phi_z\beta t^2. \quad (1^*)$$

Здесь $\beta = \frac{a}{R}$, где R — радиус блока, а a — модуль тангенциального ускорения на его окружности; $\Phi_z = (T_2 - T_1)R$, где T_1 и T_2 —

модули сил натяжения нити по разные стороны от блока. Учитывая это, перепишем (1*) в виде

$$K(t) = \frac{1}{2}(T_2 - T_1)at^2. \quad (2^*)$$

Для ускорения a воспользуемся соотношением (4.39), а для сил T_1 и T_2 — соотношениями (4.40), положив $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. В результате получим: $a = \frac{2g}{7}$, $T_1 = \frac{9mg}{7}$, $T_2 = \frac{10mg}{7}$, после чего выражение (2*) преобразуется к виду: $K(t) = \frac{mg^2 t^2}{49}$. ■

5.4.8. Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение

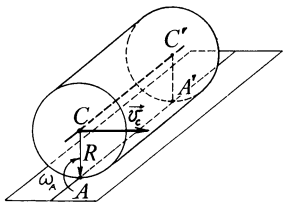


Рис. 5.18

Рассмотрим в некоторый момент времени t цилиндр массой m и радиусом R , катящийся по плоскости. Обозначим через $K(t)$, $\vec{v}_C(t)$, $\omega_C(t)$, соответственно, кинетическую энергию цилиндра, скорость его центра масс, угловую скорость в системе отсчета, связанной с осью (с такой угловой скоростью цилиндр вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс). В неподвижной системе отсчета все точки цилиндра вращаются в момент t вокруг мгновенной оси вращения AA' — прямой, по которой цилиндр соприкасается с плоскостью в данный момент времени (рис. 5.18). Если $\omega_A(t)$ — угловая скорость вращения цилиндра вокруг AA' , а J_A — момент инерции цилиндра относительно AA' , то для кинетической энергии $K(t)$ справедливо, согласно (5.62), соотношение:

$$K(t) = \frac{1}{2} J_A \omega_A^2(t). \quad (1^*)$$

Поскольку $\omega_A(t) = \omega_C(t)$ (напомним (4.85)), то (1*) можно переписать в виде:

$$K(t) = \frac{1}{2} J_A \omega_C^2(t). \quad (2^*)$$

Согласно теореме Штейнера (см. п. 4.2.3),

$$J_A = J_C + mR^2, \quad (3^*)$$

где J_C — момент инерции цилиндра относительно оси CC' , проходящей через его центр масс. Подставив (3*) в (2*), представим $K(t)$ в виде:

$$K(t) = \frac{1}{2} J_C \omega_C^2(t) + \frac{1}{2} m R^2 \omega_C^2(t). \quad (4^*)$$

Так как $R\omega_A(t) = v_C(t)$ и $\omega_A(t) = \omega_C(t)$, то, следовательно,

$$v_C(t) = R\omega_C(t). \quad (5^*)$$

Подставив (5*) в (4*), получим

$$K(t) = \frac{m v_C^2(t)}{2} + \frac{J_C \omega_C^2(t)}{2}. \quad (5.67)$$

Итак, кинетическая энергия цилиндра, катящегося по плоскости, равна сумме кинетической энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и кинетической энергии вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Этот результат годится не только для цилиндра (колеса или шара), катящегося по плоскости, но и для любого тела, совершающего плоское движение.



Результат (5.67) обобщается на общий случай — когда твердое тело произвольно (свободно) движется в пространстве. Приведем без доказательства так называемую **теорему Кёнига**:

Кинетическая энергия свободно движущегося твердого тела массой m есть

$$K(t) = \frac{m v_C^2(t)}{2} + \frac{J_C \omega_C^2(t)}{2}, \quad (5.68)$$

где $v_C(t)$ — мгновенная скорость центра масс тела, $\omega_C(t)$ — угловая скорость вращения тела вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс, $J_C(t)$ — момент инерции тела относительно указанной мгновенной оси вращения.

Заметим, что если движение тела является плоским, то момент инерции J_C не изменяется со временем и соотношение (5.68) превращается в соотношение (5.67).

Задача 1. Используя условие и результат решения задачи 2 из п. 4.1.3, найдите кинетическую энергию цилиндра массой m .

□ Воспользовавшись результатами, полученными при решении задачи 2 из п. 4.1.3, заключаем: $v_C = \frac{1}{2}(V_2 - V_1)$, $\omega_C = \frac{V_1 + V_2}{2R}$. Подставив эти величины в (5.67) и учтя, что $J_C = \frac{1}{2} m R^2$, находим кинетическую энергию цилиндра: $K = \frac{1}{4} m [(V_2 - V_1)^2 + \frac{1}{4} (V_1 + V_2)^2]$. ■

Задача 2. Цилиндр массой m начинает скатываться без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона α . Чему равна кинетическая энергия цилиндра через время t после начала скатывания?

□ Учитывая, что $\omega_C(t) = \frac{v_C(t)}{R}$ и $J_C = \frac{1}{2}mR^2$, представим выражение (5.67) для кинетической энергии цилиндра в виде:

$$K(t) = \frac{1}{2}mv_C^2(t) + J_C \frac{v_C^2(t)}{2R^2} = \frac{3}{4}mv_C^2(t). \quad (6^*)$$

Центр масс цилиндра движется равноускоренно с ускорением $a_C = \frac{v_C(t)}{t}$. Поэтому преобразуем (6*) к виду:

$$K(t) = \frac{3}{4}ma_C^2t^2. \quad (7^*)$$

С учетом (4.90, б) получим из (7*) ответ на вопрос, поставленный в задаче: $K(t) = \frac{1}{3}mg^2t^2\sin^2\alpha$. ■

5.5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

5.5.1. Консервативные силы

Кинетическая энергия — это энергия движущегося тела. Но энергией может обладать не только движущееся тело. Поднятое над поверхностью земли тело или сжатая пружина обладают энергией и в том случае, когда они покоятся. Мы не имеем здесь в виду энергию покоя, о которой шла речь в п. 5.4.5 (оставаясь в рамках классической физики, мы воздержимся от рассмотрения энергии покоя). Мы имеем в виду *потенциальную энергию* — энергию, которая определяется не скоростью тела, а *его положением по отношению к другим телам*, например по отношению к Земле, или *его формой* (которая, в свою очередь, определяется *взаимным расположением частиц тела*).

Изменение кинетической энергии связано с работой сил, природы которых может быть какой угодно. В теореме об изменении кинетической энергии участвует равнодействующая сила, которая может являться векторной суммой сил различной природы (например, тяжести, упругости, трения, скольжения). В отличие от

кинетической энергии, изменение потенциальной энергии связано с работой не любых сил, а только так называемых *консервативных сил*. Из рассмотренных нами сил к консервативным относятся силы тяжести и упругости, а к неконсервативным — силы трения скольжения и сопротивления при движении тела в жидкости или газе.

Консервативной называют силу, работа которой не зависит от траектории точки приложения силы, а определяется только начальной и конечной точками траектории. Обозначим через $A_I(1 \rightarrow 2)$, $A_{II}(1 \rightarrow 2)$, $A_{III}(1 \rightarrow 2)$ работы некоторой консервативной силы на пути от 1 до 2, совершенные соответственно на траекториях I, II, III (рис. 5.19). Консервативность силы означает, что $A_I(1 \rightarrow 2) = A_{II}(1 \rightarrow 2) = A_{III}(1 \rightarrow 2)$. Работа консервативной силы *сохраняется* при замене одной траектории от 1 до 2 на другую. Отсюда и наименование «консервативная» (от латинского *conservatio*, означающего «сохранение»). Коль скоро работа консервативной силы не зависит от формы траектории точки ее приложения, то можно, в частности, выбрать прямолинейную траекторию и рассматривать работу на *перемещении* $\vec{\Delta r}$ ($\vec{\Delta r}$ — вектор, проведенный из начальной точки траектории I в конечную точку 2).

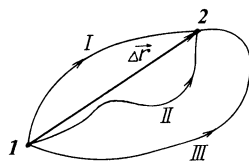


Рис. 5.19

Теорема

Если работа силы зависит только от начальной и конечной точек траектории точки приложения силы и не зависит от формы траектории, то работа такой силы на любой замкнутой траектории равна нулю.

Докажем эту теорему. Рассмотрим некоторую замкнутую траекторию точки приложения силы (рис. 5.20, а). Обозначим через A работу силы на всей траектории. Выберем на ней произвольно две точки — точки 1 и 2. Обозначим через $A_I(1 \rightarrow 2)$ работу от 1 до 2 на участке I, а через $A_{II}(2 \rightarrow 1)$ работу от 2 до 1 на участке II (рис. 5.20, б). Ясно, что

$$A = A_I(1 \rightarrow 2) + A_{II}(2 \rightarrow 1). \quad (1^*)$$

Обозначим через $A_{II}(1 \rightarrow 2)$ работу от 1 до 2 на участке II (см. пункт на рисунке). Согласно

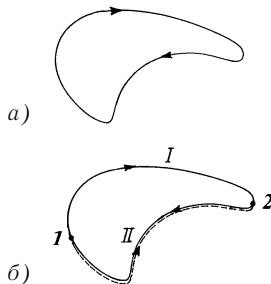


Рис. 5.20

условию теоремы, $A_I(1 \rightarrow 2) = A_{II}(1 \rightarrow 2)$ и поэтому можно переписать (1*) в виде:

$$A = A_{II}(1 \rightarrow 2) + A_{II}(2 \rightarrow 1). \quad (2^*)$$

Учитывая, что $A_{II}(2 \rightarrow 1) = -A_{II}(1 \rightarrow 2)$, получаем из (2*): $A = 0$, что и требовалось доказать.

Нетрудно доказать также *обратную теорему*, согласно которой из равенства нулю работы по замкнутой траектории следует независимость работы от формы траектории при заданных ее начальной и конечной точках.

Итак, консервативную силу можно определить *двумя способами*: 1) как силу, работа которой не зависит от формы траектории, по которой перемещается точка приложения силы, а зависит лишь от начального и конечного положений; 2) как силу, работа которой по любой замкнутой траектории равна нулю.

5.5.2. Теорема об изменении потенциальной энергии

Эту теорему можно сформулировать так:

Изменение потенциальной энергии тела равно работе консервативной силы, взятой с противоположным знаком.

Прежде чем доказывать теорему, поясним смысл слов «работа силы, взятая с противоположным знаком». Когда говорят, что изменение кинетической энергии равно полной работе равнодействующей силы (теорема об изменении кинетической энергии), то это означает возрастание кинетической энергии, если работа равнодействующей положительна, и убывание кинетической энергии, если работа отрицательна. Когда речь идет о потенциальной энергии, то рассматривают работу только консервативных сил (обычно одной определенной консервативной силы, например, силы тяжести). *Потенциальная энергия тела возрастает, когда работа этой силы отрицательна, и убывает, когда она положительна.* Иными словами, с *отрицательной* работой консервативной силы связано *приращение* потенциальной энергии тела, а с *положительной* работой — *убывание* потенциальной энергии.

Предположим, что консервативная сила совершает работу $A(1 \rightarrow 2)$ при перемещении из 1 в 2 и при этом потенциальная энергия U тела претерпевает изменение, которое обозначим как $U_2 - U_1$ или, иначе, $\Delta U(1 \rightarrow 2)$. Согласно теореме об изменении потенциальной энергии,

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = -A(1 \rightarrow 2). \quad (5.69)$$

Если работа положительна ($A(1 \rightarrow 2) > 0$), то изменение потенциальной энергии отрицательно ($\Delta U(1 \rightarrow 2) < 0$). Если работа отрицательна ($A(1 \rightarrow 2) < 0$), то изменение потенциальной энергии положительно ($\Delta U(1 \rightarrow 2) > 0$).



Можно ли сказать, что приращение потенциальной энергии тела при подъеме над поверхностью земли *обеспечивается* отрицательной работой силы тяжести?

Разумеется, так говорить нельзя. Ведь тело поднимается вверх благодаря не силе тяжести, а какой-то иной силе, которая либо действует во время подъема, либо действовала ранее, сообщив телу скорость, направленную вверх. Просто приращение потенциальной энергии равно взятой со знаком «минус» работе силы тяжести на перемещении, соответствующем подъему тела. Иногда говорят, что «приращение потенциальной энергии обеспечивается работой *против* силы тяжести».

Соотношение (5.69) можно переписать в виде:

$$A(1 \rightarrow 2) = -\Delta U(1 \rightarrow 2) \quad (5.70)$$

и дать эквивалентную формулировку **теоремы об изменении потенциальной энергии**:

работа, совершенная консервативной силой, равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с противоположным знаком.

Докажем теорему, представляя тело, простоты ради, материальной точкой (частицей). Пусть частица переходит из положения 1 (с потенциальной энергией U_1) в положение 2 (с потенциальной энергией U_2). При этом действующая на частицу консервативная сила совершает работу $A(1 \rightarrow 2)$. Так как работа консервативной силы не зависит от формы траектории, то такая же работа будет совершена при перемещении частицы из 1 в 2 по траектории, проходящей через нулевое положение O , соответствующее нулевому уровню потенциальной энергии (рис. 5.21):

$$A(1 \rightarrow 2) = A(1 \rightarrow 0) + A(0 \rightarrow 2). \quad (1^*)$$

Равенство (1*) можно, очевидно, переписать в виде

$$A(1 \rightarrow 2) = A(1 \rightarrow 0) - A(2 \rightarrow 0). \quad (2^*)$$

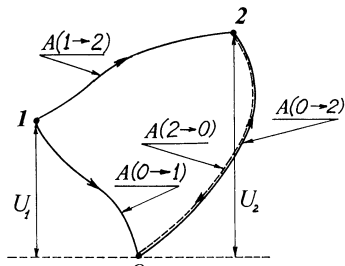


Рис. 5.21

Учитывая, что при совершении работы $A(1 \rightarrow 0)$ потенциальная энергия частицы обращается в нуль, заключаем, что $A(1 \rightarrow 0) = U_1$. Соответственно, $A(2 \rightarrow 0) = U_2$. В результате соотношение (2*) принимает вид:

$$A(1 \rightarrow 2) = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U(1 \rightarrow 2).$$

Таким образом, мы приходим к результату (5.70), что и требовалось доказать.

5.5.3. Работа силы тяжести и потенциальная энергия тела, поднятого над землей

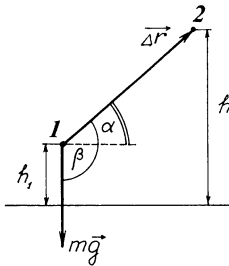


Рис. 5.22

Предположим, что тело массой m , находившееся в точке 1 на высоте h_1 над землей, переместилось в точку 2 на высоте h_2 над землей (рис. 5.22). Причины, заставившие тело совершить такое перемещение, нас сейчас не интересуют. Нас интересует здесь работа, которую совершает сила тяжести $m\vec{g}$ на перемещении $\vec{\Delta r}$ из 1 в 2. Эта работа равна

$$\begin{aligned} A(1 \rightarrow 2) &= m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r} = \\ &= mg\Delta r \cos\beta = -mg\Delta r \sin\alpha = -mg(h_2 - h_1). \end{aligned}$$

Зная работу $A(1 \rightarrow 2)$ и воспользовавшись соотношением (5.69), найдем приращение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии тела, переместившегося из точки на высоте h_1 в точку на высоте h_2 :

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = -A(1 \rightarrow 2) = mg(h_2 - h_1). \quad (5.71)$$

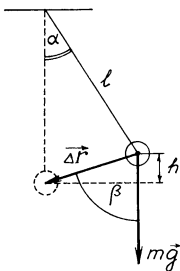


Рис. 5.23

Задача 1 (рис. 5.23). Нить длиной l , к концу которой подвешено тело массой m , отклонили от вертикали на угол α и отпустили. Как изменится потенциальная энергия тела к моменту, когда нить окажется вертикальной?

□ Из рисунка видно, что работа $A(1 \rightarrow 2)$ силы тяжести тела на перемещении $\vec{\Delta r}$ (перемещении из 1 в 2) равна

$$\begin{aligned} A(1 \rightarrow 2) &= m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r} = mg\Delta r \cos\beta = \\ &= mgh = mgl(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

Согласно (5.69),

$$\begin{aligned} \Delta U(1 \rightarrow 2) &= -A(1 \rightarrow 2) = \\ &= -mgl(1 - \cos\alpha). \end{aligned} \quad (5.72) \quad \blacksquare$$

Задача 2 (рис. 5.24). К концам нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены грузы массами m и M ($M > m$). В начальный момент времени грузы неподвижны. Чему равны изменения потенциальной энергии каждого груза за время t после того, как грузам предоставили возможность двигаться?

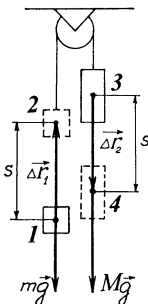


Рис. 5.24

□ За время t каждый груз переместится на расстояние $s = \frac{1}{2}at^2$, где a — модуль ускорения груза. Согласно (2.33),

$a = g \frac{M-m}{M+m}$; поэтому

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \frac{M-m}{M+m}. \quad (1^*)$$

Изменения $\Delta U_m(1 \rightarrow 2)$ и $\Delta U_M(3 \rightarrow 4)$ потенциальной энергии грузов с массами m и M , соответственно, равны

$$\Delta U_m(1 \rightarrow 2) = -A_m(1 \rightarrow 2) = -m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r}_1 = mgs; \quad (2^*)$$

$$\Delta U_M(3 \rightarrow 4) = -A_M(3 \rightarrow 4) = -M\vec{g} \cdot \vec{\Delta r}_2 = Mgs. \quad (3^*)$$

Изменение ΔU потенциальной энергии системы грузов равно

$$\Delta U = \Delta U_m(1 \rightarrow 2) + \Delta U_M(3 \rightarrow 4) = -(M - m)gs. \quad (4^*)$$

Подставив (1*) в (2*)—(4*), получим

$$\Delta U_m(1 \rightarrow 2) = \frac{1}{2}m\lambda g^2 t^2, \quad \Delta U_M(3 \rightarrow 4) = -\frac{1}{2}M\lambda g^2 t^2,$$

$$\Delta U = -\frac{1}{2}(M - m)\lambda g^2 t^2,$$

где $\lambda = \frac{M-m}{M+m}$. ■

5.5.4. Работа силы упругости и потенциальная энергия деформированной пружины

Рассмотрим упругую пружину, подвергающуюся деформации растяжения. Пружину растягивает некоторая сила, действующая со стороны тела, прикрепленного к концу пружины. В соответствии

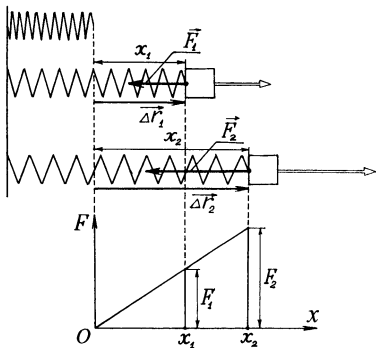


Рис. 5.25

с третьим законом Ньютона, растянутая пружина действует на прикрепленное к ней тело с силой упругости \vec{F} , направленной противоположно перемещению $\vec{\Delta r}$ точки приложения силы (рис. 5.25). Работа силы упругости на перемещении $\vec{\Delta r}$ описывается, согласно (5.17), соотношением

$$A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = -\frac{1}{2} k(\Delta r)^2, \quad (5.73)$$

где k — жесткость пружины. На рисунке представлены две ситуации:

1) удлинение пружины равно $x_1 = \Delta r_1$, 2) удлинение пружины равно $x_2 = \Delta r_2$. Там же приведен определяемый законом Гука график зависимости от x для модуля силы упругости: $F = kx$.

Найдем изменение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии пружины при переходе от ситуации 1 к ситуации 2. При переходе из недеформированного положения к ситуации 1 пружина удлиняется на $\Delta r_1 = x_1$, при этом сила упругости пружины совершает, согласно (5.73), работу $A_1 = -kx_1^2$. При удлинении пружины на $\Delta r_2 = x_2$

сила упругости совершает работу $A_2 = -\frac{kx_2^2}{2}$. Работа при переходе от ситуации 1 к 2 равна

$$A(1 \rightarrow 2) = A_2 - A_1 = \left(-\frac{kx_2^2}{2}\right) - \left(-\frac{kx_1^2}{2}\right) = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

В соответствии с (5.69), отсюда получаем:

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = -A(1 \rightarrow 2) = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2). \quad (5.74)$$

5.5.5. Нулевой уровень потенциальной энергии

В отличие от кинетической энергии, потенциальная энергия отсчитывается от условного *нулевого уровня*, который может быть выбран произвольно.

Потенциальную энергию тела, поднятого над землей, обычно отсчитывают от уровня земной поверхности, т. е. принимают за нуль потенциальную энергию на уровне земли. В этом случае потенциальная энергия тела массой m на высоте h_1 считается равной $U_1 = mgh_1$, а на высоте h_2 — равной $U_2 = mgh_2$. Если $h_2 > h_1$,

то $U_2 > U_1$ и приращение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии при подъеме с высоты h_1 на высоту h_2 есть

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = U_2 - U_1 = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1). \quad (1^*)$$

В случае, изображенном на рисунке 5.22, можно принять, что нулевой уровень потенциальной энергии проходит через точку 1. Тогда пришлось бы считать, что $U_1 = 0$ и $U_2 = mg(h_2 - h_1)$. Приращение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии определялось бы так:

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = U_2 - U_1 = mg(h_2 - h_1) - 0 = mg(h_2 - h_1). \quad (2^*)$$

А можно было бы принять, что нулевой уровень потенциальной энергии проходит через точку 2. Тогда $U_1 = -mg(h_2 - h_1)$ (потенциальная энергия тела в точке 1 оказалась бы отрицательной!) и $U_2 = 0$. Приращение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии определялось бы так:

$$\begin{aligned} \Delta U(1 \rightarrow 2) &= U_2 - U_1 = \\ &= 0 - [-mg(h_2 - h_1)] = mg(h_2 - h_1). \end{aligned} \quad (3^*)$$

Легко видеть, что результаты (1*)—(3*) совпадают с результатом (5.71), полученным без каких-либо предположений о положении нулевого уровня потенциальной энергии.

В задаче 1 в п. 5.5.3 сама постановка вопроса «как изменится потенциальная энергия тела?» невольно инициирует желание выяснить, какова она была в начальном положении и какой оказалась в конечном. Если отсчитывать ее от уровня земли, то следует как-то обозначить высоту точки подвеса нити; пусть она будет H . Тогда высота тела в точке 1 будет равна $H - l \cos \alpha$ и, значит, $U_1 = mg(H - l \cos \alpha)$. Высота тела в точке 2 будет равна $H - l$ и, значит, $U_2 = mg(H - l)$. Искомое изменение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии будет равно

$$\begin{aligned} \Delta U(1 \rightarrow 2) &= U_2 - U_1 = mg(H - l) - mg(H - l \cos \alpha) = \\ &= -mgl(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (4^*)$$

При желании можно было бы принять, что нулевой уровень потенциальной энергии проходит через точку подвеса нити. Тогда $U_1 = -mgl \cos \alpha$ и $U_2 = -mgl$. Изменение $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ потенциальной энергии равно

$$\begin{aligned} \Delta U(1 \rightarrow 2) &= U_2 - U_1 = -mgl - (-mgl \cos \alpha) = \\ &= -mgl(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5^*)$$

Легко видеть, что результаты (4*) и (5*) совпадают с (5.72) — результатом, полученным без выбора положения нулевого уровня.

Потенциальную энергию деформированной пружины удобно отсчитывать, полагая, что она равна нулю, когда пружина не

деформирована. Именно так мы и полагали, когда отыскивали $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ в п. 5.5.4:

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = U_2 - U_1 = \left(-\frac{k}{l} x_2^2\right) - \left(-\frac{k}{l} x_1^2\right).$$

Если бы мы отсчитывали потенциальную энергию от энергии в ситуации 1 (когда удлинение равно x_1), то в этом случае мы должны были бы считать, что $U_1 = 0$, а U_2 численно равна площади заштрихованной трапеции на рисунке 5.25 (произведению полусуммы оснований трапеции на ее высоту):

$$U_2 = \frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1) = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

В этом случае

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = U_2 - U_1 = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) - 0 = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

и мы приходим к результату (5.74). Конечно, удобнее было отсчитывать потенциальную энергию пружины от энергии, соответствующей нулевому удлинению, — не потребовалось вычислять площадь трапеции.

То, что выбор начала отсчета потенциальной энергии произволен, не должно нас смущать, поскольку ни одно явление в природе или технике не определяется значением *самой* потенциальной энергии. Играет роль только *разность* потенциальных энергий в конечном и начальном положениях. А эта разность, как можно убедиться на приведенных выше примерах, *не зависит от положения нулевого уровня потенциальной энергии*.

5.5.6. Потенциальная энергия — энергия взаимодействия тел или частей тела

Есть *принципиальное* отличие потенциальной энергии от кинетической. Кинетическая энергия — величина, относящаяся к одному телу, а потенциальная энергия — это *энергия взаимодействия* по меньшей мере двух тел (или частей одного и того же тела). Как уже отмечалось, потенциальная энергия определяется *взаимным расположением* тел или частей тела. Это объясняется именно тем, что она является энергией взаимодействия, а взаимодействие тел, естественно, зависит от их взаимного расположения.

Теорема об изменении кинетической энергии (следствие второго закона Ньютона) не принимает во внимание третий закон Ньютона, не учитывает то, что силы возникают попарно и что само понятие силы относится к двум взаимодействующим телам — к телу, на которое действует сила, и к телу, со стороны которого она

действует. Это учитывает потенциальная энергия, так что ее можно, в принципе, рассматривать как другую характеристику (наравне с силой) взаимного действия тел друг на друга.

? Возникает естественный вопрос: если потенциальная энергия есть энергия взаимодействия тел, то почему же в п. 5.5.3 мы говорили о потенциальной энергии *тела*, поднятого над землей, а в п. 5.5.4 — о потенциальной энергии *деформированной пружины*?

Соотношения (5.71), (5.72), (5.74) определяли изменение потенциальной энергии, относящееся всякий раз к одному телу. В чем же тут дело? Дело в том, что вместо, например, изменения потенциальной энергии тела в соотношении (5.71), следовало бы, строго говоря, рассматривать изменение *потенциальной энергии взаимодействия* двух тел — тела, показанного на рисунке 5.22, и Земли. Это изменение можно представить соотношением:

$$\Delta U = -(m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_2), \quad (5.75)$$

где $m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}_1$ — работа силы тяжести, действующей на тело со стороны Земли, а $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_2$ — работа силы, действующей на Землю со стороны тела в соответствии с третьим законом Ньютона (ясно, что $\vec{F} = -m\vec{g}$). Однако эти «строгости» совершенно излишни, поскольку $\Delta r_2 \ll \Delta r_1$, так что второе слагаемое в правой части (5.75) фактически равно нулю. Поэтому при рассмотрении падения тела на Землю можно спокойно пренебрегать смещением Земли и *сводить работу сил взаимодействия тела и Земли к работе только одной силы* — силы тяжести, действующей на тело со стороны Земли. Вот почему потенциальную энергию системы двух тел можно рассматривать в соответствующих случаях как энергию одного из этих тел.

5.6. СОХРАНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ С КОНСЕРВАТИВНЫМИ СИЛАМИ

5.6.1. Механическая энергия

Строго говоря, понятие «механическая энергия» относится не к отдельному телу, а к *системе тел* (по крайней мере, двух тел). *Механическая энергия W системы тел — это сумма ее кинетической энергии K и потенциальной энергии U :*

$$W = K + U. \quad (5.76)$$

Внешне весьма простое соотношение (5.76) требует пояснения. Нужно уточнить, что такое «кинетическая энергия системы» и «потенциальная энергия системы».

Кинетическая энергия системы, состоящей из N тел, есть *сумма кинетических энергий этих тел*:

$$K = \sum_{i=1}^N K_i. \quad (5.77)$$

Здесь K_i — кинетическая энергия i -го тела. Потенциальная энергия замкнутой системы из N тел, взаимодействующих посредством консервативных сил, есть *сумма потенциальных энергий всех парных взаимодействий* (каждое тело системы взаимодействует с каждым из остальных тел):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \sum^N U_{ij}. \quad (5.78)$$

Здесь U_{ij} — потенциальная энергия взаимодействия i -го и j -го тел. В двойной сумме в (5.78) исключаются слагаемые типа U_{ii} или U_{jj} , поскольку не может тело взаимодействовать само с собой.

Множитель $\frac{1}{2}$ учитывает тот факт, что U_{ij} и U_{ji} — это одно и то же.

Предположим, что $N = 3$. В этом случае:

$$K = K_1 + K_2 + K_3; \quad (5.77, a)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 (U_{i1} + U_{i2} + U_{i3}) - U_{11} - U_{22} - U_{33} \right] = \\ &= U_{12} + U_{13} + U_{23}. \end{aligned} \quad (5.78, a)$$

Здесь U_{12} — потенциальная энергия взаимодействия 1-го и 2-го тел, U_{13} — 1-го и 3-го тел, U_{23} — 2-го и 3-го тел.

Если $N = 2$, то

$$K = K_1 + K_2; \quad (5.77, б)$$

$$U = U_{12}. \quad (5.78, б)$$

Рассмотрим систему, состоящую из Земли и тела массой m , находящегося на высоте h от поверхности Земли и имеющего в рассматриваемый момент времени скорость \vec{v} в системе отсчета, связанной с Землей. В этой системе кинетическая энергия тела равна $\frac{1}{2}mv^2$, а кинетическая энергия Земли равна нулю. Говоря

о потенциальной энергии взаимодействия, заметим, что в соответствии с замечаниями, сделанными в п. 5.5.6, работу сил тела и Земли можно свести к работе силы тяжести тела. Будем, как обычно принято, считать, что нулевой уровень потенциальной энергии находится на земной поверхности. С учетом сделанных замечаний можно представить (5.77, б) и (5.78, б) в виде: $K = \frac{1}{2}mv^2$ и $U = mgh$. Таким образом, механическая энергия W описывается в данном случае формулой:

$$W = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (5.79)$$

5.6.2. Закон сохранения механической энергии

В середине XIX столетия Герман Гельмгольц обратил внимание на то, что в замкнутой системе одна и та же величина (работа) может быть выражена как через *приращение* «живой силы» (кинетической энергии), так и через *убыль* «напряженной силы» (потенциальной энергии). Следовательно, *увеличение* «живой силы» в системе должно сопровождаться *соответствующим уменьшением* «напряженной силы», и наоборот. Так, Гельмгольц пришел к «принципу сохранения суммы живых и напряженных сил». Этот принцип именуется ныне **законом сохранения механической энергии**. Он может быть сформулирован следующим образом:

Изменение во времени механической энергии замкнутой системы, в которой действуют консервативные силы, равно нулю.

Иначе говоря,

в замкнутой системе, в которой действуют консервативные силы, механическая энергия сохраняется со временем.

Вывод этого закона особенно прост для замкнутой системы, состоящей только из двух тел. Пусть \vec{F}_{21} и \vec{F}_{12} — консервативные силы, действующие, соответственно, на тело 1 и тело 2 системы. Обозначим через $\vec{\Delta r}_1$ и $\vec{\Delta r}_2$ перемещения этих тел за некоторый промежуток времени Δt . Изменение ΔK кинетической энергии системы за время Δt есть, согласно (5.77, б),

$\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2$, что можно представить, согласно (5.30) и (5.4), в виде:

$$\Delta K = \vec{F}_{21} \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \vec{\Delta r}_2. \quad (1^*)$$

Изменение ΔU потенциальной энергии системы за время Δt есть, согласно (5.78, б) и (5.69),

$$\Delta U = \Delta U_{12} = -(\vec{F}_{21} \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \vec{\Delta r}_2). \quad (2^*)$$

(напомним также соотношение (5.75)). Изменение ΔW механической энергии системы есть, согласно (5.76), $\Delta W = \Delta K + \Delta U$. Подставив сюда (1*) и (2*), получим:

$$\Delta W = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad W = \text{const}. \quad (5.80)$$

Если механическая энергия представлена выражением (5.79), то закон ее сохранения имеет вид:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}. \quad (5.81)$$



Полезно познакомиться с выводом закона сохранения механической энергии, рассматривая замкнутую систему из трех тел, между которыми действуют консервативные силы. Этот вывод легко обобщить на случай системы из N тел.

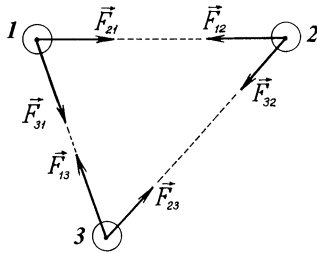


Рис. 5.26

На рисунке 5.26 схематически показана замкнутая система из трех тел. Здесь \vec{F}_{ij} — сила, с какой i -е тело действует на j -е тело ($i, j = 1, 2, 3$). Обозначим через $\vec{\Delta r}_1, \vec{\Delta r}_2, \vec{\Delta r}_3$ перемещения тел за некоторый промежуток времени Δt . Согласно (5.77, а), $\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3$. Применим к каждому телу теорему об изменении кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \Delta K_1 &= (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}) \cdot \vec{\Delta r}_1; \quad \Delta K_2 = \\ &= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}) \cdot \vec{\Delta r}_2; \quad \Delta K_3 = (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}) \cdot \vec{\Delta r}_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta K = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}) \cdot \vec{\Delta r}_1 + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}) \cdot \vec{\Delta r}_2 + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}) \cdot \vec{\Delta r}_3. \quad (3^*)$$

Согласно (5.78, а), $\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{13} + \Delta U_{23}$. Здесь:

$$\Delta U_{12} = -(\vec{F}_{21} \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \vec{\Delta r}_2); \quad \Delta U_{13} = -(\vec{F}_{13} \cdot \vec{\Delta r}_3 + \vec{F}_{31} \cdot \vec{\Delta r}_1);$$

$$\Delta U_{23} = -(\vec{F}_{32} \cdot \vec{\Delta r}_2 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{\Delta r}_3).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta U &= -(\vec{F}_{21} \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \vec{\Delta r}_2) - (\vec{F}_{13} \cdot \vec{\Delta r}_3 + \vec{F}_{31} \cdot \vec{\Delta r}_1) - \\ &\quad - (\vec{F}_{32} \cdot \vec{\Delta r}_2 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{\Delta r}_3). \end{aligned} \quad (4^*)$$

Воспользовавшись (3*) и (4*), получаем

$$\begin{aligned} \Delta W = \Delta K + \Delta U = & (\vec{F}_{21} \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{F}_{31} \cdot \vec{\Delta r}_1) + (\vec{F}_{12} \cdot \vec{\Delta r}_2 + \vec{F}_{32} \cdot \vec{\Delta r}_2) + \\ & + (\vec{F}_{13} \cdot \vec{\Delta r}_3 + \vec{F}_{32} \cdot \vec{\Delta r}_2) - (\vec{F}_{21} \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot \vec{\Delta r}_2) - \\ & - (\vec{F}_{13} \cdot \vec{\Delta r}_3 + \vec{F}_{31} \cdot \vec{\Delta r}_1) - (\vec{F}_{32} \cdot \vec{\Delta r}_2 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{\Delta r}_3). \end{aligned} \quad (5^*)$$

Нетрудно видеть, что все скалярные произведения $\vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$, входящие в (5*), *взаимно сокращаются*, и мы приходим к результату: $\Delta W = 0$.

5.6.3. Примеры, иллюстрирующие закон сохранения механической энергии

В приводимых ниже примерах рассматривается система двух тел — земного шара и тела массой m .

Задача 1 (рис. 5.27). Тело массой m бросают с высоты H с начальной горизонтальной скоростью \vec{v}_0 . Докажите, что во время полета тела его механическая энергия сохраняется.

□ Механическая энергия тела в момент t определяется соотношением:

$$W = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) + mgh(t), \quad (1^*)$$

где $v(t)$ и $h(t)$ — соответственно, скорость и высота тела в момент t . Положение тела в этот момент обозначено на рисунке точкой A . Воспользуемся тем, что $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(t)$ (см. рисунок) и, значит,

$$v^2(t) = v_0^2 + v_1^2(t). \quad (2^*)$$

Рассматривая вертикальную составляющую движения тела, представим

$$v_1(t) = gt; \quad h(t) = H - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3^*)$$

Подставив (2*) и (3*) в (1*), получим

$$W = \frac{1}{2} m (v_0^2 + g^2 t^2) + mg \left(H - \frac{gt^2}{2} \right) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgH = \text{const.}$$

Итак, W не зависит от t , что и требовалось доказать. ■

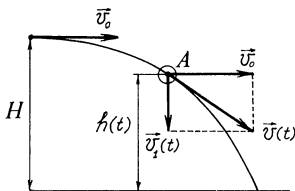


Рис. 5.27

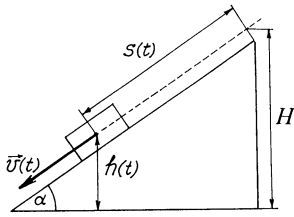


Рис. 5.28

Задача 2 (рис. 5.28). Тело массой m соскальзывает без начальной скорости с гладкой наклонной плоскости высотой H . Докажите, что во время соскальзывания механическая энергия тела сохраняется.

□ Механическая энергия тела в момент t определяется соотношением (1*). Тело движется с ускорением $gs\sin\alpha$; поэтому

$$v(t) = gts\sin\alpha$$

и

$$h(t) = H - s(t)\sin\alpha = H - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha.$$

Подставив $v(t)$ и $h(t)$ в (1*), получим

$$W = \frac{1}{2}mg^2t^2\sin^2\alpha + mg\left(H - \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha\right) = mgH = \text{const}.$$

Итак, W не зависит от t , что и требовалось доказать. ■

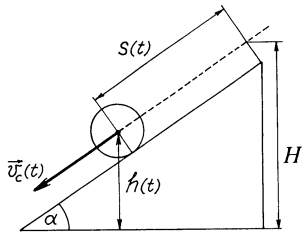


Рис. 5.29

Задача 3 (рис. 5.29). Цилиндр массой m скатывается без начальной скорости с наклонной плоскости высотой H (высота центра масс цилиндра на вершине плоскости). Проскальзывания нет. Докажите, что во время скатывания тела его механическая энергия сохраняется.

□ Кинетическая энергия цилиндра в момент t равна

$$K(t) = \frac{3}{4}mv_C^2(t) \quad (4^*)$$

(см. (5.67) и (6*) из п. 5.4.8). Здесь $v_C(t)$ — модуль скорости центра масс цилиндра. Следовательно, механическая энергия скатывающегося цилиндра определяется соотношением

$$W = K(t) + U(t) = \frac{3}{4}mv_C^2(t) + mgh_C(t), \quad (5^*)$$

где $h_C(t)$ — высота центра масс в момент t . Обозначим через a_C модуль ускорения центра масс и учтем, что $v_C(t) = a_C t$. Учтем также, что

$$h_C(t) = H - s(t)\sin\alpha = H - \frac{1}{2}a_C t^2\sin\alpha.$$

Теперь соотношение (5*) можно переписать в виде

$$W = \frac{3}{4} m a_C^2 t^2 + mg \left(H - \frac{1}{2} a_C t^2 \sin \alpha \right). \quad (6^*)$$

Согласно (4.90, б), $a_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha$. Подставив a_C в (6*), получим

$$W = \frac{1}{3} m g^2 t^2 \sin^2 \alpha + mg \left(H - \frac{1}{3} g t^2 \sin^2 \alpha \right) = mgH = \text{const.}$$

Итак, W не зависит от t , что и требовалось доказать. ■



Обратим внимание: на скатывающийся цилиндр действует также сила трения покоя, которая консервативной силой не является. Но поскольку эта сила *работы не совершает* (напомним замечания в п. 5.2.7), закон сохранения механической энергии выполняется.

5.6.4. Изменение механической энергии под действием внешней силы

Предположим, что тело массой m начинают поднимать вверх, приложив к нему постоянную силу \vec{F} ($F > mg$) (рис. 5.30). Найдем изменение ΔW механической энергии на перемещении $\vec{\Delta r}$ ($\Delta r = s$). Изменение ΔK кинетической энергии равно полной работе на перемещении $\vec{\Delta r}$ сил, действующих на тело. Поскольку на тело действуют силы $m\vec{g}$ и \vec{F} , то, следовательно,

$$\Delta K = (m\vec{g} + \vec{F}) \cdot \vec{\Delta r} = -mgs + Fs.$$

Изменение ΔU потенциальной энергии равно взятой с противоположным знаком работе силы тяжести на перемещении $\vec{\Delta r}$:

$$\Delta U = -m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r} = mgs.$$

Таким образом,

$$\Delta W = \Delta K + \Delta U = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = Fs. \quad (1^*)$$

Мы видим, что механическая энергия тела не сохраняется. Если в точке M она равнялась нулю, то в точке N у нее есть потенциальная энергия, равная mgs , плюс кинетическая энергия, равная $(F - mg)s$.

Несохранение механической энергии в рассматриваемой ситуации понятно: сила \vec{F} является *внешней силой* по отношению к сис-

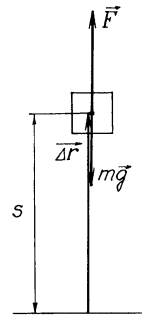


Рис. 5.30

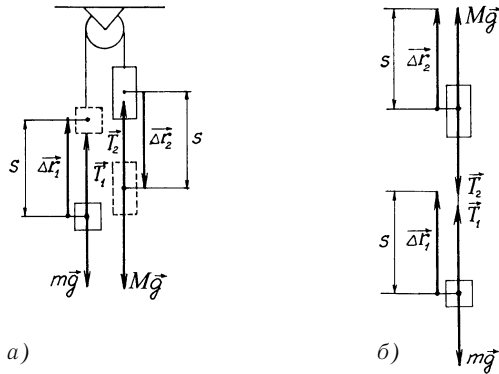


Рис. 5.31

теме Земля—тело. В данном случае эта система оказывается *незамкнутой*.

В этой связи интересно вернуться к задаче 2 из п. 5.5.3, где к концам нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массы m и M ($M > m$). На груз массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции нити \vec{T}_1 , а на груз массой M — сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции нити \vec{T}_2 (рис. 5.31, а). Модули сил \vec{T}_1 и \vec{T}_2 равны; обозначим их через T . Сила \vec{T}_1 играет для системы Земля—груз массой t ту же роль, что и сила \vec{F} в ситуации, показанной на рисунке 5.30. Система Земля—груз массой t *незамкнутая*. Изменение ΔW_m механической энергии этой системы равно, согласно (1*),

$$\Delta W_m = \vec{T}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 = Ts. \quad (2^*)$$

Точно так же является *незамкнутой* система Земля—груз массой M . Изменение ΔW_M механической энергии этой системы равно

$$\Delta W_M = \vec{T}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 = -Ts. \quad (3^*)$$

А вот система, состоящая из трех тел (Земли, груза массой t и груза массой M), является *замкнутой*. Для нее должен быть применим закон сохранения механической энергии, т. е. должно выполняться равенство $\Delta W = 0$, где ΔW — изменение механической энергии системы из трех рассматриваемых тел.



Докажем, что равенство $\Delta W = 0$ действительно выполняется. В случае системы из трех тел изменение ΔW механической энергии представляется соотношением:

$$\Delta W = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta K_3 + \Delta U_{12} + \Delta U_{13} + \Delta U_{23}. \quad (4^*)$$

Телом 1 будем считать груз массой m , телом 2 — груз массой M , телом 3 — Землю. Работая в системе отсчета, связанной с Землей, положим $\Delta K_3 = 0$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$\Delta U_{12} = 0, \quad (5^*)$$

так что соотношение (4*) упрощается: $\Delta W = \Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta U_{13} + \Delta U_{23}$. Легко сообразить, что $\Delta K_1 + \Delta U_{13}$ есть ΔW_m из (2*), а $\Delta K_2 + \Delta U_{23}$ есть ΔW_M из (3*). Таким образом,

$$\Delta W = \Delta W_m + \Delta W_M. \quad (6^*)$$

Подставив (2*) и (3*) в (6*), получим $\Delta W = 0$, что и требовалось доказать.

Может возникнуть сомнение относительно справедливости равенства (5*). Изобразим показанную на рисунке 5.31, а ситуацию иначе: уберем блок и расположим грузы вдоль вертикали, как показано на рисунке 5.31, б. Теперь видно, что грузы взаимодействуют посредством сил \vec{T}_1 и \vec{T}_2 , так что $\Delta U_{12} = -(\vec{T}_1 \cdot \vec{\Delta r}_1 + \vec{T}_2 \cdot \vec{\Delta r}_2) = -(Ts - Ts) = 0$.

5.6.5. Взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий при сохранении механической энергии

Тело массой m бросают вертикально вверх, сообщив ему начальную кинетическую энергию $\frac{1}{2}mv_0^2$. В самой верхней точке траектории мгновенная скорость тела обращается в нуль — кинетическая энергия оказывается равной нулю. Зато в этой точке тело обладает потенциальной энергией mgH , где H — высота подъема (потенциальную энергию отсчитываем от уровня земной поверхности).

Согласно (1.37), $H = \frac{v_0^2}{2g}$ и, следовательно, $mgH = mg \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Таким образом, полученная телом в момент броска кинетическая энергия полностью превратилась в потенциальную энергию в верхней точке траектории. Достигнув этой точки, тело начинает падать вниз. По мере падения его потенциальная энергия уменьшается и к моменту удара о поверхность целиком превращается в кинетическую энергию.

В течение всего полета механическая энергия остается неизменной — она равна $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH$. С течением времени происходит лишь *перераспределение* вкладов кинетической и потенциаль-

ной энергий в механическую энергию. Приращение кинетической энергии сопровождается соответствующей убылью потенциальной, убыль кинетической энергии сопровождается соответствующим приращением потенциальной — *происходит взаимопревращение кинетической и потенциальной энергий при сохранении механической энергии*.

Зависимость мгновенной скорости тела от времени выражается в данном случае формулой $v(t) = v_0 - gt$. Поэтому зависимость кинетической энергии от времени имеет вид

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}mg^2\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2. \quad (5.82)$$

Эта зависимость изображается графически параболой, участок которой от момента броска тела ($t = 0$) до момента его падения на поверхность $\left(t - \frac{v_0}{g}\right)$ представлен на рисунке 5.32. В момент t

$= \frac{v_0}{g}$, соответствующий верхней точке траектории, кинетическая энергия равна нулю. На том же рисунке показан пунктиром график зависимости от времени для потенциальной энергии тела. Эта зависимость имеет вид:

$$U(t) = W - K(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mg^2\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2. \quad (5.83)$$

(Здесь W — механическая энергия тела.)

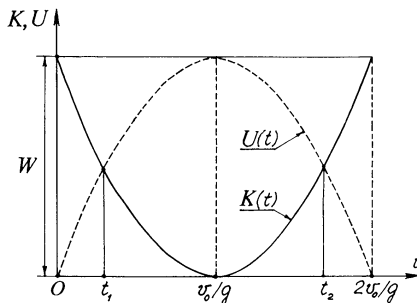


Рис. 5.32

Задача 1. Тело бросили в момент $t = 0$ вертикально вверх с начальной скоростью \vec{v}_0 . В какие моменты времени кинетическая энергия тела оказывается равной потенциальной энергии?

□ Решим уравнение $K(t) = U(t)$, которое, с учетом (5.82) и (5.83), можно представить в виде:

$$\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 g^2 = v_0^2 - \left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 g^2.$$

Таким образом, $t - \frac{v_0}{g} = \pm \frac{v_0}{\sqrt{2}g}$; отсюда получаем искомые моменты времени:

$$t_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{v_0}{g}; \quad t_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{v_0}{g}. \quad \blacksquare$$

Нить длиной l с подвешенным к ней телом массой m составляет в исходном положении прямой угол с вертикалью. Если тело перестать удерживать в таком положении, оно опишет в вертикальной плоскости полуокружность радиусом l , перемещаясь из исходной точки A в точку B (рис. 5.33). Условимся измерять потенциальную энергию тела от самой нижней точки траектории (точки C).

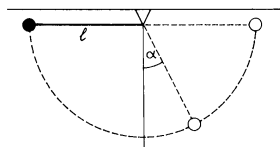


Рис. 5.33

Будем рассматривать $K(\alpha)$ и $U(\alpha)$ — зависимости кинетической и потенциальной энергий тела от угла α между направлением нити и вертикалью. При перемещении тела из A в B угол α изменится от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Кинетическая и потенциальная энергии тела:

в точке A (при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$)

$$K\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad U\left(-\frac{\pi}{2}\right) = mgl;$$

в точке C (при $\alpha = 0$)

$$K(O) = mgl, \quad U(O) = 0;$$

в точке B (при $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad U\left(\frac{\pi}{2}\right) = mgl.$$

По мере движения тела от A к C его потенциальная энергия постепенно превращается в кинетическую, которая затем — по мере движения от C к B — превращается в потенциальную энергию. Достигнув точки B , тело на мгновение останавливается и начинает обратное движение: от B к C и затем от C к A .

Такая картина движения тела означает, что его механическая энергия сохраняется. Это может показаться странным, поскольку система Земля—тело не является в данном случае замкнутой —

ведь на тело, кроме внутренней для системы силы (силы тяжести тела), действует еще и переменная внешняя сила — сила реакции нити. Однако следует учесть, что направление этой силы на каждом малом перемещении тела составляет прямой угол с направлением перемещения. Следовательно, на любом малом перемещении (а значит, и на всем пути от A до B) сила реакции нити работы не совершает. Поэтому можно применять в данном случае закон сохранения механической энергии и считать, что

$$K(\alpha) + U(\alpha) = \text{const} = mgl$$

при любом значении α от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Нетрудно сообразить, что

$$U(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha), \quad (5.84)$$

и, следовательно,

$$K(\alpha) = mgl - U(\alpha) = mgl \cos\alpha. \quad (5.85)$$

На рисунке 5.34 даны графики зависимости $K(\alpha)$ (сплошная кривая) и $U(\alpha)$ (пунктирная кривая). Решая уравнение $K(\alpha) = U(\alpha)$, можно найти углы α_1 и α_2 , при которых потенциальная и кинетическая энергии тела равны друг другу. Для этих углов $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

следовательно, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$.

Задача 2 (рис. 5.35). Тело массой m , подвешенное на нити длиной l , начинает движение из точки A . В точке C нить обрывается, и тело падает на поверхность земли. Чему равна кинетическая энергия тела в момент падения на поверхность земли и как далеко от C по горизонтали произойдет падение? Высота точки A над землей $2l$.

□ Обозначим через \vec{v}_0 скорость тела в момент обрыва нити (скорость в точке C). Будем отсчитывать потенциальную энергию от

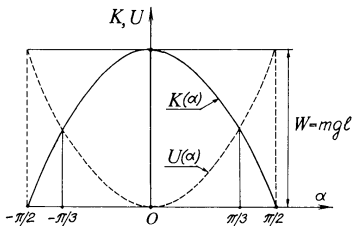


Рис. 5.34

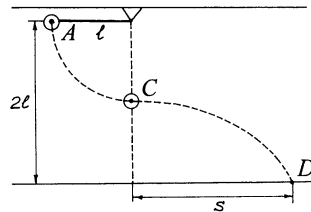


Рис. 5.35

уровня, отвечающего точке C . В этом случае $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl$, согласно закону сохранения механической энергии. Отсюда следует, что

$$v_0 = \sqrt{2gl}. \quad (1^*)$$

Скорость \vec{v}_0 направлена горизонтально; значит, движение тела после обрыва нити есть свободное падение с высоты l с горизонтальной начальной скоростью v_0 . Согласно (1.41), $s = v_0 \sqrt{\frac{2l}{g}}$. Подставив сюда (1*), найдем: $s = 2l$. Механическая энергия тела в точке A равна mgl , а в точке D она равна $-mgl + K$, где K — искомая кинетическая энергия. Используя закон сохранения кинетической энергии, заключаем, что $mgl = -mgl + K$. Отсюда получаем: $K = 2mgl$. ■

Взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий при сохранении механической энергии происходят также при упругом соударении двух тел. Вследствие краткости по времени процесса соударения тел можно рассматривать соударяющиеся тела как замкнутую систему, внутри которой действуют силы упругости. Кинетическая энергия тел превращается (по крайней мере, частично) в потенциальную энергию их взаимодействия, которая к концу соударения (когда форма деформированных тел восстановится) превращается обратно в кинетическую энергию. Таким образом, *та часть исходной кинетической энергии системы двух тел, которая превращается в процессе соударения в потенциальную энергию, к концу соударения возвращается в кинетическую энергию системы*. В результате суммарная кинетическая энергия после соударения оказывается равной суммарной кинетической энергии перед соударением, так что можно говорить в данном случае о *законе сохранения кинетической энергии*. Конечно, при этом происходит перераспределение кинетической энергии между телами, с чем мы уже познакомились в п. 5.4.3.

Задача 3. Шар массой M налетает со скоростью \vec{v}_0 на покоящийся шар массой m ($m < M$). Происходит центральный абсолютно упругий удар. В момент наибольшей деформации шары имеют одну и ту же скорость. Требуется найти потенциальную энергию деформированных шаров в этот момент.

□ В момент наибольшей деформации механическая энергия соударяющихся шаров равна $\frac{1}{2}(M + m)v^2 + U$, где v — модуль скорости шаров в этот момент, а U — искомая потенциальная энергия. Перед соударением механическая энергия шаров равнялась

кинетической энергии $\frac{1}{2} Mv_0^2$ налетающего шара. Согласно закону сохранения механической энергии,

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} (M + m)v^2 + U. \quad (2^*)$$

Используя закон сохранения импульса, заключаем, что

$$Mv_0 = (M + m)v. \quad (3^*)$$

Решив систему уравнений (2*) и (3*), найдем: $U = \frac{1}{2} \frac{Mmv_0^2}{M+m}$. ■

5.6.6. Применение закона сохранения механической энергии при решении задач

В дополнение к уже рассмотренным задачам познакомимся с некоторыми задачами, при решении которых нельзя обойтись без использования закона сохранения механической энергии.

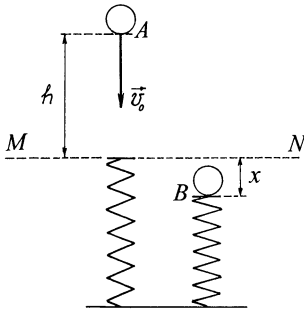


Рис. 5.36

Задача 1 (рис. 5.36). Шар массой m падает с вертикально направленной начальной скоростью \vec{v}_0 с высоты h на расположенную вертикально пружину жесткостью k и сжимает ее. На какую наибольшую длину сожмется пружина?

□ Обозначим через x наибольшее сжатие пружины и будем считать нулевым уровнем потенциальной энергии шара уровень MN (см. рисунок). Пусть K_A , U_A , W_A — соответственно

кинетическая, потенциальная и механическая энергии шара в положении A , а K_B , U_B , W_B — в положении B . Поскольку $K_A = \frac{1}{2} mv_0^2$ и $U_A = mgh$, то

$$W_A = \frac{1}{2} mv_0^2 + mgh. \quad (1^*)$$

Поскольку $K_B = 0$ и $U_B = -mgx + \frac{1}{2} kx^2$, то

$$W_B = \frac{1}{2} kx^2 - mgx. \quad (2^*)$$

Согласно закону сохранения механической энергии, $W_B = W_A$. Подставив сюда (1*) и (2*), получим:

$$\frac{1}{2} kx^2 - mgx - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh\right) = 0.$$

Перед нами квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a = \frac{1}{2} k$, $b = -mg$, $c = -\left(\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh\right)$. Корни уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{k} \left(mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + km v_0^2 + 2kmgh} \right).$$

Разумеется, мы выбираем положительный корень. Таким образом,

$$x = \frac{1}{k} \left(mg + \sqrt{m^2 g^2 + km v_0^2 + 2kmgh} \right). \quad \blacksquare$$

Задача 2 (рис. 5.37). Тело, подвешенное на нити длиной l , начинает движение из точки A . В точке B на расстоянии $\frac{3}{4}l$ от точки подвеса есть колышек. Чему равна скорость тела в верхней точке его круговой траектории вокруг колышка (в точке D на рисунке)?

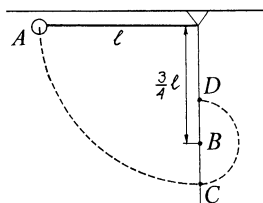


Рис. 5.37

□ Будем отсчитывать потенциальную энергию тела от C . Тогда его механическая энергия в точке A есть $W_A = mgl$, а в точке D есть $W_D = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} mgl$, где m — масса тела, v — искомая скорость. Согласно закону сохранения механической энергии, $W_A = W_D$, что можно представить в виде: $mgl = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} mgl$. Отсюда следует, что $v = \sqrt{gl}$. ■

Задача 3 (рис. 5.38). С вершины закрепленного на полу шара радиусом R соскальзывает без трения шайба. На какой высоте от пола шайба оторвется от шара?

□ Рассмотрим некоторую точку A на поверхности шара на высоте, большей R . Обозначим через α угол между вертикалью и отрезком OA (см. рисунок), а через h высоту, на которой находится точка A . Из рисунка видно, что

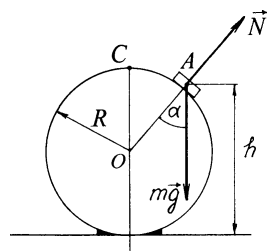


Рис. 5.38

$$h = R + R \cos \alpha = R(1 + \cos \alpha). \quad (3^*)$$

Предположим, что соскальзывающая с вершины шара шайба массой m в какой-то момент времени оказалась в точке A ; обозначим через v модуль ее скорости в этой точке. На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Спроектируем равнодействующую силу $m\vec{g} + \vec{N}$ на направление центростремительного ускорения шайбы в точке A ; получим: $mg \cos\alpha - N$. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos\alpha - N. \quad (4^*)$$

Здесь $\frac{v^2}{R}$ — модуль центростремительного ускорения шайбы в точке A . Если A есть точка отрыва шайбы от шара, то $N = 0$ и (4*) превращается в соотношение

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos\alpha. \quad (5^*)$$

Используя (3*), перепишем (5*) в виде

$$v^2 = g(h - R). \quad (6^*)$$

Следуя закону сохранения механической энергии, приравняем механическую энергию W_C шайбы в точке C ($W_C = 2mgR$) к ее механической энергии W_A в точке отрыва от шара A ($W_A = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$):

$$2mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgh. \quad (7^*)$$

Из (6*) и (7*) получаем $h = \frac{5}{3}R$. ■

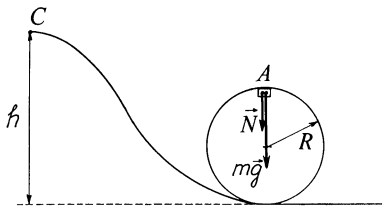


Рис. 5.39

Задача 4 (рис. 5.39). Чему должна быть равна минимальная высота горки, чтобы соскальзывающее с нее без трения тело могло описать «мертвую петлю» радиусом R ?

□ Обозначим через v модуль скорости тела в верхней точке «петли» (в точке A). На тело массой m действуют сила тяжести

$m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} — см. рисунок. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R} = mg + N, \quad (8^*)$$

где $\frac{v^2}{R}$ — модуль центростремительного ускорения тела в точке A , направленного вертикально вниз. Для того, чтобы пройти благо-

получно (без отрыва от желоба) «мертвую петлю», тело должно иметь в точке A достаточно высокую скорость — скорость, при которой $N \geq 0$. Значит, минимально допустимая скорость v в точке A определяется равенством:

$$\frac{mv^2}{R} = mg. \quad (9^*)$$

Минимальную высоту h горки найдем, воспользовавшись законом сохранения механической энергии, согласно которому $W_C = W_A$. Учитывая, что $W_C = mgh$ и $W_A = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR$, приходим к соотношению:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR. \quad (10^*)$$

Исключив v^2 из системы уравнений (9*) и (10*), найдем $h = \frac{5}{2}R$. ■

5.7. СОХРАНЯЕТСЯ ЛИ ЭНЕРГИЯ ПРИ НАЛИЧИИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ?

5.7.1. Уменьшение механической энергии тела (системы тел) под действием неконсервативных сил

Очевидно, что работа силы трения скольжения на замкнутом пути нулю не равна и что она зависит от формы траектории, по которой перемещается из начального положения в конечное точка приложения силы. Сила трения скольжения является (наряду с силой сопротивления) примером *неконсервативной* силы. В § 5.6 мы полагали, что неконсервативные силы отсутствуют, поэтому пренебрегали как трением скольжения, так и сопротивлением среды.

Рассмотрим конкретную ситуацию с бруском массой m на наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения скольжения μ . Предположим, что бруску сообщили начальную скорость, и он стал скользить вверх по наклонной плоскости. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} ($N = mg \cos \alpha$) и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$). Все силы показаны на рисунке 5.40; там же показано пе-

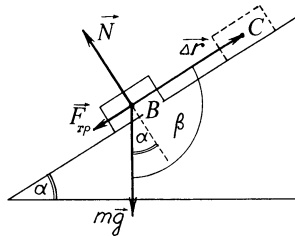


Рис. 5.40

ремещение $\vec{\Delta r}$ бруска от некоторой точки B до C (брусок рассматривается как материальная точка). Полная работа сил на перемещении $\vec{\Delta r}$ равна

$$A = m\vec{g} \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{\Delta r} + \vec{N} \cdot \vec{\Delta r} = A_{\text{т}} + A_{\text{тр}},$$

где $A_{\text{т}} = -mg\Delta r \sin \alpha$ — работа силы тяжести, $A_{\text{тр}} = -\mu mg\Delta r \cos \alpha$ — работа силы трения скольжения; сила реакции опоры работы не совершает.



Обратим внимание на то, что $A_{\text{тр}} < 0$ и $A_{\text{т}} < 0$. Но работа $A_{\text{т}}$ силы тяжести может быть также положительной (когда брусок скользит вниз по наклонной плоскости) и равняться нулю (когда брусок скользит по горизонтальной плоскости). А вот *работа силы трения скольжения всегда отрицательна*, поскольку сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена *навстречу* перемещению $\vec{\Delta r}$.

Изменение ΔW механической энергии бруска при его перемещении из B в C есть $\Delta W = \Delta K + \Delta U$, где ΔK и ΔU — изменения кинетической и потенциальной энергий, соответственно. Согласно (5.30), $\Delta K = A = A_{\text{т}} + A_{\text{тр}}$. Согласно (5.69), $\Delta U = -A_{\text{т}}$. Таким образом,

$$\Delta W = (A_{\text{т}} + A_{\text{тр}}) - A_{\text{т}} = A_{\text{тр}} = -\mu mg\Delta r \cos \alpha. \quad (1^*)$$

Итак, во-первых, при наличии силы трения механическая энергия *не сохраняется* — она *убывает*, и, во-вторых, убыль механической энергии определяется *работой силы трения*.



Обратим внимание: работа силы тяжести обусловила в рассмотренном случае убыль кинетической энергии, но в то же время обеспечила приращение потенциальной энергии, тогда как *работа силы трения не приводит к увеличению потенциальной энергии*. Именно поэтому происходит уменьшение механической энергии.

Сформулируем важный вывод: *благодаря работе сил трения скольжения и сопротивления механическая энергия тела (системы тел) уменьшается*:

$$\Delta W = A_{\text{тр}}, \quad (5.86)$$

где ΔW — изменение механической энергии, $A_{\text{тр}}$ — работа силы трения (или силы сопротивления); $A_{\text{тр}} < 0$. Отметим, что этот вывод справедлив как для внешних сил трения, так и для сил трения, действующих внутри системы. Поэтому, если даже система замкнутая, *наличие неконсервативных сил приводит к уменьшению ее механической энергии*, т. е. к нарушению закона сохранения механической энергии.

Вернемся к примеру с бруском, скользящим вверх по наклонной плоскости. Допустим, в точке B ему сообщили скорость \vec{v}_0 (подтолкнули), а в точке C он остановился. Найдем Δr в этом случае, т. е. выясним, какое расстояние прошел брусок до остановки (после чего он может начать скользить вниз, если окажется, что $mg \sin \alpha > \mu mg \cos \alpha$). Воспользуемся соотношением (5.86) или, точнее сказать, соотношением (1*), переписав его в виде:

$$K_C - K_B + \Delta U = -\mu mg \Delta r \cos \alpha. \quad (2^*)$$

Так как $K_B = \frac{1}{2} m v_0^2$, $K_C = 0$, $\Delta U = mg \Delta r \sin \alpha$, то (2*) преобразуется к виду $-\frac{1}{2} m v_0^2 + mg \Delta r \sin \alpha = -\mu mg \Delta r \cos \alpha$, откуда следует, что

$$\Delta r = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Задача (рис. 5.41). Шайба соскальзывает с высоты h_1 по наклонной плоскости с углом наклона α_1 и с разгона поднимается на некоторую высоту, скользя по наклонной плоскости с углом наклона α_2 . Коэффициент трения скольжения равен μ . На какую высоту поднимется шайба на второй наклонной плоскости?

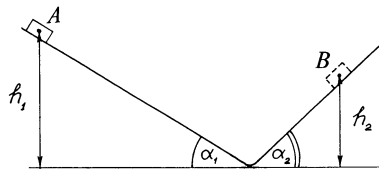


Рис. 5.41

□ Обозначим через B точку, от которой началось движение шайбы, через D — точку ее подъема на второй плоскости, через C — точку пересечения наклонных плоскостей (см. рисунок). Пусть W_B и W_D — механические энергии шайбы в точках B и D , соответственно, h_2 — высота точки D , m — масса шайбы. Воспользуемся соотношением (5.86), положив:

$$\Delta W = W_D - W_B = mg(h_2 - h_1); \quad (3^*)$$

$$A_{\text{тр}} = -\mu mg \cos \alpha_1 \frac{h_1}{\sin \alpha_1} - \mu mg \cos \alpha_2 \frac{h_2}{\sin \alpha_2}. \quad (4^*)$$

Подставив (3*) и (4*) в (5.86), получим

$$mg(h_2 - h_1) = -\mu mg(h_1 \text{ctg} \alpha_1 + h_2 \text{ctg} \alpha_2),$$

откуда следует, что

$$h_2 = h_1 \frac{1 - \mu \text{ctg} \alpha_1}{1 + \mu \text{ctg} \alpha_2}.$$

Если бы трение скольжения отсутствовало, то, как видно из полученного результата, наблюдалось бы равенство высот ($h_1 = h_2$), т. е. механическая энергия шайбы сохранялась бы. ■

5.7.2. Внутренняя энергия

Наличие трения приводит к тому, что энергия тела *уменьшается*. Означает ли это, что какая-то часть энергии вообще исчезает? Она не исчезает, а превращается во *внутреннюю энергию*, которая как бы рассеивается, оказавшись частично в самом теле, а частично в окружающей его среде, включая другие тела. Итак, существует еще один вид энергии — внутренняя энергия. Она нуждается в отдельном обсуждении.

Ранее мы рассматривали кинетическую и потенциальную энергии. Первая изменяется с изменением скорости тела, а вторая — с изменением положения тела относительно других тел или с изменением формы тела (изменением взаимного расположения частей тела). Но есть еще один фактор, от которого зависит энергия тела, — *состояние* тела. Соответственно определяется еще один вид энергии — *внутренняя энергия*.

Чтобы понять природу этого вида энергии, надо мысленно заглянуть внутрь тела, т. е. обратиться к его *атомно-молекулярной структуре*. Мы достаточно подробно познакомимся с ней во второй части книги. А пока отметим лишь, что атомы и молекулы тела, во-первых, находятся в постоянном движении (его называют хаотическим), а во-вторых, взаимодействуют друг с другом. Следовательно, можно говорить о кинетической энергии частиц вещества (обозначим ее через $K_{\text{вн}}$; индекс «вн» означает «внутренний») и о потенциальной энергии взаимодействия частиц (обозначим ее через $U_{\text{вн}}$). Внутренняя энергия $E_{\text{вн}}$ есть сумма:

$$E_{\text{вн}} = K_{\text{вн}} + U_{\text{вн}}. \quad (5.87)$$

Изменение внутренней энергии связано с *изменением состояния* тела. Состояние тела характеризуется, в частности, степенью его нагретости, т. е. *температурой*. Чем сильнее нагрето тело, тем активнее движение его частиц — тем выше $K_{\text{вн}}$, а значит, и $E_{\text{вн}}$.



Уже в XVII столетии многие ученые (Галилео Галилей, Фрэнсис Бэкон, Роберт Бойль и другие) полагали, что температура тела определяется «внутренним движением» частиц в теле. Так, в 1685 году Роберт Бойль в своем труде «Меха-

ническое происхождение качества» писал: «Сущность теплоты состоит во внутреннем движении частичек тела». Когда молотком забивают гвоздь в доску, отмечал Бойль, движение молотка сначала передается гвоздю в целом, а затем (когда гвоздь вбит в доску) оно передается частицам внутри гвоздя, заставляя их двигаться быстрее. В результате гвоздь нагревается. Экспериментальные доказательства существования внутренней энергии были получены еще до появления в науке термина «внутренняя энергия». Отметим лишь опыты Бенджамина Румфорда, который в 1798 году изучал выделение теплоты при сверлении пушечных стволов с использованием конной тяги. Он пришел к заключению, что работа конной тяги переходит во внутреннее движение частиц ствола, нагревающегося при сверлении. Так постепенно вошло в науку понятие внутренней энергии, которую в те времена называли «теплотой». Со временем появилось понятие «тепловая энергия».

Тепловая энергия — еще одно наименование внутренней энергии. Впрочем, такое наименование выражает только ту часть внутренней энергии, которая связана с движением частиц, т. е. кинетическую внутреннюю энергию $K_{\text{вн}}$. С потенциальной внутренней энергией $U_{\text{вн}}$ связывают так называемую *химическую энергию*. Когда, например, сжигают бензин, высвобождается химическая энергия, при этом потенциальная энергия взаимодействия атомов оказывается при их новом взаимном расположении меньше, нежели при прежнем расположении.

Заметим, что представление энергии $K_{\text{вн}}$ как тепловой энергии, а энергии $U_{\text{вн}}$ как химической энергии не может считаться вполне строгим. На это указывал известный американский физик Ричард Фейнман. Он писал: «Строго говоря, теплоту нельзя считать чисто кинетической энергией, в нее входит и часть потенциальной энергии. То же относится и к химической энергии, так что лучше объединить их и говорить, что общая кинетическая и потенциальная энергии внутри тела — это частично тепло, частично химическая энергия.»

5.7.3. Превращение механической энергии во внутреннюю

Когда падающий с высоты h шар испытывает абсолютно упругое соударение с полом, он подпрыгивает вверх, поднимаясь на высоту h' , равную h . В этой идеализированной ситуации механическая энергия шара остается неизменной — просто сначала

ла потенциальная энергия шара превращается в кинетическую, которая затем превращается обратно в потенциальную энергию. В реальной ситуации нужно учитывать, во-первых, сопротивление воздуха и, во-вторых, тот факт, что деформация как шара, так и участка пола, где происходит соударение, не является абсолютно упругой. Все это приводит к тому, что часть механической энергии шара превращается во внутреннюю энергию в процессе падения шара, его соударения с полом и последующего подъема; поэтому $h' < h$.



Во внутреннюю энергию чего именно превращается частично механическая энергия шара?

Утрачиваемая шаром энергия добавляется частью к внутренней энергии самого шара (его температура повышается), а часть к внутренней энергии участка пола и окружающего шар воздуха (их температура тоже повышается). Убыль механической энергии шара вследствие частичного ее превращения во внутреннюю энергию $E_{\text{вн}}$ равна $\Delta W = mgh - mgh'$. Понятно, что $mgh - mgh' = E_{\text{вн}}$. В общем случае:

$$W_0 = W' + E_{\text{вн}}, \quad (5.88)$$

где W_0 и W' — соответственно начальная и конечная механические энергии тела, а $E_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия, выделившаяся при переходе тела из начального положения в конечное.



Обратим внимание на следующие два момента: 1) энергия *вовсе не исчезла*; соотношение (5.88) выражает, по сути дела, тот факт, что энергия *сохраняется*; 2) энергия $E_{\text{вн}}$ распределилась среди *нескольких* физических объектов в виде некоторой добавки к их внутренним энергиям.

Таким образом, говоря о *превращении энергии при сохранении ее количества*, мы должны иметь в виду не только превращение энергии *из одного вида в другой*, но и ее передачу *от одних физических объектов к другим*. Заметим, что с передачей энергии от одного тела к другому мы уже встречались, когда рассматривали абсолютно упругие соударения шаров (см. п. 5.4.3).

С превращениями механической энергии во внутреннюю мы встречаемся буквально на каждом шагу. Именно вследствие таких превращений всякое механическое движение, если его не поддерживать, рано или поздно прекращается (это обстоятельство в немалой степени препятствовало осознанию закона сохранения механической энергии).

Задача 1. С вершины закрепленного на полу шара радиусом R соскальзывает шайба массой m . Она отрывается от шара на высоте $\frac{4}{3}R$ от пола. Требуется найти внутреннюю энергию, в которую превратилась механическая энергия шайбы за время ее скольжения по шару.

□ В верхней точке шара механическая энергия шайбы равна $W_0 = 2mgR$. В точке отрыва её потенциальная энергия равна $\frac{4}{3}mgR$, а кинетическую энергию найдем из соотношения $v^2 = g(h - R)$ (см. задачу 3 в п. 5.6.6), в котором положим $h = \frac{4}{3}R$. Таким образом, механическая энергия шайбы в точке отрыва есть

$$W' = \frac{4}{3}mgR + \frac{1}{2}mg\left(\frac{4}{3}R - R\right) = \frac{3}{2}mgR.$$

Искомая внутренняя энергия, согласно (5.88), равна

$$E_{\text{вн}} = W_0 - W' = \frac{1}{2}mgR. \quad \blacksquare$$

Задача 2. В задаче 4 в п. 5.6.6 минимальная высота горки равна $\frac{5}{2}R$ при условии, что механическая энергия тела сохраняется. В некоторой реальной ситуации минимальная высота горки оказалась равной $h = \frac{7}{2}R$. Чему равна в этом случае внутренняя энергия, в которую превратилась механическая энергия тела массой m при его перемещении с вершины горки до верхней точки «мертвой петли»?

□ Механическая энергия тела на вершине горки равна $W_0 = \frac{7}{2}mgR$. В верхней точке «петли» потенциальная энергия тела равна $2mgR$ (R — радиус «петли»), а кинетическую энергию найдем из соотношения $\frac{mv^2}{R} = mg$; она равна $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR$. Следовательно, механическая энергия тела в верхней точке «петли» есть

$$W' = 2mgR + \frac{1}{2}mgR = \frac{5}{2}mgR.$$

Искомая внутренняя энергия, согласно (5.88), равна $E_{\text{вн}} = mgR$. ■

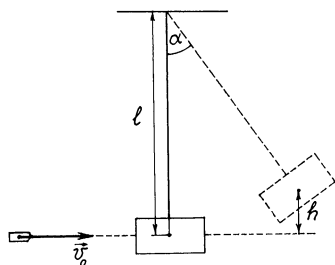


Рис. 5.42

Задача 3 (рис. 5.42). Ящик с песком массой M подвешен на тросе, массой которого можно пренебречь. Расстояние от точки подвеса до центра масс ящика l . Пуля массой m летит горизонтально и застревает в ящике с песком. Трос после попадания пули отклоняется на угол α от вертикали. Требуется найти модуль скорости пули и внутреннюю энергию, в которую превратилась механическая энергия пули при ее соударении с ящиком.

□ Соударение пули с ящиком является абсолютно неупругим соударением (напомним п. 2.6.3). Модуль v скорости ящика с пулей внутри сразу после соударения равен, согласно закону сохранения импульса:

$$v = \frac{v_0 m}{M + m}, \quad (1^*)$$

где v_0 — искомый модуль скорости пули перед ее попаданием в ящик.

Рассмотрим движение ящика с пулей внутри. Сразу после соударения кинетическая энергия ящика с пулей равна $\frac{1}{2}(m + M)v^2$.

Она превращается в потенциальную энергию $(m + M)gh$, где $h = l(1 - \cos\alpha)$ — высота, на которую поднялся центр масс ящика (потенциальную энергию отсчитываем от начального положения центра масс ящика); следовательно,

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gh$$

и, таким образом,

$$v^2 = 2gh = 2gl(1 - \cos\alpha). \quad (2^*)$$

Подставляя (1*) в (2*), находим

$$v_0 = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2 \frac{M + m}{m} \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3^*)$$

Теперь найдем внутреннюю энергию $E_{\text{вн}}$, в которую превратилась механическая энергия пули при соударении с ящиком. Механическая энергия системы ящик—пуля перед соударением рав-

на $W_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, а сразу после соударения равна $W' = \frac{1}{2}(M + m)v^2$.

Согласно (5.88), получим

$$E_{\text{вн}} = W_0 - W' = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)v^2,$$

или, после подстановки (1*),

$$E_{\text{вн}} = \frac{1}{2}v_0^2 \frac{mM}{M + m}. \quad (4^*)$$

Подставив (3*) в (4*), найдем

$$E_{\text{вн}} = \frac{2M(M + m)}{m} gl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что $m \ll M$, представим ответы на поставленные в задаче вопросы в следующем виде:

$$v_0 = 2 \frac{M}{m} \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}; \quad E_{\text{вн}} = 2 \frac{M^2}{m} gl \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad \blacksquare$$

5.7.4. Внутренняя энергия и энергия покоя

В п. 5.4.5 приводилась формула Эйнштейна (5.50), согласно которой полная энергия изолированного тела равна его массе, умноженной на квадрат скорости света: $E = mc^2$. Там же отмечалось, что кинетическая энергия тела K есть разность полной энергии E и энергии покоя m_0c^2 и, следовательно (см. (5.54)):

$$E = m_0c^2 + K.$$

Если тело не изолировано, а взаимодействует с другими телами, то в правой части равенства (5.54) должно появиться дополнительное слагаемое — потенциальная энергия взаимодействия U :

$$E = m_0c^2 + K + U. \quad (5.89)$$

Далее учтем, что тело состоит из N частиц, и пусть масса покоя i -й частицы есть m_{0i} . На первый взгляд, может показаться, что

$$m_0 = \sum_{i=1}^N m_{0i}. \quad \text{Однако это не так. Энергия покоя тела } m_0c^2 \text{ вклю-}$$

чает в себя также кинетическую энергию частиц $K_{\text{вн}}$ и потенциальную энергию их взаимодействия $U_{\text{вн}}$:

$$m_0c^2 = \left(\sum_{i=1}^N m_{0i} c^2 \right) + K_{\text{вн}} + U_{\text{вн}}. \quad (5.90)$$

Масса покоя тела, таким образом, не равна сумме масс покоя частиц. Она равна

$$m_0 = \sum_{i=1}^N m_{0i} + \frac{1}{c^2}(K_{\text{вн}} + U_{\text{вн}}). \quad (5.91)$$

Итак, полная энергия тела

$$E = \left(\sum_i m_{0i} c^2 \right) + K_{\text{вн}} + U_{\text{вн}} + K + U. \quad (5.92)$$

Выше мы определили внутреннюю энергию тела как $E_{\text{вн}} = K_{\text{вн}} + U_{\text{вн}}$. Такое определение соответствует классической механике, здесь не учитывается энергия покоя частиц. В современной физике во внутреннюю энергию тела принято включать сумму энергий покоя частиц и представлять ее в виде:

$$E'_{\text{вн}} = \left(\sum_i m_{0i} c^2 \right) + K_{\text{вн}} + U_{\text{вн}}. \quad (5.93)$$

5.7.5. Учет внутренней энергии как выход за рамки механики

Следуя ходу развития физики, мы ввели понятие энергии через понятие работы, т. е. через чисто механическое понятие, определяемое скалярным произведением *силы* и *перемещения*. Поэтому может возникнуть желание рассматривать энергию как физическую величину, относящуюся только к механике. Однако не следует спешить с таким заключением. Понятие энергии оказывается *значительно шире*: оно не ограничивается механической энергией и выходит за рамки собственно механики.

Обратим внимание на то, что этот выход уже обозначился, как только возникла необходимость принимать во внимание внутреннюю энергию. Учет внутренней энергии продемонстрировал принципиально важный факт: в реальных ситуациях *механические явления связаны с тепловыми явлениями*. И не только с тепловыми. Уже отмечалась связь тепловой энергии с химической.

Во второй части книги мы, отталкиваясь от механических явлений, распространим понятие энергии также на тепловые явления. Впоследствии предстоит дальнейшее расширение понятия энергии (на явления электромагнитные, оптические, атомные, субатомные).

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

5.1. Соскальзывая по наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения скольжения μ , тело массой m прошло путь s . Чему равна работа сил: а) тяжести, б) реакции опоры, в) трения скольжения?

5.2. Чему равна работа центростремительной силы за полный оборот материальной точки по окружности?

5.3. Зависят ли от выбора системы отсчета: а) работа, совершаемая над телом, б) кинетическая энергия тела, в) потенциальная энергия тела, г) механическая энергия тела, д) внутренняя энергия тела?

5.4. Тело несколько раз бросают с вышки, изменяя от раза к разу начальную скорость. Докажите, что работа силы тяжести на перемещении от точки бросания до точки падения будет всякий раз одной и той же.

5.5. Тело бросили с начальной скоростью \vec{v}_0 под некоторым углом к горизонту. Чему равен модуль скорости тела на высоте h ?

5.6. Совершена работа, сообщившая покоившемуся телу скорость v . Во сколько раз больше должна быть работа для разгона тела от скорости v до скорости $2v$?

5.7. Тело массой m соскользнуло без начальной скорости с горки высотой h и остановилось. Чему равна работа силы трения скольжения на всем пути?

5.8. Тело массой $m = 3$ кг начало скользить без начальной скорости с горки высотой $h = 4$ м. В конце спуска скорость тела равна $v = 5$ м/с. Найдите работу силы трения скольжения на всем спуске.

5.9. Может ли механическая энергия оказаться отрицательной?

5.10. На рисунке 5.43 представлены два случая преодоления телом высоты h . На сколько минимальная начальная скорость тела в случае 2 больше, чем в случае 1? Трение отсутствует.

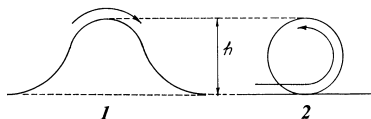


Рис. 5.43

5.11. Шар массой $m = 500$ г равномерно вращается вокруг оси, проходящей через центр шара. Модуль скорости точки шара, наиболее удаленной от оси вращения, равен $v = 0,8$ м/с. Чему равна кинетическая энергия шара?

5.12. Масса тела 1 в 12 раз больше массы тела 2, а скорость — в 2 раза меньше. Найдите отношение: а) импульса тела 1 к импульсу тела 2, б) кинетической энергии тела 1 к кинетической энергии тела 2.

5.13. На какую длину нужно сжать пружину жесткостью

320 Н/м, чтобы запастись в ней энергию 10 Дж?

5.14. Нить длиной l с подвешенным к ней грузом массой m отклонили от вертикали на угол 60° и отпустили. Чему равна работа силы тяжести груза на перемещении, соответствующем переходу в положение, когда направление нити составляет с вертикалью угол 30° ? Чему равна на этом перемещении работа силы реакции нити?

5.15. Докажите теорему: «Если работа силы на любой замкнутой траектории равна нулю, то работа этой силы не зависит от формы траектории, а зависит лишь от начальной и конечной точек траектории.»

5.16. Тело соскальзывает с высоты $h = 2$ м по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45^\circ$ и затем движется по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения для обеих плоскостей равен $\mu = 0,2$. Какой путь пройдет тело по горизонтальной плоскости до остановки?

5.17. Мальчик тянет санки по горизонтальному пути, натягивая с постоянной силой $F = 20$ Н веревку, привязанную к санкам и составляющую угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Какую работу он совершит, протаскивая санки на расстояние $s = 600$ м?

5.18. Мальчик тянет санки массой $m = 10$ кг по горизонтальному пути, натягивая веревку, привязанную к санкам, под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Санки движутся равномерно.

Коэффициент трения скольжения $\mu = 0,15$. Какую работу совершит мальчик, протаскивая санки на расстояние $s = 600$ м? Подсказка. Нужно учесть, что в данном случае сила реакции опоры меньше силы тяжести на $F \sin \alpha$.

5.19. С какой начальной скоростью v_0 надо бросить вертикально вниз мяч с высоты h , чтобы он подпрыгнул на высоту $1,5 h$? Удар мяча о землю является абсолютно упругим.

5.20. Тело падает с некоторой высоты без начальной скорости. Найдите отношение работы силы тяжести за первую половину времени падения к работе силы тяжести за вторую половину времени падения.

Подсказка. Выясните, какая часть всего пути, пройденного падающим телом, приходится на первую половину времени падения, а какая — на вторую половину.

5.21. Цирковой артист массой $m = 60$ кг падает в натянутую сетку с высоты $h = 4$ м. С какой силой действует на артиста сетка в тот момент, когда он оказывается в нижней точке, характеризваемой прогибом сетки, равным $s = 1$ м?

5.22. Тело скользит без начальной скорости по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$, а затем скользит по горизонтальной плоскости и останавливается. Расстояние, пройденное телом по наклонной и горизонтальной плоскостям, одинаковы. Чему равен коэффициент трения скольжения для данных плоскостей? Чему равно отношение кинетической энергии тела в конце спуска по на-

клонной плоскости к потенциальной энергии тела в начале спуска? Потенциальная энергия отсчитывается от горизонтальной плоскости.

5.23. Развивая мощность $N = 20$ кВт, аэросани массой $m = 240$ кг равномерно движутся вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 15^\circ$ и коэффициентом трения скольжения для снежного покрытия $\mu = 0,2$. С какой скоростью движутся аэросани?

5.24. Груз массой $m = 30$ кг висит на шнуре длиной $l = 3$ м. На какую наибольшую высоту можно отвести в сторону груз, чтобы при дальнейшем свободном качании шнур не оборвался? Максимальная сила натяжения, которую выдерживает шнур не обрываясь, равна $T = 500$ Н.

5.25. Висящему на нити телу массой m сообщили горизонтальную начальную скорость, оказавшуюся достаточной для того, чтобы тело на нити стало вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса. На сколько сила натяжения нити в момент прохождения телом нижней точки траектории больше силы натяжения нити в момент прохождения телом верхней точки траектории?

Подсказка. Надо учесть, что кинетическая энергия тела в нижней точке траектории на $2mgl$ больше, чем в верхней точке (l — длина нити).

5.26. Шар массой m начинает скатываться без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона α . Чему равна кинетическая энергия шара через время t после начала скатывания?

Подсказка. Аналогичная задача для скатывающегося цилиндра рассмотрена в п. 5.4.8.

5.27. Шар массой m , имеющий скорость \vec{v}_0 , налетает на покоящийся шар массой m . Происходит центральный абсолютно упругий удар. В момент наибольшей деформации шары имеют одинаковую скорость. Чему равны скорость и потенциальная энергия деформированных шаров в этот момент времени?

5.28. Шарик массой m подвешен на нити длиной l . Шарик раскручивают так, что он начинает равномерно двигаться по окружности в горизонтальной плоскости, отстоящей от точки подвеса на расстояние $\frac{l}{2}$. Ка-

кую работу надо совершить для раскручивания шарика?

Подсказка. Искомая работа нужна для поднятия шарика на высоту $l/2$ и сообщения ему скорости, необходимой для движения по окружности.

5.29. Пуля из пневматической винтовки летит горизонтально со скоростью $v_0 = 50$ м/с, попадает в неподвижный брусок, лежащий на горизонтальной плоскости, и застревает в нем. На какое расстояние передвинется брусок, если его масса в $n = 49$ раз больше массы пули, а коэффициент трения скольжения равен $\mu = 0,25$?

5.30. Шар массой M висит на нити. Расстояние от точки подвеса до центра шара l . Пуля массой m , летящая горизонтально по прямой, проходящей через центр шара, попадает в

него и застревает. С какой минимальной скоростью должна лететь пуля, чтобы шар сделал полный оборот на нити в вертикальной плоскости?

5.31. Тело массой $m = 100$ г падает с высоты $h = 10$ м. На высоте $h' = 2$ м оно имеет скорость $v = 10,5$ м/с. Чему равна внутренняя энергия, в которую из-за сопротивления воздуха превратилась механическая энергия тела при падении до высоты h' ?

5.32. Шарик массой m , подвешенный на нити длиной l , совершает колебания, при которых максимальный угол отклонения

нити от вертикали равен α . Спустя некоторое время этот угол уменьшился вдвое. Чему равна внутренняя энергия, выделившаяся за упомянутое время?

5.33. Подвешенный на нити длиной l шарик массой m движется по окружности в горизонтальной плоскости. Нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Спустя некоторое время этот угол уменьшился вдвое. Чему равна внутренняя энергия, в которую превратилась механическая энергия данного конического маятника за упомянутое время?

6

ГРАВИТАЦИЯ

6.1. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

На основе собственных наблюдений и многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге немецкий ученый Иоганн Кеплер установил в начале XVII века три эмпирических закона, описывающие движение планет вокруг Солнца, — так называемые *законы Кеплера*. Позднее Исаак Ньютон пришел к заключению, что эти законы применимы также к движению комет вокруг Солнца и к движению вокруг планет их спутников.

6.1.1. Первый закон Кеплера (эллиптическая форма планетных орбит)

Первый закон Кеплера формулируется так:

Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Николай Коперник полагал, что планеты движутся вокруг Солнца по круговым орбитам. Иоганн Кеплер уточнил: не по круговым, а по эллиптическим орбитам, близким к круговым.

Эллипс — плоская замкнутая кривая, для которой сумма расстояний от любой ее точки до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна. На рисунке 6.1 изображен эллипс с фокусами F_1 и F_2 (расстояние между ними обозначено через $2c$), большой осью AC (ее длина обозначена через $2a$) и малой осью BD (ее длина $2b$). Оси AC и BD являются *осями симметрии* эл-

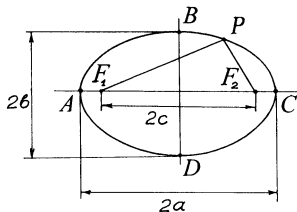


Рис. 6.1

lipse. Выберем на эллипсе произвольную точку P . Согласно определению эллипса, сумма $F_1P + F_2P$ постоянна; как нетрудно видеть, $F_1P + F_2P = 2a$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

называют *эксцентриситетом* эллипса; $0 \leq \varepsilon < 1$. Чем меньше ε , тем в меньшей степени данный эллипс вытянут вдоль большой оси. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность (оба его фокуса совмещаются).

Предположим, что эллипс на рисунке 6.1 — орбита некоторой планеты и что Солнце находится в фокусе F_1 . Точку A , ближайшую к Солнцу точку орбиты, называют *перигелием* данной планеты, а точку C , самую удаленную от Солнца, — *афелием*. Соответственно рассматривают *перигелийное расстояние* планеты от Солнца $AF_1 = a - c = a(1 - \varepsilon)$ и *афелийное расстояние* $CF_1 = a + c = a(1 + \varepsilon)$, где a — среднее расстояние между центрами планеты и Солнца (т. е. длина большой полуоси орбиты планеты) в так называемых *астрономических единицах* (обозначаются: а.е.); 1 а.е. = 150 млн км — среднее расстояние Земли от Солнца.

Приведем современные данные о параметрах орбит планет:

Планета	a , а.е.	ε	$a(1 + \varepsilon)$, а.е.	$a(1 - \varepsilon)$, а.е.
Меркурий	0,39	0,21	0,31	0,47
Венера	0,72	0,007	0,715	0,725
Земля	1	0,017	0,983	1,017
Марс	1,52	0,093	1,38	1,66
Юпитер	5,20	0,048	4,95	5,45
Сатурн	9,54	0,056	9,01	10,01
Уран	19,18	0,047	18,28	20,08
Нептун	30,06	0,009	29,79	30,33
Плутон	39,26	0,245	29,64	48,88

Как видно из таблицы, у всех планет за исключением Меркурия и Плутона $\varepsilon < 0,1$; поэтому приближенно можно полагать, что они движутся вокруг Солнца по круговым орбитам, имеющим радиусы a .

Для комет характерны значительные эксцентриситеты; их орбиты имеют форму эллипсов, достаточно сильно вытянутых вдоль больших осей. Например, у кометы Галлея $\varepsilon = 0,97$. Орбиты спутников планет, как правило, близки к круговым (например, у Луны $\varepsilon = 0,055$). Исключением является спутник Нептуна Нереида ($\varepsilon = 0,76$).

6.1.2. Второй закон Кеплера (неравномерность движения по орбите)

Второй закон Кеплера формулируется так:

Радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени ометает равные площади.

На рисунке 6.2, а заштрихованы секторы, площади которых ометает радиус-вектор планеты при перемещении планеты из M_1 в N_1 и из M_2 в N_2 . Если оба указанных перемещения совершаются за одно и то же время, то, согласно второму закону Кеплера, площади заштрихованных секторов одинаковы. Пройденные планетой пути оказываются неодинаковыми: $s_1 < s_2$. Значит, планета движется по орбите неравномерно. В перигелии скорость планеты наибольшая, а в афелии — наименьшая.

Найдем отношение $\frac{v_n}{v_a}$, где v_n и v_a —

соответственно модули скорости планеты в перигелии и афелии. Пусть орбита планеты имеет эксцентриситет ϵ . Обозначим через t_n и t_a моменты времени нахождения планеты в перигелии и афелии, соответственно. Площади, ометаемые радиусом-вектором планеты за промежутки времени от t_n до $t_n + \Delta t$ и от t_a до $t_a + \Delta t$ заштрихованы на рисунке 6.2, б. Если Δt достаточно мало, то первая из указанных площадей равна $\frac{1}{2} v_n \Delta t a(1 - \epsilon)$, а вторая — $\frac{1}{2} v_a \Delta t a(1 + \epsilon)$. Согласно второму закону Кеплера, эти площади равны; следовательно, $v_n(1 - \epsilon) = v_a(1 + \epsilon)$. Отсюда следует, что

$$\frac{v_n}{v_a} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \quad (6.1)$$

Для Земли $\epsilon = 0,017$. Следовательно, $\frac{v_n}{v_a} = 1,035$; скорость в перигелии всего лишь на 3,5% больше скорости в афелии. Можно

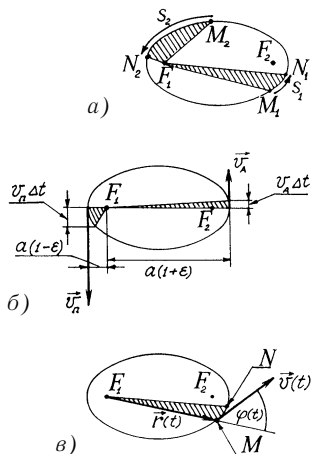


Рис. 6.2

приближенно полагать, что Земля движется по круговой орбите с постоянной по модулю скоростью.



Кеплер получил второй закон (как и остальные) эмпирически — исходя из наблюдений за перемещениями по небосводу Марса и других планет. Однако этот закон нетрудно вывести, воспользовавшись *законом сохранения момента импульса* планеты, рассматриваемого относительно z -оси, проходящей через центр Солнца перпендикулярно плоскости орбиты планеты. Для произвольного момента времени t момент импульса планеты \vec{L} относительно центра Солнца выражается соотношением (см. (4.44)):

$$\vec{L} = m(\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t)),$$

где m — масса планеты, $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ — ее радиус-вектор и скорость, соответственно. Проекция момента импульса на z -ось равна

$$L_z = L = mr(t)v(t)\sin\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — угол между векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$. Согласно закону сохранения момента импульса,

$$L_z = L = mr(t)v(t)\sin\varphi(t) = \text{const.} \quad (6.2)$$

Пусть за малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ планета перемещается из M в N (рис. 6.2, *в*). Ометаемая радиусом-вектором площадь равна

$$\Delta S = \frac{1}{2} r(t)v(t)\Delta t \sin\varphi(t), \text{ т. е. с учетом (6.2)}$$

$$\Delta S = \frac{1}{2m} L\Delta t. \quad (1^*)$$

Выберем некоторый промежуток времени $t_2 - t_1$. Разобьем его на малые промежутки Δt_i . Площадь ΔS_i для i -го промежутка определяется выражением (1*). Площадь S , ометаемая радиусом-вектором планеты за промежуток времени $t_2 - t_1$, есть $S = \sum_i \Delta S_i = \frac{L}{2m} \sum_i \Delta t_i = \frac{L}{2m} (t_2 - t_1)$. Так как $L = \text{const}$, эта площадь пропорциональна промежутку времени $t_2 - t_1$ и для равных промежутков будет одной и той же, что и соответствует второму закону Кеплера.

6.1.3. Третий закон Кеплера (зависимость периода обращения планеты от ее расстояния до Солнца)

Третий закон Кеплера формулируется так:

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Обозначив через T_1 и a_1 — период обращения и длину большой полуоси орбиты для одной планеты, а через T_2 и a_2 — такие же величины для другой планеты, можем записать третий закон Кеплера в виде:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (6.3)$$

Следствие третьего закона Кеплера: если планета движется по круговой орбите, то модуль $a_{\text{цс}}$ ее центростремительного ускорения обратно пропорционален квадрату радиуса r орбиты:

$$a_{\text{цс}} = \frac{C}{r^2}. \quad (6.4)$$

где C — постоянная, одинаковая для всех планет Солнечной системы.

Для доказательства следствия перепишем (6.3) для планет с круговыми орбитами в виде: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$. Учитывая, что $T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}$ и

$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2}$, где v_1 и v_2 — модули скорости планет, перепишем предыдущее равенство:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}. \quad (1^*)$$

Модуль центростремительного ускорения равен $a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r}$, поэтому равенство (1*) преобразуется к виду:

$$\frac{a_{\text{цс}2}}{a_{\text{цс}1}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (2^*)$$

Результат (2*) эквивалентен соотношению (6.4).

6.2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

6.2.1. Общая природа силы тяжести и силы, удерживающей Луну на орбите

В трудах Ньютона есть рисунок с изображением траекторий тела, бросаемого с вершины высокой горы с различными горизон-

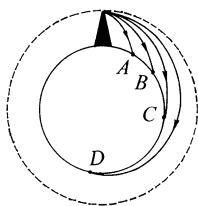


Рис. 6.3

тальными скоростями. Рисунок 6.3 повторяет тот рисунок Ньютона; точками *A*, *B*, *C*, *D* обозначены места падения тела для случаев бросания с постепенно увеличивающимися начальными скоростями. Чем больше начальная скорость, тем дальше от подножия горы упадет тело. Если бы не было сопротивления воздуха, то при некоторой достаточно большой начальной скорости тело вообще не упадет на поверхность Земли, а будет обращаться во-

круг нее по круговой орбите, превратившись, таким образом, в маленькую Луну.

Подобные рассуждения подвели Ньютона к решающему выводу: сила, удерживающая на околоземной орбите Луну, сообщая ей центростремительное ускорение, *есть та самая сила, которая называется силой тяжести* и приводит к падению тел на Земле (например, падению яблока с ветки яблони или падению камня, подброшенного вверх). В третьей книге ньютоновских «Начал» есть принципиально важное утверждение: «Луна тяготеет к Земле и силою тяготения постоянно отклоняется от прямолинейного движения и удерживается на своей орбите».

Это утверждение Ньютон распространяет на спутники других планет, а также на самые планеты, тяготеющие к Солнцу. Таково одно из наиболее значительных открытий Ньютона: *движение Луны вокруг Земли, как и планет вокруг Солнца, — это тоже свободное падение, которое, однако, длится, не прекращаясь, миллиарды лет.*

Кеплер полагал, что от Солнца должна исходить сила, которая как бы *толкает* планету, заставляя двигаться по орбите. Соответственно подобная «толкающая сила» исходит от Земли и заставляя Луну двигаться по орбите. Галилей полагал, будто на планеты со стороны Солнца, как и на Луну со стороны Земли, *никакие силы не действуют*; планеты и Луна движутся по своим круговым орбитам по инерции. Ньютон понял, что исходящая от Солнца сила не подталкивает планету, а лишь *удерживает ее на орбите*, не позволяя удалиться прочь от светила. Точно так же Земля силой своего воздействия на Луну удерживает ее на орбите. Без удерживающей силы планета (как и Луна) двигалась бы равномерно и прямолинейно. В результате притяжения Солнца планета все время отклоняется от прямолинейного движения по инерции и, таким образом, все время как бы *падает на свою орбиту*. Соответственно и Луна благодаря притяжению Земли все время «падает» на свою орбиту.

Итак, причиной как падения яблока, сорвавшегося с ветки, так и никогда не прекращающегося «падения» Луны на Землю

или планеты на Солнце, является *одна и та же сила*. Исаак Ньютон назвал ее *силой всемирного тяготения*, подчеркнув посредством слова «всемирный» ее универсальный характер. Ученый исходил из того, что эта сила действует не только между яблоком (а также Луной) и Землей, не только между Землей (а также другими планетами) и Солнцем, но и *между любыми двумя частицами*. Именно для материальных точек он и сформулировал свой знаменитый *закон всемирного тяготения*.

Заметим, что силу всемирного тяготения называют также *гравитационной силой* или *гравитационным взаимодействием* (*gravitas* в переводе с латинского означает «тяжесть»).

6.2.2. Закон всемирного тяготения



От чего может зависеть сила всемирного тяготения, действующая между материальными точками массами m_1 и m_2 , находящимися на расстоянии r друг от друга?

Для ответа на этот вопрос Ньютон воспользовался установленными им законами динамики и третьим законом Кеплера. Коль скоро сила всемирного тяготения действует, в частности, между Землей и Солнцем и, согласно третьему закону Кеплера, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, то естественно предположить, что и в случае двух частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга, эта сила будет пропорциональна $\frac{1}{r^2}$.

Пусть \vec{F}_{12} — сила, с какой частица массой m_1 действует на частицу массой m_2 , а \vec{F}_{21} — сила, с какой частица массой m_2 действует на частицу массой m_1 . С учетом сделанного выше предположения, $F_{12} \sim \frac{m_2}{r^2}$ и $F_{21} \sim \frac{m_1}{r^2}$. Согласно закону равенства действия

и противодействия, $F_{12} = F_{21}$. Следовательно, $F_{12} = F_{21} \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Установленный Ньютоном закон всемирного тяготения может быть сформулирован следующим образом:

Сила, с которой две материальные точки притягивают друга друга, пропорциональна массам m_1 и m_2 этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (6.5)$$

Коэффициент пропорциональности G называют *гравитационной постоянной*. Это одна из *фундаментальных физических постоянных*.

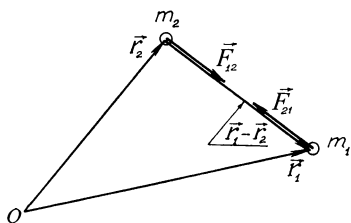


Рис. 6.4

Закон всемирного тяготения можно записать в векторном виде, если ввести радиусы-векторы взаимодействующих материальных точек \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (рис. 6.4):

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (6.6)$$

где $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, \vec{F}_{12} — сила, с какой

точка массой m_1 действует на точку массой m_2 .

Закон всемирного тяготения, представленный математически формулами (6.5) и (6.6), сформулирован для *двух материальных точек* (двух частиц).



А как перейти от точек (частиц) к *реальным телам*?

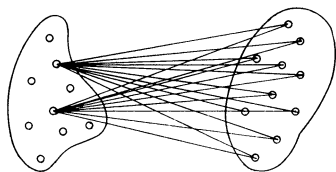


Рис. 6.5

Нужно мысленно разбить эти тела на частицы и рассмотреть взаимодействие каждой частицы данного тела с каждой частицей другого тела. Складывая силы тяготения, действующие на данную частицу

данного тела со стороны всех частиц другого тела, получим силу, действующую на эту частицу (рис. 6.5). Выполнив такую операцию для каждой частицы данного тела и сложив полученные силы, найдем результирующую силу тяготения, действующую на данное тело со стороны другого тела. В общем случае эта задача весьма сложна.

Однако есть два практически важных случая, когда к протяженным телам можно применять достаточно простую формулу (6.5) (а также (6.6)). Случай 1: оба тела имеют форму шара (при этом плотность шаров должна быть либо постоянной по объему, либо зависеть только от расстояния до центра шара). Случай 2: одно тело имеет форму шара, а второе имеет произвольную форму, но его размеры во много раз меньше радиуса первого тела. В первом случае величина r в (6.5) есть расстояние между центрами шаров, а во втором — расстояние между центром шара и центром масс другого (малого) тела. Заметим, что этот второй случай соответствует фактически случаю взаимодействия шара с материальной точкой.

В первом случае мы можем пользоваться формулой (6.5) (а также (6.6)), рассматривая гравитационное взаимодействие двух планет, Земли и Луны, планеты и Солнца. Во втором случае мы можем пользоваться указанными формулами, рассматривая гравитационное взаимодействие Солнца и кометы, Солнца и астероида, земного шара и различных объектов на нем, включая летательные аппараты и искусственные спутники.

Итак, гравитационное взаимодействие Солнца и Земли описывается формулой:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (6.7)$$

где M — масса Солнца, m — масса Земли, r — расстояние между центрами Солнца и Земли, т. е. радиус орбиты Земли. Если F — сила, с какой Солнце притягивает Землю, то, согласно второму закону Ньютона,

$$ma_{\text{цс}} = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1^*)$$

где $a_{\text{цс}}$ — модуль центростремительного ускорения центра масс Земли. Из (1*) следует, что

$$a_{\text{цс}} = \frac{GM}{r^2}. \quad (6.8)$$

Сравнивая (6.8) с (6.4), заключаем, что $C = GM$.

Если F в (6.7) — сила, с какой Земля притягивает Солнце, то, согласно второму закону Ньютона,


$$Ma'_{\text{цс}} = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (2^*)$$

где $a'_{\text{цс}}$ — модуль центростремительного ускорения центра масс Солнца. Из (2*) следует, что

$$a'_{\text{цс}} = G \frac{m}{r^2}. \quad (6.9)$$

Используя (6.8) и (6.9), получаем

$$\frac{a'_{\text{цс}}}{a_{\text{цс}}} = \frac{m}{M} \ll 1. \quad (6.10)$$

 Обратим внимание на то, что сила, с какой Солнце притягивает к себе Землю, равна по модулю силе, с какой Земля притягивает к себе Солнце. Точно так же, с какой силой земной шар притягивает к себе яблоко, с такой же по модулю силой яблоко притягивает к себе земной шар. Огромная разница

в массах взаимодействующих тел приводит к огромной разнице в их ускорениях и объясняет, почему именно Земля «падает» на Солнце и именно яблоко падает на Землю, тогда как о падении Солнца на Землю или земного шара на яблоко, разумеется, не может быть и речи.

6.2.3. Гравитационная постоянная

Гравитационную постоянную G можно найти опытным путем. Для этого нужно измерить силу F , с какой шар массой m_2 действует на шар массой m_1 , когда расстояние между центрами шаров есть r . Значение гравитационной постоянной можно будет получить, согласно (6.5), из соотношения:

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}. \quad (6.11)$$

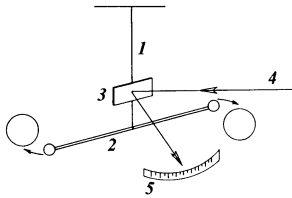


Рис. 6.6

Впервые измерение гравитационной постоянной выполнил английский физик Генри Кавендиш в 1798 году. Он использовал крутильные весы, принцип действия которых понятен из рисунка 6.6. На тонкой нити 1 , на которой подвешен легкий стержень 2 , жестко закреплено небольшое зеркальце 3 . Луч света 4 , падая на зеркальце, отражается и попадает на шкалу 5 . При повороте стержня отраженный луч перемещается по шкале и тем самым регистрирует угол закручивания нити. На концах стержня находятся свинцовые шарики массами m_1 . К ним подносят два симметрично расположенных свинцовых шара массами m_2 ($m_2 \gg m_1$). При этом нить закручивается на угол, при котором сила упругости деформированной нити оказывается уравновешенной силой гравитационного взаимодействия шаров. Измерив силу F гравитационного взаимодействия шаров по углу закручивания нити и зная массы шаров и расстояние между их центрами, можно найти гравитационную постоянную. В опыте Кавендиша использовалась кварцевая нить, свинцовые шары массами $m_1 = 775$ г и $m_2 = 50$ кг, стержень длиной 2 м. Полученный Кавендишем результат всего лишь на 1% отличается от значения G , принятого в настоящее время:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Столь малое значение гравитационной постоянной объясняет, почему мы не наблюдаем взаимного притяжения тел в повседневной жизни, имея дело с телами малой массы. Тем более гравита-

ционное взаимодействие не играет роли в атомно-молекулярных явлениях. Его роль возрастает с ростом массы и определяет движение планет вокруг Солнца, спутников вокруг планет, звезд вокруг центров галактик. Если, например, гравитационное взаимодействие двух шаров по 2 кг, находящихся на расстоянии 10 м друг от друга, равно $2,7 \cdot 10^{-12}$ Н, то гравитационное взаимодействие Земли и Луны равно $2 \cdot 10^{20}$ Н.

Первую оценку гравитационной постоянной дал сам Ньютон. Он исходил из того, что сила тяжести тела массой m , находящегося у поверхности Земли, есть сила всемирного тяготения $G \frac{m'm}{R_3^2}$, где m и R_3 — масса и радиус Земли,

соответственно. Таким образом, $m'g = G \frac{m'm}{R_3^2}$, откуда следует, что $G = \frac{gR_3^2}{m}$.

Подставив сюда $m = \frac{4}{3} \pi R_3^2 \rho$, где ρ — средняя плотность Земли, Ньютон получил выражение для G :

$$G = \frac{3g}{4\pi R_3 \rho}.$$

На основании имевшихся в то время скудных данных Ньютон сумел до удивления точно оценить среднюю плотность Земли: $\rho = 5 \cdot 10^3$ кг/м³ (согласно современным данным, $\rho = 5,52 \cdot 10^3$ кг/м³). Радиус Земли Ньютон принял равным $6 \cdot 10^6$ м (согласно современным данным, $6,37 \cdot 10^6$ м). В результате он получил, что $G = 7,8 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$. Учитывая, что $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$, можем переписать результат Ньютона в виде: $G = 7,8 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$. Этот результат не очень сильно отличается от принятого сегодня значения гравитационной постоянной.

6.2.4. Сила тяжести и гравитационное взаимодействие

Напомним, что *силой тяжести* называют силу притяжения Землей тел, находящихся на поверхности Земли или в непосредственной близости от нее (см. п. 2.3.1). Она определяется отношением (2.14):

$$\vec{F}_T = m \vec{g},$$

где m — масса тела, \vec{g} — ускорение свободного падения.

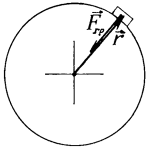


Рис. 6.7

Обозначим через $\vec{F}_{\text{гр}}$ силу, с которой, согласно закону всемирного тяготения, Земля действует на тело массой m , центр масс которого задан радиусом-вектором \vec{r} (рис. 6.7). Это есть *сила тяготения* (гравитационное взаимодействие). Используя радиус-вектор \vec{r} , можно переписать для нее соотношение (6.6) в более простом виде:

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad (6.12)$$

(здесь M — масса Земли).

Если не учитывать вращения Земли вокруг своей оси, то в этом случае сила тяжести \vec{F}_T совпадает с силой тяготения $F_{\text{гр}}$:

$$m\vec{g} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad (6.13)$$

и ускорение свободного падения \vec{g} определяется соотношением

$$\vec{g} = -G \frac{Mr}{r^3}. \quad (6.14)$$

Оно направлено навстречу радиусу-вектору \vec{r} , т. е. *к центру Земли*.

Представим модуль ускорения свободного падения в виде

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R_3 + h)^2}, \quad (6.15)$$

где R_3 — средний радиус Земли, h — высота центра масс тела над земной поверхностью (точнее говоря, над уровнем моря). Перепишем (6.15) в виде $g = \frac{GM}{R_3^2} \left(1 + \frac{h}{R_3}\right)^{-2}$ и, учитывая, что $h \ll R_3$,

воспользуемся соотношением (5.52); получим:

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM}{R_3^2} \left(1 - 2\frac{h}{R_3}\right) = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R_3}\right) = \\ &= 9,8 \left(1 - 2\frac{h}{R_3}\right) \text{ м/с}^2. \end{aligned} \quad (6.15, a)$$

Мы учли здесь, что $R_3 = 6370$ км, $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг и ввели обозначение g_0 для модуля ускорения свободного падения на уровне моря:

$$g_0 = \frac{GM}{R_3^2} = 9,8 \text{ м/с}^2. \quad (6.16)$$

Например, если $h = 15$ км, то $2\frac{h}{R_3} = 0,005$; значит, при подъеме на 15 км над уровнем моря ускорение g уменьшается только на 0,5%. При перемещении вдоль земной поверхности на 15 км направление вектора \vec{g} поворачивается на угол, равный $\frac{15}{6370}$ рад = 0,15°. Понятно, почему при рассмотрении явлений, происходящих в пределах одного-двух десятков километров как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении, можно полагать вектор \vec{g} , а значит, и силу тяжести $m\vec{g}$ для данной массы, *постоянными* как по направлению, так и по модулю (мы использовали это в предыдущих главах).

Учтем теперь, что Земля вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с (период обращения Земли равен 23 ч 56 мин). В этом случае соотношения (6.13) и (6.14) не выполняются — *вследствие вращения Земли сила тяжести $m\vec{g}$ не совпадает с силой тяготения $\vec{F}_{гр}$, определяемой законом всемирного тяготения.*

Предположим, что радиус-вектор \vec{r} рассматриваемого вблизи земной поверхности тела массой m составляет угол φ с плоскостью экватора (тело находится на широте φ). Центр масс тела описывает вокруг земной оси круговую траекторию радиусом $r \cos \varphi$ (рис. 6.8, а). Вращающаяся Земля является *неинерциальной системой отсчета*, поэтому, чтобы пользоваться законами динамики, нужно считать, что, наряду с силой тяготения $F_{гр}$, на тело действует *центробежная сила инерции $F_{цб}$* , модуль которой равен

$$F_{цб} = m\omega^2 r \cos \varphi. \quad (6.17)$$

Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, сила притяжения тела Землей, т. е. сила тяжести $m\vec{g}$, есть векторная сумма сил $F_{гр}$ и $F_{цб}$ (рис. 6.8, б):

$$m\vec{g} = \vec{F}_{гр} + \vec{F}_{цб}. \quad (6.18)$$

Из рисунка видно, что вследствие вращения Земли направление силы тяжести (направление ускорения свободного падения) отклоняется на некоторый угол α от направления к центру Земли (от направления силы тяготения $\vec{F}_{гр}$). Направление вектора \vec{g} есть

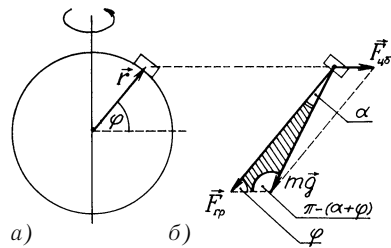


Рис. 6.8

направление нити с висящим на ней неподвижным грузом; плоскость, перпендикулярная вектору \vec{g} , есть горизонтальная плоскость для данной широты (плоскость неподвижной водной поверхности расположенного здесь озера).

Значение угла отклонения α зависит от широты φ места, где находится рассматриваемое тело. Очевидно, что $\alpha = 0$ на полюсе (там $\varphi = 90^\circ$), так как в этом случае $\vec{F}_{цб} = 0$, и на экваторе ($\varphi = 0^\circ$), так как в этом случае силы $F_{гр}$ и $F_{цб}$ имеют общую линию действия.



Оценим угол α для заданной широты φ , для чего воспользуемся *теоремой синусов*, согласно которой отношение синусов двух углов в треугольнике равно отношению сторон треугольника, лежащих против этих углов. Применим теорему синусов к треугольнику, заштрихованному на рисунке 6.8, б:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\pi - (\alpha + \varphi))} = \frac{F_{цб}}{F_{гр}}. \quad (1^*)$$

Учитывая, что $\sin(\pi - (\alpha + \varphi)) = \sin(\alpha + \varphi)$, $F_{цб} = m\omega^2 r \cos \varphi$, $F_{гр} = G \frac{mM}{r^2}$,

перепишем (1*) в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{\omega^2 r^3}{GM} \cos \varphi. \quad (2^*)$$

Примем $r = R_3 = 6370$ км и учтем, что $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг.

Отсюда получаем, что $\frac{\omega^2 r^3}{GM} = 0,0034$. Итак,

$$\sin \alpha = 0,0034 \sin(\alpha + \varphi) \cos \varphi = 0,0034 (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) \cos \varphi. \quad (3^*)$$

Мы видим, что вследствие малости угловой скорости вращения Земли $\sin \alpha \ll 0,0034$. Поэтому можем положить $\cos \alpha \approx 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$ (α выражается в радианах). В результате равенство (3*) последовательно преобразуется:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 0,0034 (\alpha \cos \varphi + \sin \varphi) \cos \varphi; \\ \alpha(1 - 0,0034 \alpha \cos^2 \varphi) &\approx 0,0034 \sin \varphi \cos \varphi; \\ \alpha &\approx 0,0034 \sin \varphi \cos \varphi; \\ \alpha &\approx 0,0017 \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (4^*)$$

Как и следовало ожидать, $\alpha = 0$ при $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$. Максимальное отклонение направления вектора \vec{g} от направления вектора $\vec{F}_{гр}$ наблюдается, согласно (4*), при $\varphi = 45^\circ$. Оно составляет 0,0017 рад = 6' (всего лишь 6 угловых минут!).

Модуль ускорения свободного падения максимален на полюсе и минимален на экваторе. Разница Δg его значений равна, согласно (6.17),

$$\Delta g = \omega^2 R_3 = 0,034 \text{ м/с}^2. \quad (6.19)$$

Согласно опытным данным, на полюсе $g_n = 9,83 \text{ м/с}^2$, а на экваторе $g_s = 9,78 \text{ м/с}^2$. Таким образом $g_n - g_s = 0,05 \text{ м/с}^2$, что несколько больше разности Δg , определяемой соотношением (6.19). Дополнительная разница значений вектора g на полюсе и экваторе объясняется тем, что земной шар немного сплюснен в направлении оси вращения. Его полярный радиус равен 6357 км, а экваториальный — 6378 км.

Учитывая приведенные выше оценки, мы не будем в дальнейшем принимать во внимание ни вращение Земли вокруг своей оси, ни отклонение формы Земли от шара и будем полагать, что вектор \vec{g} везде направлен к центру Земли, а его модуль определяется соотношением (6.15). Будем исходить из того, что Земля есть шар радиусом $R_3 = 6370 \text{ км}$ и модуль ускорения свободного падения на уровне моря равен $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$.

6.2.5. Сила тяготения внутри земного шара

Представим себе, что в сплошном однородном шаре массой M и радиусом R пробит от поверхности до центра воображаемый канал, внутрь которого вносится материальная точка массой m . Обозначим через r расстояние от этой точки до центра шара. Выясним, как будет зависеть от r модуль силы тяготения F , с какой шар действует на материальную точку, находящуюся внутри канала.

Понятно, что в центре шара $F = 0$. Чтобы найти $F(r)$ для $0 < r \leq R$, разобьем мысленно шар на тонкие сферические концентрические слои. Сила тяготения, действующая со стороны любого слоя на материальную точку, оказавшуюся внутри него, равна нулю.

Это видно из рисунка 6.9, на котором выделен один из сферических слоев; точка массой m находится внутри этого слоя на расстоянии r от центра шара. Штриховкой показаны два малых участка слоя массами m_1 и m_2 . Силы, с которыми эти участки действуют на точку массой m , обозначены через \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Согласно закону всемирного тяготения

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_2^2}{m_2 r_1^2}. \quad (1^*)$$

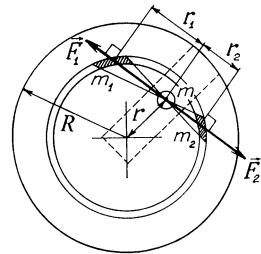


Рис. 6.9

Так как изображенные на рисунке треугольники подобны, то отношение линейных размеров рассматриваемых участков слоя равно $\frac{r_1}{r_2}$, а отношение их

площадей равно $\frac{r_1^2}{r_2^2}$. Толщина обоих участков одна и та же (она обозначена

через Δr); следовательно, отношение объемов, а значит и масс участков равно $\frac{r_1^2}{r_2^2}$.

Подставляя в (1*) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$, получаем $\frac{F_1}{F_2} = 1$. Мы видим, что силы тяготения,

действующие на точку массой m со стороны рассматриваемых участков, взаимно уравновешены. Так как весь слой может быть разбит на пары таких участков, то ясно, что сила тяготения, действующая со стороны слоя в целом, равна нулю.

Итак, на материальную точку, находящуюся на расстоянии r от центра шара, действует только та часть шара, которая сосредоточена в объеме радиусом r и имеет массу $\frac{Mr^3}{R^3}$, причем всю эту массу надо мысленно сосредоточить в центре шара. Таким образом, если $r \leq R$, то

$$F(r) = G \frac{\frac{mMr^3}{R^3}}{r^2} = G \frac{mMr}{R^3}. \quad (2^*)$$

Рассматривая в качестве шара Землю массой M и радиусом R_3 , учтем, что $G \frac{M}{R_3^2} = g_0$, и преобразуем (2*) к виду:

$$F(r) = \frac{mg_0 r}{R_3}. \quad (6.20)$$

При $r \geq R_3$ сила тяготения равна

$$F(r) = G \frac{mM}{r^2} = mg_0 \frac{R_3^2}{r^2}. \quad (6.21)$$

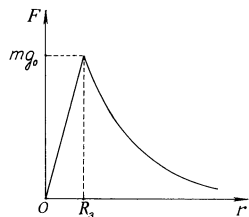


Рис. 6.10

График зависимости силы тяготения от расстояния до центра Земли представлен на рисунке 6.10.

6.2.6. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

Потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2 , описываемого формулой (6.5), представляют выражением

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (6.22)$$

Здесь предполагается, что потенциальная энергия равна нулю при бесконечно большом расстоянии между взаимодействующими телами ($U = 0$ при $r \rightarrow \infty$).

Чтобы обосновать формулу (6.22), покажем, что из нее можно вывести выражение (6.5) для закона всемирного тяготения. Рассмотрим материальные точки массами m_1 и m_2 на расстоянии r друг от друга. Обозначим

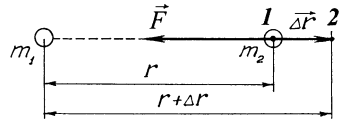


Рис. 6.11

через $\Delta \vec{r}$ малое перемещение точки m_2 из исходного положения 1 в конечное положение 2, в результате которого расстояние между точками становится равным $r + \Delta r$, причем $\Delta r \ll r$ (рис. 6.11). Работу $A(1 \rightarrow 2)$ силы тяготения \vec{F} на перемещении $\Delta \vec{r}$ можно, с одной стороны представить, согласно (5.4), в виде $A(1 \rightarrow 2) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = -F \Delta r$, а с другой стороны, указанную работу можно представить, согласно (5.70), в виде

$$A(1 \rightarrow 2) = -(U_2 - U_1) = -\Delta U(1 \rightarrow 2),$$

где $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ — изменение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия рассматриваемых материальных точек. Таким образом,

$$F \Delta r = \Delta U(1 \rightarrow 2). \quad (1^*)$$

Убедимся, что F выражается формулой (6.5), если $\Delta U(1 \rightarrow 2)$ представить согласно (6.22), в виде

$$\Delta U(1 \rightarrow 2) = U_2 - U_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r + \Delta r} - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r} \right). \quad (2^*)$$

Из (2*) следует, что $\Delta U(1 \rightarrow 2) = G \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right)$. Так как

$\Delta r \ll r$, то воспользовавшись соотношением (5.52), представим $\frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} = 1 - \frac{\Delta r}{r}$, после чего (2*) принимает вид $\Delta U(1 \rightarrow 2) =$

$= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Delta r$. Подставив этот результат в (1*), убеждаемся, что

F действительно выражается формулой (6.5).

Пусть $m_1 = M$ — масса Земли, $m_2 = m$ — масса некоторого объекта, центр масс которого находится на расстоянии r от центра Земли, большем, чем радиус Земли R_3 . В этом случае формула (6.22) превращается в формулу

$$U = -G \frac{Mm}{r}, \quad (6.23)$$

которую можно рассматривать как потенциальную энергию тела массой m , удаленного на расстояние r от центра Земли. Забегая немного вперед, заметим, что это есть потенциальная энергия тела в *поле тяготения Земли*. Обозначив через h высоту тела над уровнем моря, перепишем (6.23) в виде

$$U = -G \frac{Mm}{R_3 + h}. \quad (6.24)$$

Предположим, что тело массой m переместилось с высоты h_1 на высоту h_2 ($h_2 > h_1$). Покажем, что изменение потенциальной энергии тела равно

$$\Delta U = mg_0 h_2 - mg_0 h_1. \quad (3^*)$$

Используя (6.24), представим:

$$\Delta U = -G \frac{Mm}{R_3 + h_2} + G \frac{Mm}{R_3 + h_1} = G \frac{Mm}{R_3} \left(\frac{1}{1 + \frac{h_1}{R_3}} - \frac{1}{1 + \frac{h_2}{R_3}} \right).$$


Так как $h_1 \ll R_3$ и $h_2 \ll R_3$, то, с учетом соотношения (5.52), получаем

$$\Delta U = G \frac{Mm}{R_3} \left[1 - \frac{h_1}{R_3} - \left(1 - \frac{h_2}{R_3} \right) \right] = G \frac{Mm}{R_3^2} (h_2 - h_1).$$

Напомним, что $G \frac{M}{R_3^2} = g_0$; следовательно, $\Delta U = mg_0(h_2 - h_1)$.

Итак,

$$-G \frac{Mm}{R_3 + h_2} + G \frac{Mm}{R_3 + h_1} = mg_0 h_2 - mg_0 h_1. \quad (6.25)$$

 Обратим внимание на то, что в левой части данного равенства фигурируют потенциальные энергии тела массой m , обращаются в нуль, когда тело удаляется в бесконечность, тогда как в правой части равенства фигурируют потенци-

альные энергии тела, отсчитываемые от уровня моря. Легко видеть, что выбор нулевого уровня потенциальной энергии не отразился на соотношении (6.25), поскольку здесь рассматривается изменение потенциальной энергии.

Задача 1 (рис. 6.12). Чему равна потенциальная энергия тела массой m на уровне моря при условии, что потенциальная энергия принимается равной в центре земного шара?

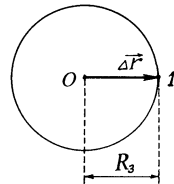


Рис. 6.12

□ Работа $A(0 \rightarrow 1)$ на перемещении $\Delta r = R_3$ тела массой m из центра Земли (точки 0) на поверхность моря (в точку 1) численно равна площади под изображенным на рисунке 6.10 графиком $F(r)$ на промежутке от $r = 0$ до $r = R_3$; следовательно, $A(0 \rightarrow 1) = \frac{1}{2} mg_0 R_3$. Согласно (5.70) $A(0 \rightarrow 1) = -\Delta U(0 \rightarrow 1) = U_1 - U_0$. Так как, по условию задачи, $U_0 = 0$, то $U_1 = A(0 \rightarrow 1) = \frac{1}{2} mg_0 R_3$. Итак, потенциальная энергия тела массой m на поверхности моря, отсчитываемая от центра Земли, равна

$$U = \frac{1}{2} mg_0 R_3. \quad (6.26) \quad \blacksquare$$

Задача 2. Чему равна потенциальная энергия тела массой m на бесконечно большом расстоянии от Земли при условии, что потенциальная энергия принимается равной нулю в центре земного шара?

□ Искомая потенциальная энергия U численно равна площади под графиком $F(r)$ на рисунке 6.10, рассматриваемом на всем промежутке от нуля до бесконечности. При этом можно обойтись без вычисления площади на промежутке от R_3 до ∞ , а использовать результат (6.26). Запишем:

$$U' = U_\infty - U_0 = (U_\infty - U_1) + (U_1 - U_0), \quad (4^*)$$

где U_∞ , U_1 , U_0 — потенциальная энергия на бесконечном расстоянии от Земли, на уровне моря, в центре Земли, соответственно. Перепишем соотношение (6.23) в виде

$$U = -\frac{mg_0 R_3^2}{r}. \quad (6.27)$$

При $r = R_3$ это выражение определяет разность $U_1 - U_\infty$; следовательно,

$$U_\infty - U_1 = mg_0 R_3. \quad (6.28)$$

Подставляя (6.28) в (4*) и учитывая, что, согласно (6.26), $U_1 - U_0 = \frac{1}{2} mg_0 R_3$, получаем

$$U_\infty - U_0 = mg_0 R_3 + \frac{1}{2} mg_0 R_3 = \frac{3}{2} mg_0 R_3.$$

Итак, потенциальная энергия тела массой m на бесконечно большом расстоянии от Земли, отсчитываемая от центра Земли, равна

$$U_\infty - U_0 = \frac{3}{2} mg_0 R_3. \quad (6.29) \blacksquare$$

6.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ В АСТРОНОМИИ

6.3.1. Определение масс небесных тел

Опыт Кавендиша по измерению гравитационной постоянной иногда называют образно взвешиванием Земли. Из (6.16) следует, что масса m Земли равна

$$m = \frac{g_0 R_3^2}{G}. \quad (6.30)$$

Измерив G , Кавендиш тем самым получил возможность определить массу Земли m , используя известные величины g_0 и R_3 . Так как $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$, $R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$, то из (6.30) находим

$$m = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Используя закон всемирного тяготения, можно «взвесить» Солнце. Обозначим через M и m массы Солнца и Земли, соответственно, через T период обращения Земли вокруг Солнца, через r — радиус орбиты Земли (расстояние от центра Земли до центра Солнца). Согласно закону всемирного тяготения, Солнце действует на Землю с силой тяготения, равной по модулю (6.7):

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (1^*)$$

Согласно второму закону Ньютона, эта сила сообщает Земле центростремительное ускорение $\frac{v^2}{r}$ (v — модуль скорости центра масс Земли);

$$F = \frac{mv^2}{r}. \quad (2^*)$$

Из (1*) и (2*) следует, что $M = \frac{vr^2}{G}$. Учитывая, что $v = \frac{2\pi r}{T}$, находим отсюда:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \quad (6.31)$$

Так как $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, $T = 1$ год $= 3,16 \cdot 10^7$ с, то, следовательно,

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

Таким образом, масса Солнца больше массы Земли в 333 000 раз.

Соотношение (6.31) позволяет вычислить массу любого небесного тела, если известен период обращения вокруг него спутника, движущегося по круговой орбите известного радиуса.

Можно, например, вычислить массу Юпитера, измерив период обращения и радиус орбиты одного из его спутников. Возьмем для примера спутник Каллисто. Из астрономических наблюдений за этим спутником известны радиус его орбиты ($r = 1,88 \cdot 10^9$ м) и период обращения вокруг Юпитера ($T = 16,7$ сут $= 1,44 \cdot 10^6$ с). Подставляя эти данные в (6.31), находим, что масса Юпитера равна

$$M = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ кг.}$$

Она в 319 раз больше массы Земли.

Массу Марса можно вычислить, наблюдая за движением одного из двух его спутников — Фобоса или Деймоса. Радиус орбиты Фобоса $r = 9400$ км, период обращения Фобоса вокруг Марса $= 7$ ч 47 мин $= 2,8 \cdot 10^4$ с. Подставляя эти данные в (6.31), находим, что масса Марса равна

$$M = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ кг.}$$

Массу Сатурна вычислим, зная, что радиус орбиты его самого крупного спутника Титана равен $r = 1,22$ млн км, а период обращения вокруг Сатурна составляет $T = 15,8$ сут $= 1,37 \cdot 10^6$ с. Подставляя эти данные в (6.31), находим, что масса Сатурна равна

$$M = 5,7 \cdot 10^{26} \text{ кг.}$$

Для определения с помощью закона всемирного тяготения массы Луны или Венеры можно воспользоваться кинематическими данными движения вокруг них искусственных спутников.

Задача. Масса Луны в $\theta = 81,2$ раза меньше массы Земли, радиус Луны в $\xi = 3,68$ раза меньше радиуса Земли. Во сколько раз ускорение свободного падения $g_{\text{Л}}$ у поверхности Луны меньше ускорения свободного падения g_0 на уровне моря на Земле?

□ Запишем для Луны соотношение, аналогичное соотношению (6.30):

$$m_{\text{Л}} = \frac{g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}^2}{G}, \quad (1^*)$$

где $m_{\text{Л}}$ и $R_{\text{Л}}$ — масса и радиус Луны, соответственно. Поделив (6.30) на (1*), находим

$$\frac{m}{m_{\text{Л}}} = \frac{g_0}{g_{\text{Л}}} \left(\frac{R_3}{R_{\text{Л}}} \right)^2.$$

Так как $\frac{m}{m_{\text{Л}}} = \theta$ и $\frac{R_3}{R_{\text{Л}}} = \xi$, то получаем для искомого отношения:

$$\frac{g_0}{g_{\text{Л}}} = \frac{\theta}{\xi^2} = 6. \text{ Ускорение свободного падения у поверхности Луны}$$

равно $g_{\text{Л}} = 1,62 \text{ м/с}^2$. ■

6.3.2. Определение расстояний планет от Солнца

Вокруг Солнца обращаются по почти круговым орбитам 9 планет. Пронумеруем их в порядке удаления от Солнца. Обозначим через r_i радиус орбиты, а через T_i период обращения вокруг Солнца для i -й планеты ($i = 1, 2, 3, \dots, 9$). Согласно (6.31), для каждой планеты выполняется соотношение

$$\frac{r_i^3}{T_i^2} = \frac{MG}{4\pi^2}, \quad (6.32)$$

где M — масса Солнца. Таким образом,

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{r_3^3}{T_3^2} = \dots = \frac{r_9^3}{T_9^2}; \quad \frac{r_i^3}{T_i^2} = \text{const}. \quad (6.33)$$

Эти равенства, вытекающие из закона всемирного тяготения, выражают, как легко видеть, третий закон Кеплера.

Периоды обращения планет вокруг Солнца могут быть измерены весьма точно. Поэтому для нахождения r_i достаточно измерить расстояние от Солнца до какой-либо одной планеты и затем

воспользоваться соответствующим равенством в (6.33). В качестве эталона принято расстояние от центра Солнца до центра Земли (радиус земной орбиты), называемое астрономической единицей длины (а.е.):

$$r_3 = 1 \text{ а.е.} = 1,49\,598 \cdot 10^{11} \text{ м} = 150 \text{ млн км.}$$

Заметим, что в случае Меркурия и Плутона значения r_1 и r_9 , полученные из (6.33) — это длины больших полуосей эллиптических орбит планет, т. е. средние расстояния планет от Солнца.

Задача. Радиусы орбит Титана и Фебы (спутников Сатурна) равны, соответственно, $r_1 = 1,22$ млн км и $r_2 = 12,95$ млн км. Период обращения Титана вокруг Сатурна равен $T_1 = 15,8$ сут. Требуется сравнить модули скоростей центров масс спутников, рассматриваемые относительно центра масс Сатурна.

□ Скорость Титана равна

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{2\pi \cdot 1,22 \cdot 10^9}{1,37 \cdot 10^6} \text{ м/с} = 5,6 \text{ км/с.}$$

Соотношение (6.33) для планет, обращающихся вокруг Солнца, применимо для спутников одной и той же планеты, если теперь считать, что r_i и T_i — соответственно радиус орбиты i -го спутника и период обращения его вокруг данной планеты. Из равенства $\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$, где T_2 — период обращения Фебы вокруг Сатурна, получаем

$$r_1 v_1^2 = r_2 v_2^2,$$

где v_2 — скорость Фебы. Таким образом,

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}. \quad (6.34) \quad \blacksquare$$

Обратим внимание на то, что при решении задачи установлено равенство (6.34): отношение скоростей спутников, обращающихся вокруг планеты по круговым орбитам, обратно пропорционально квадратному корню из отношения радиусов орбит спутников. *Чем больше радиус орбиты, тем меньше скорость движения по ней.*

6.3.3. Период обращения Луны вокруг Земли и расстояние до Луны

Измерив периоды обращения T Луны вокруг Земли, нетрудно вычислить расстояние от центра Земли до центра Луны, т. е. ра-

диус $r_{\text{Л}}$ лунной орбиты (эксцентриситет этой орбиты равен 0,055, что позволяет рассматривать ее как почти круговую). Согласно закону всемирного тяготения, Земля притягивает к себе Луну с силой $F = G \frac{Mm}{r_{\text{Л}}^2}$ (M — масса Земли, m — масса Луны). По второму закону Ньютона, эта сила сообщает Луне центростремительное ускорение $\frac{v_{\text{Л}}^2}{r_{\text{Л}}}$ ($v_{\text{Л}}$ — скорость центра масс Луны относительно центра масс Земли). Таким образом, $G \frac{Mm}{r_{\text{Л}}^2} = \frac{mv_{\text{Л}}^2}{r_{\text{Л}}}$, откуда следует, что $v_{\text{Л}}^2 = G \frac{M}{r_{\text{Л}}}$, или, с учетом (6.16)

$$v_{\text{Л}}^2 = g_0 \frac{R_3^2}{r_{\text{Л}}}. \quad (1^*)$$

Так как $v_{\text{Л}} = \frac{2\pi r_{\text{Л}}}{T}$, то из (1*) получаем следующее выражение для радиуса лунной орбиты:

$$r_{\text{Л}} = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_3^2 T^2}{4\pi^2}}. \quad (6.35)$$



Остается измерить период обращения Луны вокруг Земли. Как это сделать?

Попробуем воспользоваться периодичностью, с которой происходит смена лунных фаз. В новолуние Луна пересекает прямую, проведенную мысленно через центры Солнца и Земли. По данным достаточно точных астрономических наблюдений, время между двумя очередными новолуниями (или двумя полнолуниями) равно

$$T' = 29 \text{ сут } 12 \text{ ч } 44 \text{ мин} = 42 \ 524 \text{ мин} = 2,55 \cdot 10^6 \text{ с}.$$

Это есть период смены лунных фаз. Если подставить его в (6.35) и учесть, что $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$, $R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$, то получим

$$r_{\text{Л}} = 403 \ 000 \text{ км}.$$

Полученный результат является, однако, неточным, поскольку период смены лунных фаз T' несколько больше времени T , в течение которого Луна совершает оборот вокруг Земли, что связано с движением Земли вокруг Солнца. В связи с этим различают *синодический месяц* (от греческого слова *synodos*, означающего «сближение, встреча») и *сидерический месяц* (от *siderium*, означающего «звездный»). Продолжительность T' синодического месяца

ца измеряют по наблюдениям за сменой лунных фаз, а продолжительность T сидерического месяца — по наблюдениям за положением Луны относительно звезд на небосводе. В формулу (6.35) следует подставлять продолжительность именно сидерического месяца.



Покажем, как, измерив T' , найти T . На рисунке 6.13 показаны положения Земли, Луны и Солнца для моментов t_1 и t_2 , соответствующих двум последовательным новолуниям. Очевидно, что $t_2 - t_1 = T'$. За этот промежуток времени Луна описывает вокруг Земли окружность $2\pi r_{\text{Л}}$, плюс дугу AB длиной $r_{\text{Л}}\alpha$; следовательно,

$$T' = \frac{(2\pi + \alpha)r_{\text{Л}}}{v_{\text{Л}}} = T + \frac{\alpha r_{\text{Л}}}{v_{\text{Л}}}. \quad (2^*)$$

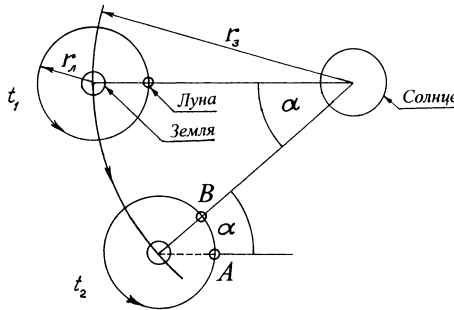


Рис. 6.13

Обозначим через T_3 период обращения Земли вокруг Солнца, а через v_3 скорость центра масс Земли относительно центра масс Солнца. Из рисунка заключаем, что

$$r_3\alpha = (t_2 - t_1) v_3 = T'v_3. \quad (3^*)$$

Выразив из (3^{*}) угол α , перепишем (2^{*}) в виде:

$$T' = T + T' \frac{r_{\text{Л}} v_3}{r_3 v_{\text{Л}}}. \quad (4^*)$$

Так как $2\pi \frac{r_{\text{Л}}}{v_{\text{Л}}} = T$ и $2\pi \frac{r_3}{v_3} = T_3$, то отсюда следует, что

$$T' = T + \frac{T'T}{T_3} \quad \text{или} \quad T'T_3 = TT_3 + T'T.$$

Разделив обе части последнего равенства на $T'T_3$, получим соотношение:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T'} + \frac{1}{T_3}, \quad \text{или} \quad T = \frac{T'T_3}{T' + T_3}. \quad (6.36)$$

Далее учтем, что $T' = 2,55 \cdot 10^6$ с и $T_3 = 365,26$ сут = $31,56 \cdot 10^6$ с. Подставив эти данные в (6.36), находим период обращения Луны вокруг Земли (продолжительность сидерического месяца):

$$T = 2,36 \cdot 10^6 \text{ с} = 27 \text{ сут } 7 \text{ ч } 43 \text{ мин.}$$

Итак, сидерический лунный месяц оказывается короче синодического месяца на 2 сут 5 ч 1 мин.

Подставив $T = 2,36 \cdot 10^6$ с в (6.35), получаем радиус лунной орбиты:

$$r_{\text{л}} = 384 \text{ 000 км.}$$

6.3.4. Закон всемирного тяготения как основа небесной механики

В сочетании со вторым законом Ньютона и результатами астрономических наблюдений закон всемирного тяготения позволяет вычислять траектории движения различных небесных тел (планет, их спутников, комет, астероидов), а также объектов, запускаемых человеком в космос (искусственных спутников, космических кораблей, космических зондов). Он позволяет рассчитывать координаты небесных тел и искусственных объектов в любые заданные моменты времени.

Выше приводились примеры использования закона всемирного тяготения для решения некоторых задач о движении планет Солнечной системы. При этом всякий раз рассматривалась *задача двух тел* на том основании, что массы планет малы по сравнению с массой Солнца, массы спутников планет малы по сравнению с массами планет, расстояния же между планетами, а также между их спутниками достаточно велики. Так, например, вычисляя расстояние от Юпитера до Солнца, мы учитывали только гравитационное взаимодействие двух тел — Юпитера и Солнца, пренебрегая взаимодействиями Юпитера и других планет. Иначе говоря, мы не учитывали *возмущения* в движении Юпитера, вызываемые воздействием на него со стороны других планет.

Учет подобных возмущений предполагает рассмотрение гравитационного взаимодействия не двух, а трех (и более) небесных тел.

Интересен в этой связи факт предсказания существования восьмой планеты — Нептуна. Астрономические наблюдения над открытой в конце XVIII столетия седьмой планетой (Ураном) позволили рассчитать на основе закона всемирного тяготения траекторию его движения, составить таблицы положений планеты на небосводе в заранее определенные моменты времени.

Однако наблюдаемое поведение Урана не вполне соответствовало расчетным данным: в первом десятилетии XIX столетия Уран как бы «забегал вперед», а позднее начинал «отставать» от предвычисленных положений. Ученые пришли к мысли, что за Ураном находится еще одна планета, которая своим тяготением несколько сбивает Уран с пути, рассчитанного на основе учета гравитационного взаимодействия Урана и Солнца. Независимо друг от друга англичанин Джон Адамс и француз Урбен Леверье выполнили вычисления, позволяющие определить координаты возмущающей планеты. Эта планета была действительно обнаружена немецким астрономом Иоганном Галле в сентябре 1846 г. Ее назвали Нептуном. Предсказание координат Нептуна — подлинный триумф небесной механики, использовавшей закон всемирного тяготения при рассмотрении гравитационного взаимодействия трех тел — Солнца, Урана и неизвестной дотоле планеты.

Наблюдения за движением планет, проводившиеся во второй половине XIX столетия, обнаружили возмущения в движении также и Нептуна. Американский астроном Персиваль Ловелл предположил, что за Нептуном есть еще одна (девятая) планета, возмущавшая движение Нептуна и в меньшей степени Урана. В феврале 1930 г. американский астроном Клайд Томбо обнаружил девятую планету: ее назвали Плутоном.

6.4. ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯГОТЕНИЯ

6.4.1. Первая космическая скорость и движение по круговым орбитам

Тело массой m движется по круговой орбите радиусом r вокруг Земли под действием силы тяготения $F = G \frac{Mm}{r^2}$ (M — масса Земли), которая сообщает телу центростремительное ускорение $\frac{v^2}{r}$ (v — модуль скорости тела относительно центра Земли). Согласно второму закону Ньютона, $G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, откуда следует, что

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (6.37)$$

С учетом (6.16) перепишем это выражение в виде

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r}}. \quad (6.38)$$

Здесь $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения на уровне моря, $R_3 = 6370 \text{ км}$ — радиус земного шара.

Положив $r = R_3$ в (6.38), получим скорость

$$V_1 = \sqrt{g_0 R_3} = 7,9 \text{ км/с}. \quad (6.39)$$

Эту скорость называют *первой космической скоростью*. Такую скорость следовало бы сообщить телу у поверхности Земли, чтобы сделать его искусственным спутником.

Разумеется, никто не станет запускать спутник в непосредственной близости от земной поверхности из-за сопротивления атмосферы и неровностей рельефа. Спутники движутся по околоземным орбитам на высотах не менее нескольких сотен километров.

Пусть h — высота круговой орбиты спутника над уровнем моря. Радиус орбиты $r = R_3 + h$, поэтому соотношение (6.38) принимает вид:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{R_3 + h}} = V_1 \sqrt{\frac{R_3}{R_3 + h}}. \quad (6.40)$$

Если $h \ll R_3$, то, используя соотношение (5.52), можно преобразовать (6.40) к виду:

$$v = V_1 \left(1 + \frac{h}{R_3}\right)^{-1/2} \approx V_1 \left(1 - \frac{h}{2R_3}\right). \quad (6.41)$$

Первый искусственный спутник Земли был выведен в 1957 году на орбиту на высоте $h = 228 \text{ км}$. С помощью (6.41) легко найти скорость этого спутника. Она равна $7,76 \text{ км/с}$, что на $0,14 \text{ км/с}$ меньше первой космической скорости.

Чем больше радиус круговой орбиты (чем больше h), тем меньше скорость спутника (см. (6.40)). Это, однако, не означает, что для выведения спутника на более дальнюю круговую орбиту надо совершить над ним меньшую работу. При увеличении h несколько уменьшается кинетическая энергия спутника, зато возрастает потенциальная энергия, а в результате механическая энергия спутника возрастает.

Найдем работу A , совершенную над спутником массой m в процессе выведения его на круговую орбиту, находящуюся на высоте h над уровнем моря. Заметим, что речь идет о работе, совер-

шенной реактивным двигателем только над самим спутником. Работа, совершенная над ракетой-носителем, здесь не рассматривается. Кроме того, мы не учитываем работу, совершенную над спутником силой сопротивления воздуха. В этом случае искомая работа равна приращению ΔW механической энергии спутника за время выведения его на орбиту на высоте h :

$$A = \Delta W = \Delta K + \Delta U(0 \rightarrow h), \quad (1^*)$$

где ΔK и $\Delta U(0 \rightarrow h)$ — изменения кинетической и потенциальной энергии спутника, соответственно.

Примечание

Данное соотношение может быть получено также на основе теоремы об изменении кинетической энергии (5.30). На поднимающийся вверх спутник действуют в рассматриваемом случае только две силы — сила тяги двигателя и сила земного тяготения. Первая совершит работу A , а вторая — работу $A_{\text{гп}}(0 \rightarrow h)$. Согласно теореме об изменении кинетической энергии,

$$A + A_{\text{гп}}(0 \rightarrow h) = \Delta K. \quad (2^*)$$

Так как, согласно (5.70), $A_{\text{гп}}(0 \rightarrow h) = -\Delta U(0 \rightarrow h)$, то соотношение (2*) превращается в (1*).

Изменение ΔK кинетической энергии спутника в процессе его вывода на круговую орбиту равно $\frac{mv^2}{2}$, где v определяется соотношением (6.40); таким образом,

$$\Delta K = \frac{1}{2} mg_0 R_3 \frac{R_3}{R_3 + h}. \quad (3^*)$$

Изменение $\Delta U(0 \rightarrow h)$ потенциальной энергии равно, согласно (6.23),

$$\Delta U(0 \rightarrow h) = U(h) - U(0) = \left(-G \frac{Mm}{R_3 + h}\right) - \left(-G \frac{Mm}{R_3}\right).$$

С учетом (6.16) перепишем это соотношение в виде

$$\Delta U(0 \rightarrow h) = mg_0 R_3 \left(1 - \frac{R_3}{R_3 + h}\right). \quad (4^*)$$

Подставляя (3*) и (4*) в (1*), находим

$$A = mg_0 R_3 \left[1 - \frac{R_3}{2(R_3 + h)}\right]. \quad (6.42)$$

Мы убеждаемся, что по мере увеличения h возрастает работа A , совершенная над спутником при его выводе на орбиту на высоте h . Соответственно возрастает механическая энергия спутника, поскольку $A = \Delta W$.

Задача 1. Спутник массой m , находящийся на круговой орбите на высоте $h_1 = \frac{R_3}{10}$ над уровнем моря, перевели на круговую орбиту на высоте $h_2 = \frac{R_3}{3}$. На сколько возросла механическая энергия спутника?

□ Искомое приращение механической энергии равно разности $A_2 - A_1$, где A_1 и A_2 — работы, совершенные над спутником при его выведении на орбиты на высотах h_1 и h_2 соответственно. Воспользовавшись соотношением (6.42), запишем

$$A_1 = mg_0 R_3 \left[1 - \frac{R_3}{2 \left(R_3 + \frac{R_3}{10} \right)} \right] = \frac{6}{11} mg_0 R_3;$$

$$A_2 = mg_0 R_3 \left[1 - \frac{R_3}{\left(R_3 + \frac{R_3}{3} \right)} \right] = \frac{5}{8} mg_0 R_3.$$

Таким образом, приращение механической энергии спутника равно

$$A_2 - A_1 = \frac{7}{88} mg_0 R_3.$$

Возникает вопрос: как на практике можно заставить спутник перейти с одной круговой орбиты на другую? На этот вопрос будет дан ответ в п. 6.4.3.

Выделим среди круговых орбит спутников Земли так называемую *стационарную орбиту*. Она находится в плоскости земного экватора. Спутник, движущийся по этой орбите в сторону направления вращения Земли вокруг своей оси, называется «висящим» неподвижно над одной и той же точкой земного экватора. ■

Задача 2. Чему равен радиус стационарной орбиты?

□ Воспользуемся соотношением (6.35), определяющим радиус околоземной круговой орбиты тела с периодом обращения T вокруг Земли. В качестве T следует взять в данном случае период обращения Земли вокруг своей оси

$$T = 1 \text{ сут} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ с.}$$

Ведь именно в этом случае спутник будет «висеть» неподвижно над одной и той же точкой экватора, соответствующей точке вывода спутника на орбиту. Подставляя этот период обращения в (6.35) и учитывая, что $R_3 = 6370$ км, находим радиус стационарной орбиты: $r_{\text{ст}} = 42\,230$ км. Эта орбита находится на высоте $h = 42\,230$ км $-$ 6370 км $=$ $35\,860$ км над уровнем моря. ■

6.4.2. Движение по эллиптическим орбитам

Напомним, что при обращении небесного тела (планеты, кометы, астероида, искусственного спутника) вокруг Солнца по эллиптической орбите центр Солнца находится в одном из фокусов эллипса; ближайшую к центру Солнца точку орбиты называют *перигелием*, а наиболее удаленную — *афелием*. Соответственно говорят о перигелийном и афелийном расстояниях от центра Солнца до орбиты небесного тела. При обращении естественного или искусственного спутника вокруг Земли по эллиптической орбите центр Земли находится в одном из фокусов эллипса; ближайшую к центру Земли точку орбиты называют *перигеем*, а наиболее удаленную — *апогеем*, соответственно говорят о перигейном и апогейном расстояниях от центра Земли до орбиты спутника.

Предположим, что спутник (или космический корабль) движется по круговой орбите радиусом r_1 ; модуль его скорости опре-

деляется радиусом орбиты и равен, согласно (6.38), $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_1}}$.

Пусть в некоторый момент времени модуль скорости спутника (корабля) *уменьшился* на Δv в результате кратковременного включения тормозного двигателя; он стал равен $v_1 = v_0 - \Delta v$. Обозначим через A точку на круговой орбите, соответствующую указанному моменту времени. В этот момент спутник *перейдет с круговой орбиты на эллиптическую*, сопрягающуюся с исходной круговой.

На рисунке 6.14, *a* показаны эллиптическая (сплошная линия) и исходная круговая (пунктирная линия) орбиты спутника; A — апогей эллиптической орбиты, а C — ее перигей. Расстояние OA от центра Земли до точки A является апогейным расстоянием; оно равно r_1 . Расстояние OC — перигейное расстояние; обозначим его через r_2 ($r_2 < r_1$). Эксцентриситет орбиты равен

$$\varepsilon = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}. \quad (6.43)$$

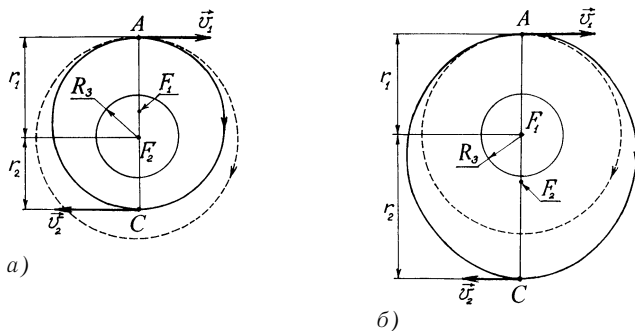


Рис. 6.14

По мере движения спутника по эллиптической орбите от A к C модуль его скорости возрастает от v_1 до v_2 . Согласно (6.1)

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Подставляя сюда (6.43), находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (6.44)$$

Подчеркнем, что результат (6.44) есть не что иное, как прямое **следствие закона сохранения момента импульса**, согласно которому $mr_1v_1 = mr_2v_2$ (см. соотношение (6.2)).

По мере движения спутника от C к A модуль его скорости уменьшается от v_2 до v_1 . Движение спутника по эллиптической орбите демонстрирует **взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий спутника при сохранении его механической энергии**. Обозначим через $\Delta K(A \rightarrow C)$ и $\Delta U(A \rightarrow C)$ изменения при перемещении от A к C кинетической и потенциальной энергий, соответственно:

$$\Delta K(A \rightarrow C) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}; \quad (1^*)$$

$$\begin{aligned} \Delta U(A \rightarrow C) + \left(-G\frac{Mm}{r_2}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_1}\right) &= \\ &= g_0mR_3^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \end{aligned} \quad (2^*)$$

Так как механическая энергия спутника сохраняется, то, следовательно,

$$\Delta K(A \rightarrow C) + \Delta U(A \rightarrow C) = 0. \quad (3^*)$$

Возрастание кинетической энергии спутника на пути от A к C компенсируется уменьшением потенциальной энергии. Подставляя (1*) и (2*) в (3*), получаем

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + g_0 m R_3^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Таким образом,

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g_0 R_3^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (6.45)$$

Учитывая, что $v_2^2 - v_1^2 = v_1^2 \left(\frac{v_2}{v_1} + 1 \right) \left(\frac{v_2}{v_1} - 1 \right)$ и воспользовавшись соотношением (6.44), можем переписать (6.45) в виде

$$v_1^2 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) = 2g_0 R_3^2 \frac{1}{r_1}. \quad (6.46)$$

Предположим теперь, что благодаря кратковременному действию ускоряющего двигателя спутник, обращавшийся вокруг Земли по круговой орбите радиусом r_1 со скоростью $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_1}}$, получил *приращение* к модулю скорости. Получив это приращение в точке A орбиты, спутник тут же перешел с круговой орбиты на эллиптическую (рис. 6.14, б). В отличие от случая, рассмотренного на рисунке 6.14, а, точка A теперь становится не апогеем, а перигеем эллиптической орбиты. Обозначим через v_1 ($v_1 = v_0 + \Delta v$) и v_2 модули скорости спутника соответственно в точках A и C эллиптической орбиты, а через r_1 и r_2 — соответственно перигейное и апогейное расстояния ($r_1 < r_2$). Теперь при перемещении от A к C скорость спутника уменьшается ($v_2 < v_1$), зато увеличивается его потенциальная энергия. При этом по-прежнему выполняется соотношение (6.44). Соотношение (6.45) преобразуется к виду

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g_0 R_3^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

откуда опять-таки получается, как нетрудно убедиться, выражение (6.46).

Итак, на круговой орбите радиусом r_1 спутник имеет определяемую радиусом орбиты скорость: $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_1}}$. Если модуль ско-

рости увеличить, то круговая орбита плавно переходит в эллиптическую, для которой r_1 — перигейное расстояние. Если же модуль скорости уменьшился, то круговая орбита переходит в эллиптическую, для которой r_1 — апогейное расстояние.



Обратим внимание на то, что уменьшать или увеличивать модуль v_0 скорости на круговой орбите следует в ограниченных пределах. Уменьшать v_0 можно лишь до тех пор, пока перигейное расстояние r_2 не окажется равным R_3 (точнее сказать, равным $R_3 + H$, где H — высота относительно плотного атмосферного слоя). При $r_2 < R_3 + H$ движущийся по эллиптической орбите спутник должен прекратить свое существование в плотном слое атмосферы. Увеличение v_0 может привести к превращению замкнутой траектории (эллипса) в незамкнутую (параболу), двигаясь по которой, спутник покинет околоземное пространство. Об этом мы поговорим подробнее немного позднее.

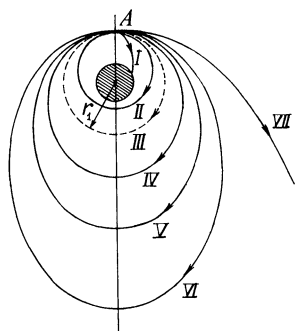


Рис. 6.15

На рисунке 6.15 различные траектории движения спутника отмечены числами от I до VII. Переход от одной траектории к другой в порядке возрастания чисел происходит при постепенном увеличении скорости v_0 спутника в точке A, находящейся на расстоянии r_1 от центра Земли. Пунктирная траектория III — круговая траектория (в этом случае скорость спутника рав-

на $\sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_1}}$, причем не только в точке A,

но и в остальных точках траектории).

Траектория VII — параболическая траектория (спутник преодолевает земное тяготение и фактически перестает быть спутником Земли).

Задача 1. Спутник движется по круговой орбите радиусом $r_1 = 3R_3$. Благодаря кратковременному включению ускоряющего двигателя модуль скорости спутника увеличился в $n = 1,2$ раза, и спутник перешел на эллиптическую орбиту. Требуется найти наибольшее удаление спутника от центра Земли (апогейное расстояние) и модуль его скорости в апогее.

□ Обозначим апогейное расстояние и скорость в апогее через r_2 и v_2 , соответственно, и воспользуемся системой уравнений (6.44) и (6.46) при

$$r_1 = 3R_3, \quad v_1 = nv_0 = n\sqrt{\frac{g_0R_3}{3}} \quad (4^*)$$

($v_0 = -\sqrt{\frac{g_0R_3}{3}}$ — скорость спутника на исходной круговой орбите радиусом $3R_3$). Соотношение (6.46) после подстановки в него (4*) принимает вид:

$$\frac{1}{3}n^2g_0R_3\left(1 + \frac{3R_3}{r_2}\right) = \frac{2}{3}g_0R_3,$$

откуда следует, что

$$1 + \frac{3R_3}{r_2} = \frac{2}{n^2}.$$

Таким образом,

$$r_2 = \frac{3n^2R_3}{2-n^2}; \quad (5^*)$$

$$v_2 = \frac{v_1r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{g_0R_3}{3}}(2-n^2) = V_1\frac{2-n^2}{\sqrt{3}}. \quad (6^*)$$

Так как $n = 1,2$, то, следовательно,

$$r_2 = 7,7R_3 = 49\,000 \text{ км}, \quad v_2 = 0,32V_1 = 2,5 \text{ км/с}. \quad \blacksquare$$

Задача 2. Требуется, используя результат предыдущей задачи, найти скорость, приобретаемую спутником, движущимся по круговой орбите радиусом $3R_3$, перейдет на параболическую траекторию и перестанет быть спутником Земли.

□ Из (5*) следует, что r_2 обращается в бесконечность (а эллиптическая орбита спутника превращается в параболическую траекторию) при $n = \sqrt{2}$. Так как скорость спутника на круговой орбите радиусом $3R_3$ равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{g_0R_3^2}{3R_3}} = \sqrt{\frac{g_0R_3}{3}},$$

то скорость v' , обеспечивающая переход на параболическую траекторию, имеет вид:

$$v' = \sqrt{2}v_0 = \sqrt{\frac{2g_0R_3}{3}} = V_1\sqrt{\frac{2}{3}},$$


где $V_1 = 7,9$ км/с — первая космическая скорость. Итак, $v' = 6,5$ км/с. ■

Задача 3. Чему равна скорость, приобретая которую, спутник, движущийся по круговой орбите радиусом, очень близким к R_3 , перейдет на параболическую траекторию.

□ Если $r_1 = R_3$, то вместо (4*) будем иметь $v_1 = nv_0 = n\sqrt{g_0R_3}$ и вместо (5*) получим $r_2 = \frac{n^2R_3}{2-n^2}$. Как видим, r_2 обращается в бес-

конечность при $n = \sqrt{2}$. Следовательно, искомая скорость равна

$$v'' = \sqrt{2}v_0 = \sqrt{2g_0R_3} = \sqrt{2}V_1 = 11,2 \text{ км.} \quad (7*) \quad \blacksquare$$

 Обратим внимание: чтобы покинуть околоземное пространство, спутник на круговой орбите радиусом R_3 со скоростью $v_0 = 7,9$ км/с должен достичь скорости, равной $\sqrt{2}v_0 = \sqrt{2} \cdot 7,9$ км/с = 11,2 км/с. Если же спутник двигался по круговой траектории радиусом $3R_3$, имея скорость $v_0 = \sqrt{\frac{g_0R_3}{3}} = 4,6$ км/с, то для перехода на параболическую траекторию он должен достичь скорости, равной $\sqrt{2}v_0 = \sqrt{2} \cdot 4,6$ км/с = 6,5 км/с. Можно сформулировать правило: *если спутник имеет на круговой орбите скорость v_0 , то для перехода с данной орбиты на параболическую траекторию он должен достичь скорости, равной $\sqrt{2}v_0$.* Чем больше радиус круговой траектории, тем меньше скорость, требуемая для перехода на параболическую траекторию.

6.4.3. Переходы между круговыми орбитами

Переход на более далекую орбиту. Космический корабль движется по круговой орбите радиусом r_1 , имея скорость $v_0 = \sqrt{\frac{g_0R_3^2}{r_1}}$.

Чтобы корабль перешел с этой орбиты на более далекую круговую орбиту радиусом r_2 , на которой его скорость будет равна

$v_3 = \sqrt{\frac{g_0R_3^2}{r_2}}$, он должен перейти сначала на эллиптическую орбиту

с перигейным расстоянием r_1 и апогейным расстоянием r_2 , а затем

уже с нее перейти на нужную круговую орбиту. На рисунке 6.16, а, показаны пунктиром исходная и конечная круговые орбиты, а сплошной кривой изображена часть эллиптической орбиты, по которой и совершается рассматриваемый переход, при этом корабль перемещается из А в С. Чтобы перигейное и апогейное расстояния эллиптической орбиты равнялись соответственно r_1 и r_2 (иначе говоря, чтобы эллиптическая орбита сопрягалась в точках А и С с соответствующими круговыми орбитами), корабль должен иметь в точках А и С скорости v_1 и v_2 соответственно, удовлетворяющие вместе с расстояниями r_1 и r_2 системе уравнений (6.44) и (6.46):

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \frac{r_1}{r_2}; \\ v_1^2 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) &= 2g_0 \frac{R_3^2}{r_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

Чтобы иметь в точке А эллиптической орбиты скорость v_1 , корабль, двигавшийся по малой круговой орбите со скоростью v_0 , должен получить в данной точке приращение модуля скорости, равное

$$\Delta v_A = v_1 - v_0. \quad (2^*)$$

Чтобы в точке С перейти на большую круговую орбиту, корабль должен получить в этой точке приращение модуля скорости, равное

$$\Delta v_C = v_3 - v_2. \quad (3^*)$$

Таким образом, корабль должен кратковременно включать ускоряющий двигатель в точке А и точке С. Обращаясь по малой

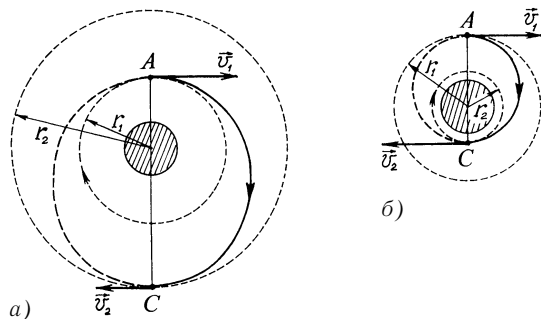


Рис. 6.16

круговой орбите, корабль имел скорость, которая по модулю была меньше скорости v_1 . При движении от A к C скорость корабля уменьшается до значения v_2 , которое оказывается меньше скорости v_3 , соответствующей движению по большой круговой орбите. Поэтому и приходится *дважды включать ускоряющий двигатель*.

Используя систему уравнений (1*) и соотношения (2*) и (3*), найдем Δv_A и Δv_C , учитывая, что $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_1}}$ и $v_3 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_2}}$. Второе уравнение из (1*) преобразуем к виду: $v_1^2 = \frac{2g_0 R_3^2 r_2}{r_1(r_1 + r_2)}$. Следовательно,

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}. \quad (6.47)$$

С учетом (2*) находим отсюда:

$$\Delta v_A = v_0 \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right). \quad (6.48)$$

Используя первое уравнение из (1*) и (6.47), получим

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2} = v_0 \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{2r_2}{r_1 + r_2} = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_2}} \cdot \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}.$$

Итак,

$$v_2 = v_3 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}. \quad (6.49)$$

С учетом (3*) находим отсюда:

$$\Delta v_C = v_3 \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right). \quad (6.50)$$

Переход на более близкую орбиту. На рисунке 6.16, б показан переход космического корабля с большой круговой орбиты радиусом r_1 (где он имел скорость $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_1}}$) на меньшую круговую орбиту радиусом r_2 (где он имеет скорость $v_3 = \sqrt{\frac{g_0 R_3^2}{r_2}}$). Как

и в предыдущем случае, переход совершается по эллиптической орбите от точки A до точки C . Но теперь r_1 — апогейное расстояние, а r_2 — перигейное расстояние. В точке A благодаря кратковременному включению тормозного двигателя модуль скорости корабля уменьшается на $\Delta v_A = v_0 - v_1$, где v_1 — модуль скорости в точке A эллиптической орбиты. При перемещении по этой орбите от A до C модуль скорости корабля возрастает до значения v_2 , которое оказывается больше v_3 . Поэтому в точке C еще раз включается тормозной двигатель, и модуль скорости корабля уменьшается на $\Delta v_C = v_2 - v_3$. Итак, благодаря *двукратному включению тормозного двигателя* корабль сначала переходит с большой круговой орбиты на эллиптическую, а затем с нее на малую круговую орбиту.

Скорости v_1 и v_2 описываются уже известными нам соотношениями — (6.47) и (6.49), соответственно. Следовательно,

$$\Delta v_A = v_0 - v_1 = v_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \right); \quad (6.51)$$

$$\Delta v_C = v_2 - v_3 = v_3 \left(\sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} - 1 \right). \quad (6.52)$$

Переход с более далекой на более близкую к Земле круговую орбиту может быть использован, очевидно, для *возвращения космического корабля на Землю*. В этом случае малая круговая орбита должна иметь радиус $r_2 = R_3 + H$, где H — некоторая высота в достаточно плотных слоях атмосферы. По выходе на круговую орбиту радиусом r_2 включают дополнительное торможение и используют парашют.

6.4.4. Вторая космическая скорость

Минимальная скорость, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно ее покинуло, двигаясь по незамкнутой траектории, называется *второй космической скоростью*. При такой начальной скорости тело преодолевает притяжение Земли и становится спутником Солнца. Вторая космическая скорость V_2 в $\sqrt{2}$ раза больше первой космической скорости:

$$V_2 = V_1 \sqrt{2} = 11,2 \text{ км/с}. \quad (6.53)$$

Соотношение (6.53) было получено ранее — в результате решения задачи 3 в п. 6.4.2. Напомним ход рассуждений. Скорость

тела, обращающегося вокруг Земли по круговой орбите радиусом R_3 (т. е. в непосредственной близости от земной поверхности), есть $\sqrt{g_0 R_3} = V_1$. Если бы в некоторой точке A этой орбиты модуль скорости тела вдруг увеличился на некоторое значение Δv , то круговая орбита сменилась бы эллиптической с перигеем в точке A . Чем больше Δv , тем больше апогейное расстояние эллиптической орбиты (тем дальше от Земли оказывается ее апогей). Как было показано в упомянутой задаче, при $\Delta v = (\sqrt{2} - 1)V_1$ эллиптическая траектория разрывается, превращаясь в незамкнутую траекторию, представляющую собой *параболу* (заметим, что фокусом этой параболы является центр Земли). Таким образом, при начальной скорости в точке A , равной $\sqrt{2} V_1$, тело полетит не по окружности, а по параболе; оно преодолевает притяжение Земли и в конечном счете станет спутником Солнца, движущимся вокруг него по некоторой эллиптической орбите. Следовательно, $\sqrt{2} V_1$ есть вторая космическая скорость.

Вторую космическую скорость можно найти также и в общем случае (не отталкиваясь от движения тела по круговой околоземной орбите радиусом R_3). Достаточно воспользоваться законом сохранения механической энергии, согласно которому по мере удаления тела от центра Земли *кинетическая энергия тела превращается в потенциальную энергию гравитационного взаимодействия с Землей*. При удалении тела с поверхности Земли на расстояние r от ее центра приращение потенциальной энергии тела равно

$$\Delta U(R_3 \rightarrow r) = G \frac{Mm}{R_3} - G \frac{Mm}{r}.$$

При удалении тела на бесконечно большое расстояние следует положить здесь $r = \infty$; получим

$$\Delta U(R_3 \rightarrow \infty) = G \frac{Mm}{R_3}.$$

Энергия $G \frac{Mm}{R_3}$ — это потенциальная энергия, в которую превратилась кинетическая энергия тела $\frac{mv^2}{2}$:

$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{R_3}. \quad (1^*)$$

Здесь v — скорость, которую надо сообщить телу на Земле, чтобы оно, находясь под действием силы притяжения Земли, смогло уда-

литься по какой-либо траектории на бесконечно большое расстояние. По определению, это как раз и есть вторая космическая скорость V_2 . Поэтому можно переписать (1*) в виде

$$\frac{mV_2^2}{2} = G \frac{Mm}{R_3}. \quad (2^*)$$

Сокращая m и учитывая, что $\frac{GM}{R_3^2} = g_0$, получаем из (2*):

$$V_2^2 = 2g_0R_3.$$

Следовательно,

$$V_2 = \sqrt{2g_0R_3} = \sqrt{2} V_1.$$

6.4.5. Третья космическая скорость

Третья космическая скорость есть минимальная скорость, которую надо сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно смогло преодолеть не только силу притяжения Земли, но также и силу притяжения Солнца и покинуть пределы Солнечной системы.

Обозначим через r_0 радиус орбиты Земли, а через m и M_C массы тела и Солнца соответственно. Приращение $\Delta U(r_0 \rightarrow \infty)$ потенциальной энергии тела при его удалении в бесконечность от точки, находящейся на расстоянии r_0 от центра Солнца, равно

$\Delta U(r_0 \rightarrow \infty) = G \frac{mM_C}{r_0}$. Согласно закону сохранения механической

энергии, такое приращение потенциальной энергии происходит за счет начальной кинетической энергии тела $\frac{mv_\infty^2}{2}$, где v_∞ — рас-

сматриваемая относительно Солнца скорость тела, обладая которой в точке на расстоянии r_0 от центра Солнца, тело способно удаляться в бесконечность. Таким образом,

$$G \frac{mM_C}{r_0} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

откуда следует, что

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_C}{r_0}} = 42,2 \text{ км/с} \quad (6.54)$$

(мы учли, что $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ м).

Тело массой m находится не просто в какой-то точке на расстоянии r_0 от центра Солнца. Находясь на этом расстоянии от Солнца, эта точка (т. е. Земля) движется по круговой орбите вокруг Солнца со скоростью v_0 относительно Солнца, которую можно найти, согласно второму закону Ньютона, из соотношения

$$F = M_3 a, \text{ где } M_3 \text{ — масса Земли, } a = \frac{v_0^2}{r_0}$$

ускорение Земли, $F = G \frac{M_3 M_C}{r_0^2}$ — сила гравитационного взаимодействия Солнца и Земли. Учитывая это, перепишем соотношение $F = M_3 a$ в виде:

$$G \frac{M_3 M_C}{r_0^2} = M_3 \frac{v_0^2}{r_0},$$

откуда следует, что

$$v_0 = \sqrt{\frac{G M_C}{r_0}} = 29,8 \text{ км/с.} \quad (6.55)$$

Итак, находясь на Земле, тело движется вместе с ней со скоростью $v_0 = 29,8$ км/с относительно Солнца (вращением Земли вокруг своей оси в данной ситуации можно пренебречь). Если запустить тело в направлении вектора скорости движения Земли по ее орбите, то для преодоления притяжения Солнца телу потребуется скорость относительно Земли, равная

$$v'_\infty = v_\infty - v_0 = (\sqrt{2} - 1)v_0 = 12,4 \text{ км/с.} \quad (6.56)$$



Обратим внимание на слова «для преодоления притяжения Солнца». Следует принять во внимание, что телу надо преодолеть не только притяжение Солнца

(для чего нужно сообщить ему кинетическую энергию $\frac{m(v'_\infty)^2}{2}$), но, кроме того, надо преодолеть также притяжение Земли, для чего потребуется дополнительная кинетическая энергия, равная $\frac{mV_2^2}{2}$, где V_2 — вторая космическая скорость. Значит, телу нужно сообщить в систе-

ме отсчета, связанной с Землей, кинетическую энергию $\frac{m(v_\infty')^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}$; следовательно, искомая третья космическая скорость равна

$$V_3 = \sqrt{(v_\infty')^2 + V_2^2} = \sqrt{(12,4)^2 + (11,2)^2} \text{ км/с} = 16,7 \text{ км/с.} \quad (6.57)$$

Задача. Какую скорость относительно Земли надо было бы сообщить телу, разгоняя его в направлении навстречу вектору скорости движения Земли по ее орбите, чтобы тело смогло покинуть пределы Солнечной системы?

Скорость V'_3 относительно Земли, при которой тело преодолет и притяжение Земли, и притяжение Солнца, равна в данном случае

$$V'_3 = \sqrt{(v_\infty + v_0)^2 + V_2^2} = 72,8 \text{ км/с.} \quad \blacksquare$$

6.4.6. Начальные скорости и время полета космических зондов, запускаемых к планетам Солнечной системы



Космическими зондами называют автоматические межпланетные станции, запускаемые с целью изучения Солнечной системы (Солнца, Луны, планет и их спутников, пояса астероидов, комет, межпланетного пространства). Зонды оснащены аппаратурой для наблюдения и фотографирования небесных объектов и для передачи информации на Землю о поверхности объекта, его атмосфере и магнитосфере, характере вращения вокруг своей оси. Информация передается на Землю из космоса, поскольку возвращение космического зонда на Землю не предусматривается. Зонды имеют также маломощные реактивные двигатели для корректировки траектории по команде с Земли. Электроэнергию для питания аппаратуры зонда при работе на сравнительно небольших расстояниях (в окрестностях Меркурия, Венеры, Марса) дают панели солнечных батарей, составленные из пластинок кремния или арсенида галлия. Пластины поглощают световую энергию солнечного излучения и преобразуют ее в электрическую энергию. Если космический зонд трудится достаточно далеко от Солнца (в окрестностях планет-гигантов), то он вынужден нести на себе собственный источник энергии — своеобразную миниатюрную атомную электростанцию.

В п. 6.5.1 мы познакомимся в качестве примера с путешествием зонда «Вояджер-2» (США) по маршруту Земля—Юпитер—Сатурн—Уран—Нептун, длившимся 12 лет (с 1977 г. по 1989 г.).

Найдем начальную скорость космического зонда, запускаемого, например, к Юпитеру. Обозначим через v_1 и v_2 модули, соответственно, начальной и конечной скорости зонда, рассматриваемые в системе отсчета, связанной с Солнцем. Зонд должен описать половину эллиптической орбиты с фокусом в центре Солнца, перигелием A в центре Земли, афелием B в центре Юпитера (см. траекторию I на рисунке 6.17). Перигелийное расстояние (радиус орбиты Земли) есть $r_0 = 1$ а. е. $= 1,5 \cdot 10^{11}$ м, афелийное расстояние (радиус орбиты Юпитера) есть $r_{Ю} = 5,2$ а. е. Скорости v_1 и v_2 можно найти, решая систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \frac{r_0}{r_{Ю}}; \\ v_1^2 \left(1 + \frac{r_0}{r_{Ю}}\right) &= \frac{2GM_C}{r_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

($M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца), которая, как легко сообразить, аналогична системе уравнений (6.44) и (6.46). Здесь, вместо $g_0 R_3^2 = GM_3$ (M_3 — масса Земли), используется GM_C (ведь теперь в фокусе эллиптической траектории находится не центр Земли, а центр Солнца; поэтому, заметим, вместо терминов «перигей» и «апогей», используются термины «перигелий» и «афелий»). Решая систему уравнений (6.58), получим соотношение, аналогичное соотношению (6.47):

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{2r_{Ю}}{r_0 + r_{Ю}}}. \quad (6.59)$$

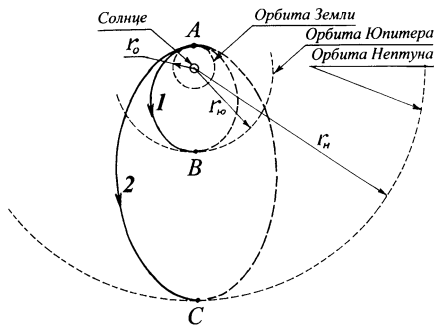


Рис. 6.17

Здесь $v_0 = \sqrt{\frac{GM_C}{r_0}} = 29,8$ км/с — скорость Земли на орбите.

Из (6.59) находим, что начальная скорость космического зонда, запускаемого к Юпитеру, в системе отсчета, связанной с Солнцем, равна

$$v_1 = 38,6 \text{ км/с}, \quad (6.60, \text{ а})$$

а конечная скорость зонда (скорость вблизи Юпитера) равна

$$v_2 = \frac{v_1 r_0}{r_{Ю}} = 7,4 \text{ км/с}. \quad (6.60, \text{ б})$$

Для перехода от начальной скорости v_1 зонда *относительно Солнца* к его начальной скорости *относительно Земли* используем те же рассуждения, что и в п. 6.4.5. Полагая, что зонд запускают в направлении вектора скорости движения Земли по орбите, представим, по аналогии с (6.56):

$$v_1' = v_1 - v_0 = (38,6 - 29,8) \text{ км/с} = 8,8 \text{ км/с}.$$

Учитывая необходимость преодоления зондом земного притяжения, получаем, по аналогии с (6.57), следующий результат для начальной скорости зонда в системе отсчета, связанной с Землей:

$$v_1'' = \sqrt{(v_1')^2 + V_2^2} = \sqrt{(v_1 - v_0)^2 + V_2^2} = 14,14 \text{ км/с}, \quad (6.61)$$

где $V_2 = 11,2$ км/с — вторая космическая скорость.

Предположим теперь, что космический зонд запускают к Нептуну (см. траекторию 2 на рисунке 6.17). Из (6.59), где вместо $r_{Ю}$ следует использовать радиус орбиты Нептуна $r_H = 30,1$ а. е., находим начальную и конечную скорости зонда относительно Солнца:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2r_H}{r_0 + r_H}} = 41,5 \text{ км/с}, \quad v_2 = \frac{v_1 r_0}{r_H} = 1,4 \text{ км/с}. \quad (6.62)$$

Начальную скорость зонда относительно Земли найдем, используя (6.61) и учитывая (6.62):

$$v_1'' = \sqrt{(v_1 - v_0)^2 + V_2^2} = 16,2 \text{ км/с}. \quad (6.63)$$

Оценим время t_H , в течение которого космический зонд долетит от Земли до Нептуна, двигаясь по траектории 2 от перигелия A к афелию C . Напомним в связи с этим соотношение (6.31), согласно

которому период обращения некоторого тела вокруг Солнца по круговой орбите радиусом r равен

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{M_C G}}. \quad (6.64)$$

Летающий от Земли к Нептуну зонд движется не по круговой, а по эллиптической траектории. Время T полного оборота по этой траектории вокруг Солнца определяется соотношением, аналогичным (6.64), где вместо r следует подставить большую полуось эллипса a :


$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{M_C G}}. \quad (6.65)$$

В случае полета зонда от Земли к Нептуну

$$a = \frac{r_0 + r_N}{2} = 15,5 \text{ а. е.}$$

Учитывая это и воспользовавшись соотношением (6.65), находим искомое время полета зонда от Земли до Нептуна:

$$t_N = \frac{1}{2} T \approx 10^9 \text{ с} \approx 32 \text{ года}. \quad (6.66)$$

 Обратим внимание: этот полет есть не что иное, как *свободное падение* зонда под действием силы тяготения Солнца. Через 32 года в результате такого падения зонд оказывается на расстоянии 30 а. е. от Земли.

6.5. ГРАВИТАЦИОННЫЙ МАНЕВР

6.5.1. Полеты к планетам с использованием гравитационных маневров

Мы выяснили, что полет космического зонда с Земли к Нептуну, происходящий под действием только силы притяжения Солнца, должен был бы длиться 32 года. При этом необходимо было бы разогнать зонд до скорости 16,2 км/с относительно Земли. Речь идет о полете в отсутствие гравитационных воздействий на зонд со стороны других планет, которые во время этого полета предполагаются находящимися в положениях, достаточно удаленных от летящего зонда. Если, однако, указанных гравитационных воздействий на зонд не избегать, а напротив, *воспользоваться ими* (для чего нужно дождаться соответствующего взаимного рас-

положения планет), то в этом случае можно существенно уменьшить время полета до Нептуна и, кроме того, можно снизить необходимую начальную скорость зонда.

Летающий под действием силы притяжения Солнца космический зонд дополнительно испытывает действие силы притяжения со стороны планеты, мимо которой он пролетает. В результате зонд совершает так называемый *гравитационный маневр* вблизи планеты. Как природное явление гравитационный маневр был впервые обнаружен еще в XIX веке — когда астрономы поняли, что наблюдаемое изменение орбит комет происходит благодаря гравитационному взаимодействию комет и массивного Юпитера.

При гравитационном маневре космического зонда происходят два явления: *изменение модуля скорости зонда*, рассматриваемой в системе отсчета, связанной с Солнцем, и *изменение направления скорости* зонда. Каждое из этих явлений мы отдельно обсудим немного позднее.

В качестве примера отметим происходивший в последней четверти XX столетия (с 1977 по 1989 годы) полет космического зонда «Вояджер-2» от Земли к Нептуну по траектории, проходившей вблизи планет-гигантов (Юпитера, Сатурна, Урана). Во время этого полета зонд совершал гравитационные маневры вблизи каждой из упомянутых планет. Использование гравитационных маневров позволило не только сократить время достижения конечной цели (полет от Земли до Нептуна длился не 32 года, а всего лишь 12 лет), но и исследовать по пути различные небесные тела.



На рис. 6.18 показана траектория полета «Вояджера-2». Этот космический зонд массой более 800 кг был запущен к Юпитеру 20 августа 1977 г. с космодрома Космического центра имени Кеннеди (США) ракетой «Титан 3Е-Центавр». В июле 1979 г. «Вояджер-2» сблизил-

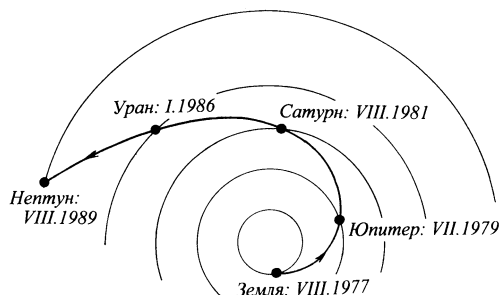


Рис. 6.18

ся с Юпитером до расстояния 71 тыс. км от поверхности планеты, облетел планету и, совершив гравитационный маневр, отправился к Сатурну, к которому приблизился на расстояние 101 тыс. км в августе 1981 г. В результате гравитационных маневров зонд был направлен сначала к Урану (приблизился к планете до расстояния 107 тыс. км в январе 1986 г.), а затем к Нептуну. С Нептуном «Вояджер-2» сблизился до расстояния 48 тыс. км в августе 1989 г. — через 12 лет после старта с Земли. Передачей на Землю изображений Тритона (спутника Нептуна) с его вулканическими извержениями жидкого азота завершилась планетная миссия «Вояджера-2», увенчанная открытием 8 новых спутников Сатурна, 10 новых спутников Урана, 6 новых спутников Нептуна. Затем «Вояджер-2» направился к границе Солнечной системы и далее. В марте 2005 г. он посылал на Землю информацию с расстояния 76 а.е. = 11,4 млрд. км от Земли, т. е. с расстояния, вдвое превышающего среднее расстояние Плутона от Солнца. Прием сигналов с борта «Вояджера-2» будет продолжаться до 2030 года. После этого связь с ним прекратится. Но ньютоновский закон всемирного тяготения позволяет с уверенностью предсказать, что в 20 319 году «Вояджер-2» пройдет на расстоянии в 3,5 световых года от звезды Проксима Центавра, а в 296 036 году он приблизится к Сириусу на расстояние в 47,4 световых года...

Поскольку в начале полета «Вояджер-2» направлялся к Юпитеру, ракета-носитель сообщила ему, в соответствии с (6.61), начальную скорость 14,14 км/с. Заметим, что, если бы зонд запускался сразу к Нептуну, ему следовало бы сообщить, в соответствии с (6.62), начальную скорость 16,2 км/с. На рисунке 6.19 показано, как изменилась в зависимости от расстояния до Солнца скорость «Вояджера-2», рассматриваемая в системе отсчета, связанной с Солнцем (так называемая *гелиоцентрическая скорость*). Точка *A* на графике — начальная гелиоцентрическая скорость; она равна 38,6 м/с (см. (6.60, *a*)), что соответствует скорости 14,14 км/с относительно Земли. Точка *B* — гелиоцентрическая скорость при сближении зонда с Юпитером: она равна 7,4 км/с (см. (6.60, *b*)). Гравитационный маневр вблизи Юпитера привел к возрастанию гелиоцентрической скорости от 7,4 км/с до 22 км/с (скачок на графике от *B* к *C*). Скачок скорости от *D* к *E* (от 18,1 км/с до 24 км/с) — результат гравитационного маневра вблизи Сатурна. Еще один скачок скорости (от 21,5 км/с до 23 км/с) — результат гравитационного маневра вблизи Урана. В итоге средняя гелиоцентрическая скорость движения зонда на пути от Земли до Нептуна оказывается значительной — около 20 км/с, что приводит к сокращению длительности всего полета.

Если бы не было гравитационных маневров, то гелиоцентрическая скорость зонда $v(r)$ падала бы с расстоянием r от Солнца по

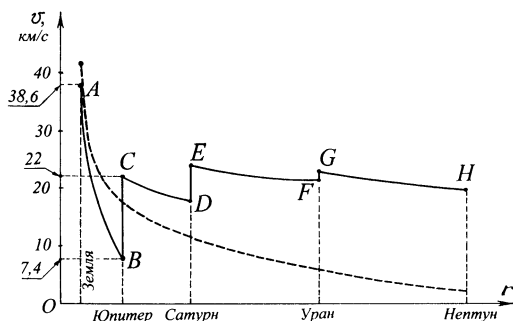


Рис. 6.19

пунктирной кривой на рисунке 6.19, которая следует из закона сохранения механической энергии (6.45):

$$v^2(r) - v_1^2 = 2GM_C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad (6.67)$$

где $v_1 = 41,5$ км/с (в соответствии с (6.62)). В этом случае скорость зонда вблизи Нептуна равнялась бы всего лишь 1,4 км/с.

Иногда говорят, что полет зонда от Земли к Нептуну — это череда разгоняющих зонд падений под действием силы притяжения сначала Юпитера, затем Сатурна, затем Урана и, наконец, Нептуна. Как если бы тело скользило по гладкой поверхности с профилем в виде череды провалов и горок (см. рисунок 6.20, а). Однако такая аналогия неправомерна. Зонд на пути от Земли до Нептуна все время «поднимается на горку», преодолевая силу притяжения Солнца; его потенциальная энергия растет с расстоянием от Солнца по закону

$U(r) = -\frac{GM_C}{r}$. И согласно закону

сохранения механической энергии, кинетическая энергия зонда должна постепенно уменьшаться (в соответствии с (6.67)). Падения зонда на промежуточные планеты (Юпитер, Сатурн, Уран), конечно, происходят, но они выглядят на графике $U(r)$ как относительно узкие «ущелья» шири-

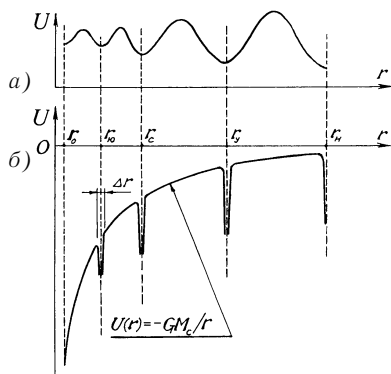


Рис. 6.20

ной порядка $\Delta r \approx \frac{r'M'}{M_C}$, где r' и M' — соответственно радиус орбиты и масса планеты (см. рисунок 6.20, б; ширина «ущелей» Δr изображена здесь чрезмерно большой). Эти падения не могут обеспечить приращения кинетической энергии зонда уже потому, что из каждого «ущелья» нужно всякий раз «выбираться». Приращения кинетической энергии зонда происходят не за счет падений на планеты, а за счет гравитационных маневров зонда вблизи планет, что, разумеется, никак не связано с картиной подъема на горки и скатывания с них, изображенной на рисунке 6.20, а.

6.5.2. Изменение направления скорости зонда при гравитационном маневре



На рисунке 6.21 изображена траектория зонда, пролетающего вблизи планеты, центр O которой находится на *прицельном расстоянии* l от прямой KN , фиксирующей направление начальной скорости зонда \vec{v}_0 вдали от планеты (скорость зонда рассматривается в системе отсчета, связанной с планетой).

Траектория зонда имеет вид гиперболы с асимптотами KN и $K'N'$. Асимптота $K'N'$ фиксирует направление конечной скорости зонда \vec{v}'_0 вдали от планеты; $\vec{v}'_0 = v_0$. Угол $N'CN$ (обозначим его через θ) есть угол между векторами \vec{v}_0 и \vec{v}'_0 , т. е. *угол отклонения* зонда, обусловленного притяжением планеты.

Гипербола представляет собой геометрическое место точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек O и O' (*фокусов* гиперболы) постоянна. Один из фокусов гиперболы совпадает с центром O планеты, а другой (фокус O') лежит на прямой OCO' , причем $CO' = CO$ (см. рисунок). Легко видеть, что $OO' = \frac{OB}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2l}{\cos \frac{\theta}{2}}$.

$$OO' = \frac{OB}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2l}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

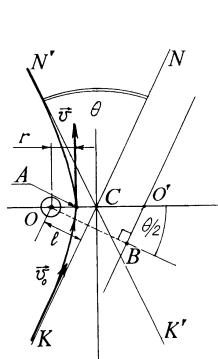


Рис. 6.20

Точка A на рисунке — ближайшая к планете точка траектории зонда; обозначим OA через r . Разность расстояний до точки A от фокусов гиперболы O и O' есть $AO' - AO = OO' - 2AO = \frac{2l}{\cos \frac{\theta}{2}} - 2r$. Разность

расстояний от фокусов O и O' до бесконечно удаленной от планеты точки траектории зонда равна, как нетрудно сообразить, $O'B = 2l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. Согласно свойству гиперболы, обе указанные выше разности равны друг другу; следовательно,

$$l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{l}{\cos \frac{\theta}{2}} - r.$$

Перенесем r в левую часть равенства, возведем обе части в квадрат и учтем, что $\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$. В результате получим:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{l^2 - r^2}{2lr}. \quad (1^*)$$

Обозначим через \vec{v} скорость зонда в точке A . Используя закон сохранения момента импульса, запишем

$$mlv_0 = mrv, \quad (2^*)$$

где m — масса зонда (это есть не что иное, как второй закон Кеплера для случая, когда под действием силы тяготения тело движется по гиперболической траектории). Согласно закону сохранения механической энергии,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = G \frac{Mm}{r}, \quad (3^*)$$

где M — масса планеты. Из (2*) и (3*) получаем:

$$\frac{l^2 - r^2}{r} = 2 \frac{GM}{v_0^2}.$$

Подставляя этот результат в (1*), находим:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{lv_0^2}. \quad (6.68)$$

Эта формула определяет угол отклонения зонда вблизи планеты в зависимости от прицельного расстояния и скорости зонда относительно планеты на достаточно большом расстоянии от нее.

6.5.3. Изменение модуля скорости зонда при гравитационном маневре.

С точки зрения наблюдателя, находящегося на планете, гравитационный маневр зонда приводит к изменению его скорости, но не изменяет в конечном итоге модуля скорости. Начальная скорость \vec{v}_0 и конечная скорость \vec{v}'_0 , представленные на рисунке 6.21, имеют одинаковые модули. Если же рассматривать скорость зонда относительно Солнца, то обнаружится различие модулей скорости $\vec{v}_{\text{СБЛ}}$ зонда при сближении с планетой и скорости $\vec{v}_{\text{УД}}$ зонда при удалении от нее. Изменение модулей гелиоцентрических скоростей зонда при гравитационном маневре объясняется *наличием*

у самой планеты некоторой скорости, с какой она движется по орбите (обозначим скорость планеты через \vec{V}).

На рисунке 6.22, а представлена картина гравитационного маневра зонда, наблюдаемая из системы отсчета, связанной с планетой, а на рисунке 6.22, б гравитационный маневр показан из системы отсчета, связанной с Солнцем. Поскольку

$$\vec{v}_{\text{сбл}} = \vec{V} + \vec{v}_0 \text{ и } \vec{v}_{\text{уд}} = \vec{V} + \vec{v}_0', \quad (6.69)$$

то ясно, что $v_{\text{сбл}} \neq v_{\text{уд}}$. В целом схема векторов скоростей дана на рисунке 6.22, в. В данном случае гравитационный маневр приводит к возрастанию модуля гелиоцентрической скорости зонда: $v_{\text{уд}} > v_{\text{сбл}}$. Обращаясь к гравитационному маневру «Вояджера-2» вблизи Юпитера, отметим, что $V = 13$ км/с (скорость Юпитера на его орбите), $v_{\text{сбл}} = 7,4$ км/с, $v_{\text{уд}} = 22$ км/с, $v_{\text{уд}} - v_{\text{сбл}} = (22 - 7,4)$ км/с = 14,6 км/с.

Если бы планета, показанная на рисунке 6.22, б, двигалась в обратном направлении, то, как нетрудно сообразить, модуль гелиоцентрической скорости зонда при совершении изображенного на рисунке 6.22, а гравитационного маневра должен был не увеличиться, а *уменьшиться* (см. схему скоростей на рисунке 6.22, з).

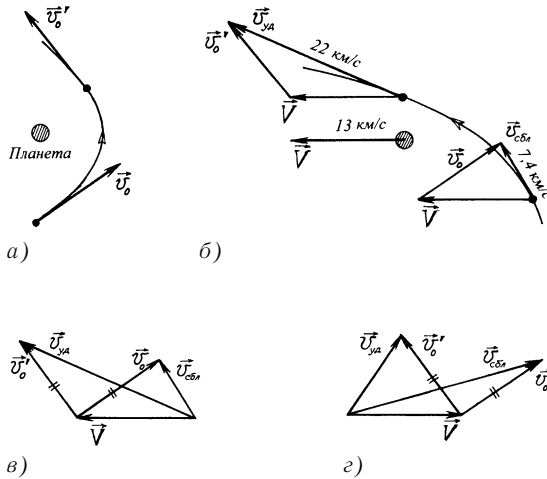


Рис. 6.22

Увеличение (или уменьшение) модуля гелиоцентрической скорости зонда при гравитационном маневре связано с происходящим между зондом и планетой обменом кинетическими энергиями и импульсами. С точки зрения законов механики, аналогом ускоряющегося гравитационного маневра может служить абсолютно упругое соударение двух шаров, когда легкий шар налетает на движущийся навстречу массивный шар и отскакивает от него. В соответствии с принятыми в п. 5.4.3 обозначениями, будем полагать, что \vec{v}_1 и \vec{v}_2 — соответственно скорости легкого (массой m) и тяжелого (массой M) шаров перед соударением, а \vec{u}_1 и \vec{u}_2 — их скорости после соударения (рис. 6.23). Проекция на x -ось вектора скорости легкого шара после соударения имеет согласно (5.36), вид

$$u_{1x} = \frac{\left(\frac{m}{M} - 1\right)v_{1x} + 2v_{2x}}{\frac{m}{M} + 1}. \quad (1^*)$$

Если $M \gg m$, то можно пренебречь отношением $\frac{m}{M}$ по сравнению с единицей и переписать (1*) в виде $u_{1x} = -v_{1x} + 2v_{2x}$, или, если перейти к модулям скоростей, в виде

$$u_1 = v_1 + 2v_2. \quad (2^*)$$

Итак, модуль скорости отскочившего легкого шара оказывается в данном случае больше модуля скорости шара перед соударением на величину $2v_2$, т. е. на удвоенную скорость тяжелого шара. Если бы тяжелый шар до соударения удалялся от налетающего на него легкого шара, то в этом случае модуль отскочившего легкого шара уменьшился бы на величину $2v_2$.

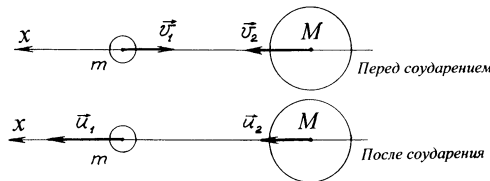


Рис. 6.23

Аналогию между гравитационным маневром и упругим соударением шаров демонстрируют для *ускоряющего* маневра рисунок 6.24, а, а для *замед-*

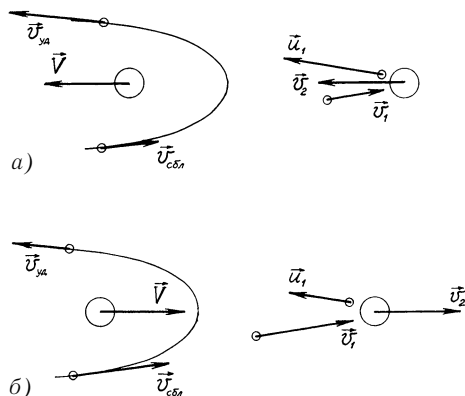


Рис. 6.24

ляющего маневра — рисунок 6.24, б. Гравитационный маневр представляется своеобразным «гравитационным столкновением» планеты с летящим ей навстречу космическим зондом. Отличие состоит только в том, что столкновение шаров происходит почти мгновенно, тогда как «гравитационное столкновение» длится, пока зонд движется вблизи планеты. Но в обоих случаях действуют одни и те же законы механики.

6.6. ЧТО ЕСТЬ ТЯГОТЕНИЕ?

6.6.1. «Гипотез не измышляю...»

Какова *природа* гравитации, или, иначе говоря, тяготения? Почему тела притягиваются друг к другу? Каким образом гравитационное воздействие передается от одного тела к другому? Эти вопросы приобрели особую остроту после появления ньютоновских «Начал» с изложением закона всемирного тяготения. Сформировались две принципиальных концепции — дальнодействия и близкодействия.

Предположим, два объекта находятся на некотором расстоянии друг от друга. Концепция дальнодействия исходит из того, что воздействие одного объекта на другой передается мгновенно и непосредственно, без каких-либо посредников, через пустоту. Концепция близкодействия исходит из того, что воздействие одного объекта на другой передается не мгновенно, а через какие-то

промежуточные «звенья», через посредников, контактирующих с объектами.

Рене Декарт пытался объяснить тяготение с позиции концепции близкодействия. Он полагал, что Вселенная заполнена вихрями особой «небесной материи». Вихри вокруг Солнца увлекают за собой планеты, а вихри вокруг планет увлекают за собой их спутников. Сила тяготения передается от одних тел к другим через вихревые движения «небесной материи». Позднее возникла «теория истечений», согласно которой пространство во всех направлениях пронизано потоками некоей материи. Два расположенных рядом тела загораживают одно от другого эти потоки и в результате потоки с внешней стороны подталкивают тела друг к другу.

Уже в своих «Началах» Ньютон полностью развенчал «теорию вихрей» Декарта. В то же время сам он воздержался от попыток объяснить природу тяготения. Ньютон писал: *«Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам...»*

Сторонникам Декарта (их называют картезианцами), исповедовавшим концепцию близкодействия, противостояли сторонники Ньютона, фактически исповедовавшие концепцию далекодействия. В те времена центром ньютонианства был Лондон, а картезианства — Париж. Общее настроение умов выразил Вольтер в «Философских письмах», изданных в 1731 году: «Когда француз приезжает в Лондон, то находит здесь большую разницу как в философии, так и во всем другом. В Париже, из которого он приехал, думают, что мир наполнен материей, здесь же ему говорят, что он пуст; в Париже вы видите, что вся Вселенная состоит из вихрей тонкой материи, в Лондоне же вы не видите ничего подобного; во Франции давление Луны производит приливы и отливы моря, в Англии же говорят, что это само море тяготеет к Луне... Картезианцы говорят, что все совершается вследствие давления, и этого мы не понимаем; здесь же ньютонианцы говорят, что все совершается вследствие притяжения, что все совершается вследствие притяжения, которое мы понимаем не лучше...»

После того, как «теория вихрей» Декарта, а затем и наивная «теория истечения» канули в вечность, в науке на целое столетие (вплоть до середины XIX века) утвердилась в отношении природы тяготения концепция далекодействия. Однако было бы несправедливо связывать ее с именем Ньютона. Напомним, что, заканчивая свой знаменитый труд, ученый писал: *«Теперь следовало бы кое-*

что сказать о некоем тончайшем эфире, проникающем все тела и в них содержащемся, коего силою тела взаимно притягиваются...» Оставаясь верным своим принципам, Ньютон тут же замечает: «Но это не может быть изложено вкратце, к тому же нет и достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и показаны». Показательно также утверждение Ньютона, сделанное им в письме к Бентли: «Тяготение должно вызываться агентом, постоянно действующим по определенным законам».

В середине XIX века трудами Майкла Фарадея и Джеймса Клерка Максвелла был обнаружен «агент», обеспечивающий взаимодействие между телами на расстоянии. Правда, речь шла не о гравитационном, а об электромагнитном взаимодействии. В физике появилось новое понятие — *силовое поле*, которому предстояло стать одним из фундаментальных физических понятий. Об электрическом и магнитном полях мы подробно поговорим в третьей книге, а пока отметим, что в современной физике в качестве «агента», вызывающего тяготение», рассматривается *гравитационное поле*, или, иначе говоря, *поле тяготения*.

Появление в физической науке сначала электромагнитного, а затем также и гравитационного поля означало окончательную победу концепции близкоддействия, хотя, разумеется, и не в том виде, как ее представлял Декарт.

6.6.2. Гравитационное поле (поле тяготения)

Гравитационное взаимодействие осуществляется через гравитационное поле (поле тяготения). Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства — оно *создает в пространстве гравитационное поле*, которое проявляется в том, что действует на помещенное в него другое тело с определенной силой (силой тяготения). Когда говорят, что тело массой t движется под действием силы тяготения со стороны тела массой M , то это означает, что масса t движется в гравитационном поле, создаваемом массой M . Параграф 6.4. («Движение под действием силы тяготения») мог бы иметь название «*Движение в гравитационном поле*». Рассматривавшиеся в § 6.5 гравитационные маневры космического зонда — это изменения направления и модуля его гелиоцентрической скорости в гравитационных полях планет.

Определяемое законом всемирного тяготения гравитационное взаимодействие двух материальных точек (массами m_1 и m_2) надо

рассматривать следующим образом. Масса m_1 , фиксируемая радиусом-вектором \vec{r}_1 , создает вокруг себя гравитационное поле, которое действует на массу m_2 , фиксируемую радиусом-вектором \vec{r}_2 , с силой (см. (6.6)):

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1}{r^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) m_2, \quad (6.70, a)$$

где $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

В свою очередь, масса m_2 создает вокруг себя гравитационное поле, которое действует на массу m_1 с силой

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) m_1. \quad (6.70, б)$$

Поместим материальную точку массой M в начало координат и обозначим через \vec{r} радиус-вектор материальной точки массой m . Сила, с какой гравитационное поле, создаваемое массой M , действует на массу m , имеет вид

$$\vec{F} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} m. \quad (6.71)$$

(Это соотношение следует из (6.70, а), если там заменить m_1 , m_2 , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 на M , m , 0 , \vec{r} , соответственно.) Гравитационное поле массы M можно характеризовать в точке пространства, фиксируемой радиусом-вектором \vec{r} , двумя величинами — векторной величиной, называемой *напряженностью поля*, и скалярной величиной, называемой *потенциалом поля*. Напряженность $\vec{\kappa}$ поля определяют как *силу, с которой поле действует на единичную массу, помещенную в точку наблюдения, задаваемую вектором \vec{r}* . Согласно (6.71),

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M \vec{r}}{r^3}. \quad (6.72)$$

Напряженность гравитационного поля выражают в тех же единицах, что и ускорение. Потенциал поля φ определяют как *потенциальную энергию, какую имеет единичная масса, помещенная в точку наблюдения*. Если полагать потенциальную энергию (а значит, и потенциал поля) равными нулю на бесконечности, то, согласно (6.23),

$$\varphi = \frac{U}{m} = -G \frac{M}{r}. \quad (6.73)$$

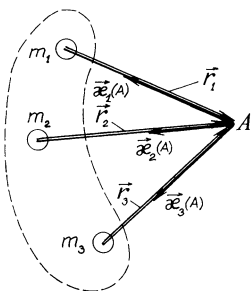


Рис. 6.25

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ радиусы-векторы, проведенные от указанных масс в точку A (рис. 6.25). Используя принцип суперпозиции и учитывая (6.72) и (6.73), представим $\vec{a}(A)$ и $\varphi(A)$ в виде:

$$\vec{a}(A) = \vec{a}_1(A) + \vec{a}_2(A) + \vec{a}_3(A) = -G \frac{M_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - G \frac{M_2}{r_2^3} \vec{r}_2 - G \frac{M_3}{r_3^3} \vec{r}_3; \quad (6.74)$$

$$\varphi(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A) + \varphi_3(A) = -G \frac{M_1}{r_1} - G \frac{M_2}{r_2} - G \frac{M_3}{r_3}. \quad (6.75)$$

Пользуясь принципом суперпозиции, можно, в принципе, найти для любой заданной точки пространства напряженность и потенциал гравитационного поля, создаваемого телом произвольной формы. Для этого надо мысленно разбить тело на бесконечное число малых элементов (точечных масс) и рассмотреть систему, состоящую из этих элементов. Примем без вывода, что напряженность и потенциал поля, создаваемого телом в виде шара, описываются соотношениями (6.72) и (6.73), где M — масса шара, а \vec{r} — радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку наблюдения.

Отметим интересную особенность гравитационного поля — его способность проникать сквозь любые материалы. Если от электромагнитного поля можно защититься с помощью металлического экрана, то от гравитационного поля защиты нет.

Итак, переносчиком гравитационного взаимодействия является гравитационное поле. Впрочем, такое объяснение природы тяготения выглядит формально и оставляет без ответа вопрос «Что заставляет тела притягиваться друг к другу? Ответ на этот воп-

рос дал в первой четверти XX века Альберт Эйнштейн, создав *общую теорию относительности*. Но прежде чем говорить об этом, познакомимся с принципом эквивалентности, лежащим в основе общей теории относительности.

6.6.3. Принцип эквивалентности

Отметим, что масса, которая входит во второй закон Ньютона, является мерой инертных свойств тела, она определяет *способность тела приобретать ускорение под действием данной силы*. Эту массу естественно назвать *инертной массой* (обозначим ее через m_i). Если \vec{F} — сила тяготения, то, согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_i}, \quad (1^*)$$

где \vec{g} — ускорение свободного падения. Массу, определяющую *способность тела притягиваться к другому телу* (обозначим ее через m_g), естественно назвать *гравитационной массой* (или *тяжелой массой*). Именно она входит в выражение для напряженности $\vec{\kappa}$ гравитационного поля, создаваемого телом, которое действует на данную массу с силой тяготения \vec{F} :

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{F}}{m_g}. \quad (2^*)$$

Из (2*) следует, что $\vec{F} = m_g \vec{\kappa}$. Подставив \vec{F} в (1*), получим

$$\vec{g} = \frac{m_g}{m_i} \vec{\kappa}. \quad (6.76)$$

Выразим это соотношение в словесной форме:

$$\text{Ускорение} = \frac{\text{Гравитационная масса}}{\text{Инертная масса}} \times \text{Напряженность поля тяготения}.$$

Инертность и способность к гравитационному взаимодействию — разные свойства материи. Однако, как показали опыты, *гравитационная масса и инертная масса — одна и та же физическая величина*:

$$m_g = m_i. \quad (6.77)$$

(В 1971 году В. Б. Брагинский и В. И. Панов экспериментально подтвердили результат (6.77) с точностью до 10^{-12} .)

Из (6.77) следует, во-первых, что масса тела должна рассматриваться как мера не только инертных, но также и гравитационных свойств тела. Во-вторых, из (6.77) следует, что напряженность поля тяготения есть не что иное, как ускорение свободного падения в данном поле:

$$\vec{a} = \vec{g}. \quad (6.78)$$

Это позволило Эйнштейну прийти к принципиально важному выводу о том, что *силу тяготения можно рассматривать как силу инерции* в соответствующим образом подобранной неинерциальной системе отсчета. Если мы находимся, например, внутри закрытой кабины лифта, то принципиально не сможем установить, чем именно вызвано действие на тело силы $m\vec{g}$ — тем ли, что кабина движется с ускорением $-\vec{g}$ (и тогда сила $m\vec{g}$ есть сила инерции), или тем, что неподвижная кабина просто находится вблизи поверхности Земли (и тогда сила $m\vec{g}$ есть сила тяготения). В этом и заключается сущность **принципа эквивалентности**. Кратко его можно сформулировать следующим образом:

Тяготение в каждой точке пространства эквивалентно соответствующим образом подобранному ускорению системы отсчета.

Согласно принципу эквивалентности, движение тела в неинерциальной системе отсчета эквивалентно его движению в инерциальной системе, совершающему под действием некоторого дополнительного («эквивалентного») поля тяготения. Используемые в приведенной выше формулировке принципа слова «в точке пространства» (можно было бы сказать также «в ограниченной области пространства», например, в кабине лифта или космического корабля) имеют принципиальное значение, указывая на *локальный характер* принципа эквивалентности. Дело в том, что принцип эквивалентности отнюдь не означает тождественности сил инерции и «истинных» сил тяготения. Напряженность «истинных» полей тяготения, создаваемых телами, стремятся к нулю по мере удаления от этих тел. А напряженности полей тяготения, эквивалентных силам инерции, этому условию не удовлетворяют. Так, в случае вращающейся системы отсчета поле тяготения, эквивалентное центробежной силе инерции, будет неограниченно возрастать по мере удаления от оси вращения (напомним соотношение (2.47)).

6.6.4. Объяснение природы гравитации в общей теории относительности



Предполагая более подробно остановиться на этом вопросе в пятой книге, ограничимся здесь общими замечаниями.

Опирающаяся на принцип эквивалентности общая теория относительности Эйнштейна дала тяготению неожиданное объяснение. Оказалось, что роль того «агента», о котором говорил в свое время Ньютон и который Декарт связывал с таинственными вихрями, принадлежит свойствам самого пространства, его геометрии.

В пустом пространстве тело движется по инерции прямолинейно и равномерно потому, что в таком пространстве кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая линия. Представим себе теперь, что в пространстве появилась значительная масса. Теперь тело движется под действием силы тяготения, обусловленной гравитационным полем, создаваемым этой массой. Оказывается, можно в данном случае рассуждать так: масса изменяет структуру самого пространства, она как бы *искривляет* его, делая кратчайшим расстоянием между двумя точками уже не прямую, а кривую линию, и тело движется по инерции вдоль этой кривой линии, обнаруживая тем самым притяжение к массе, вызвавшей искривление пространства. Обратим внимание на то, что тяготение — не причина искривления пространства, это и есть само искривление пространства (точнее сказать, пространства-времени). Кривизна пространства определяется кривизной его геодезических линий. С точки зрения общей теории относительности, *движение тела в поле тяготения следует рассматривать как движение по инерции вдоль искривленной геодезической линии*. Поистине инерция и тяжесть оказываются двумя сторонами одной и той же медали.

Искривление пространства тем сильнее, чем больше вызывающая это искривление масса: следовательно, свойства пространства и времени должны рассматриваться *в тесной связи с материей*. В классической механике время рассматривалось независимо от пространства, пространство и время рассматривалось независимо от материи. Существовали абсолютное время и абсолютное пространство, в которые была «погружена» материя. Теория относительности потребовала решительно пересмотреть такую точку зрения. На первом этапе (на этапе специальной теории относительности) она продемонстрировала *взаимосвязь пространства и времени*, показала, что нет времени вне пространства. На втором этапе (на этапе общей теории относительности) была показана *взаимосвязь пространства-времени с материей*. В сильных полях тяготения не только происходит искривление геодезических линий, но и замедляется ход времени.

Общая теория относительности Эйнштейна является современной (релятивистской) теорией тяготения: ее можно назвать также единой теорией пространства, времени и тяготения. Не отменяя классической (нерелятивистской) теории тяготения Ньютона, она выявила границы применимости последней. Классическая теория тяготения и принцип суперпозиции гравитационных полей справедливы в случае, когда поля являются достаточно слабыми и движения в этих полях происходят с относительно малыми скоростями, т. е. когда выполнены условия:

$$|\varphi| \ll c^2, \quad v \ll c, \quad (6.79)$$

где c — скорость света.

В заключение заметим, что в классической механике законы динамики и закон всемирного тяготения, по сути, не связаны между собой, могут рассматриваться *независимо один от другого*. Поэтому здесь было бы уместно различать инертную и гравитационную массы. Тот факт, что они оказываются эквивалентными, является для классической механики не более, как «случайным совпадением». Общая теория относительности показала, что эквивалентность инертной и гравитационной масс является принципиальным фактом, указывающим на *глубокую связь, существующую между законами динамики и законом всемирного тяготения*. Можно сказать, что, с точки зрения общей теории относительности, само происхождение законов динамики Ньютона тесно связано с существованием тяготения.

Тем самым подтверждается основополагающий, фундаментальный характер открытий Ньютона в области механики. Создатель общей теории относительности отмечал: *«Не следует думать, что великое творение Ньютона можно реально ниспровергнуть какой-либо группой теорией. Его ясные и всеобъемлющие идеи навсегда сохраняют свое уникальное значение, как фундамента, на котором построено здание современной физики.»*

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

6.1. Во сколько раз гелиоцентрическая скорость планеты Меркурий в перигелии больше, чем в афелии? Эксцентриситет орбиты Меркурия $\varepsilon = 0,21$.

6.2. Радиус орбиты планеты Марс равен 1,52 а.е. Скольким земным годам соответствует марсианский год?

6.3. С какой силой Солнце притягивает к себе Землю? Массы Солнца и Земли $2 \cdot 10^{30}$ кг и $6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус земной орбиты 1 а. е. = $1,5 \cdot 10^{11}$ м.

6.4. С какой силой притягивает к себе Землю искусственный спутник массой 100 кг, обращающийся вокруг Земли по круговой орбите радиусом $4 \cdot 10^6$ м? Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг.

6.5. С какой силой спутник Земли, рассмотренный в предыдущей задаче, притягивает к себе

Солнце? Масса Солнца $2 \cdot 10^{30}$ кг.

6.6. Расстояние от Земли до Юпитера в момент их противостояния в 1630 раз больше, чем от Земли до Луны. Масса Юпитера в 26 500 раз больше массы Луны. Сравните силы притяжения Земли к Луне и к Юпитеру.

6.7. На какой высоте ускорение свободного падения в $n = 1,5$ раза меньше его значения на уровне моря? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

6.8. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите на высоте, равной радиусу Земли. Во сколько раз ускорение свободного падения спутника меньше, чем ускорение свободного падения на уровне моря?

6.9. Определите массу Земли, если известно, что период обращения искусственного спутника

по круговой орбите радиусом $r = 7370$ км равен $T = 104$ мин.

6.10. Найдите ускорение свободного падения у поверхности шарообразной планеты радиусом R , если плотность вещества планеты есть ρ .

6.11. Масса Земли больше массы Луны в $\theta = 81$ раз. Радиус орбиты Луны $r_{\text{Л}} = 384\,000$ км. Найдите расстояние от центра Луны до точки прямой, соединяющей центры Земли и Луны, в которой тело будет притягиваться к Земле и Луне с одинаковой силой.

6.12. Радиус орбиты Каллисто (спутника Юпитера) $r_{\text{К}} = 1,88$ млн км, период его обращения вокруг Юпитера $T = 16,7$ сут, радиус Юпитера $r_{\text{Ю}} = 71\,400$ км. Располагая этими данными, найдите среднюю плотность вещества Юпитера и ускорение свободного падения g в точке на расстоянии $r_{\text{Ю}}$ от центра планеты.

Подсказка. Для определения массы Юпитера воспользуйтесь соотношением (6.31).

6.13. Спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой ровно в два раза больше радиуса Земли. Период обращения спутника $T = 238$ мин 40 с. Располагая этими данными, определите среднюю плотность вещества Земли.

6.14. Две планеты A и B имеют одинаковые средние плотности. Первая космическая скорость для планеты A равна V . Найдите первую космическую скорость для планеты B ,

если известно, что ее радиус вдвое больше радиуса планеты A .

6.15. Радиус и масса планеты Марс равны, соответственно, $0,53 R_{\text{З}}$ и $0,11 M_{\text{З}}$, где $R_{\text{З}}$ и $M_{\text{З}}$ — радиус и масса Земли. Выразите среднюю плотность $\rho_{\text{М}}$, ускорение свободного падения $g_{\text{М}}$ и первую космическую скорость $V_{\text{М}}$ для Марса через соответствующие величины ρ , g_0 , V_1 для Земли. Найдите значения искомых величин, учитывая, что $\rho = 5500$ кг/м³, $g_0 = 9,8$ м/с², $V_1 = 7,9$ км/с.

6.16. Учítывая, что радиус Марса составляет $0,53$ радиуса Земли, а масса — $0,11$ массы Земли, найдите, во сколько раз вес тела на Земле больше веса того же тела на Марсе.

6.17. Найдите для Юпитера: а) первую космическую скорость, б) вторую космическую скорость. Масса Юпитера $M_{\text{Ю}} = 1,9 \cdot 10^{27}$ кг, радиус Юпитера $R_{\text{Ю}} = 71\,400$ км.

6.18. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Период вращения планеты вокруг своей оси равен T . Чему равна плотность вещества планеты?

Подсказка. Учтите, что вес тела на экваторе меньше силы тяготения на величину ta , где t и a — масса и центростремительное ускорение тела, соответственно.

6.19. Исходя из того, что средняя плотность Земли $\rho = 5500$ кг/м³, а ее период вращения вокруг

своей оси $T = 24$ ч, найдите, на сколько процентов меньше, чем на полюсе, вес тела на экваторе.

6.20. Найдите среднюю плотность вещества планеты, у которой на экваторе пружинные весы показывают вес тела на $n\% = 2\%$ меньше, чем на полюсе. Период вращения планеты вокруг своей оси $T = 12$ ч.

6.21. Чему был бы равен период вращения Земли вокруг своей оси, если бы она вращалась настолько быстро, что тела на экваторе были бы невесомыми? Масса и радиус Земли равны $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг и $R_3 = 6370$ км, соответственно.

6.22. Один и тот же камень бросают под некоторым углом с некоторой начальной скоростью на Земле и на Луне. Во сколько раз дальше, чем на Земле, улетит камень, брошенный на Луне? Масса и радиус Луны равны $7,34 \cdot 10^{22}$ кг и 1740 км соответственно.

6.23. На какой высоте над Землей ускорение свободного падения такое же, как и у поверхности Марса? Масса Земли в $\theta = 9,1$ раза больше массы Марса, радиус Земли $R_3 = 6370$ км, радиус Марса $R_M = 3400$ км.

6.24. Радиус планеты A в 2 раза меньше радиуса планеты B : $R_A = \frac{1}{2} R_B$. Известно, что ускорения свободного падения у поверхности обеих планет одинаковы. Найдите отношения масс планет $\frac{M_A}{M_B}$ и их средних плотностей $\frac{\rho_B}{\rho_A}$.

6.25. С какой начальной гелиоцентрической скоростью v_1 должен отправиться с Земли космический зонд, чтобы достичь орбиты Сатурна? Какое время T займет такое путешествие? Радиус орбиты Сатурна $r_C = 9,54$ а.е., радиус орбиты Земли $r_3 = 1$ а.е., масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

6.26. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в $n = 3$ раза больше радиуса Земли. Чему равна вторая космическая скорость для такого спутника? Иначе говоря, до какого значения должен возрасти модуль скорости спутника, чтобы он смог преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

6.27. Какую работу надо совершить над спутником массой $m = 200$ кг, чтобы сначала вывести его на круговую орбиту вокруг Земли радиусом, который в 3 раза больше радиуса Земли, а затем заставить преодолеть притяжение Земли? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

Подсказка. Работа по выведению спутника на круговую орбиту равна, согласно (6.42) $\frac{5}{6} mg_0 R_3$; находясь на орбите спутнику понадобится сообщить дополнительную кинетическую энергию, чтобы он приобрел скорость v , определенную в предыдущей задаче.

6.28. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $r_1 = 7400$ км. На сколько надо увеличить модуль его

скорости, чтобы он перешел на эллиптическую орбиту с эксцентриситетом $\epsilon = 0,6$? Радиус земли $R_3 = 6370$ км.

Подсказка. Вспомните о соотношении (6.46).

6.29. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $r_1 = 7400$ км. На короткое время был включен тормозной двигатель, и модуль скорости спутника уменьшился на $\Delta v = 0,2$ км/с. Найдите перигейное расстояние эллиптической орбиты спутника, на которую он перейдет вследствие кратковременного включения тормозного двигателя. Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

Подсказка. Следует воспользоваться соотношением (6.46), где $v_1 = v_0 - \Delta v$ (v_0 – скорость спутника на круговой орбите радиусом r_1).

6.30. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $r_1 = 6800$ км. С помощью кратковременно включающихся ускоряющих двигателей его переводят на круговую орбиту радиусом $r_2 = 7500$ км. Какое приращение Δv_1 модуля скорости спутника переведет его на нужную эллиптическую траекторию (траекторию с апогейным расстоянием, равным r_2)? Какое приращение Δv_2 модуля скорости спутника, реализованное на противоположной стороне Земли, переведет спутник с эллиптической траектории на круговую орбиту радиусом r_2 ? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

Подсказка. Вспомните соотношения (6.48) и (6.50).

6.31. Найдите для Луны: а) первую космическую скорость, б) вторую космическую скорость. Масса и радиус Луны равны $7,34 \cdot 10^{22}$ кг и 1730 км соответственно.

6.32. Космический корабль обращается вокруг Луны по круговой орбите, радиус которой равен четырем радиусам Луны. На сколько нужно увеличить с помощью реактивного двигателя модуль скорости корабля, чтобы он преодолел притяжение Луны и получил возможность вернуться на Землю? Масса и радиус Луны равны $7,34 \cdot 10^{22}$ кг и 1730 км, соответственно.

Подсказка. Из определяемой в соответствии с законом сохранения механической энергии скорости, которая требуется для преодоления лунного притяжения, надо вычесть скорость корабля на круговой орбите.

6.33. Космический корабль обращается вокруг Луны по круговой орбите, радиус которой равен четырем радиусам Луны. Какую скорость в направлении, противоположном вектору скорости корабля, нужно сообщить кораблю, чтобы он прилунился на противоположной стороне Луны? Масса и радиус Луны равны $M_{\text{Л}} = 7,34 \cdot 10^{22}$ кг и $R_{\text{Л}} = 1730$ км, соответственно.

Подсказка. Надо перевести корабль на эллиптическую траекторию с

$$\text{эксцентриситетом } \epsilon = \frac{4R_{\text{Л}} - R_{\text{Л}}}{4R_{\text{Л}} + R_{\text{Л}}} = \frac{3}{5}.$$

6.34. Космический зонд обращается в плоскости земной орбиты по круговой орбите радиусом $4 \cdot 10^7$ м. Найдите минимальное приращение модуля скорости зонда, которое может быть достаточным для его вылета с данной орбиты за пределы Солнечной системы.

6.35. Чему равна напряженность поля тяготения, создаваемого Солнцем на поверхности Земли? Масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус орбиты Земли $r_3 = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

6.36. Сравните напряженности полей тяготения Солнца и Земли у поверхности Луны. Какая из них больше и во сколько раз? Массы Солнца и Земли равны $2 \cdot 10^{30}$ кг и $6 \cdot 10^{24}$ кг, соответственно. Радиусы земной и лунной орбит равны $1,5 \cdot 10^{11}$ м и $3,84 \cdot 10^8$ м, соответственно.

6.37. Найдите напряженность поля тяготения Сатурна в точке на расстоянии $r = 30\,000$ км от центра планеты. Средняя плотность вещества Сатурна $\rho = 630$ кг/м³. Подсказка. Вспомните соотношение (6.20).

7

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ (ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА)

7.1. ДАВЛЕНИЕ В ГИДРОАЭРОМЕХАНИКЕ

7.1.1. Силы давления твердого тела и силы давления в жидкостях

Рассмотрим следующую ситуацию. Кирпич в форме куба массой m и площадью грани S лежит на горизонтальной поверхности бруска (рис. 7.1). Кирпич действует на брусок с силой \vec{P} , называемой *весом кирпича* и равной в данном случае силе тяжести кирпича $m\vec{g}$. Сила \vec{P} *давит* на брусок, поэтому ее называют *силой давления*. Под действием силы давления (и силы реакции пола, на котором лежит брусок) брусок оказывается *сжатым*.

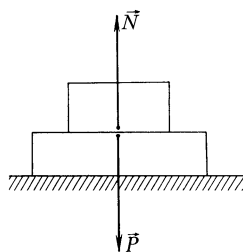


Рис. 7.1

Сжатый (т. е. деформированный) брусок действует, в соответствии с третьим законом Ньютона, на кирпич с силой \vec{N} — *силой упругости*, являющейся по отношению к кирпичу силой реакции опоры. Силы \vec{P} и \vec{N} равны по модулю и направлены *нормально* (т. е. *перпендикулярно*) поверхности соприкосновения кирпича и бруска.

Векторы \vec{P} и \vec{N} на рисунке 7.1. — *равнодействующие* сил давления и реакции опоры, *распределенных по поверхности соприкосновения тел*. В данном случае они распределены по этой поверхности *равномерно* (см. рисунок 7.2, а). В общем случае их распределение может не быть равномерным (когда кирпич неоднороден или имеет, например, форму, показанную на рисунке 7.2, б).

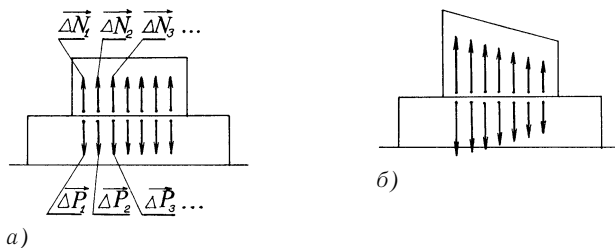


Рис. 7.2

Поясним смысл стрелок на рисунках 7.2 а, б. Предположим, что поверхность соприкосновения кирпича и бруска, имеющая площадь S , разбита на *элементы поверхности* площадью ΔS каждый. На i -й элемент поверхности будет действовать сила давления $\vec{\Delta P}_i$, которую условимся называть *частичной силой давления*. Фигурирующая на рисунке 7.1 сила \vec{P} действует на всю поверхность площадью S ; она равна сумме частных сил давления по всем элементам этой поверхности:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{\Delta P}_i$$

Назовем ее *полной силой давления*. Соответственно можно говорить о частных силах реакции опоры $\vec{\Delta N}_i$ и о полной силе реакции опоры

$$\vec{N} = \sum_i \vec{\Delta N}_i.$$

На рисунках 7.2 стрелками показаны всего лишь пять частных сил давления и реакции опоры. Если силы распределены по поверхности соприкосновения тел равномерно, то $\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P_3 = \dots$ и, соответственно, $\Delta N_1 = \Delta N_2 = \Delta N_3 = \dots$ (см. рисунок 7.2, а). Если силы распределены по поверхности соприкосновения неравномерно, то $\Delta P_1 \neq \Delta P_2 \neq \Delta P_3 \neq \dots$ и соответственно, $\Delta N_1 \neq \Delta N_2 \neq \Delta N_3 \neq \dots$ (см. рисунок 7.2, б).

Обратимся теперь к *жидкости*, которая *покоится*, будучи налита в некий сосуд. Мысленно выделим в жидкости некоторый объем в форме, например, шара (можно было бы использовать форму куба или какую-либо иную) и будем рассматривать *жидкий шар* и *жидкость вне шара*. На рисунке 7.3, а пунктиром показано сечение поверхности соприкосновения жидкого шара с жидкостью вне шара; назовем ее поверхностью Z .

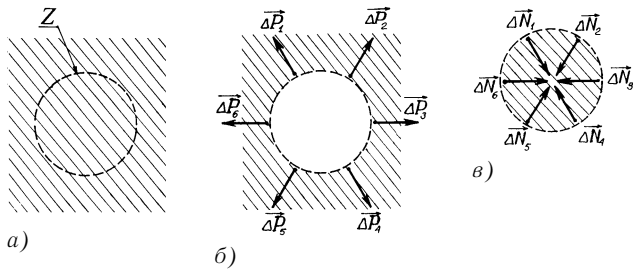


Рис. 7.3

Мысленно уберем жидкий шар. Чтобы при этом жидкость вне шара *продолжала покоиться*, необходимо приложить к ней силу давления, определенным образом распределенную по всей замкнутой поверхности Z (см. стрелки на рисунке 7.3, б, здесь показаны всего лишь шесть частичных сил давления). Подчеркнем, что в каждой точке поверхности раздела жидкости частичная сила давления должна быть *нормальна (перпендикулярна)* поверхности, поскольку любое ее отклонение от нормали привело бы жидкость в движение. Итак, жидкость вне шара оказывается *сжатой* под действием нормально ориентированных по отношению к поверхности Z сил давления, которые в ситуации на рисунке 7.3, б *должны быть приложены к этой поверхности*, чтобы не нарушить покоя жидкости. В исходной ситуации (той, что изображена на рисунке 7.3, а), такие силы давления *действуют на жидкость вне шара со стороны жидкого шара* (жидкости, находящейся внутри шара).

По третьему закону Ньютона, *жидкость вне шара действует на жидкий шар* с соответствующим образом распределенными силами реакции $\Delta \vec{N}$, которые *сжимают* жидкий шар и тоже являются фактически *силами давления* (см. рисунок 7.3, в, понятно, что $\Delta \vec{N}_1 = -\Delta \vec{P}_1$, $\Delta \vec{N}_2 = -\Delta \vec{P}_2$, $\Delta \vec{N}_3 = -\Delta \vec{P}_3$, ...).

Итак, жидкий шар оказывается сжатым под действием сил давления, действующих со стороны жидкости вне шара, а жидкость вне шара испытывает силы давления со стороны жидкого шара. Обратим внимание на то, что силы давления на жидкий шар являются *силами упругости*, действующими со стороны деформированной (сжатой) жидкости вне шара. В свою очередь, силы давления на жидкость вне шара являются *силами упругости*, действующими со стороны деформированного (сжатого) жидкого шара. И те, и другие частичные силы давления распределены по

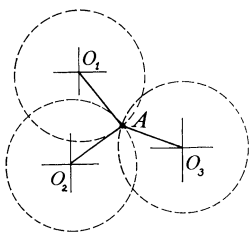


Рис. 7.4

поверхности Z и ориентированы *нормально* к элементам поверхности, на которые они действуют.

Мысленное разбиение жидкости на две взаимодействующие части (вне шара и внутри шара), разумеется, условно и может быть выполнено различным образом (рисунок 7.4). Через одну и ту же точку внутри жидкости могут проходить различные поверхности раздела (например, через точку A на рисунке проходят три разных сферических поверхности раздела). Поскольку частичная сила давления должна быть ориентирована нормально к элементу поверхности, на который она действует, следовательно, ее направление в том или ином месте *внутри* жидкости не является *определенным*. Так, на рисунке 7.4 направления частичных сил давления на элемент поверхности, проходящий через точку A , с равным успехом можно рассматривать как направления O_1A , O_2A , O_3A . Если бы точка A находилась на стенке сосуда или на поверхности твердого тела, погруженного в жидкость, то тогда направление частичной силы давления со стороны жидкости на тело или стенку (равно как и со стороны тела или стенки на жидкость) было бы *определенным* — оно было бы *перпендикулярно* элементу поверхности тела или стенки, проходящему через точку A .

Итак, со стороны сжатой жидкости действуют частичные силы давления как на стенку сосуда и погруженное в жидкость тело, так и на любую часть самой жидкости, которую можно считать «жидким телом», помещенным в жидкость. Таким образом, можно говорить о *силе давления жидкости на стенку или какое-либо твердое тело* и о *силе давления в жидкости* (точнее говоря, *внутри жидкости*). Если *жидкость покоится*, то направление частичной силы давления должно быть *перпендикулярно* элементу поверхности, на который она действует. Внутри жидкости это направление не является определенным вследствие произвольного выбора ориентации элемента поверхности. На границе жидкости со стенкой сосуда или поверхностью твердого тела направление частичной силы давления перпендикулярно к соответствующему элементу поверхности стенки или тела. Коротко говоря, сжатая жидкость давит на стенку или погруженное тело *перпендикулярно их поверхности*; сила же давления внутри жидкости не имеет определенного направления, как если бы речь шла о «давлении во все стороны».



Каковы первопричины, благодаря которым жидкость оказывается сжатой?

Отметим три первопричины: 1) взаимодействие между молекулами жидкости (имеется в виду не гравитационное, а электромагнитное взаимодействие); 2) сила притяжения жидкости Землей; 3) различные внешние силовые воздействия на жидкость (атмосферное давление или, например, действие поршня на жидкость в трубе).

Не следует путать понятия «сжатость жидкости» и «сжимаемость жидкости». Сжимаемость жидкости, как правило, настолько мала, что часто ею пренебрегают, полагают плотность жидкости постоянной по всему ее объему и пользуются *приближением несжимаемой жидкости* (мы поговорим о нем позднее). А вот степень сжатия жидкости может быть весьма значительной. В любом случае она существенна, так что пренебрегать ею нельзя. Для характеристики меры сжатия жидкости в той или иной ее точке вводят физическую величину, называемую *давлением*.

7.1.2. Сила давления на элемент поверхности и давление в точке

Пусть $\Delta\vec{P}$ — сила давления на элемент поверхности площадью ΔS . Будем полагать элемент поверхности достаточно малым, чтобы можно было, во-первых, считать его частью плоскости и, во-вторых, считать, что в пределах данного элемента сила давления распределена равномерно. Напомним, что вектор $\Delta\vec{P}$ перпендикулярен к элементу поверхности. Давление p в любой точке в пределах рассматриваемого элемента поверхности определяют как *отношение модуля ΔP силы давления к площади ΔS элемента поверхности*:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (7.1)$$

Если сила давления \vec{P} равномерно распределена по плоской поверхности площадью S и направлена перпендикулярно к этой поверхности, то в каждой точке поверхности давление p будет описываться формулой

$$p = \frac{P}{S}. \quad (7.2)$$

Заметим, что именно таково давление, возникающее в каждой точке той части поверхности бруска, которая соприкасается с кирпичом, в ситуации, изображенной ранее на рисунке 7.1.

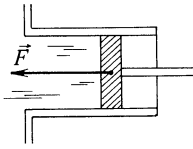


Рис. 7.5

Если на поршень площадью S действовать силой \vec{F} , направленной перпендикулярно к плоскости, по которой поршень соприкасается с жидкостью (рис. 7.5), то в каждой точке поверхности жидкости, прилегающей к поршню, возникнет давление, определяемое формулой, аналогичной формуле (7.2):

$$p = \frac{F}{S}. \quad (7.3)$$



Подчеркнем: понятие давления *относится к точке*. Давление — это локальная физическая величина, характеризующая степень сжатия тела (не только жидкости, но также газа и твердого тела) в той или иной точке на поверхности тела или внутри него.

Примечание

Строго говоря, давление p_A в точке A , находящейся где-то внутри элемента поверхности площадью ΔS , есть предел последовательности отношений $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ при стягивании элемента поверхности в точку A :

$$p_A = \lim_{\Delta S \rightarrow A} \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (7.2^*)$$

С локальными физическими величинами мы уже встречались неоднократно, рассматривая различные «мгновенные величины» (мгновенную скорость, мгновенное ускорение, мгновенную силу и т. д.). Все эти величины являлись *локальными во времени* и определялись через пределы последовательностей отношений тех или иных величин к промежутку времени при стягивании последнего к рассматриваемому моменту времени.

Наряду с локальными во времени существуют физические величины, которые можно назвать *локальными в пространстве*; они рассматриваются в той или иной точке пространства. К ним относится, например, плотность. Чтобы найти плотность некоего вещества в точке A , рассматривают последовательность отношений $\frac{\Delta m}{\Delta V}$, где ΔV — объем, включающий в себя точку A , Δm — масса вещества в этом объеме. Плотность ρ_A в точке A есть предел этой последовательности при стягивании ΔV в точку A :

$$\rho_A = \lim_{\Delta V \rightarrow A} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (7.4)$$

Локальной в пространстве является и физическая величина, называемая давлением.

Сопоставим: сила давления — вектор, давление — скаляр. Как модуль, так и направление силы давления зависят от элемен-

та поверхности, на который действует данная сила, от его площади и ориентации. Значение же давления не зависит от площади элемента поверхности; оно характеризует определенное состояние вещества (в данном случае жидкости) в рассматриваемой точке. *Значение давления в данной точке одинаково для всех ориентаций площадки, на которую действует сила давления.* Итак, давление и сила давления — *разные* физические величины, хотя, заметим, давление определяют, измеряя с помощью соответствующих приборов силу давления.

Для измерения давления в той или иной точке жидкости (или газа) можно воспользоваться *мембранным манометром*. Простейший мембранный манометр показан схематически на рисунке 7.6. Тонкая упругая пластинка (мембрана) 1 герметически закрывает пустую коробку 2. К мембране присоединен указатель 3, который может поворачиваться около O на угол, зависящий от степени прогиба мембраны, помещенной в то или иное место в жидкости. Степень прогиба мембраны зависит от силы давления на нее со стороны жидкости, равной произведению измеряемого давления на площадь мембраны.

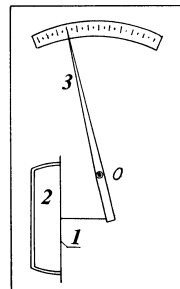


Рис. 7.6

Заметим, что понятия «давление» и «сила давления» иногда отождествляют и говорят, например, что «давление действует перпендикулярно к стенке сосуда». Но давление не может «действовать». Действует сила давления, а давление просто характеризует степень сжатия вещества, обусловленную действием силы давления. Возможно, во избежание путаницы вместо термина «давление» следовало бы употреблять термин «механическое напряжение». Кстати сказать, в применении к твердым телам, подвергнутым тем или иным силовым воздействиям, действительно используется термин «механическое напряжение» или, короче, «напряжение» (см. п. 9.1.5). В гидроаэромеханике же принят термин «давление», и мы, разумеется, будем им пользоваться.

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (7.3) следует, что

$$\text{единица давления} = \frac{\text{единица силы}}{\text{единица площади}}$$

В СИ единица давления есть *ньютон на квадратный метр*; она имеет специальное наименование — *паскаль* (обозначение: Па) в честь фран-

цузского математика и физика Блеза Паскаля.
 $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

Паскаль равен давлению, вызываемому силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м^2 , расположенной перпендикулярно к силе.

Используются также следующие единицы давления: *бар* ($1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$), *физическая атмосфера* ($1 \text{ атм} = = 101\,325 \text{ Па}$), *миллиметр ртутного столба* ($1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ Па}$; $1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.}$).

7.1.3. Закон Паскаля

В XVII столетии Блез Паскаль установил закон, названный впоследствии его именем:

Давление, создаваемое действием поверхностных сил, одинаково во всех точках покоящейся жидкости.

Поверхностные силы — это силы, *внешние* по отношению к рассматриваемому объему жидкости; они приложены извне к поверхности жидкости (отсюда их наименование). Примером могут служить сила давления со стороны поршня, который давит на жидкость, или сила давления пара на поверхность воды в паровом котле.

К замкнутому сосуду произвольной формы, заполненному жидкостью, присоединен цилиндр с поршнем (рис. 7.7). Стремясь вдвинуть поршень в цилиндр, создаем внутри жидкости в сосуде давление, обусловленное поверхностной (внешней) силой. Давление в жидкости, создаваемое силой тяжести жидкости, учитывать сейчас не будем (можно предположить, что давление, создаваемое поршнем, значительно больше силы тяжести жидкости).

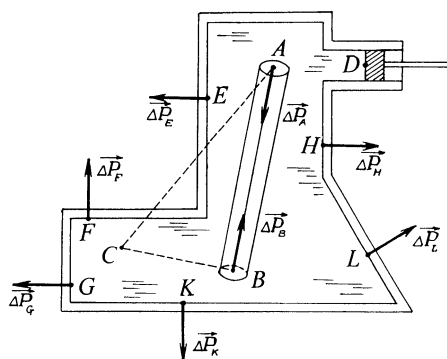


Рис. 7.7

Покажем, что давления в двух произвольно выбранных точках A и B покоящейся жидкости одинаковы, если пренебрегать силой тяжести. Мысленно выделим внутри жидкости узкий цилиндр, осью которого служит отрезок прямой AB , а перпендикулярные к оси основания имеют площадь ΔS . На цилиндр действуют только силы давления, приложенные к его поверхности (коль скоро силой тяжести мы пренебрегли). Будучи частью покоящейся жидкости, цилиндр находится в покое; отсюда заключаем, что проекция суммы всех действующих на него сил на любое направление должна быть равна нулю (это следует из *условия равновесия* (3.10)). Рассмотрим проекции сил на направление оси AB . Понятно, что проекция сил давления, приложенных к боковой поверхности цилиндра, равна нулю, поскольку направления этих сил давления нормальны к боковой поверхности и, значит, к оси AB . Следовательно, должна быть равна нулю сумма проекций на ось AB частичных сил давления $\Delta\vec{P}_A$ и $\Delta\vec{P}_B$, действующих на основания цилиндра:

$$\Delta P_A - \Delta P_B = 0. \quad (1^*)$$

Согласно (7.1), $\Delta P_A = p_A \Delta S$ и $\Delta P_B = p_B \Delta S$, где p_A и p_B — давления жидкости в точках A и B , соответственно. Подставив эти равенства в (1*), приходим к заключению, что $p_A = p_B$. Это и требовалось показать.

Может показаться, что давление в жидкости одинаково не для любой пары точек, а только для тех, у которых соединяющая их прямая целиком проходит внутри жидкости. А вот, скажем, в точках A и C давление может оказаться различным (ведь пунктирная прямая AC на рисунке 7.7 проходит частью вне сосуда с жидкостью). Однако такое опасение несостоятельно. Используя описанный выше прием с жидким цилиндром, убеждаемся, что $p_B = p_C$ (p_C — давление в точке C). А поскольку $p_B = p_A$, следовательно, $p_C = p_A$.

Мы убедились, что в рассматриваемом случае (для покоящейся жидкости, сила тяжести которой не учитывается) *давление во всех точках жидкости должно быть одним и тем же*. Оно равно давлению p в точке D , которое, согласно (7.3), есть $p = \frac{F}{S}$, где S — площадь поршня, F — модуль силы, с какой поршень давит на поверхность жидкости.

Итак, в результате того, что поршень создал в точке D жидкости давление $p = \frac{F}{S}$, такое же давление возникло во всех точках

жидкости. Поэтому **закон Паскаля** можно сформулировать также следующим образом:

Давление, создаваемое действием поверхностных сил, передается без изменения в каждую точку покоящейся жидкости.

Выделим на стенках (а также дне и крышке) сосуда элементы поверхности площадью ΔS , включающие в себя, соответственно, точки E, F, G, H, K, L (см. рис. 7.7). Наличие в этих точках давления $p = \frac{F}{S}$ означает, что со стороны жидкости будут действовать на указанные элементы поверхности частичные силы давления, равные по модулю $\Delta P = p\Delta S = F\frac{\Delta S}{S}$ и направленные везде перпендикулярно поверхности стенки (дна, крышки) сосуда. На рисунке 7.7 эти силы давления показаны стрелками.

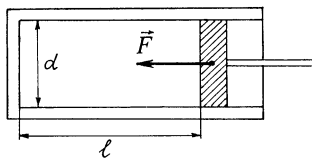


Рис. 7.8

Задача (рис. 7.8). Поршень давит с силой F на жидкость в цилиндре диаметром d . Расстояние от основания цилиндра до поршня равно l . Требуется найти модуль полной силы давления на боковые стенки и основание цилиндра. Силу тяжести жидкости не учитывать.

□ Поршень создает в каждой точке жидкости, заполняющей пространство цилиндра, давление $p = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}}$. Искомая полная сила давления P складывается из сил давления на боковую поверхность ($p\pi dl$) и на основание цилиндра $p\frac{\pi d^2}{4}$. Следовательно,

$$P = p\left(\pi dl + \frac{\pi d^2}{4}\right) = F\left(\frac{4l}{d} + 1\right). \quad \blacksquare$$

7.1.4. Гидростатическое давление

Не будем пренебрегать силой тяжести жидкости. Рассмотрим, как влияет учет этой силы на распределение давления в жидкости плотностью ρ . При этом можно отвлечься от поверхностных сил; важно лишь, чтобы находящаяся в поле тяготения

Земли жидкость пребывала в состоянии покоя. В роли поверхностных сил могут выступать сила давления поршня на жидкость, сила давления пара в котле, сила атмосферного давления на свободную поверхность жидкости. Сейчас это несущественно, поэтому определенности ради выберем последний случай — жидкость находится в покое в открытом сосуде.

Рассмотрим две точки A и B , произвольно выбранные в одной и той же горизонтальной плоскости, и мысленно выделим узкий жидкий цилиндр с осью AB и основаниями площадью ΔS каждое (рис. 7.9, a). На цилиндр действуют: сила тяжести, силы давления на боковую поверхность и силы давления на основания. Спроецируем силы на x -ось (на направление оси цилиндра AB) и приравняем нулю сумму проекций сил. Учтем, что проекции силы тяжести и сил давления на боковую поверхность цилиндра равны нулю (эти силы перпендикулярны к оси AB). Значит, надо приравнять нулю сумму проекций сил давления, действующих на основания:

$$p_A \Delta S - p_B \Delta S = 0 \quad (1^*)$$

(здесь p_A и p_B — давления в точках A и B , соответственно). Из (1*) немедленно следует, что

$$p_A = p_B. \quad (7.5)$$

Полученное равенство позволяет сделать вывод 1:

Все точки покоящейся жидкости, расположенные в одной и той же горизонтальной плоскости, находятся под давлением.

Говорят, что горизонтальные плоскости — это поверхности равного давления, или, проще, поверхности уровня. Свободная

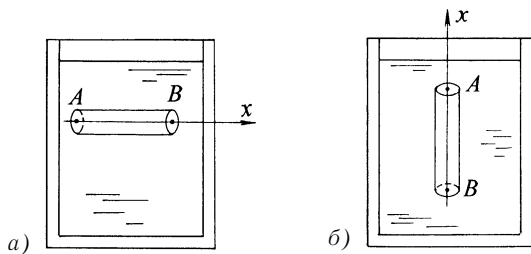


Рис. 7.9

поверхность жидкости является одной из поверхностей уровня. Давление во всех ее точках равно в открытом сосуде атмосферному давлению.

Теперь рассмотрим две точки A и B , находящиеся в жидкости на одной и той же вертикали, и мысленно выделим жидкий цилиндр с осью AB ; длину отрезка AB обозначим через h (рис. 7.9, б). Спроецируем на x -ось (на направление оси AB) все силы, действующие на цилиндр. Проекции сил давления на основания цилиндра площадью ΔS равны, соответственно $p_A \Delta S$ и $-p_B \Delta S$, где p_A — давление в точке A , а p_B — в точке B . Проекция силы тяжести цилиндра равна $-mg = -\rho gh \Delta S$ (m — масса цилиндра). Приравняв нулю сумму указанных проекций, получим

$$p_A \Delta S - p_B \Delta S - \rho gh \Delta S = 0,$$

откуда следует, что

$$p_A - p_B = \rho gh. \quad (7.6)$$

Давление

$$p = \rho gh \quad (7.7)$$

называют *гидростатическим давлением*.

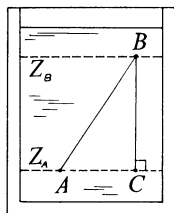


Рис. 7.10

Рассмотрим общий случай: точки A и B выбраны в покоящейся жидкости произвольно (рис. 7.10). Обозначим через Z_A горизонтальную плоскость, в которой находится точка A , а через Z_B — горизонтальную плоскость с точкой B . Расстояние между плоскостями обозначим через h . Предположим, что плоскость Z_A расположена ниже плоскости Z_B . Опустим из точки B перпендикуляр на плоскость Z_A и обозначим через C точку его пересечения с плоскостью Z_A . Согласно (7.6), $p_C - p_B = \rho gh$. Но $p_C = p_A$ (поскольку точки C и A находятся в одной горизонтальной плоскости); следовательно, $p_A - p_B = \rho gh$. Таким образом, можно сделать вывод **2**, математически выражаемый формулой (7.6):

Давление в покоящейся жидкости плотностью ρ изменяется на величину гидростатического давления (на величину ρgh) при подъеме или погружении точки наблюдения на расстояние по вертикали, равное h . При подъеме давление уменьшается, при погружении — возрастает.

Нальем в сосуд с вертикальными стенками и площадью основания S жидкость плотностью ρ до высоты h . Силу тяжести образовавшегося столба жидкости, равную весу этого столба P , можно представить в виде:

$$P = \rho h S g = p S, \quad (2^*)$$

где p — гидростатическое давление. Из (2*) следует, что $p = \frac{P}{S}$. Таким образом, гидростатическое давление $p = \rho g h$ можно определить как давление, создаваемое силой давления (весом) P столба жидкости плотностью ρ , имеющего высоту h .

Обращение к вертикальному столбу жидкости не должно вводить читателя в заблуждение. Следует иметь в виду, что *распределение гидростатического давления по глубине совершенно не зависит от формы сосуда*. Вместо сосуда с вертикальными стенками можно было бы с тем же успехом использовать сосуды произвольной формы, например, такие, какие показаны на рисунке 7.11 (1—4). Гидростатическое давление жидкости во всех этих случаях изменяется с глубиной по *одному и тому же* линейному закону: $p(z) = \rho g z$. *Различаться* будут картины распределения *силы* гидростатического давления на стенки сосудов (различия демонстрируют показанные на рисунке стрелки, которые везде перпендикулярны к стенке сосуда). Соответственно, различными для сосудов будут полные силы гидростатического давления на их стенки, а также на дно. Полная сила гидростатического давления на дно сосуда площадью S равна

$$P_d = \rho g h S, \quad (7.8)$$

а вес жидкости, находящейся в сосуде, равен

$$P = \rho V g, \quad (7.9)$$

где V — объем жидкости. Если стенки сосуда вертикальны, то $V = hS$; поэтому полная сила гидростатического давления жидкости на дно сосуда будет равна весу жидкости. В случаях же, показанных на рисунке 7.11, *сила давления жидкости на дно и ее вес различны*. Нетрудно сообразить, что $P_d > P$ для сосудов 1 и 3, но $P_d < P$ для сосудов 2 и 4.

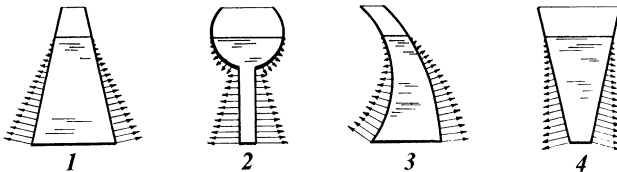


Рис. 7.11

Рассмотрим точку A на глубине h от свободной поверхности покоящейся жидкости плотностью ρ (рис. 7.12). Давление p_A в данной точке жидкости легко найти, воспользовавшись соотношением (7.6). Для этого достаточно заменить в нем давление p_B на атмосферное давление p_0 (давление, создаваемое во всех точках свободной поверхности жидкости силой давления атмосферы). В результате получим

$$p_A = p_0 + \rho gh. \quad (7.10)$$

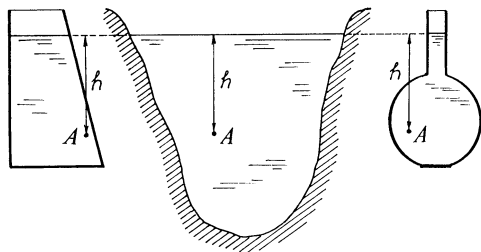


Рис. 7.12

При выводе этого равенства (его иногда называют *гидростатической формулой*) мы не обращались к закону Паскаля. Однако этот закон фактически присутствует здесь. В этом нетрудно убедиться, обсудив следующую нехитрую ситуацию. Мензурка высотой h , наполненная до самых краев водой, накрыта сверху куском стекла. Давление в любой точке воды, находящейся в мензурке, обусловлено силой тяготения Земли, поэтому давление в любой точке на дне равно $p = \rho gh$. Если убрать кусок стекла, то на поверхность воды станет давить атмосфера, т. е. на поверхности воды возникнет атмосферное давление p_0 . В соответствии с формулой (7.10) давление в любой точке дна мензурки окажется равным $p + p_0$. Итак, атмосферное давление, создаваемое действием поверхностных (внешних по отношению к воде в мензурке) сил, оказалось переданным без изменения в любую точку на дне мензурки, в результате чего давление на дно мензурки возросло на p_0 . Эта передача атмосферного давления от поверхности воды к ее границе с дном мензурки (равно как и в любую иную точку воды в мензурке) как раз и есть проявление закона Паскаля.

Задача 1. Атмосферное давление у поверхности озера равно $p_0 = 780$ мм рт. ст. На какой глубине давление возрастет в $n = 1,5$ раза?

□ Воспользуемся гидростатической формулой (7.10), в которой положим $p_A = 1,5 p_0$. Таким образом, искомая глубина равна $h = \frac{p_0}{2\rho g}$. Учитывая, что $p_0 = 780 \text{ мм рт. ст.} = 104\,000 \text{ Па}$ и $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, получаем $h = 5,31 \text{ м}$. ■

Задача 2 (рис. 7.13). Бочка цилиндрической формы площадью основания $S = 7500 \text{ см}^2$ и высотой $h_1 = 80 \text{ см}$ заполнена доверху водой и плотно накрыта крышкой. В крышку вставлена тонкая длинная вертикальная трубка площадью поперечного сечения $s = 1 \text{ см}^2$. В трубку влили кружку воды объемом $V = 400 \text{ см}^3$. На сколько возросла в результате этого полная сила давления воды на дно, крышку и стенку бочки?

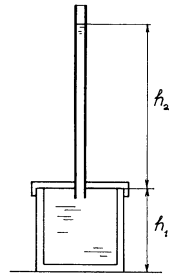


Рис. 7.13

□ Вода из кружки, оказавшись внутри трубки, образовала столбик высотой $h_2 = \frac{V}{s} = 4 \text{ м}$, кото-

рый создает на поверхности воды в бочке дополнительное атмосферному давлению давление $\Delta p = \rho g h_2 = 3,92 \cdot 10^4 \text{ Па}$. В соответствии с законом Паскаля, в каждой точке воды в бочке давление возрастает на Δp . Искомая дополнительная сила давления P равна $P = \Delta p \sigma$, где σ — сумма площадей дна, крышки и стенки бочки:

$$\sigma = 2S + 2h_1 \sqrt{\pi S}, \quad \sigma = 2,9 \text{ м}^2.$$

Следовательно, $P = 113\,700 \text{ Н}$. Эта сила в 30 000 раз больше веса воды, содержащейся в кружке! ■

Задача 3. В сосуд цилиндрической формы диаметром $d = 30 \text{ см}$ налита некая жидкость. Определите высоту жидкости в сосуде, при которой полная сила гидростатического давления на дно (обозначим ее через P_d) равна полной силе гидростатического давления на стенку (обозначим ее через $P_{\text{ст}}$).

Предостережение: не следует путать силу гидростатического давления с гидростатическим давлением!

□ Гидростатическое давление изменяется с глубиной по линейному закону: $p(z) = \rho g z$ (см. рисунок 7.14, где z -ось направлена вертикально вниз, $z = 0$ на поверхности жидкости). Разобьем мысленно цилиндрическую поверхность стенки сосуда на узкие ленты высотой Δz , достаточно малой, чтобы можно было считать гидростатическое давление в ее пределах постоянным. Сила гидроста-

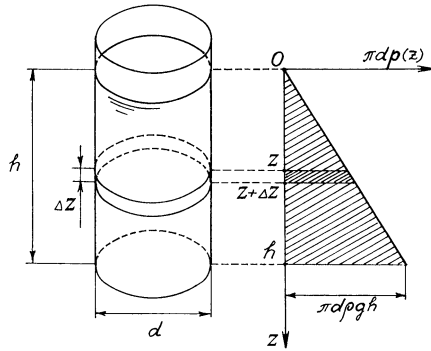


Рис. 7.14

тического давления на ленту, выделенную на рисунке 7.14, равна $\rho g z \cdot \pi d \Delta z$. Полная сила гидростатического давления на всю цилиндрическую поверхность численно равна площади показанного на том же рисунке заштрихованного треугольника. Следовательно, $P_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \pi d \rho g h^2$. Гидростатическое давление во всех точках дна равно $\rho g h$; следовательно, $P_{\text{д}} = \frac{1}{4} \pi d^2 \rho g h$. По условию задачи, $P_{\text{ст}} = P_{\text{д}}$. В результате получаем $h = \frac{d}{2} = 15$ см. ■

7.1.5. Сообщающиеся сосуды

В п. 7.1.4, мы пришли к выводу, что, несмотря на наличие и характер поверхностных сил, все точки покоящейся жидкости, находящиеся в одной горизонтальной плоскости (иначе говоря, на одном уровне), имеют одинаковое давление. Покажем, что такой вывод справедлив также и для сообщающихся сосудов произвольной формы.

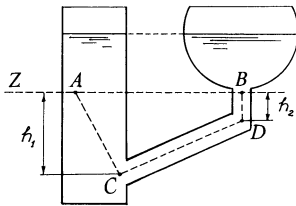


Рис. 7.15

На рисунке 7.15 показаны два сообщающихся сосуда различной формы. Не следует придавать значения тому, что оба сосуда открыты (поверхность жидкости свободная), поскольку характер поверхностных сил в данном случае не принципиален. Выберем произвольно горизонтальную поверхность (поверхность Z на рисунке) и две точки A и B на этой поверхности, находящие-

ся в разных сосудах. Докажем, что давления в точках A и B одинаковые: $p_A = p_B$. Проведем мысленно ломаную прямую $ACDB$, целиком лежащую внутри жидкости. Обозначим через h_1 и h_2 расстояния по вертикали между A и C и между D и B , соответственно (см. рисунок). Обозначим через p_C и p_D давления в точках C и D . Используя соотношение (7.6), запишем:

$$p_C - p_A = \rho g h_1;$$

$$p_D - p_B = \rho g h_2.$$

Вычтем почленно второе равенство из первого; получим:

$$(p_C - p_A) - (p_D - p_B) = \rho g(h_1 - h_2). \quad (1^*)$$

Согласно (7.6), $p_C - p_D = \rho g(h_1 - h_2)$. Подставляя этот результат в (1*), заключаем, что $p_A - p_B = 0$.

Докажем теперь, что свободные поверхности покоящейся жидкости в сообщающихся сосудах любой формы находятся на одном уровне. Плоскость Z на рисунке 7.16 — горизонтальная плоскость, и, следовательно, $p_A = p_B$. Исходя из этого, покажем, что $h = h'$. Обозначим через K и N произвольно выбранные точки на свободной поверхности жидкости в разных сосудах. Давление в этих точках равно атмосферному давлению p_0 : $p_K = p_N = p_0$. Согласно (7.6),

$$p_A - p_K = \rho g h;$$

$$p_B - p_N = \rho g h'.$$

Вычтем почленно второе равенство из первого; получим:

$$(p_A - p_B) - (p_K - p_N) = \rho g(h - h'). \quad (2^*)$$

Так как $p_A - p_B = 0$ и $p_K - p_N = p_0 - p_0 = 0$, то из (2*) следует, что $h - h' = 0$.

Задача 1 (рис. 7.17). Сообщающиеся сосуды 1 и 2 имеют поперечные сечения площадью S_1 и S_2 , соответственно. Плотность жидкости в сосудах ρ . Сосуд 2 открыт, а на поверхности сосуда 1 находится поршень массой m . На сколько уровень поверхности в сосуде 2 выше уровня поверхности в сосуде 1 ?

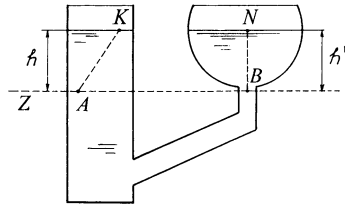


Рис. 7.16

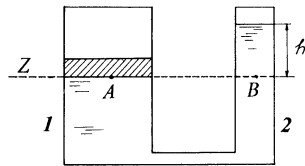


Рис. 7.17

□ Проведем мысленно горизонтальную плоскость Z , совпадающую с уровнем поверхности жидкости в сосуде I , и рассмотрим давления p_A и p_B в точках A и B , находящихся на этой плоскости. Поскольку плоскость Z горизонтальная, то в соответствии с выводом 1 из п. 7.1.4,

$$p_A = p_B. \quad (3^*)$$

Давление p_A обусловлено силой давления поршня, равной mg , и силой давления атмосферы; следовательно,

$$p_A = \frac{mg}{S_1} + p_0, \quad (4^*)$$

где p_0 — атмосферное давление. Давление p_B складывается из атмосферного давления p_0 и гидростатического давления ρgh , где h — искомая разность уровней; следовательно,

$$p_B = p_0 + \rho gh. \quad (5^*)$$

Подставляя (4*) и (5*) в (3*), получаем: $\frac{mg}{S_1} = \rho gh$, откуда следует, что $h = \frac{m}{S_1 \rho}$. ■

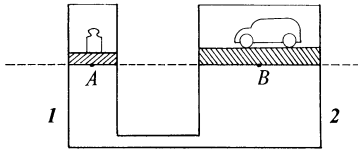


Рис. 7.18

Задача 2 (рис. 7.18). Груз какой массой m следует поставить на поршень 1, чтобы уравновесить автомобиль массой $M = 1600$ кг, находящийся на поршне 2? Массы поршней $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 400$ кг. Площади поршней $S_1 = 0,5$ м² и $S_2 = 50$ м².

□ Точки A и B находятся на одном уровне, поэтому $p_A = p_B$. Давление p_A обусловлено силами давления поршня массой m_1 , груза массой m и атмосферы: $p_A = \frac{m_1 + m}{S_1} + p_0$, где p_0 — атмосферное давление.

Давление p_B обусловлено силами давления поршня 2, автомобиля и атмосферы: $p_B = \frac{m_2 + M}{S_2} + p_0$. Так как $p_A = p_B$, то, следовательно,

$$\frac{m_1 + m}{S_1} = \frac{m_2 + M}{S_2},$$

откуда получаем, что $m = (m_2 + M) \frac{S_1}{S_2} - m_1 = 15$ кг. Итак, благодаря закону Паскаля мы можем уравновесить автомобиль гирей массой всего 15 кг!

Выше молчаливо предполагалось, что в обоих сообщающихся сосудах находится *одна и та же* жидкость. Если, однако, налить в сообщающиеся сосуды *разные* жидкости, не смешивающиеся одна с другой, то давления в точках на одном уровне, но в разных по плотности жидкостях уже *не будут одинаковыми*. В таких сосудах *уровни свободных поверхностей будут разными*. ■

Задача 3 (рис. 7.19). Сначала в сообщающиеся сосуды влили некоторое количество жидкости плотностью ρ_1 . Затем в сосуд 2 с поперечным сечением площадью S долили жидкость плотностью ρ_2 объемом V ($\rho_1 > \rho_2$). Требуется найти: 1) разность уровней свободных поверхностей жидкостей в разных сосудах; 2) разность давлений жидкостей в разных сосудах на уровне, находящемся посередине между границей раздела жидкостей и уровнем свободной поверхности жидкости в сосуде 1.

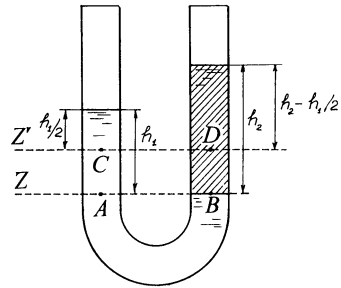


Рис. 7.19

□ 1. Легкая жидкость образует внутри сосуда 2 водяной столб высотой $h_2 = \frac{V}{S}$. Проведем мысленно горизонтальную плоскость Z , совпадающую с границей раздела жидкостей. На уровне этой плоскости и всюду ниже жидкость однородна (она имеет плотность ρ_1); поэтому можно воспользоваться выводом 1 из п. 7.1.4. и заключить, что давления в точках A и B одинаковы: $p_A = p_B$. Поскольку $p_A = p_0 + \rho_1 g h_1$ и $p_B = p_0 + \rho_2 g h_2$, то, следовательно, $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$, откуда получаем: $h_1 = \frac{h_2 \rho_2}{\rho_1}$. Искомая разность уровней свободных поверхностей равна

$$h = h_2 - h_1 = h_2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{V(\rho_1 - \rho_2)}{S \rho_1}.$$

2. Обозначим через Z' горизонтальную плоскость, находящуюся посередине между границей раздела жидкостей и уровнем свободной поверхности жидкости в сосуде 1 и рассмотрим давления p_C и p_D в точках C и D , лежащих в плоскости Z' . Легко видеть, что

$$p_C = \frac{1}{2} \rho_1 g h_1 + p_0 = \frac{1}{2} \rho_2 g h_2 + p_0; \quad (6^*)$$

$$p_D = \rho_2 g \left(h_2 - \frac{1}{2} h_1 \right) + p_0 = \rho_2 g h_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + p_0. \quad (7^*)$$

Отсюда следует, что искомая разность давлений равна

$$p_D - p_C = \frac{1}{2} \rho_2 g h_2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \frac{V}{2S} \rho_2 g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right). \quad (8^*)$$

Как и следовало ожидать, давления в точках на одном уровне в данном случае не равны друг другу. Разность давлений $p_D - p_C$ исчезает, если в (8*) положить $\rho_1 = \rho_2$. В этом случае обратится в нуль также разность уровней свободных поверхностей жидкостей в сообщающихся сосудах. ■

7.1.6. Атмосферное давление

Земля притягивает к себе содержащийся в земной атмосфере воздух, поэтому на поверхность Земли и все, что на ней находится, действует *сила давления атмосферы*. Она создает *атмосферное давление* p_0 . Сила давления атмосферы на участок поверхности площадью S равна, согласно (7.2), $P = p_0 S$. Атмосферное давление изменяется с высотой и в зависимости от погодных условий; при этом, как показывают измерения, оно остается вблизи земной поверхности приблизительно равным 10^5 Па. Далее будем пользоваться атмосферным давлением $p_0 = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 101\,325 \text{ Па}$, называемым *нормальным* атмосферным давлением.

Легко подсчитать, что на крышу дома, имеющую площадь, скажем, $S = 100 \text{ м}^2$, атмосфера давит с силой, равной $p_0 S = 10^7 \text{ Н}$, что соответствует весу тела массой $10^6 \text{ кг} = 1000 \text{ т}$. Однако крыша дома не проваливается. Площадь спины загорающего на пляже человека заведомо больше $0,2 \text{ м}^2$; следовательно, атмосфера давит на спину человека с силой больше, чем $2 \cdot 10^4 \text{ Н}$, что соответствует «камешку» массой 2000 кг . Однако человек вообще не ощущает какого-либо давления.



Почему же мы не ощущаем атмосферного давления?

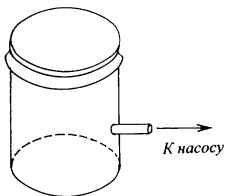


Рис. 7.20

Чтобы ответить на этот вопрос, мысленно проведем простой опыт. Возьмем банку, имеющую боковую трубку, соединяющую банку с насосом; затащим горловину банки тонкой резиновой пленкой (рис. 7.20). Снаружи на банку действует сила давления атмосферы, измеряемая сотнями ньютонов, но пленка нисколько не прогибается по той причине, что *внутри банки воздух сжат до такой же степени, что и снаружи*. Силы дав-

ления воздуха на пленку снаружи и изнутри банки взаимно уравновешиваются, вследствие чего пленка остается неизогнутой, как если бы на нее не действовали никакие силы.

Скептически настроенный читатель может в такой ситуации вообще усомниться в существовании атмосферного давления. Однако можно легко убедиться, что оно существует. Если откачать насосом часть воздуха из банки, уменьшив тем самым степень сжатия воздуха внутри банки, то пленка прогнется, демонстрируя существование атмосферного давления. Наружное атмосферное давление обнаруживается тогда, когда оно не компенсируется давлением изнутри. Мы не ощущаем атмосферного давления, поскольку наши ткани, сосуды, полости подвергаются как наружному давлению атмосферы, так и давлению изнутри. Каждая клетка организма содержит газы и жидкости, сжатые до давления, равного атмосферному. Уравновешивание внешних и внутренних сил давления происходит не только в воздухе, но и в воде. Когда поднимают на поверхность моря глубоководную рыбу, то обнаруживают, что ее внутренние полости оказываются разорванными изнутри.

Следует отметить некорректность употребляемой иногда фразы «на нас давит столб атмосферного воздуха с такой-то силой». Такая фраза произносится по ассоциации с силой давления, действующей со стороны твердого тела; она действует только на тела, расположенные *ниже*, и не действует на тела сбоку или, тем более, сверху от данного тела. Иное дело давление жидкости или газа. Напомним закон Паскаля, согласно которому давление передается не только в точки на дне сосуда, но также в точки на стенках и крышке. Сила гидростатического давления, как и сила атмосферного давления, действует перпендикулярно к как угодно ориентированной поверхности тела в жидкости или газе и оказывается направленной *в любую сторону*. Можно ли говорить о «столбе атмосферного воздуха», который давит на стенки комнаты или на потолок?

Тот факт, что сила атмосферного давления может действовать на тело снизу, продемонстрируем на следующем простом опыте. Возьмем стеклянную трубку и один из ее концов плотно закроем пробкой. Погрузим трубку в воду. После того как трубка полностью заполнится водой, приложим к ее открытому концу кусок стекла и вынем трубку из воды концом с пробкой вверх. Теперь мы можем убрать руку, прижимающую кусок стекла к трубке. Мы увидим, что стекло не падает, вода из трубки не выливается (рис. 7.21). Дело

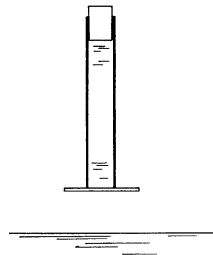


Рис. 7.21

в том, что снизу на стекло давит сила атмосферного давления, которая больше, чем сумма сил тяжести стекла и воды, находящейся в трубке. Но как только мы вынем из трубки пробку, стекло упадет и вода из трубки выльется, потому что в отсутствие пробки возникает атмосферное давление на поверхность воды в верхнем конце трубки, которое передается, по закону Паскаля, на кусок стекла. Теперь на стекло действуют в направлении вертикально вниз силы атмосферного и гидростатического давления (плюс сила тяжести куска стекла), тогда как в направлении вверх действует только сила атмосферного давления. Понятно, почему стекло падает вниз.

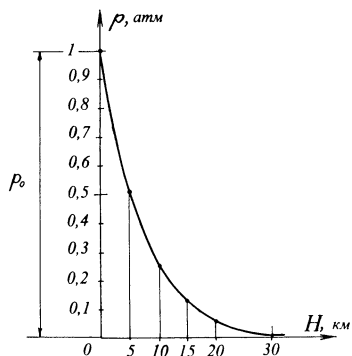


Рис. 7.22

Заметим, что говорить о «столбе атмосферного воздуха» некорректно еще и потому, что не существует самого столба как такового. Ведь у атмосферы нет определенной высоты: ее плотность с высотой постепенно уменьшается и приближается асимптотически к нулю. Столь же постепенно уменьшается с высотой и атмосферное давление — см. график на рисунке 7.22, где p — атмосферное давление на высоте H от уровня моря.

Примечание

Математически зависимость $p(H)$, график которой дан на рисунке 7.22, описывают с помощью показательной функции, основанием которой является число $e = 2,71828$ (основание натуральных логарифмов):

$$p = p_0 e^{-\rho_0 g \frac{H}{\rho_0}}, \tag{7.11}$$

где p_0 и ρ_0 — соответственно атмосферное давление и плотность воздуха при $H = 0$ (на уровне моря). Формулу (7.11) называют *барометрической формулой*.



Как измеряют атмосферное давление?

Для этого на метеорологических станциях применяют *ртутные барометры*, так как они обладают наибольшей точностью. Принцип действия ртутного барометра поясняет рисунок 7.23. Запаянную с одного конца стеклянную трубку длиной около метра

наполняют ртутью и затем опускают открытым концом в кювету с ртутью, ориентируя трубку вертикально. При этом некоторая часть ртути перейдет обратно в кювету. В трубке останется ртутный столбик, высоту которого обозначим через h . Давление во всех точках горизонтальной поверхности Z одинаково; значит, $p_A = p_B$, где p_A и p_B — давления в точках A и B , соответственно. Давление p_A — это гидростатическое давление $\rho_{рт}gh$, где $\rho_{рт}$ — плотность ртути. Давление p_B равно атмосферному давлению p . Так как $p_A = p_B$, то, следовательно,

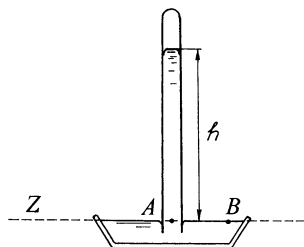


Рис. 7.23

$$p = \rho_{рт}gh. \quad (7.12)$$

Измерив высоту h столбика ртути в трубке, мы найдем атмосферное давление в том месте, где находится барометр. Вот почему в качестве одной из единиц атмосферного давления (и давления вообще) взят миллиметр ртутного столба.

Атмосферное давление измеряют также мембранным манометром, подобным тому, что был представлен на рисунке 7.6 (теперь из коробки I откачана часть воздуха). Такие манометры называют *барометрами-анероидами*. Их градуируют и выверяют по ртутному барометру. Они менее точны, зато более удобны в обращении, поскольку не содержат жидкой ртути. Анероид может быть градуирован непосредственно на высоту. Такие анероиды называют *альтиметрами*; они используются в авиалайнерах и позволяют пилоту контролировать высоту полета.

Задача 1 (рис. 7.24). Разветвленная трубка, присоединенная к всасывающему насосу, погружена своими отростками в сосу-

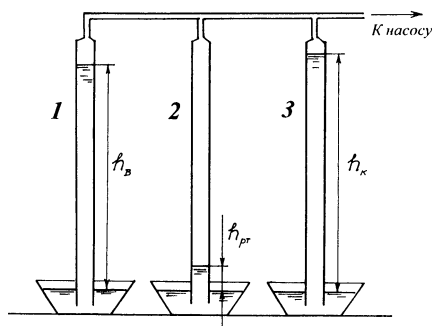


Рис. 7.24

ды с разными жидкостями: водой (отросток 1), ртутью (отросток 2), керосином (отросток 3). Высота столба воды $h_B = 68$ см, ртути $h_{рт} = 5$ см, керосина $h_K = 84$ см. Требуется определить плотность ртути и керосина.

□ Обозначим через p_1 давление воздуха в отростках, а через ρ_B , $\rho_{рт}$, ρ_K — плотности воды, ртути и керосина, соответственно. Поскольку

$$\rho_B g h_B = p_0 - p_1, \quad \rho_{рт} g h_{рт} = p_0 - p_1, \quad \rho_K g h_K = p_0 - p_1,$$

где p_0 — атмосферное давление, следовательно,

$$\rho_B h_B = \rho_{рт} h_{рт} = \rho_K h_K. \quad (7.13)$$

Учитывая, что $\rho_B = 10^3$ кг/м³, находим: $\rho_{рт} = \frac{\rho_B h_B}{h_{рт}} = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³,

$$\rho_K = \frac{\rho_B h_B}{h_K} = 0,81 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \quad \blacksquare$$

Задача 2. Требуется оценить массу земной атмосферы, учитывая, что атмосферное давление вблизи поверхности равно $p_0 = 10^5$ Па, а радиус Земли равен $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ м.

□ Можно считать, что почти вся масса земной атмосферы сосредоточена в пределах стратосферы, т. е. в слое высотой до 50 км. Согласно (6.15, а), на этой высоте ускорение свободного падения уменьшается всего лишь на 1,5% по сравнению с ускорением на уровне моря $g_0 = 9,8$ м/с². Поэтому мы вправе полагать, что везде в стратосфере ускорение свободного падения равно g_0 .

Если атмосферное давление у поверхности Земли равно p_0 , то модуль силы давления, действующей на всю поверхность земного шара, можно принять равным $4\pi R_3^2 p_0$. Эта величина равна, очевидно, действующей на атмосферу силе тяжести mg_0 ; следовательно, $4\pi R_3^2 p_0 = mg_0$, где m — масса стратосферы, т. е. практически всей атмосферы. Итак,

$$m = 4\pi R_3^2 \frac{p_0}{g_0}; \quad m = 5,2 \cdot 10^{18} \text{ кг}. \quad (7.14)$$

Масса атмосферы Земли в миллион раз меньше массы земного шара. ■

7.2. ВЫТАЛКИВАЮЩАЯ СИЛА И ПЛАВАНИЕ ТЕЛ

7.2.1. Закон Архимеда

Вернемся к рисунку 7.3, *в*, где изображен жидкий шар, изъятый мысленно из находящейся в сосуде жидкости. Будучи частью той жидкости, шар испытывал действие сил давления со стороны своего окружения. Несколько частичных сил давления, действующих на шар, показаны на рисунке 7.3, *в* в виде стрелок (силы $\Delta\vec{N}_1, \Delta\vec{N}_2, \dots$). Обозначим через $\vec{F}_{\text{выт}}$ равнодействующую всех частичных сил давления. Чтобы установить модуль, направление и точку приложения этой силы, воспользуемся тем, что шар находился внутри жидкости в состоянии покоя и, следовательно, сила $\vec{F}_{\text{выт}}$ *должна быть уравновешена* силой тяжести $m\vec{g}$ шара:

$$\vec{F}_{\text{выт}} + m\vec{g} = 0.$$

Это означает, что сила $\vec{F}_{\text{выт}}$ равна по модулю силе тяжести жидкого шара, направлена в противоположную сторону (вертикально вверх) и приложена в той же точке, что и сила $m\vec{g}$, т. е. в центре тяжести шара.

Теперь мысленно заменим жидкий шар внутри остальной жидкости *твердым шаром* такого же размера. Обозначим его массу через M . К поверхности твердого шара будут приложены, кроме его силы тяжести $M\vec{g}$, *те же самые силы давления*, что и в случае с жидким шаром; их векторная сумма есть уже знакомая нам сила $\vec{F}_{\text{выт}}$, равная по модулю и антипараллельная силе тяжести жидкости, вытесненной твердым шаром. Заметим, что модули сил $\vec{F}_{\text{выт}}$ и $M\vec{g}$, вообще говоря, не равны друг другу. Будучи направлена вертикально вверх, сила $\vec{F}_{\text{выт}}$ стремится вытолкнуть твердый шар из жидкости, поэтому ее называют *выталкивающей силой*.

Можно погрузить в жидкость, вместо твердого шара, *твердое тело произвольной формы*. Независимо от формы тела, на него будет действовать, кроме собственной силы тяжести, выталкивающая сила, равная по модулю силе тяжести жидкости в объеме, занимаемом телом. Она направлена вертикально вверх и приложена в центре тяжести указанного объема жидкости — так называемом *центре давления*. В общем случае центр давления не совпадает с центром тяжести тела.

Итак, посредством довольно изящных рассуждений мы пришли к физическому закону, который можно сформулировать так: *на погруженное в жидкость тело действует направленная вверх выталкивающая сила, равная по модулю силе тяжести жидкости в объеме, занимаемом телом, и приложенная в центре давления (центре тяжести объема жидкости, занятого телом)*. Этот закон называют **законом Архимеда** (в честь его первооткрывателя), а выталкивающую силу — *архимедовой силой*. Она действует не только в жидкостях, но и в газах. Выталкивающая сила обусловлена силами давления со стороны сжатой жидкой или газообразной среды; следовательно, по своей природе это *сила упругости*.

В общепринятой формулировке закона Архимеда вместо «силы тяжести жидкости (газа)» используется «вес жидкости (газа)»:

На погруженное в жидкость (газ) тело действует выталкивающая сила, равная по модулю весу жидкости (газа) в объеме, занимаемом телом, и приложенная в центре давления.

Когда закон Архимеда рассматривается в *инерциальной* системе отсчета, «вес жидкости» равен «силе тяжести жидкости». Однако, строго говоря, в законе Архимеда должен фигурировать именно *вес* жидкости (газа). Чтобы убедиться в этом, вернемся к обсуждению «жидкого шара» внутри жидкости и представим себе, что сосуд с жидкостью движется с *ускорением* \vec{a} , направленным, например, вертикально вниз. Чтобы теперь можно было продолжать пользоваться вторым законом Ньютона и, в частности, условием равновесия для жидкого шара, надо добавить к действующим на шар силам *силу инерции*, равную $-t\vec{a}$, где t — масса шара, т. е. рассматривать, вместо силы $t\vec{g}$, силу $t(\vec{g} - \vec{a})$ (напомним рассуждения в § 2.5). Соответственно изменится и выталкивающая сила, уравновешивающая теперь не силу $t\vec{g}$, а силу $t(\vec{g} - \vec{a})$ (в данном случае выталкивающая сила уменьшится — ее модуль будет равен $t(g - a)$). Значит, выталкивающая сила *зависит от ускорения системы отсчета* и, следовательно, в законе Архимеда выталкивающая сила определяется не силой тяжести, а именно весом вытесненной жидкости (или газа). В частности, когда $\vec{a} = \vec{g}$, выталкивающая сила отсутствует; в космическом корабле, пребывающем в состоянии невесомости (т. е. при выключенных двигателях), закон Архимеда не действует.

Проведем мысленно следующий опыт (рис. 7.25): пустое ведроко 1 («ведерко Архимеда») и сплошной цилиндр 2, объем которого равен вместимости ведерка, подвешены к динамометру. Если подставить сосуд с водой и погрузить цилиндр в воду, растяжение динамометра уменьшится. Но если затем наполнить ведроко водой, то динамометр растянется до прежней длины. Мы убеждаемся, таким образом, что потеря в весе цилиндра при его погружении в воду равна весу воды в объеме цилиндра. Поэтому закон Архимеда формулируют иногда так:

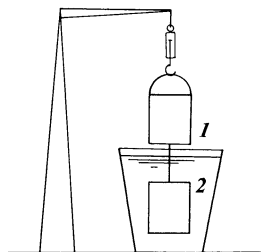


Рис. 7.25

Тело, погруженное в жидкость (газ), теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость (газ).

Задача (рис. 7.26, а). Шар плотностью $\rho_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и радиусом $R = 28 \text{ см}$ имеет внутри себя сферическую полость радиусом $\frac{R}{2}$, центр которой находится на расстоянии $\frac{R}{4}$ от центра шара. Шар погрузили в жидкость. Требуется найти плотность жидкости, если выталкивающая сила в два раза больше силы тяжести шара. Определить расстояние между центром давления и центром тяжести шара.

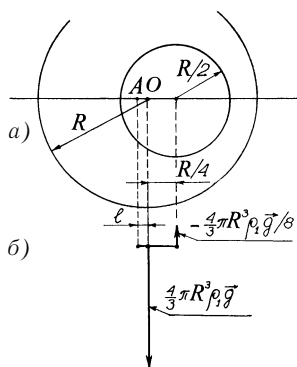


Рис. 7.26

□ Сила тяжести шара равна $\frac{4}{3}\pi(R^3 - \frac{R^3}{8})\rho_1 g = \frac{7}{6}\pi R^3 \rho_1 g$. Выталкивающая сила равна $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 g$, где ρ_2 — искомая плотность жидкости. Согласно условию задачи, $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 g = 2 \cdot \frac{7}{6}\pi R^3 \rho_1 g$. Следовательно, $\rho_2 = \frac{7\rho_1}{4} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Центр тяжести A шара находится на расстоянии l от центра давления O (рисунок 7.26, б). Воспользовавшись правилом моментов (3.12), которое в данном случае имеет вид: $lR^3 = \left(l + \frac{R}{4}\right) \frac{R^3}{8}$,

находим $l = \frac{R}{28} = 1 \text{ см.}$ ■

7.2.2. Гидростатическое взвешивание

Поставим вопрос: как найти *плотность однородного тела произвольной формы*, не измеряя его объема? Это можно сделать посредством так называемого *гидростатического взвешивания*. Надо взвесить тело *дважды* — в воздухе и при погружении в жидкость, плотность ρ_0 которой известна. Воспользуемся одной из формулировок закона Архимеда, которую можно представить математическим соотношением:

$$P - P_1 = \rho_0 g V \quad (7.15)$$

(погруженное в жидкость тело теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость). Здесь P — вес тела в воздухе, P_1 — вес того же тела, погруженного в жидкость плотностью ρ_0 , V — объем тела. Так как $gV = \frac{P}{\rho}$, где ρ — искомая плотность тела, то соотношение (7.15) может быть переписано в виде $P - P_1 = \rho_0 \frac{P}{\rho}$, откуда следует, что

$$\rho = \rho_0 \frac{P}{P - P_1}. \quad (7.16)$$

Как видим, объем тела нам не понадобился. Тело может быть произвольной формы. Важно лишь, чтобы оно тонуло и не растворялось в жидкости. Если тело неоднородное, результат (7.16) определяет *среднюю* плотность тела.


Посредством гидростатического взвешивания можно также найти *плотность неизвестной жидкости*. Для этого надо взвесить произвольно выбранное тело *трижды* — в воздухе (вес тела обозначим через P), в жидкости с известной плотностью ρ_1 (вес тела P_1) и в неизвестной жидкости (вес тела P_2). Применив закон Архимеда (7.15) к той и другой жидкостям, запишем:

$$\rho_1 g V = P - P_1; \quad (1^*)$$

$$\rho_2 g V = P - P_2; \quad (2^*)$$

Здесь ρ_2 — искомая плотность неизвестной жидкости, V — объем тела. Разделив почленно (2*) на (1*), получим $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P - P_2}{P - P_1}$, откуда следует, что

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{P - P_2}{P - P_1}. \quad (7.17)$$

 Обратим внимание: знать объем и плотность тела, которое трижды взвешивали, не требуется. Тело может иметь любую форму. Оно не должно тонуть и растворяться в каждой из используемых жидкостей.

Принято считать, что Архимед открыл закон, названный впоследствии его именем, размышляя над проблемой: как узнать, сделана ли данная корона из чистого золота или же из сплава золота с медью? Ученый пришел к выводу, что для этого надо измерить уменьшение веса короны при погружении ее в воду. Фактически Архимед решил следующую задачу.

Задача 1. Выяснить, из чистого ли золота сделана корона, вес которой в воздухе равен $P = 12,1$ Н, а в воде равен $P_1 = 11,3$ Н. Если выяснится, что корона сделана не из чистого золота, требуется определить, сколько процентов золота содержится в ней, полагая, что она сделана из сплава золота и меди. Плотность золота $\rho_1 = 19\,320$ кг/м³, плотность меди $\rho_2 = 8\,920$ кг/м³.

□ Учитывая, что плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м³, получаем из (7.16): $\rho = \frac{\rho P}{P - P_1} = 15\,125$ кг/м³. Так как $\rho < \rho_1$, то ясно, что корона сделана не из чистого золота.

Полагая, что корона сделана из сплава золота и меди, найдем процентное содержание золота в ней. Обозначим через m_1 и V_1 массу и объем куска золота, использованного при изготовлении короны, а через m_2 и V_2 соответственно массу и объем куска меди. Плотность ρ короны равна

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} = \frac{m}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2}}$$

($m = m_1 + m_2$ — масса короны).

Итак, получили соотношение $\rho = \frac{m}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2}}$, которое можно переписать в виде:

$$\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m - m_1}{\rho_2} = \frac{m}{\rho},$$

или

$$m \frac{\rho - \rho_2}{\rho} = m_1 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}. \quad (3^*)$$

Используя значения плотностей ρ , ρ_1 , ρ_2 , получим из (3*):

$$0,41 m = 0,54 m_1,$$

откуда следует, что $\frac{m_1}{m} = 0,76$. Мы выяснили, что корона состоит на 76% из золота и на 24% из меди. ■

Задача 2. Тело из меди с внутренней полостью весит в воздухе $P = 2,59$ Н, а в воде $P_1 = 2,17$ Н. Определить объемы тела и внутренней полости. Плотность меди $\rho_m = 8,92 \cdot 10^3$ кг/м³.

□ Объем V тела найдем из закона Архимеда (7.15), где ρ_0 — плотность воды: $V = \frac{P - P_1}{\rho_0 g} = 43$ см³.

Найдем объем V' внутренней полости. Вес тела в воздухе представим в виде:

$$P = (V - V')\rho_m g. \quad (4^*)$$

Разделив почленно (4*) на (7.15), получим:

$$\frac{P}{P - P_1} = \frac{(V - V')\rho_m}{V\rho_0}. \quad (7.18)$$

Если $V' = 0$ (внутренняя полость отсутствует), соотношение (7.18) преобразуется, как и следовало ожидать, в (7.16). Впрочем, соотношение (7.18) сейчас нам не понадобится. Поступим проще: перепишем (4*) в виде $P + V'\rho_m g = V\rho_m g$ и разделим это равенство почленно на (7.15); получим $\frac{P + V'\rho_m g}{P - P_1} = \frac{\rho_m}{\rho_0}$.

Отсюда следует, что

$$V' = \frac{(P - P_1)\rho_m - P\rho_0}{\rho_m \rho_0 g}; \quad V' = 13 \text{ см}^3. \quad \blacksquare$$

7.2.3. Условия плавания тел

Если действующая на тело в данной жидкости выталкивающая сила оказывается меньше силы тяжести тела, то оно тонет. Если же выталкивающая сила больше силы тяжести тела, то оно всплывает. *Чтобы тело плавало на поверхности жидкости, его сила тяжести должна быть уравновешена выталкивающей силой.* В этом и заключается *условие плавания тел.* Для сплошного однородного тела плотностью ρ и объемом V это условие можно выразить математически простой формулой:

$$\rho V g = \rho_1 V_1 g, \quad (7.19)$$

где ρ_1 — плотность жидкости, V_1 — та часть объема тела, которая остается под поверхностью жидкости (именно такой объем жидкости вытеснен плавающим телом). Левая половина равенства (7.19) — это сила тяжести тела, правая половина — выталкивающая сила. Из (7.19) следует:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho}{\rho_1}. \quad (7.20)$$

Чтобы сплошное тело не тонуло, его плотность должна быть меньше плотности жидкости: $\rho = \rho_1$. Если же тело содержит внутренние полости, то оно может плавать и в том случае, когда плотность вещества тела больше плотности жидкости. При наличии в теле объемом V внутренней полости объемом V' , соотношения (7.19) и (7.20) преобразуются, соответственно, к виду:

$$\rho(V - V')g = \rho_1 V_1 g; \quad (7.21)$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho}{\rho_1} \left(1 - \frac{V'}{V}\right). \quad (7.22)$$

Задача 1. Железный шар объемом $V = 2000 \text{ см}^3$, имеющий внутреннюю полость, плавает в воде, погружившись ровно наполовину. Требуется найти объем полости. Плотность железа $\rho_{\text{ж}} = 7870 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

□ Обозначим через V_1 подводную часть объема шара. Согласно условию задачи, $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$. Подставив это отношение в (7.22), где вместо ρ используется $\rho_{\text{ж}}$, находим, что объем V' полости равен:

$$V' = V \frac{2\rho_{\text{ж}} - \rho_1}{2\rho_{\text{ж}}} = 1870 \text{ см}^3. \quad (1^*)$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае в железном шаре объемом 2000 см^3 только 130 см^3 заняты железом; остальной объем шара — это объем полости. Фактически шар представляет собой сферу с относительно тонкими стенками. ■

Задача 2. Тело из алюминия с внутренней полостью весит в воздухе $P = 20 \text{ Н}$. В воде оно плавает, погрузившись ровно наполовину. Требуется найти объем тела и объем его внутренней полости. Плотность алюминия $\rho_{\text{ал}} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_1 = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

□ Согласно условию плавания тел, вес P тела в воздухе равен выталкивающей силе, а последняя, согласно закону Архимеда, равна в данном случае весу воды в объеме, равном половине объема V тела; следовательно, $P = \frac{1}{2} \rho_1 V g$. Таким образом, объем тела равен

$$V = \frac{2P}{\rho_1 g}, \quad V = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3. \quad (2^*)$$

Объем V' полости можно выразить через объем тела V , воспользовавшись соотношением (1*), в котором $\rho_{\text{ж}}$ надо заменить на $\rho_{\text{ал}}$. Подставив (2*) в (1*), получим

$$V' = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Плавающее тело находится на границе раздела двух сред — жидкой и воздушной. Ниже этой границы на тело действует жидкость с выталкивающей силой, равной $\rho_1 V_1 g$, а выше границы — воздух с выталкивающей силой, равной $\rho_2 V_2 g$. Здесь V_1 и V_2 — соответственно, подводная и надводная части объема тела, а ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотности воды и воздуха. Поскольку $\rho_2 \ll \rho_1$ ($\rho_2 = 1,2 \text{ кг/м}^3$), то учет выталкивающей силы $\rho_2 V_2 g$ практически не изменит для сплошного тела соотношений (7.19) и (7.20). Не играет роли и атмосферное давление, так как, по закону Паскаля, оно передается во все точки поверхности тела.

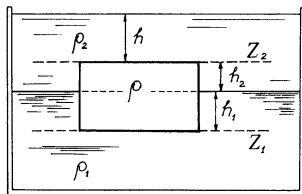


Рис. 7.27

Рассмотрим сплошное тело плотностью ρ и объемом V , плавающее на границе раздела двух не смешивающихся друг с другом жидкостей — легкой жидкости плотностью ρ_2 и тяжелой жидкостью плотностью ρ_1 ($\rho_2 < \rho < \rho_1$). Для простоты выберем тело в виде прямоугольного параллелепипеда с

основанием площадью S (рис. 7.27). Найдем условие плавания тела и отношение $\frac{V_1}{V}$, где V_1 — часть объема тела, находящаяся под границей раздела двух жидкостей.

Во всех точках горизонтальной плоскости Z_2 (см. рис. 7.27) давление легкой жидкости равно $p = p_0 + \rho_2gh$, где p_0 — атмосферное давление; следовательно, сверху на тело давит сила

$$F_2 = (p_0 + \rho_2gh)S.$$

Во всех точках горизонтальной плоскости Z_1 давление тяжелой жидкости равно $p + p'$, где p' — гидростатическое давление, равное $\rho_2gh_2 + \rho_1gh_1$. Следовательно, снизу на тело давит сила

$$F_1 = (p + p')S = (p_0 + \rho_2gh + \rho_2gh_2 + \rho_1gh_1)S.$$

Разность сил $F_1 - F_2$ есть, очевидно, выталкивающая сила $F_{\text{выт}}$:

$$F_{\text{выт}} = (\rho_2gh_2 + \rho_1gh_1)S = \rho_2g(V - V_1) + \rho_1gV_1.$$

Первое слагаемое в правой части равенства — выталкивающая сила, обусловленная действием на тело со стороны легкой жидкости, а второе слагаемое — выталкивающая сила со стороны тяжелой жидкости. Условие плавания тела принимает теперь вид:

$$\rho Vg = \rho_2g(V - V_1) + \rho_1gV_1. \quad (7.23)$$

Оно получено здесь для тела в форме прямоугольного параллелепипеда. Но этот результат верен для тела любой формы. Из (7.23) следует, что

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (7.24)$$

Заменим мысленно легкую жидкость на воздушную среду, т. е. будем полагать, что ρ_2 — плотность воздуха. Поскольку теперь $\rho_2 \ll \rho$ и $\rho_2 \ll \rho_1$, то соотношение (7.24) превращается, как и следовало ожидать, в (7.20). ■

Задача 3. Сплошной однородный шар плавает на границе раздела ртути и воды, будучи погруженным в ртуть на треть объема. Определите плотность вещества шара. Плотность ртути $\rho_1 = 13\,600 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

□ Обозначим через V объем шара, а через V_1 — часть объема шара, погруженную в ртуть. Согласно условию задачи, $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$. Подставив это отношение в (7.24), получим

$$3(\rho - \rho_2) = \rho_1 - \rho_2,$$

где ρ — искомая плотность шара. Отсюда находим: $\rho = \frac{1}{3}(\rho_1 + 2\rho_2) = 5200 \text{ кг/м}^3$. Такая плотность близка к плотности германия. ■



Что станет с уровнем воды в сосуде после того, как растает плавающий там кусок льда?

Ответ: уровень не изменится. Сила тяжести куска льда уравновешена выталкивающей силой и, значит, равна весу воды, вытесненной льдом. Когда лед растает, он превратится в воду в объеме, равном тому, какой он раньше вытеснял.

Решим задачи, в которых рассматриваются ситуации примерно на ту же тему.

Задача 4. Внутри плавающего на воде куска льда находится кусочек свинца. Что станет с уровнем воды в сосуде, когда лед растает?

□ Обозначим: V — объем куска льда вместе со свинцом внутри, v — объем кусочка свинца, V_1 — объем воды, вытесненной подводной частью куска льда; ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 , — плотности воды, льда и свинца, соответственно. Условие плавания куска льда со свинцом внутри имеет вид:

$$\rho_1(V - v)g + \rho_2vg = \rho_0V_1g. \quad (3^*)$$

После таяния лед превратится в воду, объем V_2 которой определим из равенства:

$$\rho_1(V - v)g = \rho_0V_2g.$$

Воспользовавшись им, преобразуем (3*) к виду $\rho_0V_2g + \rho_2vg = \rho_0V_1g$. Отсюда следует, что

$$V_2 = V_1 - v\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right). \quad (4^*)$$

Итак, плавающий лед вытеснял объем воды V_1 . Затем свинец и вода, образовавшаяся от таяния льда, стали занимать объем

$V_2 + v$. Чтобы ответить на вопрос, поставленный в задаче, надо сопоставить эти объемы. Из (4*) получаем:

$$V_2 + v = V_1 - v \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_0}. \quad (5^*)$$

Так как $\rho_2 > \rho_0$, то из (5*) видно, что $(V_2 + v) < V_1$. Следовательно, в результате таяния льда уровень воды в сосуде понизится. Разделив разность объемов $V_1 - (V_2 + v)$ на площадь S поперечного сечения сосуда (для простоты полагаем, что сосуд имеет цилиндрическую форму), найдем высоту h , на которую опустится уровень воды в сосуде после таяния льда:

$$h = \frac{v \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1 \right)}{S}. \quad \blacksquare$$

Задача 5. Внутри плавающего на воде куска льда находится кусочек пробки. Что станет с уровнем воды в сосуде, когда лед растает?

□ Обозначим через v объем кусочка пробки, а через ρ_0 , ρ_1 , ρ_3 — плотности воды, льда и пробки, соответственно. Используя (4*), найдем разность объемов воды, вытесненной плавающим куском льда с пробкой внутри, и воды, образующейся от таяния льда:

$$V_1 - V_2 = v \left(\frac{\rho_3}{\rho_0} \right). \quad (6^*)$$

Воспользуемся условием плавания пробки:

$$\rho_3 v g = \rho_0 v_1 g, \quad (7^*)$$

где v_1 — часть объема пробки, погруженная в воду. Подставляя (7*) в (6*), находим

$$V_1 = V_2 + v_1.$$

Таким образом, объем воды, вытесненной куском льда, оказывается равным сумме объемов воды, образующейся от таяния льда, и воды, вытесненной погруженной частью объема пробки. Следовательно, уровень воды в сосуде остается неизменным. ■

7.2.4. Остойчивость судов



Условие плавания тела требует, чтобы были уравновешены сила тяжести \vec{F}_T тела, приложенная в центре тяжести, и выталкиваю-

щая сила $\vec{F}_{\text{выт}}$, приложенная в центре давления. Если мысленно представить себе водную массу, заполнившую подводную часть объема тела, то центр тяжести этой водной массы как раз и будет центром давления. Чтобы тело плавало, не переворачиваясь, что принципиально важно, когда речь идет о кораблях и подводных лодках, нужно позаботиться об *устойчивости равновесия* указанных двух сил (используется термин «*остойчивость судов*»).

Начнем с вопроса об остойчивости подводных лодок. Итак, лодка полностью погрузилась под воду. Равновесие сил \vec{F}_T и $\vec{F}_{\text{выт}}$ будет *устойчивым* при условии, что *центр тяжести лодки O находится ниже центра давления O_1* (рис. 7.28, а). В этом случае при наклоне лодки возникает момент пары сил, равный по модулю $\Phi = \vec{F}_T l + \vec{F}_{\text{выт}} l$, возвращающий накренившуюся лодку в вертикальное положение. Равновесие сил \vec{F}_T и $\vec{F}_{\text{выт}}$ будет *неустойчивым*, если *центр тяжести O выше центра давления O_1* (рис. 7.28, б). Возникающий при случайном крене лодки момент пары сил будет вызывать в этом случае еще больший крен, и лодка завалится набок и перевернется. Обратим внимание: центр давления для полностью погруженной под воду лодки все время (при любом крене) находится на средней линии судна, показанной на рисунке пунктирной прямой.

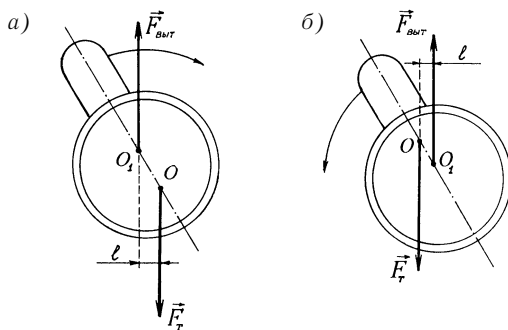


Рис. 7.28

В случае с кораблем все обстоит сложнее. Дело в том, что при крене корабля *центр давления отклоняется от средней линии*. Он отклоняется в ту же сторону, в какую накренился корабль. При этом возможны две ситуации. Первая представлена на рисунке 7.29, а. В накренившемся положении корабля вертикаль, проходящая через центр давления O_1 , пересекает среднюю линию корабля *в точке M , находящейся выше центра тяжести корабля O* . В этом случае возникает момент пары сил $\Phi = F_T l$, возвращающий корабль в

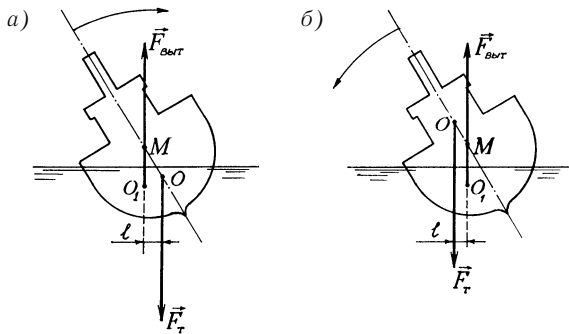


Рис. 7.29

нормальное положение. Легко видеть, что $l = OM \cdot \sin \alpha$, где α — угол наклона корабля. Такой корабль обладает *остойчивостью* (равновесие сил \vec{F}_T и $\vec{F}_{\text{выт}}$ является устойчивым). Точку M называют *метацентром*, а расстояние OM — *метацентрической высотой*.

Итак, корабль может быть *остойчивым* также тогда, когда его центр тяжести находится выше центра давления (и даже выше уровня воды) — лишь бы его *метацентр находился выше центра тяжести корабля*. Чем больше метацентрическая высота, тем выше *остойчивость* корабля. Поэтому важно заботиться о том, чтобы центр тяжести был пониже, для чего, в частности, следует убирать тяжелые грузы с верхней палубы.

Вторая ситуация изображена на рисунке 7.29, б. Вертикаль, проведенная через центр давления O_1 , пересекает среднюю линию корабля в *метацентре* M , оказавшемся ниже центра тяжести корабля O . Как видно из рисунка, теперь возникает момент пары сил, который не возвращает корабль в нормальное положение, а напротив, заваливает его. Такой корабль нельзя отправлять в плавание.

7.2.5. Свободная конвекция

Говоря о законе Архимеда, нельзя обойти вниманием еще одно физическое явление. Всем известно, что батареи центрального отопления помещают в комнате внизу под окнами для того, чтобы создать в комнате циркуляцию воздуха. Нагретый батареей воздух поднимается к потолку, а холодный воздух из форточки опускается к полу. Это есть явление *свободной конвекции* (от латинского слова convectio, означающего «доставка, принесение»).

Представим себе, что в воздушной среде, характеризующейся плотностью ρ_0 , образовался относительно нагретый объем воздуха, имеющий плотность ρ . Конечно, между этим объемом воздуха и ос-

тальной воздушной средой нет четкой границы. Наметим ее приблизительно и обозначим через V выделенный объем нагретого воздуха. На него действуют сила тяжести ρVg и направленная вверх выталкивающая сила $\rho_0 Vg$. Поскольку $\rho < \rho_0$ (ведь плотность газа с нагреванием уменьшается), то $\rho_0 Vg > \rho Vg$. Таким образом, на условно выделенный объем воздуха V будет действовать направленная вверх сила, равная $(\rho_0 - \rho)Vg$. В результате теплый воздух устремится вверх — возникнет *конвекционный поток* воздуха.

Конвекция наблюдается не только в газах, но и в жидкостях. Она является одним из физических механизмов, осуществляющих *теплопередачу*. В данном случае теплопередача происходит в результате *механического перемещения вещества в поле земного тяготения*. Есть еще два механизма теплопередачи — *теплопроводность* и *испускание излучения*. О них мы поговорим в свое время. Ранее отмечалось, что в состоянии невесомости выталкивающая сила отсутствует, закон Архимеда не работает. Понятно, что в невесомости исчезают и конвекционные потоки, *в невесомости свободной конвекции нет*.

Конвекция широко распространена в природе. Она играет принципиально важную роль, например, в нижних слоях атмосферы, в *астеносфере* Земли (слое, непосредственно примыкающем снизу к земной коре), в *конвективной* зоне внутри Солнца (зоне, примыкающей изнутри к поверхности Солнца). Процесс образования облаков в земной тропосфере начинается с конвекции — подъема от земной поверхности масс теплого влажного воздуха. Благодаря конвекции магматических масс в астеносфере Земли происходят подвижки литосферных плит, приводящие, в частности, к образованию гор и вызывающие землетрясения. Благодаря конвекции плазмы в конвективной зоне внутри Солнца наше светило освобождается от непрерывно выделяющейся в его ядре гигантской энергии при термоядерном синтезе. Высвобождающаяся энергия солнечного излучения рассеивается в мировом пространстве. Миллиардная доля этой энергии попадает на Землю, превращаясь частью в тепловую энергию (греет воду и сушу), частью в кинетическую энергию (движение воды, облаков, рождение ветров и морских течений, горные обвалы и т. д.), частью в химическую энергию — аккумулируется в химических связях различных соединений, в том числе органических.

7.3. МЕХАНИКА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

7.3.1. Поверхностная энергия и поверхностное натяжение

До сих пор мы полагали, что силы, действующие между соприкасающимися жидкостью и воздухом, — это только *силы дав-*

ления, направленные перпендикулярно поверхности соприкосновения. Поверхность соприкосновения рассматривалась как геометрическая поверхность, которая характеризуется площадью, но не имеет толщины. В действительности же на границе раздела жидкости и воздуха существует обладающий особыми свойствами *поверхностный слой*, который находится под действием особых сил, стремящихся уменьшить свободную поверхность жидкости. Толщина r_0 поверхностного слоя составляет несколько диаметров молекулы жидкости; $r_0 \approx 10^{-9}$ м.

Каждая молекула внутри жидкости испытывает притяжение со стороны соседних молекул, находящихся в пределах *сферы молекулярного действия* радиусом r_0 . Эти силы притяжения, называемые *силами межмолекулярного сцепления*, не имеют ничего общего с гравитацией; они обусловлены электромагнитным взаимодействием. Если молекула находится от поверхности жидкости на расстоянии большем r_0 , то в этом случае равнодействующая всех приложенных к ней сил сцепления равна, очевидно, нулю. Иное дело, если молекула находится в поверхностном слое жидкости. Так как плотность воздуха много меньше плотности жидкости, то выступающая за пределы жидкости часть сферы молекулярного действия будет практически пустовать; поэтому на такую молекулу будет действовать результирующая сила межмолекулярного сцепления, направленная внутрь жидкости. На рисунке 7.30 выделены черными кружочками две молекулы (молекулы *A* и *B*), а пустыми кружочками показаны остальные молекулы в пределах сфер молекулярного действия выделенных молекул. Здесь \vec{F} — результирующая сила межмолекулярного сцепления, действующая на молекулу *B*. Для молекулы *A* равнодействующая сил сцепления равна нулю.

При перемещении молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой возникает и постепенно возрастает результирующая

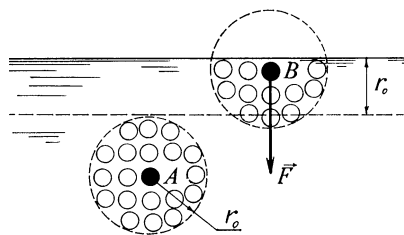


Рис. 7.30

сила межмолекулярного сцепления, действующая на данную молекулу. Эта сила совершает на указанном перемещении отрицательную работу, в результате чего молекула *приобретает потенциальную энергию* (напомним соотношение (5.69)). Иначе говоря, кинетическая энергия молекулы, которой она обладала, находясь в глубине жидкости, частично превращается в потенциальную энергию.

Как мы видим, молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией. Получается, что поверхностный слой в целом обладает дополнительной энергией. Ее называют *поверхностной энергией*. Она является, по сути дела, частью внутренней энергии жидкости.

Заметим, что поверхностной энергией обладают жидкости (а также твердые тела), но не обладают газы. По мере повышения температуры силы межмолекулярного сцепления в жидкости уменьшаются; соответственно уменьшается и поверхностная энергия, различие между жидкостью и насыщенным паром постепенно стирается и исчезает совсем при критической температуре. Отсюда видно, что наблюдаемые при рассмотрении жидкости поверхностные явления относятся, строго говоря, к *тепловым явлениям*. Мы вернемся к ним во второй книге, а пока ограничимся рассмотрением свободной поверхности жидкости с точки зрения *механики*.

Любые два участка поверхностного слоя данной жидкости, имеющие одинаковую площадь, обладают одинаковой поверхностной энергией (ведь они содержат одинаковые количества молекул). Таким образом, *поверхностная энергия прямо пропорциональна площади поверхности жидкости*. Значит, отношение поверхностной энергии $U_{\text{п}}$ участка поверхности жидкости к площади S этого участка — величина постоянная. Ее называют *поверхностным натяжением* и обозначают через σ :

$$\sigma = \frac{U_{\text{п}}}{S}. \quad (7.25)$$

Поверхностное натяжение жидкости на границе раздела с воздухом (паром или газом) есть поверхностная энергия, приходящаяся на единицу площади свободной поверхности жидкости.

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (7.25) следует, что

$$\text{единица поверхностного натяжения} = \frac{\text{единица энергии}}{\text{единица площади}}$$

В СИ единица поверхностного натяжения есть *джоуль на квадратный метр* (обозначение: Дж/м²). Поскольку 1 Дж = 1 Н · м, то указанная единица поверхностного натяжения может рассматриваться также как *ньютон на метр* (обозначение: Н/м).

Приведем результаты измерения поверхностного натяжения σ (Н/м) для некоторых жидкостей:

Вода (чистая)	0,073
Раствор мыла в воде	0,040
Спирт	0,022
Эфир	0,017
Ртуть	0,470

Необходимо сделать три уточнения. Во-первых, поверхностное натяжение *зависит от температуры*. Приведенные выше результаты получены при температуре 20 °С. У расплавленного золота (температура 1130 °С) $\sigma = 1,102$ Н/м; у жидкого водорода (температура -253 °С) $\sigma = 0,0021$ Н/м; у жидкого гелия (температура -269 °С) $\sigma = 0,00012$ Н/м. Во-вторых, здесь не применялись так называемые *поверхностно-активные вещества*, добавление которых в жидкость уменьшает поверхностное натяжение. В-третьих, здесь рассматривалось поверхностное натяжение на границе раздела жидкости и газообразной среды.

В связи с последним уточнением, обратим внимание на то, что, строго говоря, надо рассматривать не просто поверхностное натяжение данной жидкости (при данной температуре и при наличии или отсутствии поверхностно-активных добавок), а поверхностное натяжение *на границе раздела данной жидкости и той или иной конкретной среды* (газообразной или твердой). Здесь и далее, употребляя термин «поверхностное натяжение жидкости», мы имеем в виду поверхностное натяжение *на границе раздела жидкости и воздуха*.



Как измеряют поверхностное натяжение жидкости?

Прежде чем ответить на этот вопрос, обратим внимание на то, что свободная поверхность жидкости *стремится сократиться* так, чтобы площадь ее поверхности стала минимальной при данном объеме жидкости. Это не удивительно, если учесть, что на молекулы в поверхностном слое действуют направленные внутрь жидкости силы межмолекулярного сцепления. Так что «стремление свободной поверхности жидкости сократиться» есть не что иное, как «стремление» каждой молекулы в поверхностном слое переместиться в глубину жидкости, аналогичное «стремлению» поднятого над землей камня упасть вниз.

Поскольку при данном объеме жидкости наименьшую поверхность имеет шар, то, следовательно, представленный самому себе

объем жидкости должен принимать форму шара. Но чтобы «предоставить жидкость самой себе», надо исключить действие на нее сил реакции, обусловленных притяжением Земли, или, во всяком случае, позаботиться о том, чтобы это действие оказалось несущественным. Оно становится несущественным для очень маленьких объемов жидкости, поэтому капли росы шарообразны. Оно исчезает, когда жидкость находится в невесомости, т. е. падает в поле тяготения, поэтому капля воды, падающая из плохо закрытого крана, шарообразна. Поэтому же шарообразны планеты, поскольку они падают в поле тяготения Солнца и когда-то были расплавленными массами.

Итак, свободная поверхность жидкости стремится к сокращению, что подтверждается наблюдениями. В физике за словом «стремление» всегда скрываются *какие-то силы*. В случае с поверхностным натяжением это так называемые *силы поверхностного натяжения*. Они-то как раз и позволяют измерить поверхностное натяжение жидкости.

7.3.2. Сила поверхностного натяжения

Стремящийся к сокращению своей поверхности объем жидкости можно представить себе как бы заключенным в растянутую упругую пленку. Понаблюдаем за процессом образования капли воды из крана. Вода постепенно выпячивается у отверстия крана, возникает сужение (шейка), после чего сформировавшаяся шарообразная капля отрывается от отверстия. Может возникнуть образ постепенно наполненного водой эластичного «мешочка», который разрывается, когда его прочность становится недостаточной для удержания возросшей массы воды. Разумеется, в действительности нет никакого эластичного «мешочка» (поверхностный слой состоит из тех же молекул, что и вся жидкость), но есть силы, которые возникают в поверхностном слое и стремятся сократить поверхность жидкости.

Произвольно выделим некоторый участок поверхности жидкости, мысленно ограничив его замкнутым контуром (контур Σ на рисунках 7.31). Тенденция данного участка поверхностного слоя к сокращению проявляется в том, что он действует на граничные участки с силами, распределенными по контуру Σ и везде направленными перпендикулярно к контуру (см. стрелки на рисунке 7.31, *a*). По третьему закону Ньютона, внешние участки поверхностного слоя действуют на рассматриваемый участок с такими же по модулю, но противоположно направленными силами, которые стремятся сократить площадь внешних участков (см. стрелки на

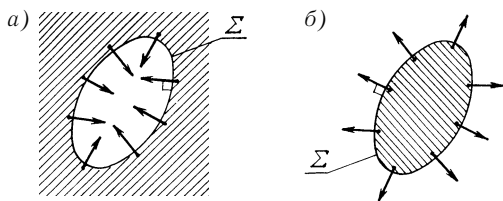


Рис. 7.31

рисунке 7.31, б). Показанные на рисунках силы называют *силами поверхностного натяжения*. Каждая частичная сила поверхностного натяжения направлена вдоль поверхности жидкости (в общем случае по касательной к поверхности жидкости) перпендикулярно к тому участку контура, на который она действует.

Существование сил поверхностного натяжения нетрудно продемонстрировать на простых опытах.

Опыт первый. Возьмем вынутую из мыльного раствора проволочную рамку в форме квадрата со стороной a . Она затянута *мыльной пленкой*. Мыльная пленка представляет собой объем жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющего основание в виде квадрата со стороной a и очень малую высоту h ($h \ll a$). На границах обоих оснований параллелепипеда находятся поверхностные слои. Поперечный разрез мыльной пленки показан на рисунке 7.32, а; толстой линией здесь выделен поверхностный слой, кружочки — поперечные сечения проволоки.

Осторожно положим на мыльную пленку петлю из тонкой нитки. Она ляжет на пленку произвольным образом (рис. 7.32, б). Если проколоть мыльную пленку внутри петли, то петля тут же примет форму *окружности* (рис. 7.32, в), что соответствует наименьшей в данной ситуации площади поверхностного слоя сохранившейся (непроколотой) части мыльной пленки.

Опыт второй. Возьмем тонкую швейную иглу, смажем ее каким-нибудь жиром и крайне осторожно положим плашмя на поверхность воды в некотором сосуде. Можно наблюдать, что игла не тонет, а плавает на поверхности воды. Объяснение этому удивительному факту дает рисунок 7.33, где пока-

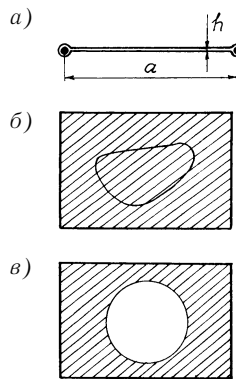


Рис. 7.32

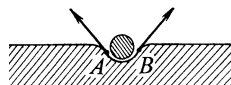


Рис. 7.33

зано поперечное сечение иглы и выделен участок AB поверхности воды, слегка прогнувшейся под иглой. Стрелками показаны силы поверхностного натяжения, действующие по контуру выделенного участка. Легко видеть, что эти силы дают в сумме силу, направленную вертикально вверх, которая как раз и уравнивает силу тяжести тонкой иглы.

Обозначим через F модуль силы поверхностного натяжения, действующей на участок контура длиной l (участок контура полагаем прямолинейным; возможно, придется рассматривать участок достаточно малой длиной Δl , на который действует частичная сила поверхностного натяжения ΔF). Отношение $\frac{F}{l}$ (или $\frac{\Delta F}{\Delta l}$) есть известная физическая величина — поверхностное натяжение σ :

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (7.26)$$

Здесь уместно напомнить, что *единица поверхностного натяжения — джоуль на квадратный метр* — есть в то же время *ньютон на метр*. Можно сказать, что ньютон на метр равен поверхностному натяжению, создаваемому силой 1 Н, приложенной к участку контура поверхности длиной 1 м и действующей нормально к контуру и по касательной к поверхности.

Чтобы убедиться в том, что отношение $\frac{F}{l}$ действительно есть определяемая соотношением (7.25) физическая величина σ , рассмотрим затянутую пленкой жидкости прямоугольную рамку с подвижной перекладиной длиной l (рис. 7.34, а). С каждой из двух сторон пленка ограничена поверхностным слоем, стремящимся к сокращению своей поверхности, а потому действующим на перекладину с некоторой силой поверхностного натяжения, которую обозначим через \vec{F} . Чтобы перекладина была в равновесном состоянии, к ней надо приложить действующую в противоположном направлении силу $F_1 = 2F$. Множитель 2 объясняется тем, что тонкая пленка жидкости ограничена двумя поверхностными слоями. Измерив F_1 , мы тем самым найдем силу поверхностного натяжения F .

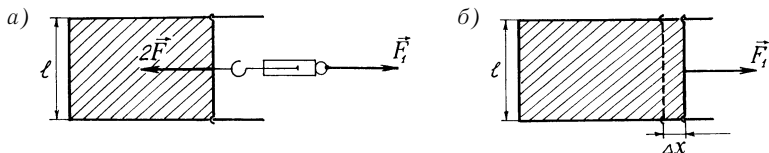


Рис. 7.34

С помощью силы \vec{F}_1 будем равномерно перемещать подвижную перекладину и передвинем ее на Δx (рис. 7.34, б), тем самым увеличив общую площадь поверхностного слоя пленки на $\Delta S = 2l\Delta x$. Это означает, что в соответствии с (7.25) поверхностный слой пленки приобретает дополнительную энергию $\Delta U_n = \sigma\Delta S = 2\sigma l\Delta x$. Понятно, что это приращение энергии равно работе силы \vec{F}_1 на перемещении Δx ; следовательно,

$$2\sigma l\Delta x = F_1\Delta x.$$

Учитывая, что $F_1 = 2F$, заключаем отсюда: $F = \sigma l$, т. е. приходим к соотношению (7.26).

Мы убедились, что возможны два равнозначных определения поверхностного натяжения:

$$\sigma = \frac{U_n}{S} = \frac{F}{l}. \quad (7.27)$$

Итак, *приходящаяся на единицу поверхности жидкости поверхностная энергия* (отношение $\frac{U_n}{S}$) есть в то же время *приходящийся на единицу длины границы поверхностного слоя модуль силы поверхностного натяжения* (отношение $\frac{F}{l}$). Под «границей» следует понимать любой контур, ограничивающий поверхностный слой.

7.3.3. Давление в жидкости под изогнутой свободной поверхностью

На рисунках 7.35, а, б представлена изогнутая (*выпуклая*) свободная поверхность жидкости. Выделим участок поверхностного слоя, ограничив его замкнутым контуром $MKNL$, представляющим собой сечение изогнутой поверхности жидкости некоторой горизонтальной плоскостью. Силы поверхностного натяжения стремятся сократить площадь выделенного участка. Это означает, что они *стремятся преобразовать изогнутую поверхность жидкости в участок горизонтальной плоскости*, ограниченный

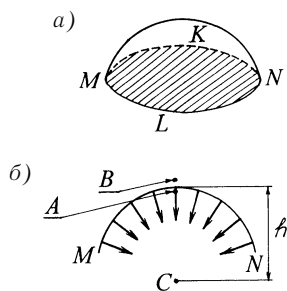



Рис. 7.35

контуром $MKNL$ (он показан на рисунке 7.35, *а* штриховкой). Такое преобразование поверхности предполагает наличие действующих на поверхностный слой жидкости сил давления, *направленных внутрь жидкости* (см. стрелки на рисунке 7.35, *б*). В результате давление в жидкости под выпуклой поверхностью *увеличивается* на некоторую величину Δp по сравнению с давлением под плоской поверхностью, равным, очевидно, давлению p_0 в воздухе. (Как правило, давление p_0 есть атмосферное давление; если же жидкость помещена в барокамеру, где поддерживается давление p' , то в этом случае $p_0 = p'$.) Рассмотрим две точки — точку A в поверхностном слое жидкости и точку B в воздухе. Обозначим через p давление жидкости в точке A , а через p_0 давление воздуха в точке B . Учитывая сказанное выше, представим

$$p = p_0 + \Delta p. \quad (7.28)$$

 Обратим внимание: точка A находится в поверхностном слое жидкости. Давление в точке C , находящейся на h ниже точки A , равно не $p_0 + \Delta p$, а $p_0 + \Delta p + \rho gh$, где ρ — плотность жидкости.

Величина Δp , называемая иногда *поверхностным* или *капиллярным* давлением, *увеличивается с возрастанием кривизны поверхности жидкости и повышением поверхностного натяжения* σ ; в случае плоской поверхности капиллярное давление отсутствует. Если поверхность жидкости имеет форму сферы радиусом R , то в этом случае

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.29)$$

Предположим теперь, что свободная поверхность жидкости является *вогнутой* (рис. 7.36). Выделим участок поверхностного слоя, ограничив его контуром $MKNL$.

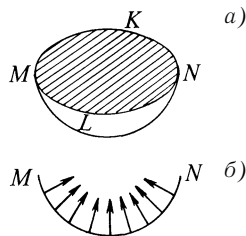


Рис. 7.36

а) Силы поверхностного натяжения стремятся сделать этот участок плоским и обуславливают появление действующих на поверхностный слой сил давления, *направленных наружу от жидкости* (см. стрелки на рисунке 7.36, *б*). В результате давление в жидкости под вогнутой поверхностью *уменьшается* на Δp и может быть представлено в виде

$$p = p_0 - \Delta p. \quad (7.30)$$

Давление p_0 может быть атмосферным давлением, а также давлением воздуха в барокамере или давлением внутри пузырька воздуха, находящегося в жидкости (в частности, давлением внутри мыльного пузыря).

Выведем формулу (7.29), рассмотрев каплю жидкости в форме шара радиусом R . Поверхностный слой является в данном случае сферической оболочкой с внешним радиусом R и внутренним радиусом $R - r_0$ (r_0 — толщина поверхностного слоя). Диаметральной плоскостью рассечем мысленно каплю на два полушария (рис. 7.37). При этом поверхностный слой расщелется на две части. Линией раздела частей является контур Σ , имеющий форму окружности длиной $2\pi R$. Тенденция верхней части поверхностного слоя к сокращению проявляется в том, что она действует на нижнюю часть с силами поверхностного натяжения, равномерно распределенными по контуру Σ и направленными вертикально вверх (см. стрелки на рисунке). Полная сила \vec{F} поверхностного натяжения, действующая на нижнюю часть поверхностного слоя по всему контуру Σ , направлена вертикально вверх и равна по модулю произведению натяжения σ на длину контура $2\pi R$:

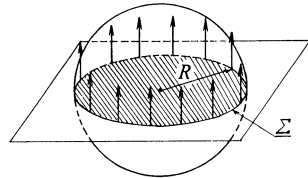


Рис. 7.37

$$F = 2\pi R\sigma.$$

Именно с такой силой нижнее полушарие капли давит на верхнее по поверхности раздела полушарий, показанной на рисунке штриховкой и имеющей площадь $S = \pi R^2$. В результате внутри верхнего полушария возникает добавочное давление, равное $\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\sigma}{R}$.

Замечание

Нижняя часть поверхностного слоя также стремится к сокращению; поэтому она действует на верхнюю часть с силами поверхностного натяжения, равномерно распределенными по контуру и направленными вертикально вниз. Полная сила поверхностного натяжения, действующая на верхнюю часть поверхностного слоя, равна по модулю $2\pi R\sigma$ и направлена вниз — в соответствии с третьим законом Ньютона. Получается, что обе части поверхностного слоя притягиваются друг к другу с силой $F = 2\pi R\sigma$ и тем самым сдавливают каплю, обуславливая тем самым возникновение в каждой точке внутри капли добавочного давления $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$.

Задача 1. Внутри жидкости находится пузырек воздуха в форме шара радиусом R . Используя закон сохранения энергии, вывести формулу для обусловленной кривизной поверхности жидкости разницы давлений $p_0 - p$, где p_0 — давление воздуха в пузырьке, а p — давление жидкости в ее поверхностном слое. Поверхностное натяжение жидкости равно σ .

□ Предположим, что радиус пузырька увеличился на малую величину ΔR . При этом будет совершена работа A , равная произведению разности сил давления $4\pi R^2 p_0$ и $4\pi R^2 p$ на перемещение ΔR :

$$A = (p_0 - p) \cdot 4\pi R^2 \Delta R. \quad (1^*)$$

Эта работа пойдет на увеличение $\Delta U_{\text{п}}$ поверхностной энергии. Величина $\Delta U_{\text{п}}$ выражается, в соответствии с (7.25), соотношением

$$\Delta U_{\text{п}} = \sigma \Delta S, \quad (2^*)$$

где ΔS — увеличение площади поверхности пузырька. Очевидно, что

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2 = 8\pi R \Delta R + 4\pi(\Delta R)^2.$$

Пренебрегая слагаемым $4\pi(\Delta R)^2$ как величиной второго порядка малости, перепишем (2*) в виде

$$\Delta U_{\text{п}} = 8\pi\sigma R \Delta R. \quad (3^*)$$

Приравняв (1*) и (3*), получаем равенство

$$(p_0 - p) \cdot 4\pi R^2 \Delta R = 8\pi\sigma R \Delta R,$$

откуда следует, что $p_0 - p = \frac{2\sigma}{R}$.

Обратим внимание: мы еще раз вывели формулу (7.29), воспользовавшись в данном случае законом сохранения энергии. ■

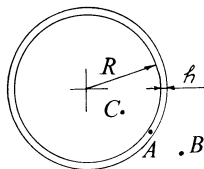


Рис. 7.38

Задача 2 (рис. 7.38). Ребенок выдул мыльный пузырек в форме шара радиусом $R = 4$ мм. Атмосферное давление равно $p_0 = 100\,250$ Па. Поверхностное натяжение раствора мыла в воде $\sigma = 0,04$ Н/м. Требуется найти давление воздуха внутри мыльного пузырька.

□ Шарообразный мыльный пузырек представляет собой заполненную водой тонкую сферическую оболочку толщиной $h \approx 10^{-8}$ м. Поскольку $h \ll R$, можно считать, что как внешний, так и внутренний радиусы сферической оболочки равны R . Давление в точке B равно p_0 (атмосферное

давление), давление в точке C обозначим через p' (искомое давление), давление в точке A обозначим через p_A . Рассматривая давление в точке A как давление жидкости под выпуклой поверхностью, воспользуемся соотношением (7.28), которое в данном случае можно записать, с учетом (7.29), в виде

$$p_A = p_0 + \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.31)$$

Рассматривая давление в точке как давление жидкости под вогнутой поверхностью, воспользуемся соотношением (7.30) и запишем

$$p_A = p' - \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.32)$$

Из (7.31) и (7.32) находим

$$p' - \frac{2\sigma}{R} = p_0 + \frac{2\sigma}{R},$$

откуда следует, что

$$p' = p_0 + \frac{4\sigma}{R}. \quad (7.33)$$

Подставив в (7.33) числовые значения, находим

$$p' = 100\,260 \text{ Па.}$$

Как видим, давление внутри мыльного пузыря радиусом 4 мм всего лишь на 0,01% больше атмосферного давления. ■

7.3.4. Смачивание и несмачивание

На границе жидкость—газ можно было не считаться с силами сцепления между молекулами жидкости и газа и учитывать только межмолекулярное сцепление внутри жидкости. На границе жидкость—твердое тело надо учитывать силы сцепления как между молекулами самой жидкости (силы $\vec{F}_{\text{жж}}$), так и между молекулами жидкости и твердого тела (силы $\vec{F}_{\text{жт}}$). Если силы $\vec{F}_{\text{жж}}$ меньше сил $\vec{F}_{\text{жт}}$, то говорят, что данная жидкость *смачивает* данное тело (является *смачивающей* по отношению к данному телу). Если же силы $\vec{F}_{\text{жж}}$ больше сил $\vec{F}_{\text{жт}}$, то говорят, что данная жидкость *не смачивает* данное тело (является *несмачивающей* по отношению к телу). Например, стекло смачивается водой, но не смачивается ртутью.

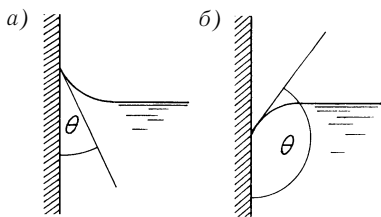


Рис. 7.39

(так называемый краевой угол) будет *острым углом* (рис. 7.39, а). Если же не смачивает, то краевой угол θ будет *тупым* (рис. 7.39, б). Когда $\theta = 0$, говорят о *полном смачивании*; когда $\theta = \pi$, говорят о *полном несмачивании*.

Примечание

Возникновение острого краевого угла в случае, когда $\vec{F}_{\text{жжк}} < \vec{F}_{\text{жт}}$, поясняет рисунок 7.40, а; возникновение тупого краевого угла при $\vec{F}_{\text{жжк}} > \vec{F}_{\text{жт}}$ поясняет рисунок 7.40, б. На рисунках показаны силы межмолекулярного сцепления, действующие на малый участок поверхностного слоя жидкости в точке А, находящейся на границе трех сред (жидкости, твердого тела, воздуха). Свободная поверхность жидкости в этой точке ориентируется перпендикулярно вектору $\vec{F} = \vec{F}_{\text{жжк}} + \vec{F}_{\text{жт}}$ (см. пунктирные прямые на рисунках).

Видно, что $\theta < \frac{\pi}{2}$ в случае (а) и $\theta > \frac{\pi}{2}$ в случае (б).

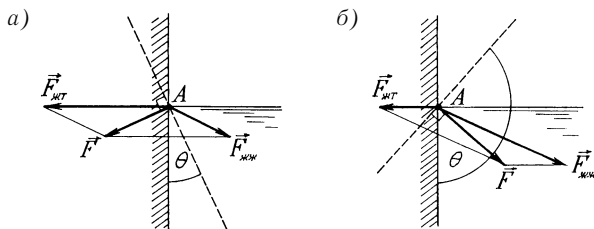


Рис. 7.40

Смачивание широко применяется как в промышленности, так и в быту. Оно необходимо при крашении, стирке, нанесении лакокрасочных покрытий, склеивании, пайке. Чтобы, например, расплавленный припой растекался по поверхности спаиваемых металлов и прилипал к ним, надо в целях улучшения смачивания тщательно очищать поверхности от жира и пыли. Детали из меди

хорошо паять оловянным припоем, который, однако, не смачивает алюминий. Для пайки деталей из алюминия применяется припой, состоящий из алюминия и кремния.

7.3.5. Капиллярные явления

Смачивание (несмачивание) принципиально важно в *капиллярных явлениях*, наблюдаемых при использовании узких трубок — *капилляров* (от латинского слова *capillaris*, означающего «волосной»).

Предположим, жидкость *смачивает* капилляр, представляющий собой узкую трубку с каналом радиусом r . Свободная поверхность жидкости образует в такой трубке *вогнутый мениск*, который можно рассматривать как часть сферической поверхности (рис. 7.41, *а*). Если θ — краевой угол, то радиус этой сферы равен

$$R = \frac{r}{\cos\theta}. \quad (7.34)$$

При $\theta = 0$ (при полном смачивании) мениск становится полусферой, при этом $R = r$.

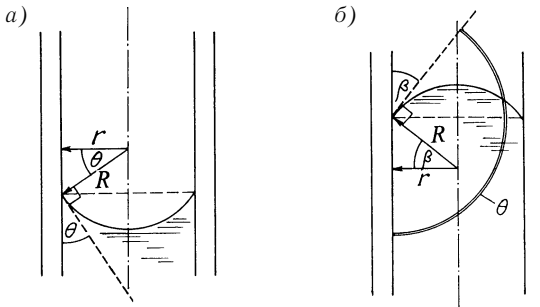


Рис. 7.41

Если жидкость *не смачивает* капилляр, то ее свободная поверхность образует *выпуклый мениск* (рис. 7.41, *б*). Как видно из рисунка, в этом случае $R = \frac{r}{\cos\beta}$. Так как $\beta = \pi - \theta$, то, следовательно, $R = \frac{r}{\cos\theta}$ — соотношение (7.34) выполняется также и для выпуклого мениска. Понятно, что $R = r$ при полном несмачивании (при $\theta = \pi$).

В соответствии с (7.28)—(7.30) и с учетом (7.34), давление жидкости в поверхностном слое выпуклого мениска равно

$$p_{\text{вып}} = p_0 + \frac{2\sigma}{R} = p_0 + \frac{2\sigma}{R} \cos\theta, \quad (7.35)$$

а в поверхностном слое вогнутого мениска равно

$$p_{\text{вог}} = p_0 - \frac{2\sigma}{R} = p_0 - \frac{2\sigma}{R} \cos\theta. \quad (7.36)$$

Здесь p_0 — давление воздуха (или пара) над мениском.

Погрузим конец вертикально ориентированного капилляра в сосуд со смачивающей жидкостью плотностью ρ . Жидкость поднимается в капилляре на высоту h по отношению к ее уровню в сосуде (рис. 7.42, а). Обозначим через p_A, p_B, p_C давление жидкости в точках A, B, C , соответственно. Ясно, что $p_A = p_0$ (p_0 — атмосферное давление), а $p_B = p_C + \rho gh$. Согласно (7.36), $p_C = p_0 - \frac{2\sigma}{R}$. Точки A и B находятся на одной и той же горизонтальной плоскости Z ; поэтому $p_A = p_B$ и, следовательно, $p_0 = \left(p_0 - \frac{2\sigma}{R}\right) + \rho gh$. Отсюда находим высоту h подъема жидкости в капилляре:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}. \quad (7.37)$$

Если жидкость не смачивает капилляр, она опускается на h относительно своего уровня в сосуде (рис. 7.42, б). Величина h определяется соотношением (7.37). Убедимся в этом, рассмотрев давление жидкости в точках A, B, C . Понятно, что $p_A = p_0$ и $p_B = p_A + \rho gh$. Согласно (7.35), $p_C = p_0 + \frac{2\sigma}{R}$. Так как $p_C = p_B$ (поскольку точки C и B находятся на одной и той же горизонтальной

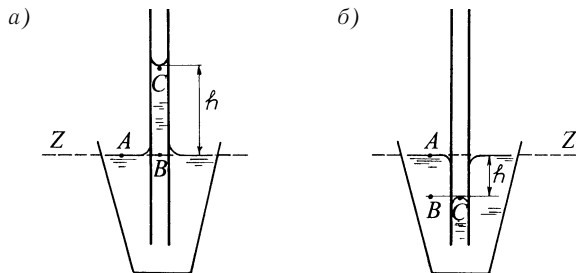


Рис. 7.42

плоскости Z), то, следовательно, $p_0 + \frac{2\sigma}{R} = p_A + \rho gh = p_0 + \rho gh$,

откуда получаем $h = \frac{2\sigma}{\rho g R}$.

Если жидкость полностью смачивается (или полностью не смачивается), то вместо (7.37) следует использовать соотношение

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}. \quad (7.38)$$

В этом случае $\sigma = \frac{1}{2} \rho g h r$. Зная плотность жидкости, радиус канала капилляра и измерив высоту подъема (опускания) жидкости в капилляре, можно определить поверхностное натяжение жидкости σ . Этот способ измерения поверхностного натяжения часто используют на практике.

Капиллярные явления широко проявляются в природе. Движение и сохранение воды в почве определяется в значительной мере наличием в ней узких промежутков, играющих роль капилляров. Капилляры в древесине способствуют подъему воды в деревьях от корней к кроне. Капиллярные явления находят широкое применение также в быту. Использование полотенец и салфеток возможно лишь благодаря наличию в них своеобразных капилляров.

Задача (рис. 7.43). Длинную стеклянную капиллярную трубку, радиус канала которой равен $r = 1$ мм, закрыли снизу и наполнили водой. Трубку поставили и открыли ее нижний конец; при этом часть воды вылилась. Требуется найти высоту столбика воды, оставшейся в капилляре. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, поверхностное натяжение $\sigma = 0,07$ Н/м. Смачивание можно считать полным.

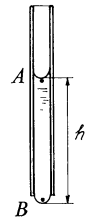


Рис. 7.43

□ Давление в точке A равно

$$p_A = p_0 - \frac{2\sigma}{r}, \quad (1^*)$$

а в точке B равно

$$p_B = p_0 + \frac{2\sigma}{r}, \quad (2^*)$$

где p_0 — атмосферное давление. Вычтем почленно (1*) из (2*) и учтем, что $p_B - p_A = \rho gh$, где h — искомая высота столбика воды в трубке. Получим: $\rho gh = \frac{2\sigma}{r} + \frac{2\sigma}{r}$, откуда следует, что $h = \frac{4\sigma}{\rho g r} =$

$= 2,85$ см. ■

7.4. ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

7.4.1. О жидкости в гидродинамике и газодинамике

В предыдущих параграфах мы обсуждали механику жидкости (а также газа), находящейся в состоянии покоя. Теперь будем рассматривать *движение* жидкости (газа), т. е. обратимся к *гидродинамике* и *газодинамике*. Слово «движение» следует понимать в общем случае как «относительное движение». Это может быть движение твердых тел в неподвижной среде (например, полет авиалайнера в воздушной среде или движение корабля в водной среде).

Заметим, что в гидродинамике и газодинамике принято именовать находящееся в движении вещество «*жидкостью*» независимо от его агрегатного состояния (жидкого или газообразного). Если хотят отметить, что речь идет именно о жидком, а не газообразном состоянии, употребляют термин «капельная жидкость».

Различают *сжимаемую жидкость* (обычно это газ) и *несжимаемую жидкость* — капельные жидкости, а также газы в тех случаях, когда их сжимаемостью можно пренебречь (последнее допустимо, если скорость потока газа существенно меньше скорости распространения звука в газе). При использовании приближения несжимаемой жидкости полагают, что *плотность среды во всех ее точках одна и та же*.

Одна из важнейших характеристик жидкости — ее *вязкость*, или *внутреннее трение*; мы ввели эту физическую величину в § 2.3.5. Если жидкость и контактирующие с ней тела неподвижны, вязкость не обнаруживает себя. Поэтому при рассмотрении статики жидкости можно было не принимать во внимание вязкость. Учет вязкости жидкости может стать принципиально важным, когда жидкость движется сама или в жидкости движется твердое тело. *Всем реальным жидкостям и газам в той или иной мере присуще внутреннее трение*. Оно проявляется, в частности, в том, что возникающее в среде движение постепенно затухает после прекращения действия причин, которые его вызвали.

Однако некоторые вопросы гидродинамики и газодинамики могут быть рассмотрены в *приближении идеальной жидкости*. *Идеальной называют абстрактную жидкость, в которой вязкость отсутствует*. В идеальной жидкости игнорируются силы трения как между движущимися слоями жидкости, так и на границе жидкости и твердого тела. (Последнее означает, что молекулярное сцепление между жидкостью и твердыми стенками или на-

ходящимися в жидкости твердыми телами не принимается во внимание.) Поскольку в идеальной жидкости нет внутреннего трения, ее *механическая энергия не превращается во внутреннюю энергию*.

В данном параграфе будем рассматривать гидродинамику идеальной несжимаемой жидкости.

7.4.2. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности

Чтобы описать движение жидкости, можно было бы поступить так, как это делалось в отношении твердого тела. Можно было бы мысленно разбить всю массу жидкости на частицы и попытаться проследить, как ведет себя с течением времени каждая частица. Такой весьма трудоемкий способ описания жидкости разрабатывался французским математиком Жозефом Лагранжем. Значительно проще поступить иначе: сосредоточить внимание не на отдельных частицах, проходящих со временем через разные точки пространства, а на отдельных точках пространства, через которые с течением времени проходят разные частицы жидкости. Такой способ описания движущейся жидкости предложил швейцарский математик и физик Леонард Эйлер. Мы будем рассматривать движение жидкости, следуя Эйлеру.

Выберем некоторый момент времени и предположим, что известны векторы скорости \vec{v} частиц жидкости, оказавшихся в разных точках пространства. Представим себе, что пространство, занимаемое жидкостью, заполнено такими векторами \vec{v} . Проведем в пространстве плавные линии таким образом, чтобы в каждой их точке касательная к

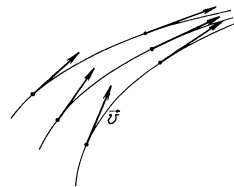


Рис. 7.44

линии имела направление вектора \vec{v} в этой точке (рис. 7.44). Эти линии называют *линиями тока*. Через каждую точку пространства можно провести линию тока; пространство буквально заполнено линиями тока. Разумеется, на рисунках, изображающих картины линии тока, показаны лишь некоторые из этих линий, позволяющие судить о характере картины линий. Направления линий тока позволяют судить о направлении движения жидкости в том или ином месте пространства, а густота линий (число линий, пересекающих единичную поперечную площадку) говорит о том, насколько велика скорость движения жидкости в соответствующем месте пространства. Чем больше скорость, тем гуще располагаются линии тока.

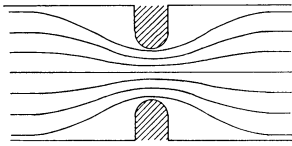


Рис. 7.45

В общем случае распределение скоростей частиц \vec{v} в пространстве может со временем изменяться. Соответственно будет изменяться со временем и картина линии тока. Нас будут интересовать случаи, когда движение жидкости является *стационарным*, т. е.

когда в каждой точке пространства вектор скорости \vec{v} сохраняется неизменным. Конечно, в разные моменты времени в любой заданной точке пространства будут оказываться разные частицы (ведь жидкость находится в движении!), но все они будут иметь одну и ту же скорость. *Картина линий тока в стационарном потоке со временем не изменяется.* Заметим, что линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц жидкости. В качестве примера на рисунке 7.45 показаны линии тока в стационарном потоке, протекающем сквозь отверстие. Вблизи отверстия линии располагаются наиболее густо — там скорость движения жидкости наибольшая.

Стационарный поток можно мысленно разбить на *трубки тока* — участки жидкости, ограниченные линиями тока (рис. 7.46). Будучи касательными к линиям тока, векторы \vec{v} будут

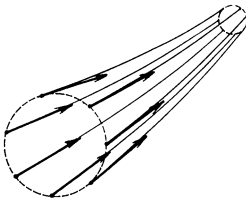


Рис. 7.46

касательными и к поверхности трубки тока. Следовательно, при своем движении частицы жидкости не пересекают стенок трубки тока — трубка тока подобна *непроницаемой для частиц трубке.*

Рассмотрим некоторую узкую трубку тока между двумя поперечными сечениями 1 и 2 (рис. 7.47). В случае достаточно узкой трубки можно считать, что скорость частиц жидкости во всех точках того или иного поперечного сечения трубки одна и та же. Обозначим через ρ_1 и v_1 соответственно плотность и модуль скорости жидкости в сечении 1, имеющем площадь S_1 , а через ρ_2 и v_2 — в сечении 2 площадью S_2 . За малый промежуток времени Δt через сечение 1 пройдет масса жидкости $\rho_1 S_1 v_1 \Delta t$, а через сечение 2 — масса $\rho_2 S_2 v_2 \Delta t$. Поскольку жидкость в своем движении не пересекает стенок

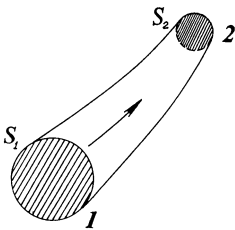


Рис. 7.47

трубки и струя не разрывается, то указанные массы равны и, следовательно,

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (7.39)$$

Это есть *уравнение неразрывности* для сжимаемой жидкости. Если жидкость несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2$ и (7.39) принимает вид:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (7.40)$$

Итак, в несжимаемой жидкости (капельной жидкости или газе при малой скорости его потока) *скорость в узких местах трубки больше, чем в широких*. С этим выводом согласуется тот факт, что в узких местах трубки линии тока располагаются гуще, чем в широких местах.

7.4.3. Уравнение Бернулли

Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы; оно применимо к стационарному потоку как идеальной, так и реальной (вязкой) жидкости. Рассматриваемое ниже *уравнение Бернулли* (названное так в честь швейцарского математика и физика Даниила Бернулли) получено для *идеальной жидкости* (точнее сказать: для идеальной несжимаемой жидкости). При выводе этого уравнения предполагается, что механическая энергия движущейся жидкости не превращается во внутреннюю энергию.

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ по трубке тока (рис. 7.48). Трубку выберем достаточно узкую, чтобы можно было полагать постоянной скоростью жидкости во всех точках поперечного сечения трубки. Выделим мысленно объем жидкости в трубке между сечением AB площадью S_1 и сечением CD площадью S_2 . Обозначим модуль скорости жидкости в сечении AB через v_1 , а в сечении CD — через v_2 . Будем полагать, что жидкость на рисунке течет слева направо, при этом высота центра трубки возрастает с h_1 до h_2 .

За малый промежуток времени Δt выделенный объем жидкости в трубке немного сместится вправо и займет часть трубки между сечениями $A'B'$ и $C'D'$. Виду малости Δt будем

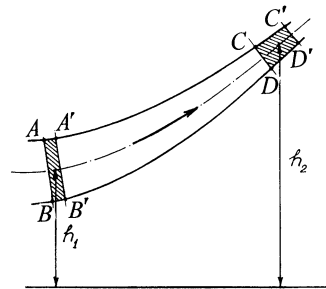


Рис. 7.48

считать, что площади этих сечений и скорости жидкости в них — такие же, как для сечений AB и CD , соответственно. На выделенный в трубке объем жидкости действуют следующие силы: сила тяжести, силы давления на боковые стенки, силы давления на торцы (на сечения AB и CD). В действительности есть еще силы внутреннего трения, но здесь они не принимаются во внимание. Найдем работу, которую совершили все упомянутые выше силы за время Δt .

Работа сил давления на боковые стенки равна нулю, поскольку эти силы направлены перпендикулярно к скорости потока. Работа сил, действующих на сечение AB , равна

$$A_1 = p_1 S_1 \Delta l_1, \quad (1^*)$$

где p_1 — давление жидкости в сечении AB , $\Delta l_1 = AA'$. Работа сил, действующих на сечение CD , равна

$$A_2 = - p_2 S_2 \Delta l_2, \quad (2^*)$$

где p_2 — давление жидкости в сечении CD , $\Delta l_2 = CC'$. Знак «минус» объясняется тем, что эти силы направлены навстречу движению жидкости. Работу силы тяжести обозначим пока через A_3 .

Согласно *теореме об изменении кинетической энергии* (напомним читателю п. 5.4.1), алгебраическая сумма работ, совершенных над выделенной в трубке жидкостью, равна изменению ΔK ее кинетической энергии:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \Delta K. \quad (3^*)$$

Согласно *теореме об изменении потенциальной энергии* (напомним читателю п. 5.5.2), работа A_3 равна взятому с обратным знаком изменению ΔU потенциальной энергии выделенной в трубке жидкости: $A_3 = -\Delta U$. Подставив A_3 в (3*), получим соотношение:

$$A_1 + A_2 = \Delta K + \Delta U. \quad (4^*)$$

Обратим внимание на то, что энергия жидкости, заключенной между сечениями $A'B'$ и CD , не изменяется со временем; поэтому сумма $\Delta K + \Delta U$ в (4*) может рассматриваться как изменение механической энергии массы жидкости, которая сначала занимала объем между сечениями AB и $A'B'$, а затем оказалась между сечениями $C'D'$ и CD . Учитывая это, представим

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho S_2 \Delta l_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta l_1 v_1^2, \quad (5^*)$$

$$\Delta U = \rho S_2 \Delta l_2 \Delta g h_2 - \rho S_1 \Delta l_1 \Delta g h_1. \quad (6^*)$$

Подставим (1*), (2*), (5*), (6*) в (4*), учтем, что $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$ и $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$, и воспользуемся уравнением неразрывности (7.40). В результате соотношение (4*) принимает вид:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1.$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2. \quad (7.41)$$

Это и есть *уравнение Бернулли*, являющееся основным законом гидродинамики и газодинамики. Учитывая, что давления $\frac{1}{2} \rho v^2$ и $\rho g h$ называют, соответственно, *плотностью кинетической энергии* и *плотностью потенциальной энергии*¹⁾, сформулируем **уравнение Бернулли** следующим образом:

Сумма давления и плотности кинетической и потенциальной энергий идеальной несжимаемой жидкости остается постоянной в любом поперечном сечении трубки тока.

В соотношение (7.41) не входит площадь поперечного сечения трубки тока. Поэтому можно считать, что это соотношение сохраняется, если трубку сделать предельно узкой, т. е. *стянуть ее в линию тока*. Учитывая это, дадим еще одну формулировку уравнения Бернулли:

Сумма давления и плотностей кинетической и потенциальной энергий идеальной несжимаемой жидкости остается постоянной во всех точках любой линии тока.

Если трубка или линия тока горизонтальны, соотношение (7.41) принимает более простой вид:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (7.42)$$

7.4.4. Следствия из уравнения Бернулли

Из уравнения Бернулли следует, что *с увеличением скорости течения давление в жидкости уменьшается*. Под жидкостью, на-

¹⁾ Прежние названия «динамическое давление» и «гидравлическое давление» признаны неудачными.

поминаем, надо понимать как капельную жидкость (настоящую жидкость), так и газ. Данное следствие из уравнения Бернулли можно эффектно продемонстрировать в следующем крайне простом опыте. Возьмем лист бумаги, перегнем его пополам и наденем на линейку так, как это показано на рисунке 7.49. Если сильно подуть между слегка расходящимися половинками листа, то можно наблюдать удивительное для многих явление: половинки листа не только не разойдутся еще больше, но напротив, резко сблизятся, как бы слипнутся. Это объясняется тем, что давление в струе воздуха между половинками листа меньше давления с внешней стороны, равного атмосферному давлению.

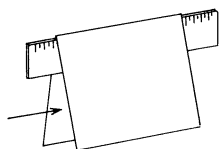


Рис. 7.49

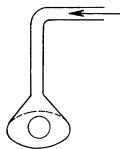


Рис. 7.50

Еще эффектнее опыт с легким целлулоидным шариком и воронкой (рис. 7.50). Положим шарик на ладонь и приблизим ладонь к воронке, обращенной книзу. Если сильно продувать воздух через трубку, то можно наблюдать, что шарик не только не упадет вниз, а напротив, поднимается внутрь ко-

нуса воронки — туда, где создано давление, более низкое по сравнению с атмосферным давлением непосредственно под шариком.

Можно проделать также опыт с *пульверизатором*, состоящим из двух трубок, ориентированных перпендикулярно друг другу (рис. 7.51). Через горизонтальную трубку продувается воздух. В узкой части воздушной среды (вблизи выходного конца трубки) давление воздуха оказывается меньше атмосферного давления. Поэтому атмосферное давление заставляет жидкость в сосуде подниматься по вертикальной трубке. Жидкость поднимается к концу трубки и там распыляется струей воздуха.

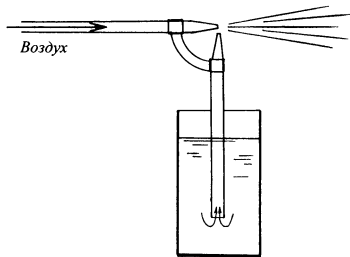


Рис. 7.51

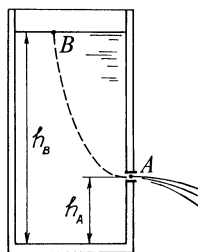


Рис. 7.52

Найдем с помощью уравнения Бернулли скорость истечения идеальной жидкости из отверстия, находящегося в стенке сосуда на высоте h_A ; уровень свободной поверхности жидкости в сосуде находится на высоте h_B (рис. 7.52). Применим уравнение (7.41) к линии тока, показанной на рисунке пунктиром. Выделим две точки на этой линии: точку A (сразу за отверстием) и точку B (на свободной поверхности жидкости). Давление в обеих точках равно атмосферному давлению p_0 , а скорость в точке B можно считать равной нулю, поскольку сосуд широк, а отверстие мало. В результате уравнение Бернулли (7.41) принимает вид:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh_A = p_0 + \rho gh_B,$$

где v — искомая скорость. Отсюда видно, что

$$v = \sqrt{2g(h_B - h_A)}. \quad (7.43)$$

Скорость истечения жидкости оказывается такой же, какую имело бы тело при свободном падении с высоты $h_B - h_A$.

Задача (рис. 7.53). Чему равна максимальная дальность полета струи воды из шприца диаметром $d = 4$ см, на поршень которого давит сила $F = 30$ Н? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Площадь поперечного сечения отверстия в игле много меньше площади поршня. Соппротивлением воздуха пренебречь.



Рис. 7.53

□ Применим уравнение Бернулли к линии тока, показанной на рисунке пунктиром. В точке A давление равно атмосферному давлению p_0 плюс давление, создаваемое силой F (оно равно $\frac{4F}{\pi d^2}$), а скорость обозначим через v_A . В точке B давление равно p_0 , а скорость обозначим через v_B . Таким образом

$$p_0 + \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{1}{2}\rho_0 v_A^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho_0 v_B^2. \quad (1^*)$$

Из уравнения неразрывности следует, что $S_0 v_B = \frac{1}{4} \pi d^2 v_A$, где S_0 — площадь поперечного сечения иглы шприца. С учетом этого уравнения, перепишем соотношение (1*) в виде:

$$\frac{4F}{\pi d^2} = \frac{1}{2} \rho_0 v_B^2 \left[1 - \left(\frac{4S_0}{\pi d^2} \right)^2 \right]. \quad (2^*)$$

Так как $4S_0 \ll \pi d^2$, соотношение (2*) упрощается: $v_B^2 = \frac{8F}{\pi \rho_0 d^2}$.

Максимальная дальность L полета струи достигается, если направить иглу шприца под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Используя соотношение (1.48) для $\alpha = 45^\circ$, получаем:

$$L = \frac{v_B^2}{g} = \frac{8F}{\pi \rho_0 g d^2}, \quad L = 4,9 \text{ м.} \quad \blacksquare$$

7.4.5. Трубка Пито—Прандтля

Трубка Пито—Прандтля — прибор для измерения скорости потока; изобретен в 1732 году французским ученым Анри Пито, позднее усовершенствован немецким ученым Людвигом Прандтлем.

Принцип действия прибора показан на рисунке 7.54. Имеющая U-образную форму трубка вводится в то место потока, где требуется измерить его скорость. Левое колено трубки открывается *навстречу потоку*, а мимо отверстия правого колена поток течет, практически не искажаясь. Внутри трубки находится манометрическая жидкость плотностью ρ_0 , превышающей плотность ρ жидкости в потоке.

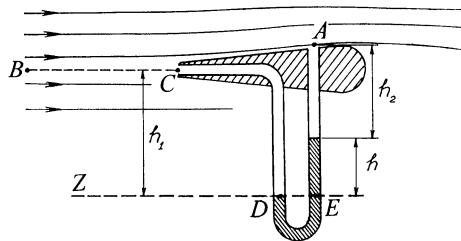


Рис. 7.54

Давление в трубке у отверстия A равно давлению p жидкости; давление в трубке у отверстия C обозначим через p_1 . Его можно выразить через давление p и подлежащую измерению скорость v жидкости, применив уравнение Бернулли к участку BC линии тока, изображенной на рисунке пунктиром (обратим внимание: скорость в точке C равна нулю):

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1. \quad (1^*)$$

Обозначим через p_D и p_E давление манометрической жидкости в трубке в точках D и E , соответственно. Легко видеть, что

$$p_D = p_C + \rho gh_1 = p_1 + \rho gh_1,$$

$$p_E = p_A + \rho gh_2 + \rho_0 gh = p + \rho gh_2 + \rho_0 gh.$$

Так как $p_D = p_E$, следовательно,

$$p_1 + \rho gh_1 = p + \rho gh_2 + \rho_0 gh.$$

Учитывая, что практически $h_1 - h_2 = h$, перепишем последнее равенство:

$$p_1 = p + (\rho_0 - \rho)gh. \quad (2^*)$$

Из (1*) и (2*) следует, что $p + (\rho_0 - \rho)gh = p + \frac{1}{2}\rho v^2$. Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)gh}{\rho}}. \quad (7.44)$$

Измерив h , можно найти v . Трубку Пито—Прандтля используют на судах и авиалайнерах как прибор для измерения скорости по отношению к воде или воздуху.

7.4.6. Сила реакции текущей жидкости

По изогнутой под углом β трубке постоянного сечения S течет поток идеальной несжимаемой жидкости плотностью ρ со скоростью, равной по модулю v . При прохождении через место изгиба трубы вектор скорости жидкости изменяет направление на угол β . Рассмотрим сечения 1 и 2 трубы (рис. 7.55). В сечении 1 скорость равна \vec{v}_1 , а в сечении 2 она равна \vec{v}_2 ($v_1 = v_2 = v$). За малый

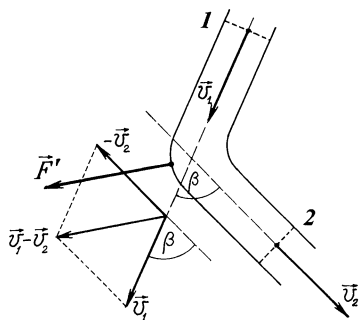


Рис. 7.55

жидкости. Таковыми являются сила тяжести и силы давления со стороны стенок трубы. Силой тяжести в данном случае пренебрежем. Используя (1*), выразим силу давления стенок трубы на жидкость в виде:

$$\vec{F} = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (7.45)$$

По третьему закону Ньютона, жидкость будет действовать на стенки трубы с равной и противоположно направленной силой \vec{F}' :

$$\vec{F}' = \rho S v (\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \quad (7.46)$$

Силу \vec{F}' называют *силой реакции текущей жидкости*.

На рисунке 7.55 показано направление вектора \vec{F}' ; оно совпадает с направлением вектора $\vec{v}' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Чтобы найти модуль вектора \vec{v}' , воспользуемся теоремой косинусов в применении к треугольнику, заштрихованному на рисунке: $(v')^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \beta$. Учитывая, что $v_1 = v_2 = v_3$, перепишем это равенство в виде:

$$(v')^2 = 2v^2 (1 - \cos \beta). \quad (2^*)$$

Таким образом,

$$F' = \rho S v \sqrt{2(1 - \cos \beta)}. \quad (7.47)$$

Наибольшая сила реакции наблюдается при $\beta = 180^\circ$: $F'_{\max} = 2\rho S v$. Этот случай представлен на рисунке 7.56.

промежуток времени Δt через сечение 1 протечет масса жидкости $\rho S v \Delta t$ и принесет с собой импульс $\vec{P}_1 = \rho S v \Delta t \vec{v}_1$. При этом через сечение 2 перетечет такая же масса, которая унесет с собой импульс $\vec{P}_2 = \rho S v \Delta t \vec{v}_2$. Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{F} \Delta t, \quad (1^*)$$

где \vec{F} — равнодействующая сил, приложенных к выделенной массе

Формулы (7.46) и (7.47) справедливы не только для трубы, но и вообще для любого тела, изменяющего на угол ρ направление движения струи жидкости сечением S . Силу реакции текущей жидкости (капельной жидкости, газа, пара) используют в *турбинах*. Струя жидкости, протекая по искривленным каналам колеса турбины, изменяет направление движения и создает силу реакции, вызывающую вращение колеса турбины.

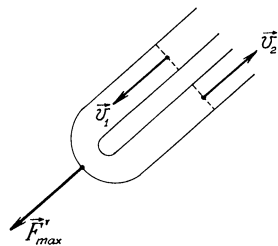


Рис. 7.56

7.5. ТЕЧЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

7.5.1. Вязкость (внутреннее трение)

Реальные жидкости обладают *вязкостью*; она сильнее выражена в капельных жидкостях и в существенно меньшей степени проявляется в газах. *Силы вязкости* (иначе говоря, *силы внутреннего трения*) возникают при относительном движении слоев жидкости, приложены к слоям и действуют по *касательным* к ним. Два граничных слоя, движущихся друг относительно друга, взаимодействуют вдоль поверхности слоев с равными по модулю и противоположно направленными силами внутреннего трения. В капельных жидкостях эти силы обусловлены сцеплением между молекулами слоев. В газах же межмолекулярное сцепление очень мало, но зато велика подвижность молекул, а потому силы внутреннего трения возникают главным образом за счет обмена молекулами между слоями.

Мысленно выделим в потоке жидкости два параллельных слоя 1 и 2 площадью S каждый, отстоящих друг от друга на Δz (рис. 7.57).

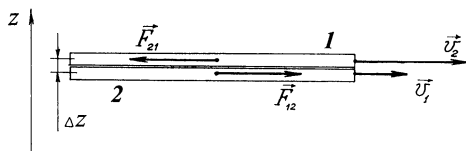


Рис. 7.57

Пусть слой 1 движется со скоростью \vec{v}_1 , а слой 2 — со скоростью \vec{v}_2 . Будем полагать, что слои движутся в одном направлении, но $v_1 < v_2$. Слой 1 действует на слой 2 с силой внутреннего трения \vec{F}_{12} , а слой 2 на слой 1 — с силой \vec{F}_{21} . По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Обозначим через F модуль сил \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} . Опыт показывает, что

$$\frac{F}{S} \sim \frac{\Delta v}{\Delta z}, \quad (1^*)$$

где $\Delta v = v_2 - v_1$. Отношение $\frac{F}{S}$ называют *касательным напряжением*, а отношение $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ — *градиентом скорости*. Градиент скорости характеризует быстроту изменения скорости при переходе от слоя к слою в направлении, перпендикулярном к слоям. Соотношение (1*) означает, что касательное напряжение, возникающее на границе раздела слоев, пропорционально скорости изменения скорости при переходе от слоя к слою. Введя коэффициент пропорциональности η , приходим к *формуле Ньютона*:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z}. \quad (7.48)$$

Величина η есть *коэффициент внутреннего трения*, называемый обычно просто *вязкостью* (точнее, *динамической вязкостью*). Существует также понятие *кинематической вязкости*

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad (7.49)$$

где ρ — плотность жидкости.

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (7.48) следует, что

$$\text{единица вязкости} = \text{единица касательного напряжения} \times \text{единица времени}.$$

Единица касательного напряжения совпадает с единицей давления; в СИ это есть *паскаль*. Следовательно, единица вязкости в СИ есть *паскаль-секунда* (обозначение: Па · с). Паскаль-секунда равна вязкости среды, касательное напряжение в которой при разности

скоростей слоев 1 м/с, отстоящих друг от друга на 1 м, составляет 1 Па. Поскольку

$$\frac{\text{единица касательного напряжения}}{\text{единица силы}} = \frac{\text{единица площади}}{\text{единица площади}},$$

то можно полагать также, что

$$\frac{\text{единица вязкости}}{\text{единица площади}} = \frac{\text{единица силы} \times \text{единица времени}}{\text{единица площади}}.$$

Таким образом, единица вязкости в СИ есть *ньютон-секунда на квадратный метр* (обозначение: Н · с/м²). Разумеется, 1 Н · с/м² = 1 Па · с = 1 кг/(м · с).

Приведем значения вязкости η (Па · с) некоторых капельных жидкостей и газов при температуре 20 °С:

Вода	$1,1 \cdot 10^{-3}$
Ртуть	$1,6 \cdot 10^{-3}$
Эфир	$0,25 \cdot 10^{-3}$
Углекислый газ	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-5}$

Заметим, что вязкость воздуха при 20 °С в 60 раз меньше вязкости воды.

Обратим внимание на принципиальное отличие динамики реальной (вязкой) жидкости от динамики идеальной жидкости. При течении идеальной жидкости возникают на границах ее движущихся элементов и на стенках трубы или каких-либо твердых тел *только силы нормального давления*. Они перпендикулярны (нормальны) к поверхностям, на которые действуют. При течении реальной жидкости, кроме сил нормального давления, возникают на границах элементов жидкости, а также стенках труб и твердых тел *еще и касательные силы внутреннего трения* (силы вязкости). Если силы нормального давления работы над движущейся жидкостью не совершают (поскольку они перпендикулярны к направлению течения), то касательные силы работу над движущейся жидкостью совершают и при том отрицательную, что и приводит к постепенному уменьшению механической энергии движущейся жидкости.

В случае достаточно вязкой жидкости, которая, к тому же, течет по трубе относительно малого диаметра, характер изменения давления жидкости по длине трубы может не соответствовать и даже противоречить уравнению Бернулли. Поставим вдоль посте-

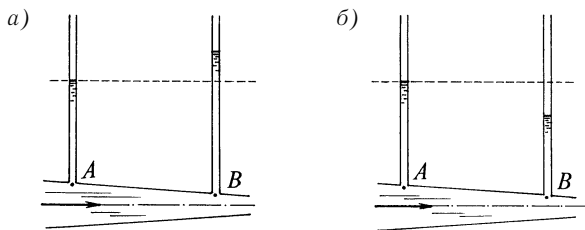


Рис. 7.58

пенно сужающейся трубы вертикальные манометрические трубки, позволяющие судить о давлении в разных точках трубы. На рисунке 7.58, *а* по трубе течет жидкость, близкая к идеальной (например, эфир). В этом случае давление в точке *В* больше давления в точке *А* — в соответствии с уравнением Бернулли. На рисунке 7.58, *б* по трубе течет более вязкая жидкость (например, ртуть). В этом случае давление в точке *В* меньше давления в точке *А*, что связано с постепенным уменьшением скорости жидкости вследствие превращения ее механической энергии во внутреннюю благодаря действию сил внутреннего трения.

7.5.2. Ламинарное и турбулентное течения. Число Рейнольдса

Выше мы мысленно разбивали текущую жидкость на параллельные слои, скользящие друг относительно друга, не перемешиваясь. Такое течение называют *ламинарным* (от латинского слова *lamina*, означающего «пластинка»). Движение идеальной жидкости является ламинарным при любом значении ее скорости. Движение реальной (вязкой) жидкости является ламинарным лишь до тех пор, пока силы внутреннего трения относительно невелики и не приводят к разрушению слоистости течения и возникновению перемешивания.

При возрастании сил внутреннего трения начинается активное перемешивание жидкости и ламинарное течение сменяется *турбулентным* (от латинского слова *turbulentus*, означающего «бурный», «беспорядочный»). При турбулентном течении скорость частиц в каждой точке пространства изменяется со временем беспорядочным образом. Если ламинарное течение является *стационарным*, то турбулентное, напротив, *нестационарно*.

Английский физик Осборн Рейнольдс установил, что характер течения зависит от значения следующей безразмерной величины:

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (7.50)$$

где ρ — плотность жидкости, v — усредненная по сечению трубы скорость потока, l — линейный размер поперечного сечения потока (например, диаметр трубы), η — вязкость жидкости. Величину Re называют *числом Рейнольдса*. Если число Рейнольдса не превышает примерно 2000, течение жидкости является ламинарным. Если же оно оказывается заметно больше 2000, течение становится турбулентным.

На рисунках 7.59 приведены диаграммы распределения скорости жидкости по сечению круглой трубы в трех случаях. На рисунке 7.59, *а* дана диаграмма для идеальной жидкости. В этом случае скорость во всех точках поперечного сечения одна и та же. Даже в точках на границе жидкости со стенками трубы она такая же, как на оси трубы. На рисунке 7.59, *б* дана диаграмма для ламинарного течения вязкой жидкости. В этом случае модуль скорости изменяется по мере удаления от стенки к оси трубы, возрастая от нуля до некоторого максимального значения. Обратим внимание на то, что на границе со стенкой трубы скорость жидкости равна нулю — вследствие вязкости жидкость буквально прилипает к стенкам трубы. На рисунке 7.59, *в* дана диаграмма для турбулентного течения. В этом случае жидкость у самой стенки не имеет скорости. Но ее средняя скорость быстро возрастает при удалении от стенки и оказывается практически постоянной почти во всем пространстве внутри трубы, что объясняется активным перемешиванием жидкости. Лишь в достаточно тонком слое, примыкающем к стенкам трубы (так называемом *пограничном слое*), сохраняется градиент скорости, который в данном случае намного больше градиента скорости в таком же пограничном слое в случае ламинарного течения вязкой жидкости.

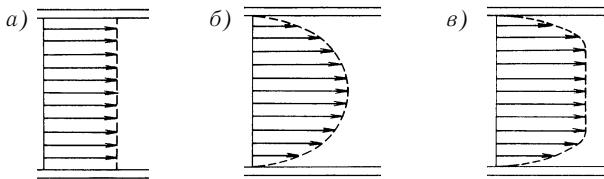


Рис. 7.59

7.5.3. Лобовое сопротивление при обтекании тел вязкой жидкостью

Предположим теперь, что жидкость не течет по трубе, а обтекает некоторое покоящееся твердое тело (или тело движется в покоящейся жидкости). Разложим силу, действующую на тело со стороны движущейся жидкости, на две составляющие: в направлении потока и в перпендикулярном направлении. Первую силу называют *лобовым сопротивлением*, вторую — *подъемной силой*.

Любопытно, что в случае, когда тело обтекает идеальная жидкость, лобовое сопротивление *вообще отсутствует*. Идеальная жидкость должна свободно скользить вдоль поверхности тела, полностью обтекая его и не создавая лобового сопротивления. К этому выводу пришел в XVIII столетии французский ученый Ж. Д'Аламбер (*парадокс Д'Аламбера*). Мы не будем анализировать этот парадокс. Отметим лишь, что для некоторых ученых того времени он послужил основанием для заключения о бесполезности теории идеальной жидкости.

Практическая ценность этой теории была признана после создания в начале XX столетия Людвигом Прандтлем *теории пограничного слоя*. Мы уже упоминали о нем в предыдущем пункте. Пограничный слой — это примыкающий к твердому телу тонкий слой вязкой жидкости толщиной

$$d = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (7.51)$$

где l — линейный размер обтекаемого тела. Если, например, $l = 0,1$ м, а $\text{Re} = 1000$, то $d = 3$ мм; при $\text{Re} = 10\,000$ толщина пограничного слоя снижается до 1 мм. Оказалось, что реальные жидкости во многих случаях проявляют вязкие свойства *лишь в пределах пограничного слоя*. А вне этого слоя они ведут себя подобно идеальной жидкости. Для объяснения некоторых явлений удобно рассматривать тело и примыкающий к нему пограничный слой как *нечто целое, обтекаемое потоком идеальной жидкости*.

В частности, лобовое сопротивление реальной жидкости обусловлено процессами, *происходящими именно в пограничном слое*. Лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. При ламинарном течении вязкой жидкости возникает *сопротивление трения*. Такое название объясняется тем, что благодаря внутреннему трению возникают касательные силы, действующие со стороны потока жидкости на «прилипший» к поверхности тела пограничный слой. При достаточно больших значениях числа Рейнольдса (при больших скоростях), когда возникает турбулентность, начинает преобладать *сопротивление давления*.

Такое название объясняется тем, что при образовании позади тела турбулентных завихрений там *понижается давление жидкости*; оно оказывается меньше давления жидкости, набегающей на тело. Разность давлений и обуславливает возникновение сопротивления давления.

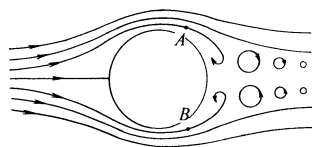


Рис. 7.60

На рисунке 7.60 показаны линии тока при обтекании шара вязкой жидкостью с большим числом Рейнольдса. В точках *A* и *B* происходит *отрыв пограничного слоя от поверхности шара*. Образуются *турбулентные вихри*, которые отрываются от тела, уносятся потоком и растворяются вдалеке от тела. В области вихрей давление жидкости понижается. Тело и возникшая позади него вихревая дорожка обтекаются слоистым (ламинарным) потоком, для которого справедливо уравнение Бернулли.

С обоими типами лобового сопротивления — сопротивлением трения и сопротивлением давления — мы уже знакомы ранее, в п. 2.3.5. Сила сопротивления трения пропорциональна скорости v потока (или скорости тела, движущегося в неподвижной жидкости) согласно закону Стокса (см. соотношение (2.18)), а сила сопротивления давления пропорциональна квадрату скорости v^2 (см. соотношение (2.20)).

7.5.4. Подъемная сила крыла авиалайнера

Объясним в общих чертах, как возникает *подъемная сила крыла авиалайнера*, или, иначе говоря, как возникает *избыточное давление* атмосферного воздуха под крылом авиалайнера, благодаря которому авиалайнер поднимается ввысь.

На рисунке 7.61 изображен профиль крыла авиалайнера. На крыло налетает слева ламинарный воздушный поток, имеющий

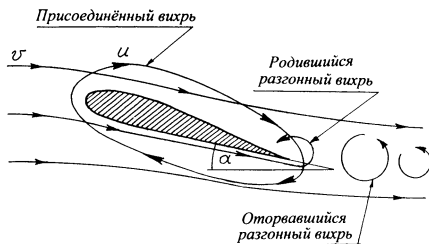


Рис. 7.61

скорость. (Эта ситуация эквивалентна ситуации, когда крыло движется справа налево со скоростью в неподвижной воздушной среде.) При относительно высокой скорости у задней кромки крыла *возникает турбулентность* — воздушный вихрь, вращающийся *против часовой стрелки*. Этот вихрь называют *разгонным*. Одновременно с рождением разгонного вихря рождается вихрь, вращающийся *по часовой стрелке* и циркулирующий в вертикальной плоскости вокруг крыла. Основатель российской школы аэро- и гидродинамики Николай Егорович Жуковский, разработавший теорию подъемной силы крыла самолета, назвал этот вихрь *присоединенным* (он словно бы присоединен к крылу). Присоединенный вихрь называют также *циркуляцией*.

Родившийся разгонный вихрь сразу же отрывается от крыла и уносится воздушным потоком вправо — к хвостовой части авиалайнера. А возникший одновременно с ним присоединенный вихрь (циркуляция) быстро затухает из-за вязкости воздуха (иначе говоря, из-за наличия внутреннего трения). Немедленно рождается новый разгонный вихрь и, соответственно, новый присоединенный вихрь. Новый разгонный вихрь открывается, а новый присоединенный вихрь затухает. Рождаются следующие разгонный и присоединенный вихри. И так далее. При постоянной высокой скорости налетающего на крыло воздушного потока (при постоянной скорости движения авиалайнера в воздушной среде) процесс образования вихрей происходит *регулярно*. От заднего края крыла периодически отрываются вихри и уносятся потоком воздуха. Они периодически ударяют по хвосту авиалайнера и могут вызвать опасные вибрации. Особенно опасно, если период их следования совпадает с периодом собственных колебаний хвостовой части и возникает резонанс, который хвостовую часть авиалайнера может разрушить.



Возникают два вопроса. Почему образуются два воздушных вихря, вращающихся в противоположных направлениях?

К чему приводит возникновение присоединенных вихрей, циркулирующих вокруг крыла авиалайнера?

Отвечая на первый вопрос, отметим, что рождение разгонного вихря есть *следствие вязкости воздушной среды*. Из-за наличия внутреннего трения скорость молекул в воздушном потоке, обтекающем поверхность крыла снизу, будет тем меньше, чем ближе они находятся к этой поверхности, и поэтому по достижении кромки крыла воздушный поток начинает заворачиваться вверх, создавая разгонный вихрь. В системе, состоящей из крыла и воздушного потока, возникает, таким образом, *момент импульса*,

обусловленный вращением вихря. В соответствии с *законом сохранения момента импульса* в системе должен тут же возникнуть *компенсирующий момент импульса*. Этот момент как раз и создает присоединенный вихрь, вращающийся в обратном направлении по отношению к направлению вращения разгонного вихря.

Отвечая на второй вопрос, обратим внимание на то, что присоединенный вихрь и налетающий на крыло воздушный поток будут над крылом складываться, а под крылом вычитаться. Правильнее сказать, складываться и вычитаться будут модули их скоростей. Над крылом воздух будет двигаться со скоростью $v + u$, а под крылом — со скоростью $v - u$, где u — модуль скорости частиц присоединенного вихря (циркуляции). *Это различие в скоростях движения воздуха приводит к появлению избыточного давления воздуха под крылом*, т. е. приводит к возникновению *подъемной силы*. Обозначим через p_1 давление воздуха над крылом, а через p_2 — под крылом и воспользуемся уравнением Бернулли:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho (v + u)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (v - u)^2.$$

Отсюда находим избыточное давление Δp :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho [(v + u)^2 - (v - u)^2] = 2\rho uv. \quad (7.52)$$

Подъемная сила крыла авиалайнера равна, таким образом,

$$F = \Delta p S = 2\rho uvS, \quad (7.53)$$

где S — площадь крыла.

Определим, как велико должно быть избыточное давление Δp , необходимое для возникновения подъемной силы, равной силе тяжести, например, авиалайнера Ил-62?

Если $m = 200$ т — масса авиалайнера, а площадь поверхности двух крыльев равна $2S = 500$ м², то необходимое избыточное давление равно $\Delta p = \frac{mg}{2S} = 4 \cdot 10^3$ Па. Как видим, избыточное давление должно составлять всего 4% от нормального атмосферного давления, т. е. является относительно небольшим.

Какова должна быть при этом скорость u циркуляции?

Согласно (7.52), $u = \frac{\Delta p}{2\rho v}$. Полагая $\Delta p = 4 \cdot 10^3$ Па и учитывая, что $v = 1000$ км/ч = 280 м/с и $\rho = 1$ кг/м³, получаем $u = 7$ м/с.

Заметим, что скорость циркуляции существенным образом зависит от угла атаки α и формы крыла, а также положения элеронов.

7.5.5. Эффект Магнуса



Предположим, что в поток жидкости (капельной жидкости или газа) помещен цилиндр, *вращающийся* вокруг своей оси (рис. 7.62). Обозначим через v модуль скорости набегающего на цилиндр потока, а через u — модуль скорости поверхности цилиндра. Вследствие вязкости пограничный слой жидкости «прилипает» к поверхности цилиндра и создает циркуляцию (см. пунктирную окружность на рисунке). Поток, обтекающий цилиндр, накладывается на циркуляцию; поэтому сверху от цилиндра на рисунке скорость жидкости оказывается равной по модулю $v + u$, а снизу — равной $v - u$. Согласно уравнению Бернулли, давление жидкости снизу от цилиндра будет больше, чем сверху, что приводит к появлению силы \vec{F} , направленной перпендикулярно к потоку (ее называют подъемной силой). Это есть *эффект Магнуса*. Он назван так в честь открывшего его немецкого физика Генриха Магнуса.

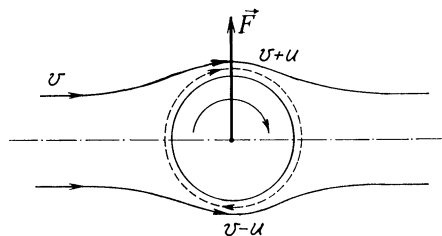


Рис. 7.62

Обратим внимание на то, что как в случае вращающегося цилиндра, так и в случае крыла авиалайнера появление подъемной силы есть результат наложения потока жидкости (воздуха) на циркуляцию. Различие заключается лишь в *причинах возникновения циркуляции*. В случае вращающегося цилиндра циркуляция есть результат увлечения пограничного слоя жидкости вращающимся телом, а в случае крыла циркуляция возникает вследствие отрыва пограничного слоя от тела, приводящего к турбулентности — появлению разгонного воздушного вихря.

Эффект Магнуса легко наблюдать при скатывании с наклонной плоскости легкого цилиндра из плотной бумаги или картона. Эффект проявляется в том, что возникает направленная перпендикулярно к скорости центра масс цилиндра сила, приводящая к заметному увеличению крутизны траектории — цилиндр, падая, заворачивает под наклонную плоскость. На практике эффект Магнуса можно наблюдать при полете закрученного футбольного или теннисного мяча при резаных ударах.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7.1. Как следует говорить: «давление на дно» или «давление на дне»?

7.2. Жидкость плотностью ρ налита в сосуд до высоты h . Как изменится давление жидкости на дне сосуда, если тот будет двигаться с ускорением a , направленным вертикально вверх?

7.3. В сосуд с квадратным дном, длина стороны которого l , и с вертикальными стенками налита жидкость. Чему равна высота уровня жидкости в сосуде, если полная сила давления на дно равна полной силе давления на боковую поверхность сосуда?

7.4. С какой силой выталкивается вода из иглы медицинского шприца, если на поршень действует сила $F = 6$ Н? Площадь поршня $S = 3$ см², площадь отверстия иглы $S_0 = 2$ мм². Гидростатическим давлением пренебречь.

7.5. Барометрическая трубка наклонена под углом 45° к вертикали. Чему равна длина ртутного столбика в ней при нормальном атмосферном давлении?

7.6. В цилиндрический сосуд налиты равные по массе количества воды и ртути. Общая высота столбов жидкости в сосуде равна H . Чему равно гидростатическое давление на дне сосуда? Плотность ртути ρ , плотность воды ρ_0 .

7.7. В сообщающиеся сосуды сначала налили ртуть. Затем в сосуд с поперечным сечением площадью $S = 8$ см² налили $m = 272$ г воды. Найдите разность уровней ртути в сосудах. Плотность ртути равна $\rho = 13\,600$ кг/м³.

7.8. В сообщающиеся сосуды налили ртуть. Поверх нее в сосуд 1 налили столбик машинного масла высотой $h_1 = 48$ см и плотностью $\rho_1 = 900$ кг/м³, а в сосуд 2 — столбик керосина высотой $h_2 = 20$ см и плотностью $\rho_2 = 800$ кг/м³. Сравните положение уровней ртути в обоих сосудах. Плотность ртути $\rho = 13\,600$ кг/м³.

7.9. Исходя из того, что атмосферное давление и плотность воздуха на уровне моря равны, соответственно, $p_0 = 10^5$ Па и $\rho = 1,2$ кг/м³, подсчитайте, какой была бы толщина атмосферы Земли, если бы плотность воздуха на любой высоте была такой же, как на уровне моря.

7.10. Как изменится осадка судна при переходе из реки в море? Изменится ли при этом выталкивающая сила?

7.11. Камень плотностью ρ_1 погружен полностью в жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). Во сколько раз выталкивающая сила больше силы тяжести камня?

7.12. На одной чаше рычажных весов стоит сосуд с водой, а на другой — штатив, на котором подвешен груз объемом V . Ча-

ши весов находятся в равновесии. Затем штатив разворачивают так, чтобы подвешенный на нем груз оказался целиком погруженным в воду. Определите вес гири, которую надо дополнительно положить на чашу со штативом, чтобы равновесие восстановилось. Плотность воды ρ_0 .

7.13. Подводная лодка по неосторожности легла на глинистое дно и теперь она не может всплыть. Почему?

7.14. Вес сплошного тела в воде в $n = 3$ раза меньше, чем в воздухе. Найдите плотность вещества тела. Плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$; она меньше плотности тела.

7.15. Айсберг плавает в море, выступая на $V = 250 \text{ м}^3$ над поверхностью. Найдите объем всего айсберга. Плотность льда $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность морской воды $\rho_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$.

7.16. Тело объемом $V = 0,25 \text{ м}^3$ плавает в керосине, погружившись на $2/3$ своего объема. Найдите объем подводной части тела, если оно будет плавать в воде. Плотность керосина $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

7.17. Железный брусок плавает в ртути. Какая часть его объема погружена в ртуть? Плотность железа $\rho_1 = 7900 \text{ кг/м}^3$, плотность ртути $\rho_2 = 13\,600 \text{ кг/м}^3$.

7.18. Вес тела, находящегося целиком в жидкости плотностью ρ в $n = 1,5$ раза меньше веса того же тела в воздухе. Найдите вес тела в воздухе.

7.19. Стальная деталь весит в воздухе $P = 5 \text{ Н}$, а в неизвестной жидкости $P_1 = 4,55 \text{ Н}$. Найдите плотность жидкости. Плотность стали $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

7.20. Медный шар с внутренней полостью, имеющей объем $V' = 200 \text{ см}^3$, плавает в воде, целиком погружившись в нее. Чему равен вес шара в воздухе? Плотность меди $\rho = 8900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Подсказка. Используя условие плавания тела, следует выразить объем шара V через объем V' полости, а затем, используя V и V' , найти искомый вес.

7.21. Полый шар с внешним радиусом R и внутренним радиусом r , сделанный из материала плотностью ρ_1 , плавает в жидкости плотностью ρ_2 . Какова должна быть плотность вещества, которым следует заполнить внутреннюю полость шара, чтобы он находился в безразличном равновесии внутри жидкости?

Подсказка. Безразличное равновесие предполагает совпадение точек приложения силы тяжести шара и выталкивающей силы; значит, шар оказывается полностью погруженным в жидкость.

7.22. При погружении в жидкость 1 камень потерял в весе в 2 раза больше, чем при погружении в жидкость 2 . Во сколько раз жидкость 1 плотнее жидкости 2 ?

7.23. Полый шар с внешним радиусом R и внутренним радиусом r имеет вес P в воздухе и вес P_1 в некоторой жидкости. Во сколько раз плотность материала, из которого изготовлен

шар, больше плотности жидкости?

7.24. Внутри плавающего на воде куска льда находится пузырек воздуха. Что станет с уровнем воды в сосуде, когда лед растает?

7.25. Внутри плавающего в морской воде куска пресного льда находится пузырек воздуха. Что станет с уровнем воды в сосуде, когда плавающий в нем кусок льда растает?

Подсказка. Надо учесть, что плотность морской воды немного больше плотности пресной воды.

7.26. Лыдина толщиной $h = 0,6$ м и площадью $S = 8$ м² плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить лыдину в воду? Плотность льда $\rho = 900$ кг/м³, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

Подсказка. Обозначим через F силу, прикладываемую к лыдине с целью ее погружения в воду; она линейно растет с глубиной погружения, достигая наибольшего значения F_{\max} при полном погружении. Чтобы найти работу, надо умножить перемещение на среднее значение силы F , т. е.

$$\text{на } \frac{F_{\max}}{2}.$$

7.27. Гранитный камень весит в воде 3,2 Н, в бензине 3,8 Н, в растворе медного купороса 2,9 Н. Определите плотность бензина и раствора медного купороса, а также вес камня в воздухе. Плотность гранита 2600 кг/м³, плотность воды 1000 кг/м³.

7.28. Три маленьких сферических капельки воды одинакового радиуса при соприкосновении слились в одну сферическую каплю. Во сколько

раз уменьшилась общая энергия поверхностного слоя капель?

7.29. Сферическую каплю ртути радиусом $R = 3$ мм разделили на две одинаковые капли. Какую работу пришлось при этом совершить для увеличения энергии поверхностного слоя? Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0,47$ Дж/м².

7.30. Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырек диаметром $D = 12$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 0,04$ Дж/м².

7.31. Каким должен быть радиус капилляров ксилемы (ткани древесины), чтобы вода поднималась на $h = 10$ м вверх по стволу дерева только за счет капиллярности? Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

7.32. Стекланную капиллярную трубку радиусом канала $r = 0,25$ мм погрузили полностью под воду в вертикальном положении и начали постепенно поднимать. Как только верхний конец трубки показывается из воды, в нем образуется вогнутый сферический мениск. По мере подъема трубки столбик воды в ней будет расти (его верхний конец будет совпадать с верхним концом трубки), а радиус вогнутого мениска R будет уменьшаться. Когда он уменьшится до радиуса канала трубки r , наступит полное смачивание и при дальнейшем подъеме трубки высота столбика воды в ней увеличиться не будет. Определите:

а) радиус R мениска в момент, когда верхний конец трубки поднялся над поверхностью воды в сосуде на $h_1 = 2$ см;

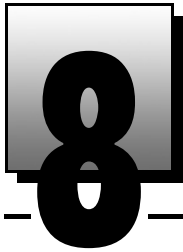
б) радиус R мениска в момент, когда верхний конец трубки поднялся на $h_2 = 4$ см;

в) высоту, на какую надо поднять верхний конец трубки, чтобы наступило полное смачивание. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³.

7.33. Находясь на Луне, космонавт обнаружил, что столбик воды в капиллярной стеклянной трубке радиусом $r = 0,36$ мм поднялся на высоту $h = 25$ см. Исходя из этого результата и

зная радиус Луны $R = 1737$ км, космонавт вычислил среднюю плотность Луны. Следуя космонавту, вычислите плотность Луны. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н м²/кг².

7.34. По горизонтальной трубе течет вода; ее скорость u , давление p . Труба превращается в три «рукава» — три узких трубки одинакового поперечного сечения, площадь которого в 2 раза меньше, чем у трубы. Найдите скорость и давление в узкой трубке. Плотность воды ρ_0 . Вязкостью воды пренебречь.



МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

8.1. ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ

8.1.1. Общие замечания

Колебания — это процессы, отличительной особенностью которых является *периодичность*, т. е. *повторяемость во времени*. Процесс колебаний состоит из повторяющихся одинаковых циклов; длительность τ отдельного цикла называют *периодом* колебаний. В физике выделяют колебания *механические, электромагнитные, электромеханические*. В данной книге мы ограничимся механическими колебаниями.

В случае механических колебаний рассматривают зависимость от времени *смещения* материальной точки (или твердого тела, или элемента той или иной среды). Смещения образуют совокупность чередующихся во времени отклонений материальной точки от некоторого положения то в одну, то в другую стороны. Наибольшее смещение x_m называют *амплитудой* колебаний.

Пусть $x(t)$ — смещение или иная изменяющаяся со временем t физическая величина, характеризующая колебательный процесс. Функция $x(t)$ удовлетворяет *условию периодичности*:

$$x(t + \tau n) = x(t), \quad (8.1)$$

где τ — период колебаний, n — любое целое число. Отдельно выделим так называемые *затухающие* и *нарастающие* колебания, описываемые функциями вида

$$x(t) = h(t)g(t), \quad (8.2)$$

где $h(t)$ — периодическая функция, а $g(t)$ — убывающая или возрастающая со временем функция. В целом процесс, описываемый функцией (8.2), не характеризуется ни периодом, ни амплитудой. Однако определенные период τ' и амплитуда x'_m есть у функции

$h(t)$; поэтому и к такому процессу применяют термин «колебания», связывая с этими колебаниями период τ и изменяющуюся со временем амплитуду $x'_m g(t)$.

В *кинематике* механических колебаний не рассматривают причины, обусловившие их существование; все внимание уделяется тому, как *происходят колебания*, как зависят от времени смещение, скорость и ускорение материальной точки, участвующей в том или ином колебательном процессе (графики смещения для некоторых видов колебаний будут представлены в п. 8.1.5.)

По *характеру физических процессов*, благодаря которым наблюдаются колебания (в частности, механические), различают три основных вида колебаний: *свободные колебания, вынужденные колебания, автоколебания*.

8.1.2. Свободные (собственные) колебания

Свободными колебаниями, или, иначе говоря, *собственными колебаниями системы* называют колебания, которые, будучи возбуждены в начальный момент времени, далее совершаются без воздействия на систему со стороны каких-либо переменных внешних сил. Такие колебания совершаются как бы «сами по себе» *за счет первоначально внесенной в систему энергии*, благодаря которой система была выведена из положения равновесия. Систему, способную совершать свободные колебания, называют *колебательной системой*.

Пример колебательной системы — *маятник*. Обычно под маятником понимают, например, подвешенный на нити шарик. Но следует учитывать, что этот шарик способен совершать свободные колебания только под действием на него, наряду с силой реакции нити, также силы тяжести. Следовательно, под маятником, как колебательной системой, надо понимать в данном случае шарик на нити вместе с земным шаром, создающим силу тяжести.

Когда шарик на нити неподвижно висит, колебательная система в виде маятника находится в *положении равновесия* (сила тяжести уравновешена силой реакции нити). Чтобы начались свободные колебания, необходимо затратить некоторую энергию и *вывести систему из положения равновесия*. Это можно сделать разными способами. Можно толкнуть шарик, т. е. сообщить ему некоторый импульс и, следовательно, некоторую кинетическую энергию. Можно отвести шарик от положения равновесия и затем отпустить; при этом шарик будет сообщена некоторая потенциальная энергия. Можно отвести шарик от положения равновесия да еще и подтолкнуть его.

Принципиально важно, чтобы равновесие колебательной системы было *устойчивым*, так как только в этом случае при выведении системы из положения равновесия возникает *возвращающая сила*, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия. Возвращаясь под действием этой силы к равновесию, наш шарик приобретает скорость и по инерции проходит положение равновесия, не останавливаясь. В результате он снова отклоняется от положения равновесия. И снова возникает возвращающая сила. И снова положение равновесия будет пройдено без остановки. И так далее. Налицо процесс свободных колебаний.

Отклоним нить шарика на угол α от вертикали, а затем отпустим ее (рис. 8.1). На шарик действуют сила тяжести и сила реакции нити. Разложим силу \vec{F}_T на направление нити и на перпендикулярное к ней — на силы \vec{F}_T' и \vec{F}_T'' ($\vec{F}_T' = F_T \cos\alpha$; $\vec{F}_T'' = F_T \sin\alpha$). Силы \vec{T} и \vec{F}_T' взаимно уравновешены, а сила \vec{F}_T'' есть возвращающая сила, действующая на шарик, находящийся в точке A . Начав движение под действием возвращающей силы, шарик придет в точку A' , где на мгновение остановится и начнет движение в обратном направлении. Длина отрезка AA' равна удвоенной амплитуде колебаний; таким образом, $x_m = \frac{1}{2} AA' = l \sin\alpha$, где l — расстояние от центра подвеса нити до центра шарика.

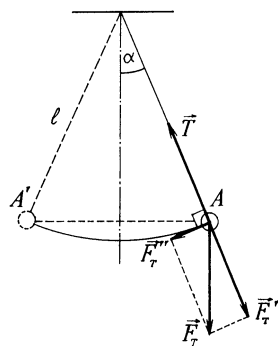


Рис. 8.1

Если бы не существовало трения в точке подвеса и сопротивления воздуха, колебания маятника, однажды запущенного в действие, никогда не прекратились бы. Но сопротивление воздуха есть, и поэтому амплитуда колебаний будет постепенно уменьшаться — свободные колебания оказываются на поверку *затухающими колебаниями*. В конце концов, колебания прекратятся — энергия, полученная шариком в начале процесса, превратится *во внутреннюю энергию*, вследствие чего немного нагреются шарик, нить и окружающий воздух.

8.1.3. Вынужденные колебания

Чтобы в колебательной системе не затухали колебания, можно действовать на нее *периодически изменяющейся внешней силой*,

работа которой будет энергетически подпитывать систему, компенсируя тем самым потери, обусловленные превращением части ее механической энергии во внутреннюю энергию. В этом случае говорят о *вынужденных колебаниях*.

В принципе можно, например, вынудить совершать колебательные движения лежащую на столе книгу, просто передвигая ее рукой вперед и назад. Вынужденными являются также колебания поршней в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания или иглы швейной машины. Но такие вынужденные колебания особого интереса не представляют, и мы не будем их рассматривать. Интересны вынужденные колебания, происходящие под действием периодической внешней силы *в системах, способных совершать свободные колебания*, т. е. в каких-либо *колебательных системах*.

Примером снова может служить маятник. Если на подвешенный к нити шарик начать действовать некоторой периодической силой, характеризующейся периодом τ , то спустя какое-то время установятся вынужденные колебания маятника, имеющие тот же период τ . Однако у маятника, как у всякой колебательной системы, есть *собственный период колебаний* τ_0 . Установившаяся амплитуда вынужденных колебаний будет зависеть от того, насколько сильно различаются τ и τ_0 . Мы обсудим это в § 8.5, а пока отметим лишь, что амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения при $\tau = \tau_0$. Когда период вынуждающей колебания внешней силы *совпадает* с собственным периодом колебаний данной колебательной системы, наступает *резонанс*. В этом случае создаются наиболее благоприятные условия для перекачки энергии от внешних тел к колебательной системе, и в результате амплитуда вынужденных колебаний существенно возрастает.

Итак, в колебательной системе (например, в том же маятнике) могут наблюдаться как свободные, так и вынужденные колебания. Свободные колебания со временем затухают; вынужденные колебания происходят до тех пор, пока на систему действует периодическая внешняя сила. Период свободных колебаний определяется свойствами самой колебательной системы (позднее убедимся, что в случае маятника он определяется длиной нити и ускорением свободного падения); период вынужденных колебаний равен периоду внешней силы. Амплитуда свободных колебаний зависит от начальных условий — от того, как сильно толкнули в начальный момент висевший на нити шарик или как сильно отвели нить от вертикали (см. соотношение (8.17)). В случае вынужденных колебаний устанавливается амплитуда колебаний, которая не связана с начальными условиями, а определяется свойствами колебатель-

ной системы, периодом и амплитудой колебаний внешней силы, а также энергетическими потерями, обусловленными силами трения (сопротивления).

8.1.4. Автоколебания

Незатухающие колебания могут происходить в колебательной системе и без воздействия на нее внешней периодической силой, если система обладает *собственным источником энергии*. Такие незатухающие колебания называют *автоколебаниями*, а систему, в которой они происходят, — *автоколебательной системой*.

Автоколебательная система состоит из *собственно колебательной системы* (системы, способной совершать свободные колебания), *источника энергии* и *регулирующего устройства*, которое получает энергию от источника и регулирует поступление этой энергии в колебательную систему (рис. 8.2). Чтобы регулирующее устройство могло выполнять свою функцию, реализуется *обратная связь* от колебательной системы к регулирующему устройству. Наличие обратной связи — характерный признак любой автоколебательной системы.

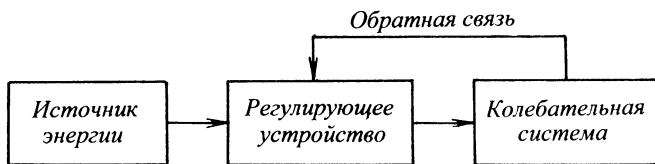


Рис. 8.2

Пример автоколебательной системы — старинные часы с маятником и гирей (рис. 8.3). Источником энергии служит поднятая над полом гиря (она обладает определенным запасом потенциальной энергии), регулирующее устройство — храповое колесо с косыми зубцами и анкер, осуществляющий обратную связь. Гиря приводит во вращение храповое колесо. С ним взаимодействует анкер — переключатель с двумя выступами по краям, жестко связанная с маятником. Именно с помощью анкера маятник управляет вращением храпового колеса и связанной с ним стрелки часов. Энергия поступает от гири к маятнику порциями. В положении, изображенном на рисунке, зубец храпового колеса

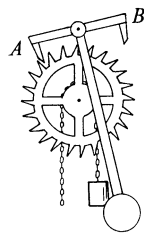


Рис. 8.3

давит на скос выступа A анкера и толкает маятник влево. По прохождении маятником положения равновесия выступ A соскальзывает с зубца, но тут же анкер выступом B упирается в другой зубец храпового колеса, в результате чего маятник испытывает толчок в другую сторону. Итак, дважды за период колебаний маятник получает энергию, сам открывая и прекращая доступ энергии от источника. Незатухающие колебания маятника происходят с периодом, почти точно равным периоду его свободных колебаний (часы с регулярным ходом). Впервые маятник был применен в часах с регулярным ходом в 1657 году нидерландским ученым Христианом Гюйгенсом.

Если в случае свободных колебаний амплитуда колебаний зависит от начальных условий, то в случае автоколебаний, равно как и вынужденных колебаний она от начальных условий не зависит, а зависит от свойств самой системы. При этом надо иметь в виду, что амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит также от параметров внешней периодической силы, тогда как амплитуда автоколебаний полностью определяется свойствами колебательной системы. Обратим внимание на то, что у свободных колебаний и автоколебаний есть общее свойство — период и тех, и других полностью определяется характеристиками самой системы (в отличие от периода вынужденных колебаний, равного периоду внешней силы).

Автоколебательные системы весьма многообразны. Не входя в детали, заметим, что к ним относятся, например, часы с заводной пружиной, кварцевые часы, электрический звонок с прерывателем, органная труба, паровая машина, двигатель внутреннего сгорания, генератор на транзисторе, лазер, человеческие легкие и сердце.

8.1.5. Виды колебаний с точки зрения кинематики



Кинематическими величинами, характеризующими колебания материальной точки, являются ее *смещение*, *скорость*, *ускорение*. На рисунках 8.4, $a—e$ представлены графики зависимости смещения x от времени t (кратко говоря, графики смещения) для некоторых видов колебаний:

- а) синусоидальные (гармонические) колебания,
- б) прямоугольные колебания,
- в) пилообразные колебания,
- г) пример колебаний сложного вида,
- д) затухающие колебания,
- е) нарастающие колебания.

Для случаев $a—г$ указаны амплитуда x_m и период τ колебаний.

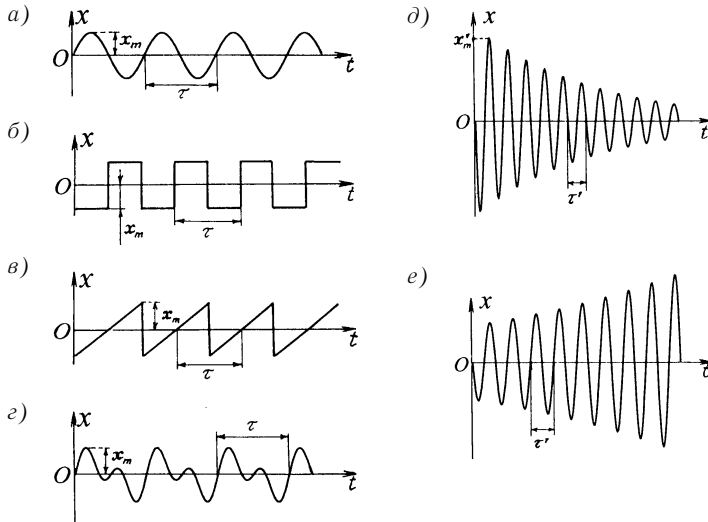


Рис. 8.4

Отметим, что с кинематической точки зрения колебания могут быть весьма разнообразными. Важно лишь, чтобы они обладали периодичностью во времени. Наиболее простыми и при этом наиболее важными являются колебания, у которых график смещения имеет форму синусоиды, — так называемые *гармонические колебания*. Именно этим колебаниям мы уделим далее основное внимание.

Отдельно отметим *затухающие* колебания (рис. 8.4, *д*) и *нарастающие* колебания (рис. 8.4, *е*). Можно считать, что они характеризуются определенным периодом (обозначим его через τ'), если рассматривать чередование во времени максимальных и нулевых значений смещения. Однако амплитуда этих колебаний не имеет определенного значения; в случае затухающих колебаний она со временем уменьшается, а в случае нарастающих колебаний — возрастает. Заметим, что в случае *д*) соотношение (8.2) может быть представлено в виде:

$$x(t) = x_m'(\sin \omega t)e^{-\gamma t}. \quad (8.3)$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, γ — некоторая постоянная, показывающая, как быстро затухают колебания (так называемая *постоянная затухания*).

Если $\gamma \ll \omega$, затухающие колебания называют *квазипериодическими* (т. е. почти периодическими). Этот случай как раз и представлен на рисунке 8.4, *д*. При $\gamma \gg \omega$ затухающие колебания превращаются фактически в монотонный процесс.

Заметим, что представленные на рисунке 8.4, *е* нарастающие колебания могут рассматриваться как квазипериодические колебания.

8.2. КИНЕМАТИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

8.2.1. Гармонические колебания

Гармоническими колебаниями называют колебания, у которых зависимость смещения x от времени t имеет вид:

$$x = x_m \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau} + \varphi_0\right). \quad (8.4)$$

Здесь x_m — амплитуда колебаний, τ — период колебаний (длительность одного цикла периодического процесса), φ_0 — начальная фаза. Величину $2\pi \frac{t}{\tau} + \varphi_0$ называют фазой колебаний.

Величина $\nu = \frac{1}{\tau}$, называемая частотой колебаний, определяет число циклов периодического процесса в единицу времени. Наряду с частотой ν рассматривают циклическую (круговую) частоту:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (8.5)$$

С учетом (8.5) перепишем (8.4) в виде:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8.6)$$

На рисунке 8.5, а представлена зависимость смещения от времени в виде графика смещения. Здесь в качестве оси абсцисс вы-

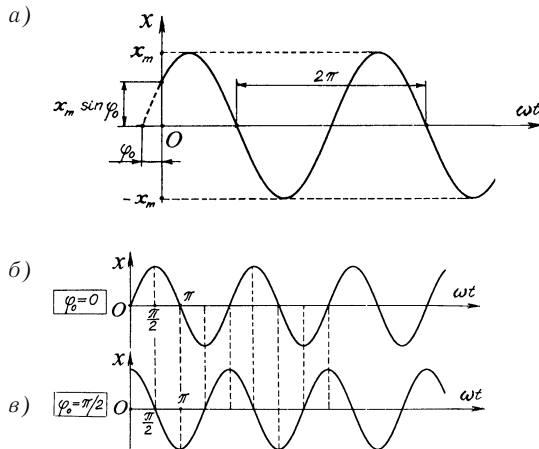


Рис. 8.5

брана пропорционально времени безразмерная величина ωt . Цикл периодического процесса (иначе говоря, полное колебание) совершается за время, равное периоду τ колебаний, на ωt -оси ему отвечает отрезок длиной 2π .

Выясним смысл начальной фазы φ_0 . Предположим, что в начальный момент времени (для $t = 0$) *смещение равно нулю*; $x(0) = x_m \sin \varphi_0 = 0$. Это значит, что $\varphi_0 = 0$ и, следовательно,

$$x = x_m \sin \omega t. \quad (8.7)$$

Соответствующий график смещения показан на рисунке 8.5, б. В этом случае колебания начинаются из равновесного положения колебательной системы. В уже знакомом примере со свободными колебаниями маятника данный случай означает, что висящий на нити шарик толкнули в момент $t = 0$, положив тем самым начало колебательному процессу.

Предположим теперь, что в момент $t = 0$ *смещение максимально*, т. е. равно амплитуде колебаний: $x(0) = x_m$. Это означает,

что $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ и, значит,

$$x = x_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = x_m \cos \omega t. \quad (8.8)$$

Соответствующий график смещения показан на рисунке 8.5, в. В этом случае колебания начинаются из положения, отвечающего максимальному смещению. В примере с колебаниями маятника данный случай означает, что висящий на нити шарик отвели от вертикали и в момент $t = 0$ отпустили, положив тем самым начало колебательному процессу.

Общий случай, которому соответствует соотношение (8.6), предполагает, что висящий на нити шарик отвели от вертикали и в дополнении к этому толкнули в момент $t = 0$ в направлении от положения равновесия.

Итак, начальная фаза φ_0 характеризует состояние колебательного процесса в момент $t = 0$. Полагая, что свободные колебания возбуждаются внешним воздействием в момент $t = 0$, можем сказать, что начальная фаза φ_0 *определяет способ возбуждения колебательного процесса* (или толкнули висящий шарик, или отвели его от вертикали и отпустили, или отвели от вертикали и толкнули).

Оба графика на рисунках 8.5, б, в — синусоиды, рассматриваемые на ωt -оси. Легко видеть, что одна синусоида *сдвинута* относительно другой на $\frac{\pi}{2}$. В этом случае говорят, что колебания б

и в *происходят со сдвигом по фазе на $\frac{\pi}{2}$* .

Из соотношения $\nu = \frac{1}{\tau}$ следует, что

$$\text{единица частоты колебаний} = \frac{1}{\text{единица времени}}.$$

В СИ единица частоты колебаний ν имеет специальное наименование — *герц* (обозначение: Гц или с^{-1}) в честь немецкого физика Генриха Герца. Герц равен частоте периодического процесса, при которой за время 1 с совершается один цикл периодического процесса.

Единица циклической (круговой) частоты колебаний ω — *секунда в минус первой степени* (обозначение: с^{-1}). Если ν есть число полных колебаний за время 1 с, то ω есть число полных колебаний за время, равное 2π секундам.

8.2.2. Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности

Представим себе материальную точку, равномерно движущуюся с угловой скоростью ω по окружности радиусом x_m . Модули скорости и ускорения точки при таком движении не изменяются со временем; они равны, соответственно,

$$v = \omega x_m \quad \text{и} \quad a = \omega^2 x_m. \quad (8.9)$$

Спроецируем движущуюся по окружности материальную точку на некоторую прямую, рассматриваемую в качестве x -оси (рис. 8.6).

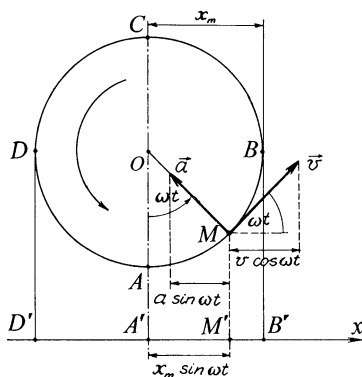


Рис. 8.6

Движение проекции материальной точки по x -оси есть не что иное, как гармонические колебания, имеющие амплитуду x_m и циклическую частоту ω .

Точка совершает полный оборот по окружности за время

$$\frac{2\pi x_m}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \tau.$$

За это же время проекция точки совершает полное колебание по x -оси; время τ — период колебаний проекции точки.

Предположим, что в момент $t = 0$ движущаяся по окружности точка была в положении A (см. рисунок); на x -оси этому положению соответствует $x = 0$, т. е. положение равновесия в колебательной системе. В некоторый момент t точка, движущаяся по окружности, оказывается в положении M . Дуга AM соответствует углу поворота, равному ωt . Именно на такой угол повернулся радиус-вектор точки за время t . Из рисунка видно, что за это время проекция точки на x -ось сместилась из положения равновесия на

$$x(t) = x_m \sin \omega t.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению (8.7) для гармонических колебаний с нулевой начальной фазой.

Пойдем дальше: сделаем на основании рисунка 8.6 заключение о зависимости от времени скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ проекции точки, совершающей гармонические колебания (8.7). Спроецируем на x -ось изображенные на рисунке векторы \vec{v} и \vec{a} — соответственно, мгновенную скорость и мгновенное ускорение в момент t точки, движущейся по окружности. Эти проекции представляют собой скорость $\vec{v}(t)$ и ускорение $a(t)$ проекции точки, совершающей гармонические колебания. Легко видеть, с учетом (8.9), что

$$\vec{v}(t) = \omega x_m \cos \omega t, \quad (8.10)$$

$$\vec{a}(t) = \omega^2 x_m \sin \omega t. \quad (8.11)$$

Итак, если материальная точка равномерно движется с угловой скоростью ω по окружности радиусом x_m , то ее проекция на x -ось будет совершать гармонические колебания с амплитудой x_m и циклической частотой ω . Если x -ось выбрана перпендикулярно к радиусу AO окружности, где A — положение движущейся по окружности точки в момент $t = 0$, то начальная фаза φ_0 колебаний проекции на x -ось будет равна нулю.

8.2.3. Графики смещения, скорости, ускорения при гармонических колебаниях

Используя (8.7), (8.10), (8.11), можно построить *графики смещения, скорости и ускорения* для гармонических колебаний с амплитудой x_m , циклической частотой ω и начальной фазой $\varphi_0 = 0$. Эти графики представлены на рисунке 8.7. Все они являются *синусоидами*. Длина отрезка ωt -оси от 0 до 2π соответствует длине окружности на рисунке 8.6, деленной на радиус x_m . Точки M, B, C, D , отмеченные на окружности, перенесены на ωt -оси на рисунке 8.7, a — v . Мы как бы развернули окружность, изображенную на рисунке 8.6. Поэтому представленные на рисунке 8.7 синусоиды иногда называют *развертками* гармонических колебаний.

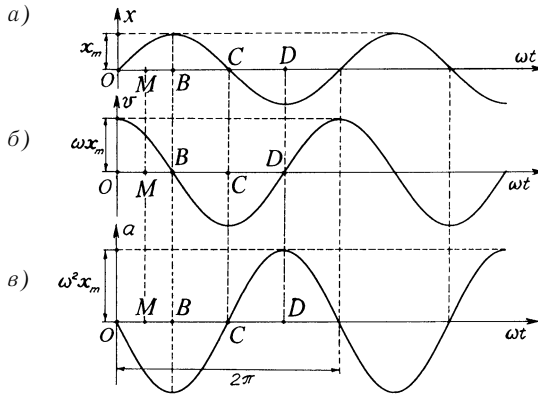


Рис. 8.7

Глядя на синусоиды-развертки, обратим внимание на то, что *колебания скорости опережают по фазе колебания смещения на $\frac{\pi}{2}$* , а *колебания ускорения сдвинуты по фазе на π по отношению к колебаниям смещения* (как говорят, *колебания смещения и ускорения происходят в противофазе*).

Указанные сдвиги по фазе, очевидно, не зависят от выбора начальной фазы φ_0 . На графиках на рисунке 8.7 предполагалось, что $\varphi_0 = 0$. В общем случае, когда $\varphi_0 \neq 0$, пришлось бы просто сместить начало всех ωt -осей вправо на φ_0 . Тем самым мы бы прибавили к фазам колебаний в (8.7), (8.10) и (8.11) слагаемое φ_0 . Таким

образом, в общем случае зависимости $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ для гармонических колебаний имеют вид:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (\text{см. (8.6)})$$

$$v(t) = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8.12)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8.13)$$

Согласно соотношению (1.8), мгновенная скорость в момент t может быть приближенно представлена при достаточно малых Δt в виде:

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1^*)$$

Согласно соотношению (1.15), мгновенное ускорение в момент t можно приближенно представить при малых Δt в виде:

$$a(t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (2^*)$$

Приближенные соотношения (1*) и (2*) превращаются в точные в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$.

Подставив $x(t) = x_m \sin \omega t$ в (1*) и учтя, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$, получим

$$\begin{aligned} \frac{v(t)\Delta t}{x_m} &= \sin(\omega t + \omega \Delta t) - \sin \omega t = \\ &= \sin \omega t \cdot \cos \omega \Delta t + \cos \omega t \cdot \sin \omega \Delta t - \sin \omega t. \end{aligned}$$

При достаточно малых Δt можно принять

$$\cos \omega \Delta t = 1; \quad \sin \omega \Delta t = \omega \Delta t. \quad (3^*)$$

Следовательно, $\frac{v(t)\Delta t}{x_m} = \omega \Delta t \cos \omega t$. Мы пришли, таким образом, к выражению

(8.10), которое было получено ранее на основании связи гармонических колебаний с равномерным движением по окружности.

Подставив (8.10) в (2*) и учтя, что $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим

$$\begin{aligned} \frac{a(t)\Delta t}{\omega x_m} &= \cos(\omega t + \omega \Delta t) - \cos \omega t = \\ &= \cos \omega t \cdot \cos \omega \Delta t - \sin \omega t \cdot \sin \omega \Delta t - \cos \omega t. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (3*), заключаем, что $\frac{a(t)\Delta t}{\omega x_m} = -\omega \Delta t \sin \omega t$, т. е. приходим к выражению (8.11).

Итак, чтобы получить, исходя из (8.7) или (8.6), выражения (8.10) и (8.11) (или (8.12) и (8.13)) для скорости и ускорения при гармонических колебаниях, можно обойтись без проецирования на x -ось точки, равномерно движущейся по окружности, а просто воспользоваться общим кинематическими соотношениями (1.8) и (1.15).

8.2.4. Определение амплитуды и начальной фазы из начальных условий

В качестве начальных условий будем рассматривать смещение x_0 и скорость v_0 в момент $t = 0$. Из (8.6) следует, что

$$x_0 = x_m \sin \varphi_0, \quad (8.14)$$

а из (8.12)

$$v_0 = \omega x_m \cos \varphi_0. \quad (8.15)$$

Разделив почленно (8.14) на (8.15), находим

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0}. \quad (8.16)$$

Если $x_0 = 0$, то $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0$ и, значит, $\varphi_0 = 0$ (случай, когда висящий на нити шарик толкают в момент $t = 0$). Если $v_0 = 0$, то $\operatorname{tg} \varphi_0 = \infty$ и, значит, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (случай, когда шарик на нити отводят от вертикали и в момент $t = 0$ отпускают).

Перепишем (8.14) и (8.15) в виде: $\sin \varphi_0 = \frac{x_0}{x_m}$ и $\cos \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega x_m}$.

Возведя оба равенства в квадрат и почленно сложив, получим

$$\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{x_m^2} \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right).$$

Так как $\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$, то отсюда находим амплитуду колебаний:

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (8.17)$$

Если $x_0 = 0$, то $x_m = \frac{v_0}{\omega}$. Если $v_0 = 0$, то $x_m = x_0$.

8.3. ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

8.3.1. Динамическое определение гармонических колебаний

Определение гармонических колебаний (8.6) — это кинематическое определение. Теперь приведем их динамическое определение.

Свободные колебания, происходящие под действием возвращающей силы, пропорциональной смещению, являются гармоническими колебаниями.

Уточним, что именно представляет собой *возвращающая сила*. Предположим, материальная точка совершает свободные колебания. Колебания незатухающие, так как трение предполагается отсутствующим. Обозначим через \vec{R} равнодействующую всех сил, приложенных к точке, а через R_x — проекцию равнодействующей на направление смещения. Эта проекция как раз и есть возвращающая сила. Для гармонических колебаний:

$$R_x = -\xi x, \quad (8.18)$$

где ξ — некоторая постоянная положительная величина, определяемая свойствами колебательной системы. Знак «минус» означает, что R_x имеет направление, противоположное направлению смещения. Если, например, точка смещается вправо от равновесного положения, то возвращающая сила будет направлена влево.

Если m — масса материальной точки, то по второму закону Ньютона

$$R_x = ma_x, \quad (8.19)$$

где a_x — проекция ускорения точки на направление смещения. Подставив (8.19) в (8.18), получим

$$a_x = -\frac{\xi}{m} x.$$



Обратим внимание на то, что как x , так и a_x зависят от времени. Если ранее мы имели дело либо с равномерным (ускорение отсутствует), либо с равнопеременным (ускорение постоянно) движениями материальной точки, то теперь мы встречаемся со случаем, когда ускорение точки есть функция времени. Итак, согласно динамическому определению, гармонические колебания представляют собой собственные колебания, для которых

$$a_x(t) = -\frac{\xi}{m} x(t). \quad (8.20)$$

Динамическое определение гармонических колебаний (8.20) очевидным образом согласуется с кинематическим определением (8.6), коль скоро из $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ следует, согласно (1.8)

и (1.15), что $a_x(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. При этом циклическая частота ω удовлетворяет соотношению:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}, \quad (8.21)$$

тогда как амплитуда x_m и начальная фаза φ_0 могут быть произвольными (они зависят, напомним, от начальных условий). С учетом (8.21), перепишем выражение, связывающее проекцию ускорения и смещение в случае гармонических колебаний, в виде

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t). \quad (8.22)$$

8.3.2. Сила упругости и гармонические колебания

Рассмотрим следующую ситуацию: по гладкому горизонтальному стержню 1 скользит без трения, совершая свободные колебания, шарик 2 массой m , прикрепленный к упругой пружине 3, характеризующейся жесткостью k (рис. 8.8). В положении O пружина не деформирована; это есть положение равновесия. Положения A и B — крайние положения, отвечающие максимально растянутой и максимально сжатой пружине, соответственно; $OA = OB = x_m$, где x_m — амплитуда колебаний. На рисунке показаны три силы, действующие на шарик в момент времени, когда его смещение равно x . Поскольку сила тяжести \vec{F}_r уравновешена силой реакции стержня \vec{N} , равнодействующая \vec{R} всех трех сил есть сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, направленная антипараллельно вектору смещения \vec{x} . В соответствии с законом Гука (2.3),

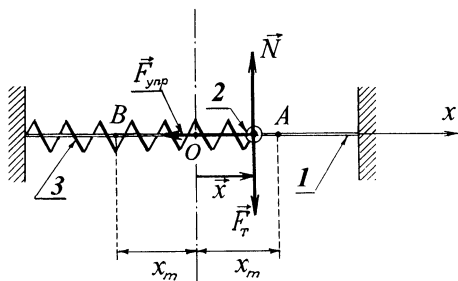


Рис. 8.8

$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}$. Так как $\vec{R} = \vec{F}_{\text{упр}}$, соотношение (8.18) принимает в данном случае вид:

$$R_x = -kx, \quad (8.23)$$

и мы приходим к соотношению (8.22), в котором циклическая частота колебаний ω определяется формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.24)$$

С учетом (8.5), получаем отсюда формулу для периода колебаний:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8.25)$$

Теперь предположим, что шарик массой m совершает свободные колебания, будучи подвешенным на пружине жесткостью k (рис. 8.9). На шарик действуют сила тяжести $\vec{F}_\tau = m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{X}$, где \vec{X} — вектор смещения шарика в некоторый момент из положения M , отвечающего недеформированной пружине (см. рисунок). Равнодействующая сил, действующих на шарик в рассматриваемый момент времени, равна

$$\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} = m\vec{g} - k\vec{X}.$$

Спроецировав это равенство на x -ось, получаем

$$R_x = mg - kX. \quad (1^*)$$

Смещение x , входящее в (8.18), должно отсчитываться от положения O — положения равновесия колебательной системы, в котором шарик висит неподвижно на пружине, испытавшей удлинение x_0 под действием силы тяжести шарика. Таким образом,

$$x = X - x_0. \quad (2^*)$$

Удлинение x_0 определяется из очевидного соотношения:

$$kx_0 = mg. \quad (3^*)$$

С учетом (2*) и (3*) перепишем (1*) в виде:

$$R_x = mg - k(x_0 + x) = -kx.$$

Мы пришли к соотношению (8.23), а значит, и к (8.24) и (8.25). В случае, показанном на рисунке 8.8, сила тяжести была уравновешена силой реакции стержня, а в случае на рисунке 8.9 силу тяжести ничто не уравновешивает. Тем не менее в обоих случаях

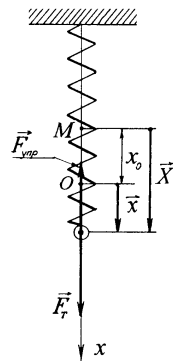


Рис. 8.9

совершаются свободные гармонические колебания с циклической частотой (8.24) (периодом (8.25)). Просто во втором случае колебания происходят относительно положения равновесия шарика при растянутой на x_0 пружине. Как видим, наличие силы тяжести оказывается несущественным для колебаний шарика, прикрепленного к пружине.

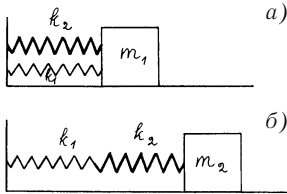


Рис. 8.10

Задача 1 (рис. 8.10, а). К бруску массой m , находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплены параллельно две пружины — жесткостью k_1 и жесткостью k_2 . Чему равен период колебаний бруска?

□ Проекция R_x возвращающей силы, действующей на брусок, равна

$R_x = -(k_1x + k_2x)$, где x — смещение бруска из положения равновесия (положения, когда пружины не деформированы). Значит, действие данных пружин эквивалентно действию одной пружины жесткостью

$$k = k_1 + k_2. \quad (8.26, a)$$

Следовательно, искомый период колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}. \quad \blacksquare$$

Задача 2 (рис. 8.10, б). К бруску массой m , находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплены последовательно пружина 1 жесткостью k_1 и пружина 2 жесткостью k_2 . Чему равен период колебаний бруска?

□ Модуль x смещения бруска равен

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad (4^*)$$

где Δx_1 и Δx_2 — растяжения пружины 1 и пружины 2, соответственно. На брусок пружина 1 не действует, а действует только пружина 2. Она действует с силой упругости, модуль которой равен

$$R = k_2 \Delta x_2. \quad (5^*)$$

По третьему закону Ньютона, сила, с какой пружина 2 действует на пружину 1, равна по модулю силе, с какой пружина 1 действует на пружину 2. Таким образом,

$$k_2 \Delta x_2 = k_1 \Delta x_1. \quad (6^*)$$

Используя (4*) и (5*), получаем

$$\frac{R}{k_2} = x - \Delta x_1.$$

С учетом (6*) перепишем последнее равенство в виде:

$$\frac{R}{k_2} = x - \frac{R}{k_1},$$

откуда следует, что

$$R = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x.$$

Итак, действие на брусок пружины 2, к которой последовательно присоединена пружина 1, эквивалентно действию одной пружины, имеющей жесткость

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (8.26, б)$$

Следовательно, искомый период колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2}}.$$

В частном случае, когда пружины 1 и 2 одинаковы ($k_1 = k_2$), результат (8.26, б) преобразуется: $k = \frac{k_1}{2}$. В этом случае период колебаний бруска равнялся бы $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k_1}}$. Легко сообразить, что если удалить половину длины пружины, то период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз. ■

8.3.3. Гармонические колебания математического маятника

Представим себе материальную точку массой m , висющую на нерастяжимой невесомой нити длиной l . Такую колебательную систему, находящуюся в поле тяготения, называют *математическим маятником* — в отличие от реальных маятников, называемых *физическими*. Маленький шарик на тонкой прочной нити ведет себя практически как математический маятник.

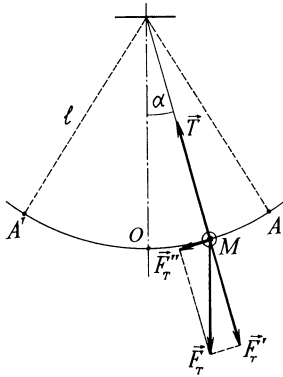


Рис. 8.11

Колебания шарика-маятника иллюстрирует рисунок 8.11, где показаны силы, действующие на шарик в момент времени t , когда он оказывается в точке M ; при этом нить образует угол α с вертикалью. На шарик действует сила тяжести \vec{F}_T и сила реакции нити \vec{T} . Разложим силу тяжести \vec{F}_T на силу $\vec{F}_T'(t)$, направленную вдоль нити, и силу $\vec{F}_T''(t)$, направленную по касательной к траектории шарика; $\vec{F}_T'(t) = F_T \cos \alpha(t)$; $\vec{F}_T''(t) = F_T \sin \alpha(t)$. Возвращающей силой является составляющая $\vec{F}_T''(t)$ силы тяжести. Именно она сообщает шарiku тангенциальное ускорение:

$$a_\tau(t) = \frac{F_T''(t)}{m} = -g \sin \alpha(t). \quad (8.27)$$

Знак «минус» объясняется тем, что, когда $\alpha > 0$ (шарик отклонен вправо от вертикали), сила \vec{F}_T'' направлена влево. Точки A и A' на рисунке — крайние положения шарика. В этих положениях $T = F_T'$, тогда как в положении M : $T > F_T'$. (Заметим, что $T - F_T' = ma$, где a — модуль центростремительного ускорения шарика в точке M .)

Предположим, угол α достаточно мал:

$$\alpha \ll 1. \quad (8.28)$$

Поскольку α выражают в радианах, а радиан равен приблизительно 57° , то неравенство (8.28) означает, что угол α не превосходит нескольких градусов (на рисунке 8.11 угол α преувеличен ради наглядности).

При выполнении неравенства (8.28) можно считать, что $\sin \alpha \approx \alpha$; поэтому соотношение (8.27) преобразуется к виду:

$$a_\tau t \approx -g\alpha(t) = -g \frac{s(t)}{l}, \quad (8.29)$$

где $s(t)$ — длина дуги OM . Результат (8.29) указывает на то, что при выполнении неравенства (8.28) колебания математического маятника могут рассматриваться как гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (8.30)$$


Действительно, с учетом (8.30) соотношение (8.29) принимает вид

$$a_{\tau}(t) = -\omega^2 s(t), \quad (8.31)$$

который *аналогичен* соотношению (8.22) для гармонических колебаний шарика, приклепленного к пружине. Правда, теперь фигурируют не проекция ускорения a_x и линейное смещение x , а тангенциальное ускорение a_{τ} и смещение s по дуге, которое при $\alpha \ll 1$ может приближенно рассматриваться как линейное смещение.

Итак, при $\alpha \ll 1$ математический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Учитывая (8.5), заключаем, что период этих колебаний есть

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8.32)$$

 Обратим внимание: смещения шарика на пружине и шарика-маятника от положения равновесия изменяются по одному и тому же закону, несмотря на то, что силы, обуславливающие колебания, имеют различную природу (в одном случае это есть сила упругости, а в другом — составляющая силы тяжести).

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу *физического маятника*. Так называют твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения, не проходящую через центр масс тела. Будучи выведено из положения равновесия, тело при выполнении неравенства (8.28) совершает гармонические колебания с периодом

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}, \quad (8.33)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения, m — его масса, l — расстояние от точки подвеса до центра масс тела. Соотношение (8.33) может быть переписано в виде:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (8.34)$$

Величину $L = \frac{J}{ml}$ называют *приведенной длиной* физического маятника. Это есть длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

8.3.4. Гармонические колебания комбинированного маятника



Под комбинированным маятником будем понимать колебательную систему, изображенную на рисунке 8.12. Легкий стержень длиной l

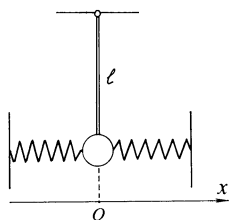


Рис. 8.12

подвешен к оси в точке A и может поворачиваться в плоскости чертежа. К шарiku массой m , находящемуся на конце стержня, прикреплены две одинаковые пружины жесткостью k , расположенные горизонтально в той же плоскости. Другие концы пружин закреплены неподвижно. Пренебрегая массами стержня и пружин и полагая выполненными неравенства (8.28), найдем циклическую частоту гармонических колебаний шарика-маятника.

Если мысленно убрать пружины, получим обычный математический маятник; его циклическая частота в квадрате определяется формулой

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}. \quad (1^*)$$

Если, наоборот, мысленно убрать силу тяжести, получим колебательную систему, аналогичную той, что изображена на рисунке 8.8. В отличие от той системы здесь имеются две пружины; поэтому частота колебаний возрастает вдвое по сравнению с частотой (8.24) (напомним соотношение (8.26, a)). В этом случае циклическая частота в квадрате есть

$$\omega_2^2 = \frac{2k}{m}. \quad (2^*)$$

Результат (1*) получен в случае, когда возвращающая сила может быть представлена (в соответствии с (8.27) — (8.29)) в виде:

$$R_1 = -\frac{mgx}{l},$$

где x — смещение шарика из положения равновесия. Результат (2*) получен в случае, когда возвращающая сила может быть представлена, согласно (8.23), в виде;

$$R_2 = -2kx.$$

В случае комбинированного маятника возвращающая сила есть

$$R_1 + R_2 = -\frac{mgx}{l} - 2kx.$$

Она сообщает шарiku ускорение

$$a_x = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)x. \quad (3^*)$$

Сравнивая (3*) с (8.22), заключаем, что для комбинированного маятника циклическая частота колебаний в квадрате определяется соотношением:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}. \quad (4^*)$$

Обратим внимание на то, что квадрат частоты колебаний комбинированного маятника равен сумме квадратов частот ω_1 и ω_2 :

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (8.35)$$

Соотношение (8.35) можно рассматривать как общее для колебательных процессов правило: квадрат частоты свободных колебаний, происходящих при одновременном действии нескольких независимых причин, равен *сумме квадратов* частот свободных колебаний, которые происходили бы при действии каждой из этих причин в отдельности.

8.3.5. Колебания маятника в неинерциальной системе отсчета

Предположим, что шарик-маятник массой m и длиной нити l совершает свободные колебания в системе отсчета, которая движется относительно неподвижной (лабораторной) системы с постоянным ускорением \vec{a} . В соответствии с замечаниями, сделанными в § 2.5, заключаем, что в данном случае следует дополнить приложенные к шарiku силы *силой инерции* $\vec{F}_и = -m\vec{a}$. Как и сила тяжести $\vec{F}_г$, эта сила постоянная; ее добавление соответствует замене реального поля тяготения, характеризующегося напряженностью $\frac{\vec{F}_г}{m} = \vec{g}$, полем тяготения напряженностью

$$\vec{g}_{эф} = \frac{\vec{F}_г + \vec{F}_и}{m} = \vec{g} - \vec{a}, \quad (8.36)$$

которую назовем *эффективной напряженностью*. Это означает, что период колебаний (8.34) преобразуется теперь к виду

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{|\vec{g} - \vec{a}|}}. \quad (8.37)$$

Подвесим шарик на нити длиной l к потолку лифта. Если лифт движется с ускорением \vec{a} , направленным вверх, то $|\vec{g} - \vec{a}| = g + a$. В этом случае период гармонических колебаний шарика будет равен, согласно (8.37),

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}. \quad (8.38)$$

Если лифт движется с ускорением \vec{a} , направленным вниз и меньшим по модулю, нежели \vec{g} , то период колебаний шарика будет равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}. \quad (8.39)$$

При $\vec{a} = \vec{g}$, т. е. в состоянии невесомости, период колебаний должен стать бесконечно большим.



Обратим внимание: внутри космического корабля, находящегося в состоянии невесомости (все двигатели выключены), свободные колебания маятника не происходят. Свободные же колебания под действием силы упругости пружины происходить будут, причем с тем же периодом, что и на Земле.

Замечание

Если бы лифт двигался с ускорением \vec{a} , направленным вниз и превосходящим по модулю ускорение свободного падения \vec{g} , то в этом случае нить с шариком следовало бы закрепить не на потолке лифта, а на полу. Можно было бы наблюдать колебания шарика-маятника над полом; их период равнялся бы ...

Задача 1. Лифт, движущийся вниз со скоростью $v = 16$ м/с, начинает тормозить. Его скорость линейно уменьшается со временем, и через время $t = 4$ с лифт останавливается. К потолку лифта подвешен шарик на нити длиной $l = 1,8$ м. На сколько увеличится период гармонических колебаний шарика во время торможения лифта?

□ Модуль ускорения лифта $a = \frac{v}{t}$. Это ускорение направлено вертикально вверх. Поэтому, согласно (8.38), период колебаний во время торможения лифта равен

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{lt}{gt-v}}; \quad \tau' = 3,5 \text{ с.}$$

До торможения (равно как и после остановки лифта) период колебаний равен $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2,7$ с. Следовательно, во время торможения лифта, движущегося вниз, период колебаний шариков увеличивается на 0,8 с. ■

Задача 2 (рис. 8.13, а). Нить длиной l с шариком на конце закреплена на саях, которые без трения соскальзывают по наклонной плоскости с углом наклона α . Требуется найти период гармонических колебаний маятника и определить направление нити, соответствующее равновесному положению маятника.

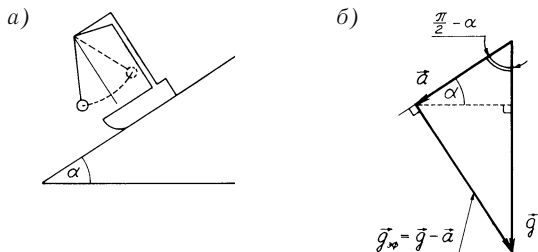


Рис. 8.13

□ Соскальзывающие по наклонной плоскости сани представляют собой неинерциальную систему, движущуюся с постоянным ускорением, равным

$$a = g \sin \alpha \quad (1^*)$$

и направленным под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha$ к направлению вектора \vec{g} (рис. 8.13, б). Из рисунка видно, что

$$g_{\text{эф}} = |\vec{g} - \vec{a}| = \sqrt{a \cos^2 \alpha - (g - a \sin \alpha)^2}. \quad (2^*)$$

Подставив (1*) в (2*), получим

$$g_{\text{эф}} = |\vec{g} - \vec{a}| = g \cos \alpha. \quad (3^*)$$

Используя (3*) и (8.37), находим искомый период колебаний:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}. \quad (8.40)$$

Из (1*) и (3*) следует;

$$g_{\text{эф}}^2 + a^2 = g^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = g^2.$$

Отсюда видно, что треугольник векторов, изображенный на рисунке 8.13, б, — прямоугольный. Следовательно, направление вектора $\vec{g}_{\text{эф}}$ перпендикулярно наклонной плоскости. Это и есть направление нити, соответствующее равновесному положению маятника. ■

8.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

8.4.1. Превращения энергии при гармонических колебаниях

В процессе гармонических колебаний происходят *взаимопревращения потенциальной и кинетической энергии тела*, совершающего колебания (например, шарика на нити, представляющего собой математический маятник, или тела, прикрепленного к упругой пружине). Механическая энергия тела при этом *сохраняется*, так как незатухающие синусоидальные колебания возможны лишь в случае, когда силами трения можно пренебречь.

Из сопоставления соотношений (8.6) и (8.12) видно, что кинетическая энергия максимальна в моменты времени t , для которых $x(t) = 0$, т. е. в моменты прохождения положения равновесия. В эти моменты времени $\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$ и, следовательно, $|\cos(\omega t + \varphi_0)| = 1$. Используя (8.12), заключаем, что в указанные моменты времени кинетическая энергия тела принимает значение $K_m = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2$, которое, с учетом (8.24), можно представить в виде:

$$K_m = \frac{1}{2} k x_m^2. \quad (8.41)$$

Потенциальную энергию тела будем отсчитывать от положения равновесия. Следовательно, максимальная кинетическая энергия тела, определяемая соотношением (8.41), равна механической энергии тела W . Таким образом,

$$W = \frac{1}{2} k x_m^2. \quad (8.42)$$

Перепишем (8.6) и (8.12) в виде

$$\frac{x(t)}{x_m} = \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{v(t)}{\omega x_m} = \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Возведем оба равенства в квадрат и сложим; получим:

$$\frac{x^2(t)}{x_m^2} + \frac{v^2(t)}{\omega^2 x_m^2} = 1.$$

С учетом (8.24) и (8.42) перепишем этот результат в виде:

$$\frac{1}{2} kx^2(t) + \frac{1}{2} mv^2(t) = W. \quad (8.43)$$

Первое слагаемое в левой части (8.43) есть потенциальная энергия тела $U(t)$, отсчитываемая от положения равновесия, а второе — кинетическая энергия $K(t)$. Соотношение (8.43) выражает *закон сохранения механической энергии* при гармонических колебаниях:

$$U(t) + K(t) = W, \quad (8.44)$$

где

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2(t), \quad (8.45)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} mv^2(t). \quad (8.46)$$

Полагая, простоты ради, $\varphi_0 = 0$ и воспользовавшись тригонометрическими тождествами:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha); \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad (8.47)$$

представим (8.45) и (8.46) в виде:

$$U(t) = W \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} W(1 - \cos 2\omega t); \quad (8.48)$$

$$K(t) = W \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} W(1 + \cos 2\omega t). \quad (8.49)$$

Соответствующие графики приведены на рисунке 8.14. На том же рисунке под этими графиками показаны для сравнения графики смещения и скорости для гармонических колебаний.

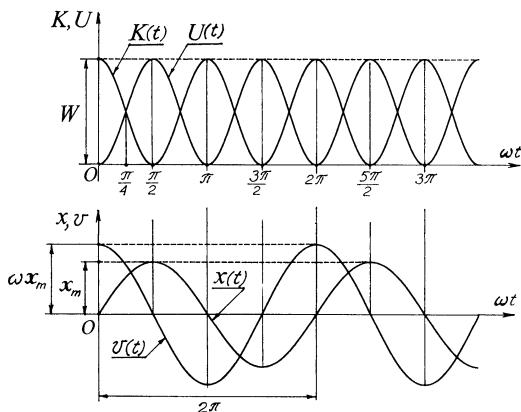


Рис. 8.14

Графики зависимостей $U(t)$ и $K(t)$ наглядно демонстрируют происходящие при гармонических колебаниях превращения энергии (кинетической в потенциальную и потенциальной в кинетическую) при сохранении механической энергии. Если в момент $t = 0$ тело находилось в положении равновесия ($\varphi_0 = 0$), то максимальное значение его кинетической энергии будет наблюдаться в моменты времени $\frac{\pi}{\omega}$, $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{3\pi}{\omega}$, ..., $\frac{n\pi}{\omega}$, ..., максимальное значение потенциальной энергии — в моменты $\frac{\pi}{2\omega}$, $\frac{3\pi}{2\omega}$, $\frac{5\pi}{2\omega}$, ..., $\frac{(2n-1)\pi}{2\omega}$, ..., равенство кинетической и потенциальной энергий — в моменты $\frac{\pi}{4\omega}$, $\frac{3\pi}{4\omega}$, $\frac{5\pi}{4\omega}$, ..., $\frac{(2n-1)\pi}{4\omega}$, ... (здесь $n = 1, 2, 3, \dots$).

8.4.2. Превращения энергии математического маятника

Математический маятник (шарик массой m на нити длиной l) отклонили на угол α_m от вертикали и отпустили, предоставив ему свободно колебаться. Силами трения пренебрежем и будем пользоваться законом сохранения механической энергии шарика W , который представим в виде:

$$U(\alpha) + K(\alpha) = W. \quad (8.50)$$

Здесь $U(\alpha)$ и $K(\alpha)$ — соответственно потенциальная и кинетическая энергии шарика в положении M , когда нить отклонена от вертикали на угол α (рис. 8.15, а). Если отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия (от положения, при котором $\alpha = 0$), то

$$U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha). \quad (8.51)$$

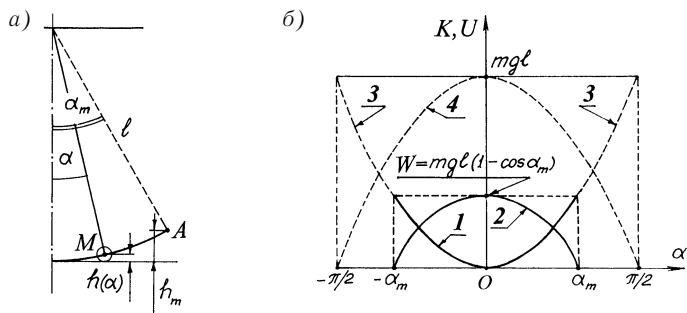


Рис. 8.15

Механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии в точке A :

$$W = mgh_m = mgl(1 - \cos\alpha_m). \quad (8.52)$$

Подставив (8.51) и (8.52) в (8.50), находим

$$K(\alpha) = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_m). \quad (8.53)$$

На рисунке 8.15, *б* представлены графически зависимости $U(\alpha)$ (кривая 1) и $K(\alpha)$ (кривая 2). Кривые демонстрируют взаимопревращения энергии при колебаниях математического маятника. На том же рисунке для сравнения показаны графики зависимостей $U(\alpha)$ и $K(\alpha)$ для $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$ (соответственно, кривые 3 и 4). Заметим, что кривая 2 смещена вниз от кривой 4 на $mgl \cos\alpha_m$. (Заметим также, что кривые 3 и 4 читателю уже знакомы (см. рис. 5.34).)

Задача. Висящий на нити шарик отклонили от вертикали на угол $\alpha_m = 60^\circ$ и отпустили. При каких углах отклонения нити от вертикали кинетическая энергия шарика равна его потенциальной энергии, отсчитываемой от положения равновесия?

□ Используя (8.51) и (8.53), представим равенство $U(\alpha) = K(\alpha)$ в виде: $1 - \cos\alpha = \cos\alpha - \cos\alpha_m$, где α — искомый угол. Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha_m). \quad (8.54)$$

Так как $\cos\alpha_m = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, то, следовательно, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Воспользовавшись математическими таблицами, находим: $\alpha = \pm 41^\circ 24'$.

Заметим, что если $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$, то из (8.54) следует, что $\alpha = \pm \frac{\pi}{3}$ (см. рис. 5.34). ■

Если $\alpha \ll 1$, то колебания маятника становятся гармоническими. Убедимся в этом. Представим (8.51) в виде

$$U(\alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (1^*)$$

При $\alpha \ll 1$ можно принять $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}$. Используя в качестве смещения длину дуги $s = l\alpha$, перепишем (1*) в виде

$$U = \frac{1}{2} mgl\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} s^2. \quad (2^*)$$

С учетом (8.24) и (8.30) соотношение (2*) преобразуется к виду $U = \frac{1}{2} ks^2$, соответствующему выражению (8.45) для гармонических колебаний.

8.4.3. Изменения модуля силы натяжения нити при колебаниях маятника

Используя закон сохранения механической энергии, найдем, как изменяется модуль силы реакции нити (а следовательно, и силы натяжения нити) при колебаниях шарика массой, подвешенного на этой нити. Обозначим через $T(\alpha)$ модуль силы реакции нити для положения M шарика, когда нить составляет угол α с вертикалью (рис. 8.16, а). Согласно второму закону Ньютона

$$T(\alpha) - mg \cos \alpha = ma, \quad (1^*)$$

где a — модуль центростремительного ускорения шарика в положении A . Так как $a = \frac{v^2}{l}$, где l — длина нити, а v — модуль скорости шарика в положении M , то (1*) можно переписать в виде

$$T(\alpha) - mg \cos \alpha = \frac{2K(\alpha)}{l}, \quad (2^*)$$

где $K(\alpha)$ — кинетическая энергия шарика в положении M . Подставив (8.53) в (2*), находим

$$T(\alpha) = mg(3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_m), \quad (8.55)$$

где α_m — угол наибольшего отклонения. Зависимость $T(\alpha)$ представлена графически сплошной кривой на рисунке 8.16, б. Там же пунктиром показан график зависимости $T(\alpha)$ для случая, когда $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$.

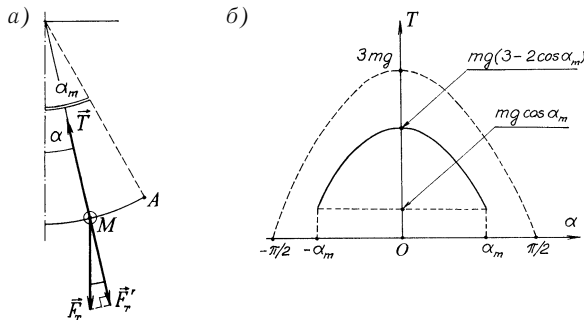


Рис. 8.16

Задача. На какой угол надо отклонить нить с подвешенным к ней шариком, чтобы при прохождении шариком положения равновесия сила реакции нити оказалась в $n = 2,5$ раза больше силы тяжести?

□ Воспользуемся соотношением (8.55), где следует положить $\alpha = 0$ и $T(0) = nmg$, получим $nmg = mg(3 - 2\cos\alpha_m)$. Отсюда следует, что $\cos\alpha_m = \frac{3-n}{2} = \frac{1}{4}$. Воспользовавшись математическими таблицами, находим $\alpha_m = 75^\circ 30'$. ■

8.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

8.5.1. Степень затухания свободных колебаний и добротность колебательной системы

Для определенности выберем колебательную систему в виде тела массой m , способного совершать свободные колебания по горизонтальной x -оси под действием упругой пружины жесткостью k (см. рис. 8.8). Напомним, что свободные колебания в такой системе происходят под действием силы упругости

$$F_{\text{упр}}(t) = -kx(t). \quad (8.56)$$

В случае, когда можно пренебречь силами трения (сопротивления), свободные колебания не затухают со временем и могут рассматриваться как гармонические колебания с собственной циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.57)$$

Смещение $x(t)$ и скорость $v(t)$ колеблющегося тела (точнее сказать, проекции смещения и скорости на x -ось) изменяются по синусоидальному закону:

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (8.58)$$

$$v(t) = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.59)$$

где φ_0 — начальная фаза.

Если трением нельзя пренебречь, то в этом случае характер свободных колебаний системы будет определяться, наряду с силой упругости (8.56), также силой трения $F_{\text{тр}}(t)$, которую во многих случаях можно полагать пропорциональной скорости $v(t)$ тела:

$$F_{\text{тр}}(t) = -\beta v(t). \quad (8.60)$$

Знак «минус» в (8.60) показывает, что сила трения в каждый момент времени направлена навстречу мгновенной скорости тела. Коэффициент пропорциональности β характеризует степень влияния сил трения на колебательный процесс. Чем больше β , тем сильнее это влияние и тем быстрее затухают со временем свободные колебания в данной системе. В СИ коэффициент β выражается в килограммах в секунду (кг/с). Величину

$$\gamma = \frac{\beta}{2m} \quad (8.61)$$

называют *постоянной затухания*.

Число Q , показывающее, во сколько раз наибольшее значение силы упругости kx_m больше наибольшего значения силы трения $\beta v_m = \beta \omega_0 x_m$, называют *добротностью колебательной системы*:

$$Q = \frac{kx_m}{\beta \omega_0 x_m} = \frac{k}{\beta \omega_0} = \frac{\sqrt{mk}}{\beta} = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (8.62)$$

Чем больше Q , тем меньше добротность системы и тем больше постоянная затухания. В отсутствие сил трения ($\beta = \gamma = 0$) добротность системы следует считать бесконечно большой.

Без вывода отметим, что если колебательная система с собственной циклической частотой ω_0 характеризуется добротностью Q , то амплитуда смещения x_m будет уменьшаться со временем по закону:

$$x_m(t) = x_m(0)e^{-\omega_0 t/(2Q)} = x_m(0)e^{-\gamma t}. \quad (8.63)$$

График смещения имеет в этом случае вид, показанный на рисунке 8.17. Из (8.63) видно, что величина $1/\gamma$ имеет простой смысл: это есть время, в течение которого амплитуда смещения уменьшается в $e \approx 2,7$ раза.

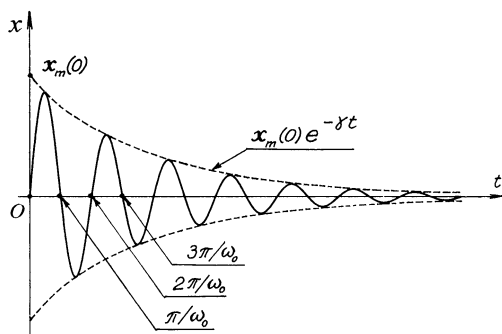


Рис. 8.17

8.5.2. Уравнение движения для вынужденных колебаний

Чтобы колебания в данной системе не затухали со временем, надо действовать на нее периодической внешней силой. Но теперь это будут уже не свободные колебания с собственной циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а вынужденные колебания с циклической частотой ω вынуждающей внешней силы.

Итак, пусть на рассматриваемую колебательную систему действует в горизонтальном направлении *внешняя синусоидальная сила*

$$F(t) = \sin \omega t, \quad (8.64)$$

где F_m — амплитуда внешней силы, ω — ее циклическая частота. В системе возникают *установившиеся гармонические колебания (вынужденные колебания)* с частотой ω . Зависимость смещения этих колебаний от времени имеет вид

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (8.65)$$

где x_m — наибольшее смещение (амплитуда) вынужденных колебаний. Выражение (8.65) весьма похоже на выражение (8.58), но здесь, в отличие от (8.58), x_m — амплитуда не *свободных*, а *вынужденных* колебаний; она никак не связана с начальными условиями, а полностью определяется свойствами колебательной системы и величинами F_m и ω , характеризующими внешнюю силу $F(t)$. Фаза φ в (8.65) — это не начальная фаза, а *сдвиг фазы* колебаний смещения $x(t)$ по отношению к колебаниям внешней силы $F(t)$. Исходя из (8.65), находим, действуя так же, как это делалось в п. 8.2.3, выражения для скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ тела, совершающего установившиеся вынужденные колебания:

$$v(t) = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (8.66)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.67)$$

На прикрепленное к пружине тело в данном случае действуют в горизонтальном направлении три силы: вынуждающая сила (8.64), сила упругости (8.56) и сила трения (8.60). Согласно второму закону Ньютона, *уравнение движения тела* может быть представлено в виде:

$$F_m \sin \omega t - kx(t) - \beta v(t) = ma(t). \quad (8.68)$$

Используя (8.65) — (8.67) и учитывая (8.57), перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_m \sin \omega t - \beta \omega x_m \cos(\omega t + \varphi) = \\ = (\omega_0^2 - \omega^2) m x_m \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (8.69)$$

8.5.3. Амплитуда и сдвиг фазы вынужденных колебаний в случае, когда силу трения не учитывают

Рассмотрим гипотетический случай, когда силу трения не принимают во внимание, полагая $\beta = 0$. Мы назвали этот случай гипотетическим, поскольку, как мы убедимся ниже, при рассмотрении вынужденных колебаний при условии совпадения частот ω и ω_0 принципиально нельзя пренебрегать силой трения, сколь бы мала она ни была. Впрочем, если ω заметно больше или меньше, чем ω_0 , данный «гипотетический» случай позволяет получить приемлемые результаты.

Итак, положим $\beta = 0$. В этом случае уравнение движения (8.69) существенно упрощается

$$F_m \sin \omega t = (\omega_0^2 - \omega^2) m x_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.70)$$

Найдем амплитуду вынужденных колебаний x_m и сдвиг фазы φ . Соотношение (8.70) должно выполняться при всех t . Это возможно в двух случаях: а) $\varphi = 0$ (а также $\pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$), т. е. смещение и вынуждающая сила *колеблются в одной фазе*: б) $\varphi = -\pi$ (а также $\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$), т. е. смещение и вынуждающая сила *колеблются в противофазе*, иначе говоря, колебания смещения отстают по фазе от колебаний вынуждающей силы на π . В случае а) $\sin \omega t = \sin(\omega t + \varphi)$, и соотношение (8.70) преобразуется к виду

$$x_m = \frac{F_m}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}. \quad (8.71)$$

В случае б) $\sin \omega t = -\sin(\omega t + \varphi)$, и соотношение (8.70) преобразуется к виду:

$$x_m = \frac{F_m}{(\omega^2 - \omega_0^2)m}. \quad (8.72)$$

Поскольку $x_m > 0$, то ясно, что случай колебаний $x(t)$ и $F(t)$ в одной фазе реализуется при $\omega < \omega_0$ (амплитуду колебаний дает выражение (8.71)), тогда как случай колебаний $x(t)$ и $F(t)$ в противофазе реализуется при $\omega > \omega_0$ (амплитуду колебаний описывает выражение (8.72)).

На рисунке 8.18, а представлены графические зависимости $x_m(\omega)$, описываемые выражениями (8.71) и (8.72). Легко видеть, что при $\omega \rightarrow 0$ амплитуда x_m стремится к $\frac{F_m}{\omega_0^2 m} = \frac{F_m}{k}$, а при $\omega \rightarrow \infty$

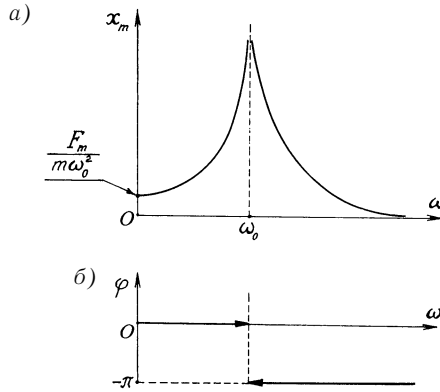


Рис. 8.18

амплитуда x_m стремится к нулю. На рисунке 8.18, б показан сдвиг фазы для $\omega < \omega_0$ и $\omega > \omega_0$. Если $\omega < \omega_0$, то $\varphi = 0$; если $\omega > \omega_0$, то $\varphi = -\pi$.

8.5.4. Резонанс

При совпадении частот колебаний вынуждающей силы и свободной частоты колебаний системы, т. е. в случае, когда

$$\omega = \omega_0, \quad (8.73)$$

наступает явление, называемое *резонансом*. Разумеется, в этом случае амплитуда x_m установившихся вынужденных колебаний в бесконечность не обращается. Просто при $\omega = \omega_0$ выражения (8.71) и (8.72) теряют смысл, поскольку нельзя делить на нуль. Это как раз и означает, что при резонансе принципиально нельзя пренебрегать силой трения, как бы ни мал был коэффициент β (иначе говоря, как бы ни велика была добротность Q колебательной системы).

Обозначим через $x_m(\omega_0)$ и $\varphi(\omega_0)$ соответственно амплитуду вынужденных колебаний и сдвиг фазы этих колебаний в случае, когда $\omega = \omega_0$. В этом случае правая часть уравнения (8.69) обращается в нуль, и уравнение движения принимает вид

$$F_m \sin \omega_0 t = \beta \omega_0 x_m(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)). \quad (8.74)$$

Равенство (8.74) должно выполняться при всех t . Это возможно при условии, что

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{а также } 2\pi n - \frac{\pi}{2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8.75)$$

т. е. при условии, что колебания смещения отстают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от колебаний вынуждающей силы. Если выполняется условие (8.75), то $\sin \omega_0 t = \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$, и мы получаем из (8.74) выражение для амплитуды вынужденных колебаний при резонансе:

$$x_m(\omega_0) = \frac{F_m}{\beta \omega_0}. \quad (8.76)$$

С учетом (8.62) этот результат можно переписать в виде:

$$x_m(\omega_0) = \frac{Q F_m}{k} = \frac{F_m \omega_0}{2\gamma k}. \quad (8.77)$$

Если колебательная система характеризуется достаточно высокой добротностью, амплитуда $x_m(\omega_0)$ может оказаться весьма большой. Большие значения $x_m(\omega_0)$ объясняются тем, что при наступлении резонанса возникает наиболее благоприятное условие для увеличения энергии колебательной системы за счет работы, совершаемой над системой вынуждающей силой. Это условие заключается в равенстве (8.75). Как отмечалось в п. 8.2.3, колебания смещения при гармонических колебаниях отстают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от колебаний скорости. Учитывая это, можем вывести из (8.75) важное заключение: при $\omega = \omega_0$ колебания скорости тела происходят в одной фазе с колебаниями вынуждающей силы. Следовательно, во все моменты времени направления вектора скорости $\vec{v}(t)$ и вектора силы $\vec{F}(t)$ совпадают (если, например, сила действует вправо от положения равновесия, то и тело движется в ту же сторону). Так как развиваемая в момент времени t мощность равна скалярному произведению $\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$, то параллельность векторов-сомножителей обеспечивает наибольшее значение мощности, а значит, и работы, совершаемой вынуждающей силой за тот или иной промежуток времени.

Нарастание амплитуды вынужденных колебаний при резонансе в системе с достаточно большой добротностью может привести к разрушению самой системы. В качестве колебательной

системы может выступать любое твердое тело, поскольку при деформациях в нем возникают силы упругости. Колебательной системой являются мост, каркас здания, корпус корабля или авиалайнера, станина машины, ее вал и т. п. Все они характеризуются не одной, а набором собственных частот колебаний. Разнообразные внешние воздействия на эти системы часто являются периодическими и могут вызывать появление в системах вынужденных колебаний. При совпадении частоты вынужденных колебаний с той или иной собственной частотой колебаний системы наступает резонанс и может произойти поломка или даже разрушение системы.

Для примера представим себе некий работающий двигатель. Он может породить периодическую вынуждающую силу, связанную с движением его частей (например, поршней) или с недостаточно точной центровкой его вращающихся деталей (напомним вращательный дисбаланс, с которым мы познакомились в п. 4.4.3). Значительное возрастание амплитуды вынужденных колебаний при наступлении резонанса может привести к поломке вращающегося вала двигателя или к разрушению конструкции, на которой установлен двигатель.

Принимаются специальные меры, чтобы не допустить наступления нежелательного резонанса или ослабить его проявление. Для этого увеличивают затухание в системе (понижают ее добротность) или добиваются, чтобы собственные частоты колебаний не совпадали с частотой вынуждающей силы.

Отметим курьезный случай, который произошел в Петербурге в 1906 году. Египетский мост через реку Фонтанку обрушился при переходе по нему кавалерийского эскадрона. Четкий шаг лошадей, хорошо обученных церемониальному маршу, попал в резонанс с периодом колебаний моста. Для предотвращения подобных случаев войсковым частям при переходе мостов приказывают с тех пор идти не «в ногу», а вольным шагом.

8.5.5. Резонансные кривые

Мы нашли выражения для амплитуды x_m установившихся вынужденных колебаний и определили сдвиг фазы φ этих колебаний (по отношению к колебаниям внешней силы), решая уравнение движения в двух частных случаях:

- а) когда не учитывается трение,
- б) когда трение учитывается, но при этом выполняется условие резонанса (8.73).

Решая уравнения движения (8.69) в общем случае, можно получить следующие выражения для зависимостей $x_m(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 m^2 + \beta^2 \omega^2}}; \quad (8.78)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)m}. \quad (8.79)$$

Опуская вывод этих выражений, обратим внимание на то, что при $\beta = 0$ и $\omega \neq \omega_0$ соотношение (8.78) преобразуется в (8.71) и (8.72), а при $\beta \neq 0$ и $\omega = \omega_0$ оно преобразуется в (8.77). Отметим также, что при $\beta \neq 0$ и $\omega = \omega_0$ выражение (8.79) приводит к $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Зависимость $x_m(\omega)$, описываемая соотношением (8.78), графически представлена на рисунке 8.19, а для трех значений β . Кривая 1 получена для колебательной системы с высокой добротностью (коэффициент β_1 достаточно мал), кривая 2 — для системы с меньшей добротностью $|\beta_2 > \beta_1|$, кривая 3 — для системы с еще более низкой добротностью $|\beta_3 > \beta_2|$. Эти кривые называют *резонансными кривыми*. На том же рисунке пунктиром показан график зависимости $x_m(\omega)$ для случая, когда трение не

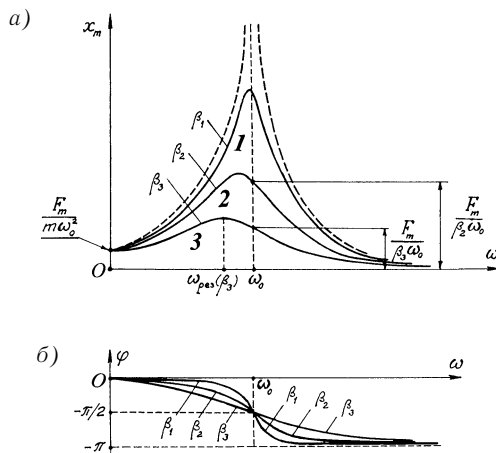


Рис. 8.19

принимается во внимание (для гипотетического случая бесконечно большой добротности); этот график фигурировал на рисунке 8.18, *a*.



Обратим внимание: во всех случаях ордината точки пересечения резонансной кривой с вертикалью $\omega = \omega_0$ есть

$x_m(\omega_0) = \frac{F_m}{\beta\omega_0}$. Однако частота $\omega = \omega_0$ отнюдь не соответствует

максимуму резонансной кривой. Обозначим через $\omega_{\text{рез}}$ частоту вынуждающей силы, при которой резонансная кривая достигает максимума; назовем ее *резонансной частотой*. Можно показать (мы это делать не будем), что резонансная частота немного меньше собственной частоты ω_0 ; она равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}}. \quad (8.80)$$

Подставив $\omega = \omega_{\text{рез}}$ в (8.78), находим:

$$x_m(\omega_{\text{рез}}) = \frac{F_m}{\beta \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}}}. \quad (8.81)$$

Легко видеть что $x_m(\omega_0) < x_m(\omega_{\text{рез}})$.

На рисунке 8.19, *б* графически представлена определяемая соотношением (8.79) зависимость $\varphi(\omega)$ для трех значений β : $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Здесь $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$. Во всех трех случаях $\varphi \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow -\pi$ при $\omega \rightarrow \infty$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ для $\omega = \omega_0$.



На практике для экспериментального отыскания собственных частот колебаний той или иной конструкции или какой-то ее детали проводят на специальных вибростендах резонансные испытания: плавно изменяют частоту ω вынуждающей силы (например, изменяя угловую скорость вращения электромоторов, используемых в качестве вибраторов) и снимают резонансную кривую для исследуемого объекта. Частоты, которым на резонансной кривой соответствуют максимумы, — это собственные частоты колебаний данного объекта. В качестве примера на рисунке 8.20 приведена экспериментальная резонансная кривая — зависимость от частоты ω вынуждающей силы амплитуды колебаний конца крыла некоторого авиалайнера. Частота ω представлена в единицах с^{-1} , амплитуда колебаний — в произвольных едини-

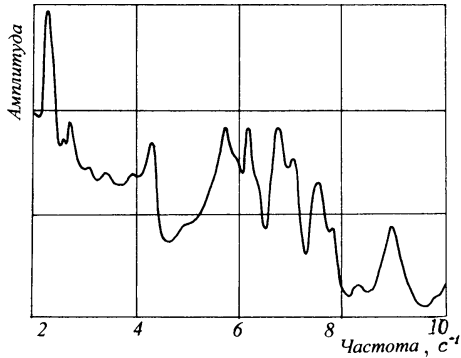


Рис. 8.20

цах. Приведенная резонансная кривая выявляет девять собственных резонансных частот крыла авиалайнера: они обозначены через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_9$.

8.5.6. Время установления вынужденных колебаний



Как только внешняя периодическая сила начинает действовать на колебательную систему, в последней возникают, наряду с вынужденными колебаниями, также свободные колебания. Вынужденные колебания имеют частоту ω вынуждающей силы, а свободные — собственную частоту ω_0 данной системы. Первоначальное движение системы оказывается сложным, поскольку является суммой вынужденных и свободных колебаний. Но внешняя сила поддерживает только вынужденные колебания, а свободные колебания затухают со временем. Как уже отмечалось (см. (8.63)), амплитуда свободных колебаний уменьшается со временем по закону $e^{-\gamma t}$, где γ — постоянная затухания,

связанная с добротностью Q системы соотношением $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$ (см. (8.62)). По мере затухания свободных колебаний движение системы постепенно «очищается» от них, и в итоге остаются только вынужденные колебания. Таким образом, время T установления вынужденных колебаний можно полагать равным времени затухания свободных колебаний, т. е. приблизительно равным

$$T \approx \frac{1}{\gamma} = \frac{2Q}{\omega_0}. \quad (8.82)$$

Если добротность Q системы высока, устанавливается большая резонансная амплитуда колебаний $x_m(\omega_0)$. Она равна, согласно (8.76), $\frac{F_m}{\beta\omega_0} = \frac{QF_m}{k}$.

Учитывая (8.82), заключаем, что

$$\frac{x_m(\omega_0)}{T} \approx \frac{F_m\omega_0}{2k}.$$

Как видим, отношение резонансной амплитуды вынужденных колебаний ко времени установления этих колебаний *не зависит* от добротности колебательной системы. Чем выше добротность, тем больше резонансная амплитуда колебаний и одновременно тем больше время их установления. Иначе говоря, при малом затухании системы резонансная амплитуда велика, но зато и раскачка до этой амплитуды длится долго. При большом затухании системы резонансная амплитуда относительно невелика, но быстро устанавливается.

Оценка времени установления вынужденных колебаний (8.82) является, разумеется, приближительной. Она исходила из того, что время затухания свободных колебаний равно времени, за которое их амплитуда уменьшается в $e \approx 2,7$ раза.

8.6. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

8.6.1. Сложение колебаний одинаковой частоты

Пусть на тело массой m действуют силы упругости $F_1 = -k_1x$ и $F_2 = -k_2x$. Под действием каждой из этих сил тело совершало бы гармонические колебания $x_1 = x_{1m}\sin(\omega_1t + \varphi_1)$ и $x_2 = x_{2m}\sin(\omega_2t + \varphi_2)$, где $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$. При одновременном действии этих сил возникают колебания, которые уже не будут гармоническими. Сложение двух гармонических колебаний не приводит в общем случае к возникновению гармонических колебаний. Исключением является частный случай, когда $k_1 = k_2 = k$ и, следовательно, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. В этом случае результирующее колебание есть гармоническое колебание с частотой ω . Найдем его амплитуду X_m и начальную фазу Φ .

Итак, складываются гармонические колебания с одинаковой частотой, но разными амплитудами и начальными фазами:

$$x_1 = x_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = x_{2m}\sin(\omega t + \varphi_2). \quad (8.83)$$

Результирующее гармоническое колебание представим в виде

$$X = X_m\sin(\omega t + \Phi). \quad (8.84)$$

Все колебания происходят по одной прямой (по x -оси); очевидно, что

$$X = x_1 + x_2.$$

Подставляя сюда (8.83) и (8.84), получим

$$X_m\sin(\omega t + \Phi) = x_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1) + x_{2m}\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Это равенство должно выполняться при любых t . Для $t = 0$ оно преобразуется к виду

$$X_m \sin \Phi = x_{1m} \sin \varphi_1 + x_{2m} \sin \varphi_2, \quad (1^*)$$

а для $t = \frac{\pi}{2\omega}$ преобразуется к виду:

$$X_m \cos \Phi = x_{1m} \cos \varphi_1 + x_{2m} \cos \varphi_2. \quad (2^*)$$

Разделив (1*) на (2*), находим

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{x_{1m} \sin \varphi_1 + x_{2m} \sin \varphi_2}{x_{1m} \cos \varphi_1 + x_{2m} \cos \varphi_2}. \quad (8.85)$$

Возводя (1*) и (2*) в квадрат и складывая, находим

$$X_m^2 = x_{1m}^2 + x_{2m}^2 + 2x_{1m}x_{2m}(\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1).$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (8.86)$$

перепишем предыдущее выражение в виде

$$X_m^2 = x_{1m}^2 + x_{2m}^2 + 2x_{1m}x_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (8.87)$$

Рассмотрим три частных случая.

Случай 1: $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, где n — целое число (рис. 8.21, а).

В этом случае $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$.

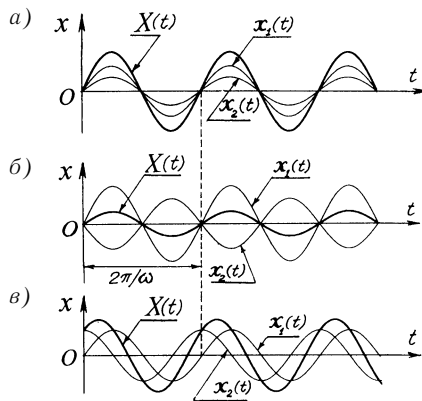


Рис. 8.21

Из (8.85) и (8.87) следует, что

$$\Phi = 0; \quad X_m = |x_{1m} + x_{2m}|. \quad (8.88)$$

С л у ч а й 2: $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ (рис. 8.21, б). В этом случае $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Из (8.85) и (8.87) следует, что

$$\Phi = 0; \quad X_m = |x_{1m} - x_{2m}|. \quad (8.89)$$

С л у ч а й 3: $x_{1m} = x_{2m} = x_m$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (рис. 8.21, в). В этом случае $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$. Из (8.85) и (8.87) следует, что

$$\Phi = \frac{\pi}{4}; \quad X_m = \sqrt{2} x_m. \quad (8.90)$$

8.6.2. Сложение колебаний с близкими частотами (биения)

Сложим два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами и нулевыми начальными фазами, немного различающихся по частоте

$$x_1(t) = x_m \sin \omega_1 t \quad \text{и} \quad x_2(t) = x_m \sin \omega_2 t.$$

Здесь

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega - \Delta\omega, \quad \Delta\omega \ll \omega, \quad (8.91)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (8.92)$$

представим результирующее колебание в виде

$$X(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2x_m \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

С учетом (8.91) перепишем этот результат в виде

$$X(t) = 2x_m \sin \omega t \cdot \cos(\Delta\omega t). \quad (8.93)$$

Зависимость $X(t)$ представлена графически на рисунке 8.22. Результирующее колебание не является гармоническим. Но если разность частот $\omega_1 - \omega_2$ достаточно мала, то можно говорить о «почти синусоидальных» колебаниях с условным периодом

$$\tau' = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.94)$$

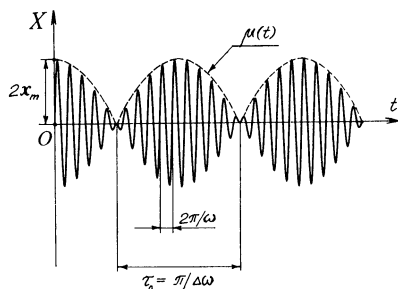


Рис. 8.22

и медленно изменяющейся со временем «амплитудой»

$$\mu(t) = 2x_m |\cos(\Delta\omega t)|. \quad (8.95)$$

Эта «амплитуда» показана на рисунке пунктирной кривой.

Колебания, развертка которых во времени показана на данном рисунке, называются *биениями*. Период функции называют *периодом биений*; он равен

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\Delta\omega}. \quad (8.96)$$

Величину

$$\nu = \frac{1}{\tau_0} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} \quad (8.97)$$

называют *частотой биений*.

Биения легко продемонстрировать на примере сложения колебаний двух камертонов с близкими частотами. Если возбудить одновременно оба камертона, возникнет звук определенной частоты, который будет периодически усиливаться и ослабляться.

8.6.3. Сложение колебаний с кратными частотами

Рассмотрим для примера сложение трех гармонических колебаний с кратными циклическими частотами: $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 2\omega$, $\omega_3 = 3\omega$. Амплитуды колебаний обозначим, соответственно, через x_{1m} , x_{2m} , x_{3m} , а начальные фазы будем полагать одинаковыми и равными нулю. Смещение $X(t)$ результирующего колебания имеет вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = \\ &= x_{1m} \sin \omega t + x_{2m} \sin 2\omega t + x_{3m} \sin 3\omega t. \end{aligned} \quad (8.98)$$

Гармоническую составляющую с частотой ω называют *первой гармоникой*, а также *основным тоном*; составляющую с частотой 2ω — второй гармоникой, а также *первым обертоном*; составляющую с частотой 3ω — *третьей гармоникой* (*вторым обертоном*).

Так как складываемые смещения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ совершаются вдоль одной прямой (вдоль x -оси), то результирующее смещение $X(t)$ равно *алгебраической сумме* складываемых смещений. Исходя из этого, можно использовать *графический способ* сложения колебаний. На рисунке 8.23, а именно таким способом построен график результирующего смещения (8.98). Тонкими кривыми показаны графики смещения для складываемых гармоник (кривая 1 — первая гармоника, кривая 2 — вторая гармоника, кривая 3 — третья гармоника).

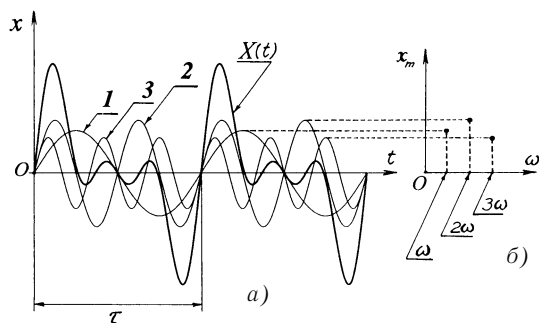


Рис. 8.23

! Обратим внимание на то, что результирующее колебание не является синусоидальным (гармоническим), но все-таки это есть колебание — функция $X(t)$ является периодической функцией времени. Ее период τ совпадает с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ первой гармоники (основного тона). Отметим, что к негармоническому периодическому процессу неприменимо понятие «циклическая частота»; *определенную частоту имеют только гармонические колебания*. Представленное на рисунке 8.23 результирующее колебание характеризуется определенным периодом $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ и набором циклических частот: ω , 2ω , 3ω . На рисунке 8.23, б изображен в виде диаграммы *спектр частот* колебания (8.98). Он представляет собой совокупность трех точек с абсциссами $j\omega$ и ординатами x_{jm} ($j = 1, 2, 3$).

8.6.4. Разложение Фурье

В начале XIX столетия французский математик и физик Жан Фурье показал, что любая периодическая функция $f(t)$ с периодом τ может быть представлена в виде суммы, состоящей, вообще говоря, из бесконечно большого числа гармоник:

$$f(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (8.99)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. Выражение (8.99) называют *разложением функции $f(t)$ в ряд Фурье* или, проще, *разложением Фурье*. Обычно амплитуды в разложении (8.99) довольно быстро убывают с ростом номера гармоники, так что на практике можно ограничиться с хорошей степенью точности лишь несколькими первыми слагаемыми в разложении Фурье (несколькими первыми гармониками).

Выберем для примера периодическую функцию $X(t)$, изображающую «прямоугольный» колебательный процесс (рис. 8.24, а). Если взять всего три первых гармоники, изображенные на рисунке 8.24, б, то получим результирующее (суммарное) колебание, представленное на рисунке 8.24, в. Как видим, всего три первых гармоники позволили в данном случае получить относительно неплохое приближение к исходной функции $X(t)$.

Функции $X(t)$ на рисунках 8.24 и 8.23, а выражали зависимость от времени *смещения*. Но периодическая функция $f(t)$ в разложении Фурье (8.99) может описывать зависимость от времени

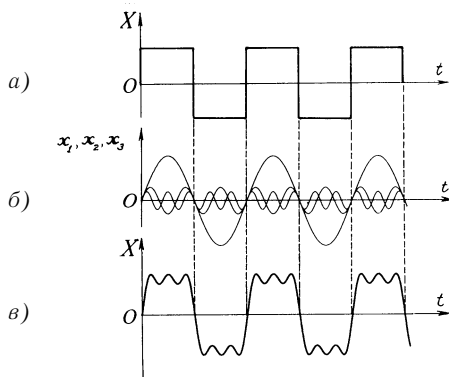


Рис. 8.24

отнодь не только смещения. В частности, под $f(t)$ можно понимать *периодическую вынуждающую силу*, действующую на данную колебательную систему.

До сих пор мы полагали, что вынуждающая сила колеблется по синусоидальному (гармоническому) закону с определенной циклической частотой ω . В системе устанавливались вынужденные колебания с той же частотой ω , и, если ω совпадала с собственной частотой ω_0 системы, наступал резонанс.

Предположим теперь, что вынуждающая сила описывается несинусоидальной периодической функцией $f(t)$ с периодом τ . Используя разложение Фурье, мы можем представить себе эту функцию в виде набора синусоид с частотами

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}, \omega_2 = 2\omega_1 = \frac{4\pi}{\tau}, \omega_3 = 3\omega_1 = \frac{6\pi}{\tau}, \omega_4 = 4\omega_1 = \frac{8\pi}{\tau}, \dots$$

Каждая из гармонических составляющих вынуждающей силы будет вызывать такой эффект, как если бы при этом другие гармонические составляющие отсутствовали (проявляется принцип суперпозиции). Следовательно, при действии силы $f(t)$ на колебательную систему в последней возникает резонанс, если хотя бы одна из частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$ совпадает с собственной частотой ω_0 системы. Система будет совершать установившиеся вынужденные колебания *именно с этой частотой* (как если бы во внешнем воздействии содержалась только та гармоническая составляющая, частота которой близка к ω_0). Эти вынужденные колебания будут практически гармоническими, несмотря на то, что само внешнее воздействие может быть существенно негармоническим.

В рассмотренном на рисунке 8.25 примере с неполным разложением Фурье для функции $X(t)$ оказались несущественными начальные фазы гармоник (все они приравнены здесь нулю). Во многих задачах физики важны только амплитуды гармоник, а начальные фазы, хотя и влияют на форму результирующего колебания, оказываются несущественными. Это справедливо, например, в случаях, когда нас интересуют не столько сами гармоники, сколько их энергии, которые, согласно (8.42), зависят от амплитуды и циклической частоты, но не зависят от начальной фазы. В таких случаях нас будут интересовать только частоты гармонических составляющих и соответствующие этим частотам амплитуды. Разложение несинусоидального колебания на гармоники без учета начальных фаз называют спектральным разложением. Диаграмма, изображающая зависимость амплитуды каждой гармоники от ее частоты, называется спектром несинусоидального колебания.



Рис. 8.25

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

8.1. Два тела с одинаковыми массами подвесили к двум одинаковым пружинам. Тело 1 оттянули вниз на 5 см, а тело 2 — на 8 см. Тела одновременно отпустили. Какое из них первым пройдет положение равновесия?

8.2. Амплитуду колебаний гармонически колеблющегося тела удвоили. Как изменятся период колебаний тела, его максимальная скорость, максимальное ускорение, механическая энергия?

8.3. Могут ли в какой-то момент совпасть направления векторов смещения и ускорения тела, совершающего гармонические колебания? Что можно сказать о модуле смещения в моменты времени, когда скорость тела: а) обращается в нуль, б) максимальна, в) равна половине максимальной скорости?

8.4. Какую долю механической энергии составляет кинетическая энергия гармонически колеблющегося тела в момент, когда смещение равно половине амплитуды?

8.5. Материальная точка колеблется по закону:

$$x(t) = x_m \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t + x_m \sin \omega_2 t \cdot \cos \omega_1 t.$$

Докажите, что эти колебания являются гармоническими и укажите для них амплитуду, циклическую частоту, начальную фазу.

8.6. Материальная точка совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $x_m = 20 \text{ см}$. Чему равна скорость точки: а) при прохождении положения равновесия, б) на расстоянии 10 см от положения равновесия?

8.7. Когда амплитуда свободных колебаний не зависит от свойств колебательной системы?

8.8. Используя единицы СИ, напишите математическое выражение для зависимости смещения материальной точки от времени, если известно, что точка совершает гармонические колебания с амплитудой 30 см, периодом 2 с и в начальный момент она находилась в положении равновесия.

8.9. Используя условие предыдущей задачи, напишите математическое выражение для зависимости $v(t)$ скорости от времени.

8.10. Используя условия двух предыдущих задач, напишите математические выражения для зависимости от времени кинетической, потенциальной и механической энергии материальной точки массой 20 г.

8.11. В момент t скорость материальной точки массой m , совершающей гармонические колебания, равна $v(t) = v_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Найдите: а) смещение в момент $t = 0$; б) механическую энергию;

в) потенциальную энергию в момент t ; г) потенциальную энергию в момент $t = 0$. Потенциальная энергия отсчитывается от положения равновесия.

8.12. Используя условие предыдущей задачи, найдите моменты времени, когда: а) точка оказывается в положении равновесия; б) смещение точки максимально.

8.13. Материальная точка массой $m = 60$ г колеблется по закону $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, где $x_m = 0,6$ м, $\omega = 1,5$ с⁻¹, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.

Найдите: а) максимальную скорость точки; б) максимальное ускорение; в) механическую энергию.

8.14. Период колебаний материальной точки, колеблющейся по закону синуса, равен 2,4 с, амплитуда колебаний 5 см, начальная фаза $\frac{\pi}{2}$. Найдите, чему равны через 1,2 с после начала колебаний: а) смещение точки, б) скорость, в) ускорение.

8.15. От груза, неподвижно висящего на пружине жесткостью k , отрывается часть, имеющая массу m . На какую высоту поднимается при этом оставшаяся часть груза в процессе начавшихся колебаний?

8.16. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массой m , к которому прикреплены с противоположных сторон пружины — одна жесткостью k_1 , другая жесткостью k_2 (см. рис. 8.25). Найдите период колебаний тела.

8.17. Чему равна масса тела, которое, будучи подвешено к некоторой пружине, колеблется с тем же периодом, что и тело массой m , подвешенное к двум таким пружинам, соединенным последовательно?

8.18. Тело массой m подвешено к соединенным последовательно четырем одинаковым пружинам жесткостью k каждая. Найдите период колебаний тела.

8.19. Тело массой m подвешено на трех параллельных одинаковых пружинах жесткостью k каждая. Найдите период колебаний тела.

8.20. Период колебаний маятника на поверхности Луны в $\xi = 2,46$ раза больше его периода колебаний на Земле. Радиус Земли $R_3 = 6370$ км, масса Земли в $n = 81$ раз больше массы Луны. Найдите радиус Луны.

8.21. При какой длине нити математического маятника период его колебаний на высоте $h = 50$ км над уровнем моря будет таким же, как у маятника той же массы на нити длиной $l_0 = 4$ м, находящегося на уровне моря? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

8.22. Точно идущие на Земле часы с маятником подняты на высоту $h = 2$ км над уровнем моря. На сколько будут отставать эти часы за сутки, т. е. за время $T = 8,64 \cdot 10^4$ с? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

Подсказка. Искомое отставание равно $T \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)$, где τ_0 и τ_1 — периоды колебаний маятника часов на

уровне моря и на высоте h , соответственно.

8.23. Чему равен период колебаний математического маятника длиной l , находящегося в вагоне, который движется горизонтально с ускорением a ?

8.24. На воде плавает березовая шайба толщиной $h = 12$ см и плотностью $\rho = 650$ кг/м³ (рис. 8.26). На шайбу слегка надавили сверху, заставив ее погрузиться в воду дополнительно на несколько сантиметров, и затем отпустили. Шайба начала колебаться в вертикальном направлении. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Найдите период колебаний шайбы.

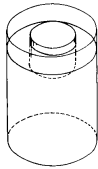


Рис. 8.26

Подсказка. Роль возвращающей силы играет приращение ΔF выталкивающей силы, возникающее при принудительном погружении шайбы в воду на расстояние x : $\Delta F =$

$= \rho_0 g S x$, где S — площадь основания шайбы. Так как ΔF пропорционально x , возникают гармонические колебания шайбы с «жесткостью» $k = \rho_0 g S$.

8.25. Тело прикрепили к нижнему концу вертикальной пружины с закрепленным верхним концом и медленно опустили вниз, пока оно не остановилось в положении равновесия. Пружина при этом растянулась на величину Δl . Найдите период колебаний тела, возникающий, если тело толкнуть вниз.

Подсказка. Из условия задачи можно найти жесткость пружины:

$$k = \frac{mg}{\Delta l}, \text{ где } m \text{ — масса тела.}$$

8.26. Найдите зависимость смещения от времени для колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний с амплитудами x_m и циклическими частотами ω , в случаях: а) колебания происходят в противофазе, б) колебания происходят со сдвигом по фазе, равным $\frac{\pi}{2}$. Найдите в обоих случаях циклическую частоту результирующего колебания.



МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

9.1. ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

9.1.1. Волны упругие и поверхностные

Одним из видов механического движения является *волновое движение*, иначе говоря, *механические волны*. Говоря о механических волнах, различают *упругие волны* и *поверхностные волны*.

Если для механических колебаний наличие среды, окружающей колебательную систему, является всего лишь негативным фактором, обуславливающим затухание колебаний со временем, то для механических волн *наличие среды принципиально необходимо*, поскольку механическая волна представляет собой, по сути, распространение механических колебаний по пространству среды или, иначе говоря, *передачу колебаний от одних частиц среды к другим*. В отсутствии среды не будет и механических волн.

Пусть в некотором месте внутри тела и вообще внутри некоторой среды (назовем это место условно «центром») возникло периодическое механическое возмущение, проявляющееся в *периодических деформациях*. Вследствие взаимодействия между частицами среды это периодическое возмущение *будет вовлекать в вынужденные колебания всё более и более удаленные от центра участки среды*. В среде возникает *волна*, распространяющаяся во все стороны от центра, который играет роль *источника волны*. С точки зрения динамики, процесс распространения волны по среде обеспечивают *силы упругости* среды, поэтому волну называют *упругой*.

Отвлекаясь от молекулярного строения среды (тела), будем рассматривать ее как *сплошную среду*, непрерывно распределенную в пространстве и обладающую определенными упругими свойствами. Говоря о частице такой среды, совершающей вынуж-

денные колебания, будем иметь в виду отнюдь не отдельную молекулу, а *малый элемент объема среды*, размеры которого, однако, во много раз больше средних межмолекулярных расстояний, так что в нем содержится много молекул. Практически частицы среды можно полагать точечными, так как даже в газе средние межмолекулярные расстояния весьма малы — они имеют порядок 10^{-5} мм (при нормальных условиях).

В зависимости от своего агрегатного состояния тело (среда) обладает или не обладает теми или иными *упругими свойствами*. Газ не обладает упругостью формы (газообразное тело беспрепятственно изменяет свою форму в соответствии с формой сосуда, в котором находится газ), но у него есть *объемная упругость* — способность сопротивляться уменьшению объема. Твердые тела, помимо объемной упругости, проявляющейся в их сопротивлении как сжатию, так и растяжению, обладают упругостью формы, которая проявляется в их сопротивлении деформациям сдвига, изгиба, кручения. Жидкость обладает в основном объемной упругостью, хотя при определенных условиях некоторые жидкости обнаруживают также упругость формы.

Особое место среди механических волн занимают *поверхностные волны*. Они представляют собой распространяющиеся вдоль свободной поверхности жидкости периодические механические возмущения, которые возникают под влиянием внешних воздействий, например, ритмических ударов по поверхности жидкости, падения тел в жидкость, движения судов, ветра и т. п. В возникновении и распространении поверхностных волн важную роль играют *сила тяжести и сила поверхностного натяжения*.

Поверхностные волны (например, волны на поверхности воды) отличаются большой наглядностью; они всем хорошо знакомы. По этой причине не будем обращаться к ним для демонстрации общих свойств волнового движения. Однако анализ такого движения значительно проще проводить, рассматривая не поверхностные, а упругие волны. Именно так мы и поступим, фактически ограничиваясь в данной главе физикой упругих волн. Отдельное внимание будет уделено *звуковым (акустическим)* волнам. Так называются упругие волны относительно малой интенсивности. Воздействуя на органы слуха человека, они способны вызвать звуковые ощущения.

9.1.2. Особенности волнового движения

Волновое движение есть сочетание двух движений: колебательного движения частиц среды и движения волны в процессе ее

распространения по среде. С колебательным движением мы уже знакомы.

? А что представляет собой движение волны, которая распространяется по среде?

Процесс распространения волны удобно наблюдать на примере поверхностных волн, воспользовавшись водяной ванной Томаса Юнга (рис. 9.1, а). Неглубокую ванну площадью около 1 м^2 , дном которой служит стекло 1, наполняют водой на глубину примерно 1–2 см. Штифт 2 укреплен на конце упругой металлической пластинки 3. При колебаниях пластинки штифт периодически ударяет по поверхности воды в ванне и возбуждает поверхностные волны. Под ванной установлен осветитель 4, позволяющий проецировать картину поверхностных волн на экран 5.

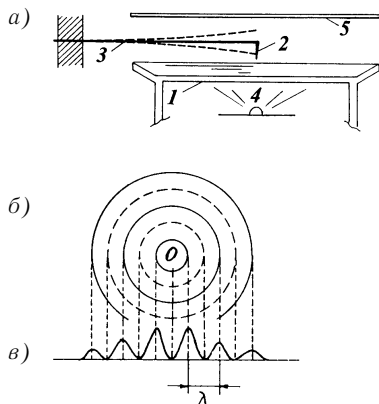


Рис. 9.1

Наблюдаемая на экране картина разбегающихся от штифта кольцевых волн показана на рисунке 9.1, б. Гребни волн бегут от источника волн O с некоторой скоростью. Обозначим эту скорость через v_ϕ и будем называть ее *фазовой скоростью*, поскольку гребень волны может быть сопоставлен с определенной фазой колебаний частиц поверхности воды (фазой, соответствующей их максимальному смещению вверх). Расстояние λ между соседними гребнями волны называют *длиной волны* (рис. 9.1, в). Это есть расстояние, на которое распространяется волна за время τ , равное периоду колебаний ее источника:

$$\lambda = v_\phi \tau. \quad (9.1)$$

В опыте с водяной ванной Юнга $\tau \approx 0,1 \text{ с}$, $\lambda \approx 2 \text{ см}$, $v_\phi \approx 0,2 \text{ м/с}$.



Обратим внимание на то, что вода в ванной Юнга отнюдь не перемещается от точки O к краям ванны. К краям ванны движутся, постепенно уменьшаясь по высоте, гребни волны, но не сама водная масса. Например, если бросить пробку или щепку в набегающую на берег волну от проплывшей невдалеке моторной лодки, то пробка и щепка будут подниматься на гребне и затем опускаться, однако к берегу они приближаться практически не будут.

Наглядные примеры с поверхностными волнами продемонстрировали важную особенность волнового движения (присущую как поверхностным, так и упругим волнам). *При распространении волны не происходит переноса вещества среды*; скорость волны v_ϕ — это не скорость вещества среды, а скорость, с какой перемещается фаза колебаний частиц среды. *Частицы среды не вовлекаются волной в поступательное движение; они совершают вынужденные колебания, смещаясь относительно своих положений равновесия*. Волна бежит, а положения равновесия колеблющихся частиц среды неподвижны, так что любая частица среды остается в пределах области пространства, определяемой максимальным смещением частицы из положения равновесия, т. е. ее амплитудой колебаний.

Итак, важно различать движение *самой волны* и движения (смещения из положения равновесия) *частиц среды*, по которой распространяется волна. Соответственно надо различать скорость волны \vec{v}_ϕ и скорость \vec{v} колеблющейся частицы среды. Существуют два типа упругих волн. В первом типе векторы \vec{v}_ϕ и \vec{v} перпендикулярны друг к другу: *частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны*. Такие упругие волны называют *поперечными*. Чтобы они могли возникнуть, среда должна обладать сопротивлением к сдвигу. Поперечные упругие волны могут возникать в твердых телах и некоторых жидкостях, но не могут возникать в газах. Во втором типе упругих волн векторы \vec{v}_ϕ и \vec{v} параллельны на одной половине длины волны и антипараллельны на другой; *частицы среды смещаются вдоль и навстречу направлению распространения волны*. Движение таких волн есть перемещение по среде *чередующихся сжатий и разрежений* (расстояние между соседними сжатиями равно длине волны). Эти волны называют *продольными*. Они могут возникать в любых средах — в твердых телах, жидкостях, газах.

Поверхностная волна внешне похожа на поперечную, но это — не поперечная волна. Частицы жидкости вблизи ее поверхности

совершают *круговые движения* в вертикальной плоскости, параллельной направлению распространения волны. Эти движения аналогичны движениям пробки на волне. Когда под пробкой проходит гребень волны, она поднимается и устремляется вместе с ним вперед, однако тут же соскальзывает с гребня, отставая от него, и попадает в ложбину волны, где движется назад, пока ее не подхватит следующий гребень. Именно такое движение по окружности совершает каждая частица воды на ее поверхности; при этом центр окружности данной частицы остается на месте. Диаметр окружности равен *высоте* волны — расстоянию по вертикали от вершины гребня до дна ложбины. Время полного оборота частицы по окружности равно $\frac{\lambda}{v_{\text{ф}}}$.

9.1.3. Идеализированный эксперимент: рождение упругой волны

Предположим, что в некоторой точке пространства, заполненного водой, воздухом или иной средой, находится шар (рис. 9.2, *a*). Пусть шар начинает ритмически «дышать», расширяясь и сжимаясь в объеме, оставаясь при этом сферическим по форме. Рассмотрим, как на это будет реагировать среда, окружающая шар. Вот шар начинает расширяться. Находящиеся вблизи шара частицы среды отталкиваются, так что плотность прилегающего к шару слоя среды увеличивается по сравнению со своим нормальным значением. Когда шар сжимается, плотность слоя среды, прилегающего к шару, уменьшается. Указанные изменения плотности будут распространяться от пульсирующего шара по всей среде. Хотя частицы среды совершают лишь малые колебания, однако возникает движение, охватывающее всю среду — движение распространяющейся от пульсирующего шара *волны*. Обратим внимание: это движется не вещество среды, а *энергия*, которая рас-

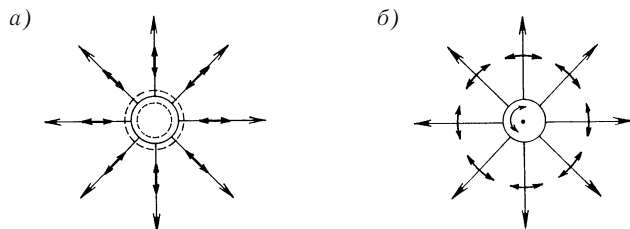


Рис. 9.2

пространяется в веществе (позднее мы научимся подсчитывать энергию, переносимую волной). В примере с пульсирующим шаром рождается, как нетрудно сообразить, продольная упругая волна.

Предположим теперь, что в среде находится весьма длинный цилиндр и что в качестве среды используется, например, вещество, напоминающее студень или желе. Пусть цилиндр начинает поворачиваться вокруг своей оси на небольшой угол в одном направлении, а затем обратном, в некотором постоянном ритме (рис. 9.2, б). Частицы в слое желе, прилегающем к цилиндру, вынуждены повторять его движение. Они, в свою очередь, вынуждают частицы, расположенные дальше от оси цилиндра, повторять то же движение — в результате в среде возникает *волна*. Она распространяется в направлении радиуса цилиндра, а частицы среды смещаются (колеблются) перпендикулярно к этому направлению. Следовательно, родившаяся от поворотов цилиндра волна есть поперечная волна.

Созданная пульсирующим шаром волна является *сферической волной* — все точки среды, находящиеся на любой сфере, окружающей шар, ведут себя одинаковым образом (все они характеризуются в данный момент одинаковой степенью сжатия или разрежения). Здесь уместно воспользоваться понятием *волновой поверхности*. Так называют геометрическое место точек, в которых фаза колебаний частиц среды имеет в данный момент времени одно и то же значение. Через каждую точку среды, охваченной волновым движением, можно мысленно провести волновую поверхность, соответствующую значению фазы колебаний в этой точке в рассматриваемый момент времени. Различным значениям фазы колебаний отвечает семейство волновых поверхностей. *Волна называется сферической, если ее волновые поверхности — сферы.*

Созданная ритмически поворачивающимся длинным цилиндром волна в примере на рисунке 9.2, б, является *цилиндрической волной*, так как ее волновые поверхности — цилиндрические поверхности, разбегающиеся от оси цилиндра.

Часть сферической или цилиндрической волновой поверхности, рассматриваемая на достаточно большом расстоянии от источника волны, может приближенно рассматриваться как плоскость — и мы приходим к идеализированному понятию *плоской волны*, т. е. волны, у которой *волновые поверхности представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу*. Такая волна распространяется в определенном направлении — направлении, перпендикулярном к плоским волновым поверхностям. В дальнейшем мы будем широко пользоваться понятием плоской волны.

9.1.4. Моделирование поперечной и продольной плоских волн

Поперечную плоскую волну можно наблюдать на практике, воспользовавшись резиновым шнуром, один конец которого закреплен, а другой находится в руке наблюдателя. Если натянуть шнур, а затем движениями руки привести его свободный конец в колебательное движение, то по шнуру побежит хорошо наблюдаемая поперечная волна.

Возьмем вместо резинового шнура цепочку одинаковых шаров, подвешенных на нитях и связанных между собой пружинами (рис. 9.3). В такой модели упругие и инертные свойства шнура разделены: упругость сосредоточена в пружинах, а инертность — в массах шаров.

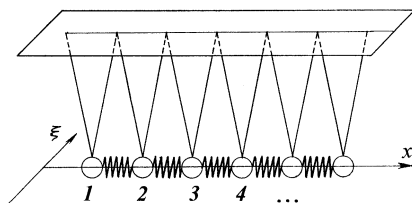


Рис. 9.3

Шары подвешены на нитях таким образом, что могут колебаться, подобно маятнику, в направлении, *перпендикулярном* к плоскости рисунка. Условимся здесь и впредь считать, что плоская волна распространяется вдоль x -оси. Смещения же колеблющихся частиц среды (в данном случае шаров) будем обозначать через ξ и введем, соответственно, ξ -ось. Напомним, что в главе 8 через x обозначалось смещение колеблющейся частицы, а теперь x -ось будет использоваться как направление распространения волны. На рисунке 9.3, показаны x -ось и перпендикулярная к ней ξ -ось. Колебания шаров происходят вдоль ξ -оси, а вдоль x -оси, заметим, шары вообще не перемещаются.

Если сообщить шару 1 начальную скорость в направлении ξ -оси (т. е. толкнуть его в этом направлении), то пружина между шарами 1 и 2 растянется, и на шар 2 начнет действовать сила упругости, заставляющая его смещаться по направлению ξ -оси. Движение шара 2 будет запаздывать от движения шара 1. Это запаздывание тем больше, чем больше массы шаров и чем меньше жесткость пружин, соединяющих шары.

Заставим шар 1 совершать *периодические* движения вдоль ξ -оси и обозначим через τ период этих колебаний (шар 1 будет играть роль источника волны). Шар 2 тоже придет в колебательное движение вслед за шаром 1 с тем же периодом τ , но с некоторым *отставанием по фазе*. Шар 3 под действием силы упругости со стороны шара 2 тоже начинает колебаться, еще более отставая по фазе от шара 1 , и так далее. В результате вдоль цепочки шаров побежит поперечная волна с некоторой скоростью v_ϕ .

На пяти позициях, представленных на рисунках 9.4, a — d показано, как образуется эта поперечная волна (в предположении, что шары совершают гармонические колебания). Здесь пронумерованы 17 шаров из цепочки, изображенной на рисунке 9.3. Расстояние по x -оси между соседними шарами равно $\frac{v_\phi \tau}{16} = \frac{\lambda}{16}$. (Именно поэтому рассматриваются 17 шаров; если бы, например, расстояние между шарами оказалось равным $\frac{v_\phi \tau}{n} = \frac{\lambda}{n}$, то следовало бы рассмотреть $n + 1$ шаров цепочки.)

Позиция a на рисунке 9.4 соответствует моменту времени $t = 0$. В этот момент шар 1 получает толчок и приобретает начальную скорость (см. стрелку на рисунке). Позиция b соответствует моменту $t = \frac{\tau}{4}$. В этот момент смещение шара 1 равно амплитуде

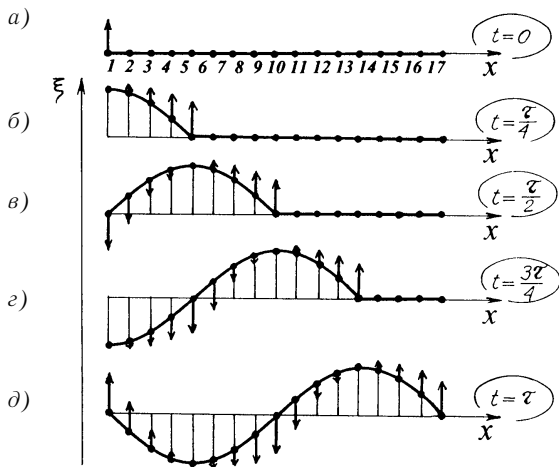


Рис. 9.4

колебаний ξ_m , а скорость равна нулю. На рисунке видны смещения и скорости шаров 2, 3, 4, 5 в момент $t = \frac{\tau}{4}$ (векторы скорости показаны стрелками). Позиция *в* соответствует моменту $t = \frac{\tau}{2}$, позиция *г* — моменту $t = \frac{3\tau}{4}$, позиция *д* — моменту $t = \tau$. Полагая, что цепочка содержит много шаров, легко представить, как по ней бежит поперечная волна длиной $\lambda = v_\phi \tau$.

Из рисунка 9.4 хорошо видно, что *распространение волны есть запаздывающая по фазе передача колебательного движения от одной частицы среды к другой* (в данном случае от одного шара к другому). Длину волны можно определить как *наименьшее расстояние между частицами среды* (в данном случае шарами), колеблющимися с одинаковыми фазами, или, иначе говоря, сдвинутыми по фазе на $2\pi n$, где n — целое число. Скорость v_ϕ волны — это не скорость смещения частиц среды (в данном случае смещения шаров), а *скорость движения по x -оси фазы колебаний частиц среды* (колебаний шаров). Она есть мера того, *насколько быстро передаются колебания от одних частиц среды к другим*.



Обратим внимание на то, что при рассмотрении волнового движения мы имеем дело с периодичностью *двоякого рода*: 1) каждая частица среды совершает колебания (они происходят вдоль ξ -оси; 2) в каждый момент времени форма волны повторяется через отрезки длиной λ вдоль линии распространения волны (вдоль x -оси). На рисунке 9.5 сплошной линией показан профиль синусоидальной поперечной волны в некоторый момент t . С течением времени этот профиль перемещается со скоростью по x -оси. Так, в момент $t + \Delta t$ профиль волны, показанный на рисунке пунктирной линией, будет смещен по отношению к профилю в момент t на расстояние $\Delta x = v_\phi \Delta t$.

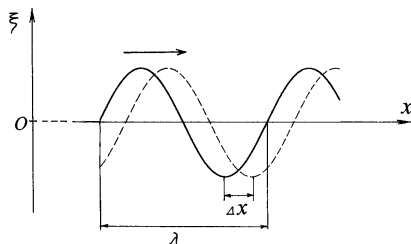


Рис. 9.5

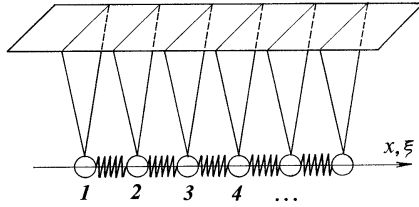


Рис. 9.6

Покажем теперь, как можно поставить опыт по моделированию *продольной* плоской волны, используя цепочку шаров с пружинами. Подвесим соединенные пружинами шары так, чтобы они могли колебаться только вдоль x -оси цепочки (рис. 9.6). Если теперь заставить шар 1 совершать колебания, по цепочке побежит продольная волна. Как и в случае поперечной волны, она представляет собой запаздывающую по фазе передачу колебательного движения от одной частицы среды к другой (от одного шара цепочки к другому). Образование этой волны можно объяснить, прибегнув к рисунку 9.4, при условии, что теперь ξ -ось (а значит, смещения и векторы скорости) мысленно повернута на 90° и *совпадает с x -осью*. Теперь колеблющиеся шары будут все время находиться на x -оси, создавая вдоль нее чередующиеся разрежения и уплотнения, перемещающиеся по оси со скоростью v_ϕ .

9.1.5. Общая формулировка закона Гука; модули упругости

Говоря об упругих свойствах тел, мы ограничивались до сих пор рассмотрением пружины и использовали понятие жесткости k в качестве характеристики ее упругих свойств. Напомним в связи с этим две формулы: формулу (2.13) для модуля силы упругости пружины жесткостью k :

$$F_{\text{упр}} = k\Delta l,$$

выражающую закон Гука, и формулу для потенциальной энергии пружины:

$$U = \frac{1}{2} k\Delta l^2, \quad (9.2)$$

вытекающую из соотношения (5.74), если принять за нуль энергию недеформированной пружины. Величина Δl в (2.13) и (9.2) есть удлинение (либо укорачивание) пружины при ее растяжении (сжатии).

Переходя теперь к рассмотрению упругих волн, мы должны уделить более серьезное внимание характеристикам упругих свойств среды. В этой связи уместно начать с общей формулировки **закона Гука**:

Механическое напряжение упруго деформированного тела прямо пропорционально его относительной деформации.

Закон Гука описывается простой формулой:

$$p = Z\varepsilon, \quad (9.3)$$

где p — механическое напряжение, ε — относительная деформация тела, Z — коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости*. Он имеет такую же размерность, что и механическое напряжение (или давление). В СИ единица механического напряжения есть *ньютон на квадратный метр* (Н/м^2), т. е. *паскаль* (Па). Заметим, что закон Гука справедлив лишь при достаточно малых относительных деформациях.

Понятия «механическое напряжение» и «относительная деформация» поясним, обратившись к двум видам деформации — *продольному (одностороннему) сжатию или растяжению и к сдвигу*.

Продольное растяжение иллюстрирует рисунок 9.7, а, где рассмотрен в качестве примера твердый образец в виде куба. Длина ребра куба l , площадь грани $S = l^2$. Грань AD неподвижно закреплена, а к грани BC приложена сила \vec{F} , растягивающая образец и направленная нормально (перпендикулярно) к плоскости грани. Эта сила создает механическое напряжение:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (1^*)$$

Под действием силы \vec{F} образец удлинится в вертикальном направлении на величину $CC' = \Delta l$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2^*)$$

есть относительная деформация (в данном случае относительное удлинение) тела. Модуль упругости Z при продольном растяже-

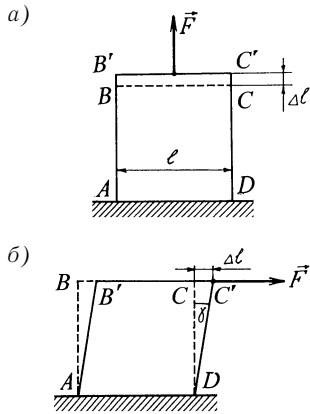


Рис. 9.7

нии или сжатии называют *модулем продольной упругости*, или *модулем Юнга*; его принято обозначать через E . Учитывая это и подставляя (1*) и (2*) в (9.3), получаем выражение для закона Гука в случае продольного растяжения (сжатия):

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (9.4)$$

Сопоставляя (9.4) с соотношением (2.13) для пружины, растянутой на величину Δl под действием силы упругости $F = F_{\text{упр}}$, заключаем, что в случае растягиваемого или сжимаемого твердого тела можно ввести понятие *жесткости тела* k , определяемой формулой:

$$k = \frac{ES}{l}. \quad (9.5)$$

Подставляя (9.5) в (9.2), находим выражение для потенциальной энергии растянутого (сжатого) тела:

$$U = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} \Delta l^2. \quad (9.6)$$

Вводя объем тела $V = lS$ и учитывая (2*), получим в достаточно общем виде выражение для *потенциальной энергии упругой деформации растяжения (сжатия)* тела объемом V :

$$U = \frac{1}{2} E \epsilon^2 V. \quad (9.7)$$

Деформацию *сдвига* иллюстрирует рисунок 9.7, б. В отличие от ранее рассмотренного случая, деформирующая сила \vec{F} приложена теперь к грани BC не перпендикулярно плоскости грани, а *параллельно* этой плоскости. Она создает *касательное напряжение* $p = \frac{F}{S}$. Образец испытывает абсолютный сдвиг на величину $CC' = \Delta l$. Относительная деформация сдвига ϵ определяется углом сдвига γ :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{tg} \gamma = \gamma \quad (9.8)$$

(поскольку $\Delta l \ll l$, то $\text{tg} \gamma = \gamma$, если γ выражать в радианах). Модуль упругости Z при сдвиге называют *модулем сдвига*; его принято обозначать через G (не следует путать с гравитационной постоянной!). Учитывая это и используя (9.8), получаем выражение для закона Гука в случае сдвига:

$$\frac{F}{S} = G \gamma. \quad (9.9)$$

По аналогии с (9.7) выразим *потенциальную энергию упругой деформации сдвига* тела объемом V в виде

$$U = \frac{1}{2} G \varepsilon^2 V = \frac{1}{2} G \gamma^2 V. \quad (9.10)$$

В качестве примера приведем значения E и G для некоторых веществ:

	E , Па	G , Па
Сталь	$2 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^{10}$
Медь	$1 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{10}$
Алюминий	$0,7 \cdot 10^{11}$	$2,6 \cdot 10^{10}$
Гранит	$0,8 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{10}$



Обратим внимание: *модуль сдвига во всех случаях оказывается меньше модуля Юнга.*

Изображенные на рисунке 9.7 деформации, очевидно, неосуществимы в случае газа или жидкости. Поэтому отметим еще один вид деформации — *всестороннее сжатие (растяжение)*, который состоит в уменьшении (увеличении) объема тела под влиянием равномерно распределенных по всей поверхности тела сжимающих (растягивающих) сил, везде направленных нормально к поверхности. В этом случае закон Гука имеет вид

$$p = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (9.11)$$

где $\frac{\Delta V}{V}$ — относительное уменьшение (увеличение) объема тела при наличии напряжения p , а величина K — так называемый *модуль объемной упругости*.

Для примера укажем, что для воздуха при нормальных условиях $K = 1,42 \cdot 10^5$ Па, для насыщенного водяного пара при $100^\circ\text{C} = 0,98 \cdot 10^5$ Па, для воды $K = 2,2 \cdot 10^9$ Па, для этилового спирта $K = 1 \cdot 10^9$ Па, для ртути $K = 3 \cdot 10^9$ Па.

9.1.6. Скорость волны

Измеряя длину волны λ и период колебаний τ источника, можно, в соответствии с формулой (9.1), вычислить *фазовую скорость волны* v_ϕ . Однако следует иметь в виду, что скорость вол-

ны *определяется свойствами среды*, по которой распространяется волна. Свойства среды определяют величину v_{ϕ} , и при возбуждении колебаний с периодом τ возникает в данной среде волна длиной $v_{\phi}\tau$.

Для представленных на рисунках 9.3 и 9.6 моделей с шарами и пружинами скорость волны v_{ϕ} зависит от жесткости k пружин и массы m шаров. Как уже отмечалось, чем больше m и чем меньше k , тем больше запаздывает по фазе передача колебательного движения от одного шара к другому и, значит, тем *меньше скорость волны*.

Переходя от модели в виде цепочки шаров к реальной среде (например, к твердому стержню), можем сообразить, что скорость $v_{\phi}^{\text{пр}}$ продольной волны, распространяющейся вдоль стержня, должна быть тем меньше, чем больше плотность ρ стержня и чем меньше модуль Юнга E (вместо масс m шаров рассматриваем теперь плотность среды ρ , а вместо жесткости k пружин — модуль Юнга E ; напомним (9.5)). В результате приходим к формуле:

$$v_{\phi}^{\text{пр}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9.12)$$

Мы получили эту формулу из качественных соображений ($v_{\phi}^{\text{пр}}$ должна расти с увеличением E и уменьшением ρ) и соображения размерности — квадратный корень в (9.12) необходим, чтобы величина $v_{\phi}^{\text{пр}}$ имела размерность скорости. Заметим, что формулу (9.12) можно получить также при строгом рассмотрении задачи о скорости продольной волны.

Скорость $v_{\phi}^{\text{п}}$ поперечной волны, распространяющейся по стержню, описывается формулой, аналогичной формуле (9.12), но с заменой модуля Юнга на модуль сдвига G :

$$v_{\phi}^{\text{п}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (9.13)$$

Уже отмечалось, что $G < E$. Следовательно, *скорость поперечной волны в том или ином твердом теле всегда меньше скорости продольной волны в том же теле*.

Скорость волн в жидкостях и газах (эти волны являются продольными) определяется формулой, аналогичной формулам (9.12) и (9.13), но с использованием модуля объемной упругости K :

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (9.14)$$



Обратим внимание на то, что скорость упругих волн, как это следует из (9.12) — (9.14), *не зависит от длины волны* (а значит, и от периода колебаний), а является исключительно характеристикой свойств среды — ее плотности и модулей упругости. О таких волнах говорят, что они *не обладают дисперсией*.



Скорость *поверхностных* волн v'_{ϕ} описывают в общем случае формулой:

$$v'_{\phi} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}, \quad (9.15)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Если длина волны достаточно велика, можно пренебречь вторым слагаемым под корнем в формуле (9.15). В этом случае решающую роль играет сила тяжести, и поверхностные волны называют *гравитационными*:

$$v'_{\phi} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (9.16)$$

Если длина волны очень мала, то можно пренебречь первым слагаемым под корнем в (9.15). В этом случае всё определяют силы поверхностного натяжения, и поверхностные волны называют *капиллярными*:

$$v'_{\phi} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (9.17)$$

Как в общем, так и в двух частных случаях поверхностные волны обладают дисперсией.

Если длина волны λ много больше глубины h (так называемые *приливные* волны), то в этом случае скорость волны выражается формулой:

$$v'_{\phi} = \sqrt{gh}. \quad (9.18)$$

Приливные волны — единственный вид поверхностных волн, которые не обладают дисперсией.

9.2. ПЛОСКАЯ БЕГУЩАЯ ВОЛНА

9.2.1. Уравнение бегущей волны

Пусть по длинному стержню распространяется волна, возбуждаемая источником, совершающим *гармонические* колебания с циклической частотой ω . Наглядности ради будем рассматривать поперечную волну (смещения ξ частиц среды перпендикулярны к x -оси, вдоль которой распространяется волна).

Гармонические колебания порождают *синусоидальную* волну (иначе говоря, *гармоническую* волну); ее профиль был показан на

рисунке 9.5. Этот профиль перемещается по x -оси со скоростью, равной фазовой скорости волны v_ϕ . Определяемые профилем волны смещения частиц среды зависят не только от координаты x , но и от времени t , поскольку положение движущегося со скоростью v_ϕ профиля изменяется с течением времени. Найдем выражение для функции $\xi(t, x)$.

Предположим, что в точке $x = 0$ смещение частиц среды, по которой распространяется гармоническая волна, обращается в момент $t = 0$ в нуль. Смещение частиц в этой точке будет изменяться со временем так:

$$\xi(t, 0) = \xi_m \sin \omega t. \quad (1^*)$$

Смещение частиц в произвольной точке x запаздывает по отношению к смещению в точке $x = 0$ на время, которое требуется волне, чтобы пройти расстояние x , т. е. на время, равное x/v_ϕ . Иными словами, смещение $\xi(t, x)$ в момент t в точке x такое же, каким оно было в более ранний момент времени t' :

$$\xi(t, x) = \xi(t', 0), \quad (2^*)$$

где

$$t' = t - \frac{x}{v_\phi}. \quad (3^*)$$

Согласно (1*) и (3*), $\xi(t', 0) = \xi_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) \right]$. С учетом (2*), отсюда получаем

$$\xi(t, x) = \xi_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) \right]. \quad (9.19)$$

Соотношение (9.19) называют *уравнением бегущей волны*. Оно применимо как к поперечной, так и к продольной бегущей волне. Для поперечной волны скорость v_ϕ определяется формулой (9.13), а для продольной — формулой (9.12). Величину ξ_m называют *амплитудой волны*, а ω — *циклической частотой волны*.

Кроме того, нужно учитывать, что в случае продольной волны направление ξ -оси совпадает с направлением x -оси, так что наглядное изображение волны в виде синусоиды становится невозможным. На рисунках 9.8, *а* и 9.8, *б* показаны для некоторого фиксированного момента времени векторы смещения $\vec{\xi}_A$ и $\vec{\xi}_B$ двух произвольно выбранных частиц среды — для точек x_A и x_B , соответственно. Рисунок 9.8, *а* относится к поперечной волне (смещения перпендикулярны к x -оси), а рисунок 9.8, *б* — к продольной волне (смещения происходят по или против направления x -оси). Кружочками показаны положения рассматриваемых час-

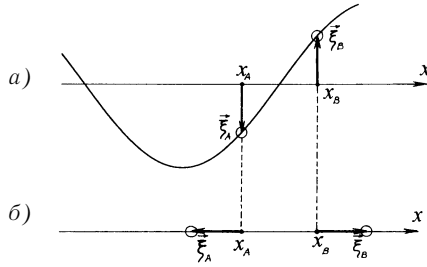


Рис. 9.8

тиц в данный момент времени; x_A и x_B — положения равновесия для этих частиц.

Соотношение (9.19) есть уравнение волны, распространяющейся в направлении x -оси. Уравнение бегущей волны, распространяющейся в *противоположном* направлении, будет иметь вид:

$$\xi(t, x) = \xi_m \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v_\phi} \right) \right]. \quad (9.20)$$

Учитывая, что $v_\phi = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda \omega}{2\pi}$, перепишем (9.19) и (9.20) в виде

$$\xi(t, x) = \xi_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (9.21)$$

$$\xi(t, x) = \xi_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (9.22)$$

Уравнению бегущей волны можно придать вид, симметричный по отношению к t и x , введя величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (9.23)$$

называемую *волновым числом* (не следует путать с жесткостью пружины!):

$$\xi(t, x) = \xi_m \sin(\omega t - kx) \quad (9.24)$$

и

$$\xi(t, x) = \xi_m \sin(\omega t + kx). \quad (9.25)$$

Поскольку $\lambda = v_\phi \tau = \frac{2\pi v_\phi}{\omega}$, то волновое число можно представить в виде:

$$k = \frac{\omega}{v_\phi}. \quad (9.26)$$

9.2.2. Как быстро изменяется смещение со временем и при изменении пространственной координаты?

Мерой быстроты изменения смещения частиц среды со временем является, очевидно, *скорость* v , с какой совершаются колебания частиц. Если смещение представляется соотношением (9.24), скорость $v(t, x)$ будет описываться соотношением:

$$v(t, x) = \xi_m \omega \cos(\omega t - kx). \quad (9.27)$$

Переход от (9.24) к (9.27) формально аналогичен переходу от (8.6) к (8.12), поскольку в данном случае координата x фиксирована.

Переход от (9.24) к (9.27) можно выполнить, не прибегая к упомянутой аналогии. В соответствии с (1.8) при малом Δt можем записать:

$$v(t, x) = \frac{\xi(t + \Delta t, x) - \xi(t, x)}{\Delta t}. \quad (1^*)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ это приближенное выражение превращается в точное выражение для мгновенной скорости $v(t, x)$. Используя (9.24), представим:

$$\xi(t + \Delta t, x) = \xi_m \sin[\omega(t + \Delta t) - kx] = \xi_m \sin[(\omega t - kx) + \omega \Delta t]. \quad (2^*)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

перепишем (2*) в виде:

$$\xi(t + \Delta t, x) = \xi_m \sin(\omega t - kx) \cos \omega \Delta t + \xi_m \cos(\omega t - kx) \sin \omega \Delta t.$$

Поскольку Δt мало, можно принять $\cos \omega \Delta t = 1$ и $\sin \omega \Delta t = \omega \Delta t$. В результате соотношение (1*) принимает вид (9.27).

Если в (9.27) зафиксировать время t , получим мгновенное распределение в пространстве (по x -оси) скоростей частиц среды. Оно оказывается сдвинутым на $\frac{\lambda}{4}$ относительно мгновенного распределения смещений для того же момента времени (см. рисунок 9.9,

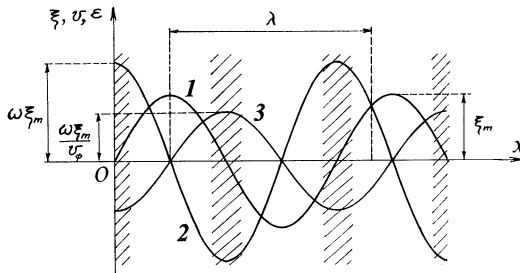


Рис. 9.9

где l — распределение смещений, а 2 — распределение скоростей частиц). Из рисунка видно, что скорость максимальна у тех частиц среды, которые в данный момент оказались в положении равновесия (для них $\xi = 0$, $|v| = \xi_m \omega$), тогда как у частиц с максимальным смещением скорость равна нулю ($|\xi| = \xi_m$, $v = 0$).

Отношение $\frac{\xi(t, x + \Delta x) - \xi(t, x)}{\Delta x}$ показывает для фиксированного момента t , как быстро изменяется смещение частиц среды в пространстве, т. е. при изменении координаты x . Нетрудно заметить, что оно представляет собой относительную деформацию среды в момент t в точке x :

$$\epsilon(t, x) = \frac{\xi(t, x + \Delta x) - \xi(t, x)}{\Delta x} \quad (9.28)$$

(это соотношение становится точным при $\Delta x \rightarrow 0$). Если смещение $\xi(t, x)$ представляется соотношением (9.24), то (9.28) принимает вид

$$\epsilon(t, x) = -\xi_m k \cos(\omega t - kx). \quad (9.29)$$

(Переход от (9.24) к (9.29) при фиксированном t аналогичен переходу от (9.24) к (9.27) при фиксированном x .)

Чтобы получить соотношение (9.29), подставим (9.24) в (9.28):

$$\epsilon(t, x) = \frac{\xi_m}{\Delta x} \sin[(\omega t - kx) - k\Delta x] - \frac{\xi_m}{\Delta x} \sin(\omega t - kx). \quad (3^*)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

представим уменьшаемое в правой части (3*) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_m}{\Delta x} \sin[(\omega t - kx) - k\Delta x] = \\ & = \frac{\xi_m}{\Delta x} \sin(\omega t - kx) \cos k\Delta x - \frac{\xi_m}{\Delta x} \cos(\omega t - kx) \sin k\Delta x. \end{aligned}$$

Подставим этот результат в (3*) и учтем, что при малом Δx можно принять $\cos k\Delta x = 1$ и $\sin k\Delta x = k\Delta x$. В результате получим для $\epsilon(t, x)$ выражение (9.29).

Учитывая (9.26), перепишем соотношение (9.29) в виде

$$\epsilon(t, x) = -\xi_m \frac{\omega}{v_\phi} \cos(\omega t - kx). \quad (9.30)$$

При фиксированном t это соотношение описывает мгновенное распределение относительных деформаций частиц среды в момент t . Оно показано на рисунке 9.9 в виде синусоиды \mathcal{Z} , которая сдвину-

та на $\frac{\lambda}{2}$ относительно синусоиды скоростей 2. Из рисунка видно, что частицы среды, оказавшиеся в данный момент в положении равновесия, характеризуются наибольшей скоростью и наибольшей относительной деформацией ($\xi = 0$, $|v| = \xi_m \omega$, $|\epsilon| = \xi_m \frac{\omega}{v_\phi}$), тогда как у частиц с наибольшим смещением равны нулю и скорость и относительная деформация ($|\xi| = \xi_m$, $v = 0$, $\epsilon = 0$). На рисунке показаны штриховкой участки стержня, где в данный момент времени наиболее велики скорости частиц и относительная деформация.

Вся картина на рисунке 9.9 дана для некоторого *фиксированного* момента времени. Как только мы «включим время», эта картина *побежит* слева направо по x -оси стержня со скоростью v_ϕ . В частности, побегут и заштрихованные участки, в которых в основном как раз и сосредоточены как кинетическая энергия (она пропорциональна квадрату скорости частиц среды), так и потенциальная энергия (она пропорциональна квадрату относительной деформации). Мы видим, таким образом, что *хотя при распространении по стержню волна не переносит с собой вещество стержня, однако она переносит энергию* (и кинетическую энергию, и потенциальную энергию упругой деформации среды).

Поговорим ниже более подробно о переносе энергии бегущей волной.

9.2.3. Плотность энергии в бегущей волне

Пусть по стержню площадью поперечного сечения S бежит волна, уравнение которой описывается выражением (9.24). Мысленно выделим элемент объема $S\Delta x$ на участке стержня от x до $x + \Delta x$, настолько малый, чтобы скорости частиц и относительные деформации можно было считать в данный момент времени не изменяющимися в пределах объема. Понятно, что должно выполняться неравенство $\Delta x \ll \lambda$.

Обозначим через $\Delta K(t, x)$ и $\Delta U(t, x)$, соответственно, *кинетическую энергию* и *потенциальную энергию* упругой деформации выделенного объема в рассматриваемый момент времени t . Очевидно, что

$$\Delta K(t, x) = \frac{1}{2} \rho v^2(t, x) S \Delta x. \quad (9.31)$$

Если по стержню бежит *поперечная* волна, то, согласно (9.10) и (9.13),

$$\Delta U(t, x) = \frac{1}{2} G \epsilon^2(t, x) S \Delta x = \frac{1}{2} \rho v_\phi \epsilon^2(t, x) S \Delta x. \quad (9.32)$$

Если же бежит *продольная* волна, то, согласно (9.7) и (9.12),

$$\Delta U(t, x) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2(t, x) S \Delta x = \frac{1}{2} \rho v_{\phi}^2 \varepsilon^2(t, x) S \Delta x. \quad (9.33)$$

Как видим, для обоих типов волны выражение для $\Delta U(t, x)$ одно и то же, с тем только различием, что в случае поперечной волны v_{ϕ} есть скорость поперечной волны и ε — относительная деформация сдвига, а в случае продольной волны v_{ϕ} есть скорость продольной волны и ε — относительная деформация растяжения (сжатия).

Обозначим через $\eta(t, x) = \frac{\Delta K(t, x)}{S \Delta x}$ и $u(t, x) = \frac{\Delta U(t, x)}{S \Delta x}$, соответственно, плотности кинетической энергии и потенциальной энергии упругой деформации в точке x стержня в момент t . Используя (9.31) и принимая во внимание соотношение (9.27), получим следующее выражение для *плотности кинетической энергии* в бегущей волне:

$$\eta(t, x) = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.34)$$

Используя (9.32) и принимая во внимание результат (9.30), получим следующее выражение для *плотности потенциальной энергии* в бегущей волне:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.35)$$

Из (9.34) и (9.35) следует, что *плотность $\omega(t, x)$ механической энергии* равна

$$\omega(t, x) = \eta(t, x) + u(t, x) = \rho \xi_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.36)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, перепишем (9.36) в виде:

$$\omega(t, x) = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 [1 + \cos^2(2\omega t - 2kx)]. \quad (9.37)$$

На рисунке 9.10 синусоида 1 изображает мгновенное распределение для некоторого фиксированного момента времени плотности кинетической энергии в бегущей волне; таково же мгновенное распределение плотности потенциальной энергии. Синусоида 2 изображает мгновенное распределение плотности механической энергии в бегущей волне. Для сравнения, пунктиром показано мгновенное распределение смещений частиц среды. Как видим, *максимумы мгновенной плотности энергии приходятся на точки волны, которые в данный момент соответствуют нулевому*

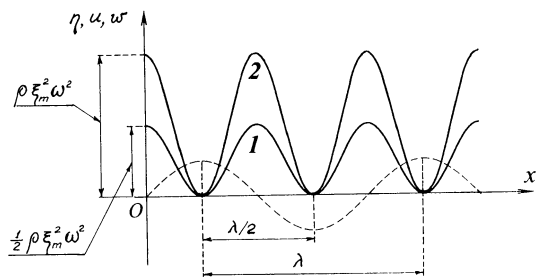


Рис. 9.10

смещению. Если «включить время», вся изображенная на рисунке картина побежит слева по x -оси со скоростью $v_{\text{ф}}$.

Напомним, что при колебаниях маятника или тела на пружине кинетическая и потенциальная энергии изменяются со временем *в противофазе* (см. рисунок 8.14); это означает, что происходят *взаимопревращения* кинетической и потенциальной энергий при сохранении в отсутствие трения механической энергии колеблющегося тела (см. п. 8.4.1). В случае бегущей волны мы имеем принципиально иную ситуацию. Здесь не происходят взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий. Колебания кинетической и потенциальной энергий в бегущей волне совершаются не в противофазе, а в *одинаковой фазе*. В каждой частице среды кинетическая и потенциальная энергии *одновременно* достигают максимальных значений и одновременно обращаются в нуль. Они не взаимопревращаются, а вместе передаются от одних частиц среды к другим, обеспечивая тем самым перенос энергии волной по среде.

Из рисунка 9.10 видно, что *среднее за период* значение $\langle w \rangle$ плотности механической энергии в бегущей волне равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2. \quad (9.28)$$

Таким образом, в любом месте среды, по которой бежит гармоническая волна, имеется обусловленная этой волной механическая энергия плотностью $\frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2$ в среднем за время $\frac{2\pi}{\omega}$.

9.2.4. Плотность потока энергии, переносимого бегущей волной (интенсивность волны)

Итак, в среде распространяется механическая волна. Такая среда обладает дополнительной энергией, которая черпается из источника волны. Эта энергия переносится волной от источника в

другие точки среды. Иначе говоря, *бегущая волна переносит с собой энергию*.

Количество энергии, переносимое волной в единицу времени через некоторую поверхность, ориентированную перпендикулярно к направлению распространения волны, называется *поток энергии* через данную поверхность. Если через рассматриваемую поверхность за промежуток времени от t до Δt переносится волной энергия ΔW , то поток энергии Φ определяют соотношением

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (9.39)$$

Строго говоря, это есть *средний за время Δt поток энергии*. При $\Delta t \rightarrow 0$ соотношение (9.39) превращается в *мгновенный* поток энергии в момент t . Поток энергии имеет размерность мощности. В СИ его выражают в *ваттах*.

Поток энергии через единицу площади поверхности называют *плотностью потока энергии j* :

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}, \quad (9.40)$$

где $\Delta \Phi$ — поток энергии через элемент поверхности площадью ΔS . Плотность потока энергии — это *количество энергии, переносимое волной в единицу времени через единицу площади поверхности, ориентированной перпендикулярно направлению распространения волны*.

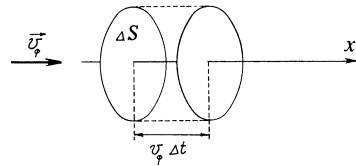


Рис. 9.11

Величину j легко выразить через $\langle \omega \rangle$, т. е. через среднюю плотность энергии в бегущей волне. Мысленно выделим элемент плоскости площадью ΔS , перпендикулярный к x -оси (а значит, и направлению движению волны (рис. 9.11). За время Δt через выделенную площадку пройдет объем волны, равный $\Delta S v_{\phi} \Delta t$, и перенесет с собой энергию $\Delta W = \langle \omega \rangle \Delta S v_{\phi} \Delta t$. По определению, поток энергии через данную площадку есть $\frac{\Delta W}{\Delta t} = \langle \omega \rangle \Delta S v_{\phi}$, а плотность потока энергии есть $\frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S} = \langle \omega \rangle v_{\phi}$. Таким образом, *плотность потока энергии, переносимого бегущей волной, равна*

$$j = \langle \omega \rangle v_{\phi}. \quad (9.41)$$

Если волна синусоидальная (гармоническая), то, с учетом (9.38),

$$j = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 v_\phi. \quad (9.42)$$

Плотность потока энергии, переносимого бегущей волной, называют также *интенсивностью волны*. Из (9.42) видно, что интенсивность гармонической волны пропорциональна плотности среды, квадрату амплитуды волны и квадрату циклической частоты волны.

Направление вектора фазовой скорости \vec{v}_ϕ совпадает с направлением распространения волны. Поэтому плотности тока можно придать смысл векторной величины:

$$\vec{j} = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \vec{v}_\phi. \quad (9.43)$$

Вектор плотности потока энергии впервые введен в 1874 г. русским физиком Николаем Алексеевичем Умовым, основателем учения о движении энергии. Вектор \vec{j} называют *вектором Умова*.

**О единицах
физических
величин**

Из соотношения (9.39) следует, что

$$\text{единица потока энергии} = \frac{\text{единица энергии}}{\text{единица времени}}.$$

В СИ единица *потока энергии* есть *ватт* (обозначение Вт); 1 Вт = 1 Дж/с.

Из соотношения (9.40) следует, что

$$\text{единица плотности потока энергии} = \frac{\text{единица потока энергии}}{\text{единица площади}}.$$

В СИ единица *плотности потока энергии (интенсивности волны)* есть *ватт на квадратный метр* (обозначение: Вт/м²). Так как 1 Вт = 1 Н · м/с, то единицей плотности потока энергии в СИ является также *ньютон в секунду на метр*.

Ватт на квадратный метр — плотность потока энергии, равная потоку энергии 1 Вт, который переносится через нормально ориентированную площадку площадью 1 м².

9.3. СТОЯЧАЯ ВОЛНА

9.3.1. Уравнение стоячей волны

Стоячая волна возникает при сложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми по мо-

дулю фазовыми скоростями. Обе волны имеют одинаковые амплитуды ξ_m и одинаковые циклические частоты ω , но могут различаться по фазе. Пусть в прямом направлении (направлении вдоль x -оси) распространяется гармоническая бегущая волна $\xi_{np}(t, x) = \xi_m \sin(\omega t - kx)$, а в обратном направлении бежит волна $\xi_{об}(t, x) = \xi_m \sin(\omega t + kx + \varphi)$. Здесь φ — разность фаз обратной и прямой волн. Для наглядности полагаем волны поперечными (ξ -ось перпендикулярна x -оси). Стоячая волна может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \xi(t, x) &= \xi_{np}(t, x) + \xi_{об}(t, x) = \\ &= \xi_m \sin(\omega t - kx) + \xi_m \sin(\omega t + kx + \varphi). \end{aligned} \quad (9.44)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

и учтя, что $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, преобразуем (9.44) к виду

$$\xi(t, x) = 2\xi_m \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (9.45)$$

Соотношение (9.45) называют *уравнением стоячей волны*.

На рисунке 9.12 изображены графики определяемой соотношением (9.45) зависимости смещения ξ в стоячей волне от пространственной координаты для нескольких фиксированных моментов времени. В качестве пространственной координаты здесь выбрана координата $x' = x + \frac{\varphi}{2k}$. Это сделано для облегчения построения гра-

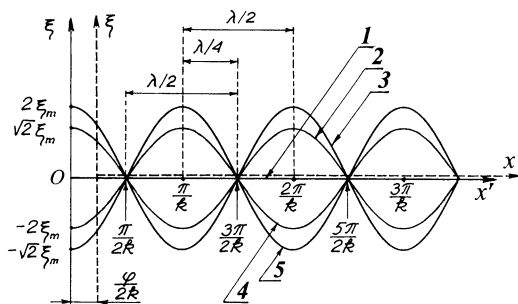


Рис. 9.12

фигов: ведь $\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = \cos kx'$. Система координатных осей (ξ, x) показана на том же рисунке пунктиром; она смещена относительно системы осей (ξ, x') вправо на $\frac{\varphi}{2k}$.

Изображенные на рисунке графики представляют собой *мгновенные распределения смещений* частиц среды в стоячей волне для моментов времени:

$$t_1 = -\frac{\varphi}{2\omega}$$

(прямая 1, совпадающая с координатной осью),

$$t_2 = t_1 + \frac{\tau}{8} = \frac{\pi}{4\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{синусоида 2}),$$

$$t_3 = t_2 + \frac{\tau}{8} = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{синусоида 3}),$$

$$t_4 = t_3 + \frac{\tau}{8} = \frac{3\pi}{4\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{синусоида 2}),$$

$$t_5 = t_4 + \frac{\tau}{8} = \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{прямая 1}),$$

$$t_6 = t_5 + \frac{\tau}{8} = \frac{5\pi}{4\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{синусоида 4}),$$

$$t_7 = t_6 + \frac{\tau}{8} = \frac{3\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{синусоида 5}),$$

$$t_8 = t_7 + \frac{\tau}{8} = \frac{7\pi}{4\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{синусоида 4}),$$

$$t_9 = t_8 + \frac{\tau}{8} = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{2\omega} \quad (\text{прямая 1}).$$

В моменты времени t_1, t_5, t_9 множитель $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ в (9.45) обращается в нуль. В эти моменты смещения всех частиц среды равны нулю; все частицы находятся в положении равновесия. В моменты t_2 и t_4 $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а в моменты t_6 и t_8 $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В эти моменты максимальное смещение частиц среды из положения равновесия равно $\sqrt{2}\xi_m$. В момент t_3 $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = 1$, а в мо-

мент $t_7 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = -1$. В эти моменты максимальное смещение частиц равно $2\xi_{\text{м}}$.

Итак, если, начиная с момента $t_1 = -\frac{\varphi}{2\omega}$, выбирать последовательно моменты времени на $\tau/8$ больше, то в течение времени, равного периоду τ , графики мгновенных распределений смещения будут изменяться так: прямая 1 \rightarrow синусоида 2 \rightarrow синусоида 3 \rightarrow синусоида 2 \rightarrow прямая 1 \rightarrow синусоида 4 \rightarrow синусоида 5 \rightarrow синусоида 4 \rightarrow прямая 1.

! Обратим внимание: на x' -оси обнаруживаются точки, в которых смещение частиц равно нулю во все моменты времени; эти частицы среды *все время покоятся* в положениях равновесия. Такие точки на x' -оси называют *узлами стоячей волны*; на рисунке 9.12 узлы имеют координаты: $x' = \frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}, \frac{5\pi}{2k}$. Эту последовательность можно, очевидно, продолжить: $\frac{7\pi}{2k}, \frac{9\pi}{2k}, \dots$. Учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и что $x = x' - \frac{\varphi}{2k} = x - \frac{\varphi\lambda}{4\pi}$, получим следующую формулу для x -координат узлов:

$$x_{\text{узл}} = \frac{\lambda}{4}(2n - 1) - \frac{\varphi\lambda}{4\pi} \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (9.46)$$

(Заметим, что эта формула сразу следует из равенства $\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = 0$.)

На x' -оси имеются точки, где частицы среды совершают колебания с максимальной амплитудой, равной $2\xi_{\text{м}}$. Такие точки называют *пучностями стоячей волны*. Пучности имеют следующие координаты на x' -оси: $0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots$. Положения пучностей на x -оси описываются формулой:

$$x_{\text{пуч}} = \frac{\lambda}{4}2n - \frac{\varphi\lambda}{4\pi} \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (9.47)$$

(Заметим, что эта формула сразу следует из равенств $\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$.) Расстояние как между соседними узлами, так и между соседними пучностями равно $\frac{\lambda}{2}$. Расстояние между соседними узлом и пучностью равно $\frac{\lambda}{4}$.

9.3.2. Отражение с потерей полуволны и без потери полуволны



Как на практике образуется стоячая волна?

Бегущая волна, распространяясь по какому-либо телу (например, по металлическому стержню, резиновому шнуру, столбу воздуха в трубе), достигает границы тела (конца стержня, шнура, трубы) и *отражается назад*. Отраженная волна, складываясь с исходной волной, как раз и создает в теле стоячую волну. Поглощением в среде исходной и отраженной волн в данном случае пренебрегаем.

В зависимости от конкретных условий отражения возникает тот или иной сдвиг по фазе φ между отраженной и исходными волнами. Рассмотрим два предельных случая: 1) сдвиг по фазе $\varphi = \pi$ (в этом случае говорят, что отражение происходит с *потерей полуволны*) и 2) сдвиг по фазе не происходит, т. е. $\varphi = 0$ (в этом случае говорят об отражении *без потери полуволны* или, точнее, без изменения фазы волны).

Случай 1 наблюдается при отражении от *закрепленного* конца стержня или шнура, от закрытого конца трубы, а случай 2 — при отражении от *свободного* конца стержня или шнура, от открытого конца трубы.

Уравнение стоячей волны в случае отражения с потерей полуволны получаем из (9.45), положив там $\varphi = \pi$. Оно имеет вид:

$$\xi(t, x) = 2\xi_m \sin kx \cdot \cos \omega t. \quad (9.48)$$

Положения узлов стоячей волны на x -оси находим из (9.46) при $\varphi = \pi$:

$$x_{\text{узд}} = \frac{\lambda}{4} 2n \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (9.49)$$

Положения пучностей находим из (9.47) при $\varphi = \pi$:

$$x_{\text{пуч}} = \frac{\lambda}{4} (2n - 1) \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (9.50)$$

Уравнение стоячей волны в случае отражения без изменения фазы получаем из (9.45), положив там $\varphi = 0$:

$$\xi(t, x) = 2\xi_m \cos kx \sin \omega t. \quad (9.51)$$

Положения узлов и пучностей стоячей волны находим, соответственно, из (9.46) и (9.47) при $\varphi = 0$:

$$x_{\text{узд}} = \frac{\lambda}{4} (2n - 1) \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (9.52)$$

$$x_{\text{пуч}} = \frac{\lambda}{4} 2n \quad (n \text{ — целые числа}). \quad (9.53)$$

Легко видеть, что при переходе от случая с потерей полуволны к случаю без изменения фазы узлы и пучности меняются местами.

9.3.3. Мгновенные распределения скоростей частиц и относительной деформации среды в стоячей волне

Будем рассматривать поперечную стоячую волну, образующуюся при отражении без потери полуволны. Уравнение такой стоячей волны описывается выражением (9.51), определяющим смещение частиц $\xi(t, x)$ в момент времени t в точке x координатной оси, по которой распространяются исходная и отраженная бегущие волны. Зная $\xi(t, x)$, нетрудно найти скорость $v(t, x)$ частиц среды и относительную деформацию $\epsilon(t, x)$ среды. В п. 9.2.2 было показано, как перейти от $\xi(t, x)$ к $v(t, x)$ и к $\epsilon(t, x)$ в случае бегущей волны. Подобным же образом можно поступить и в случае стоячей волны.

Используя для $\xi(t, x)$ соотношение (9.51), представим:

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t, x) - \xi(t, x)}{\Delta t} = \\ &= 2\xi_m \cos kx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega t + \omega \Delta t) - \sin \omega t}{\Delta t} = 2\xi_m \cos kx \cos \omega t; \\ \epsilon(t, x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(t, x + \Delta x) - \xi(t, x)}{\Delta x} = \\ &= 2\xi_m \sin \omega t \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(kx + k\Delta x) - \cos kx}{\Delta x} = -2\xi_m k \sin \omega t \sin kx. \end{aligned}$$

Итак,

$$v(t, x) = 2\xi_m \cos kx \cos \omega t, \quad (9.54)$$

$$\epsilon(t, x) = -2\xi_m k \sin kx \sin \omega t. \quad (9.55)$$

Выберем девять моментов времени:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \quad t_2 = \frac{\tau}{8}, \quad t_3 = \frac{\tau}{4}, \\ t_4 &= \frac{3\tau}{8}, \quad t_5 = \frac{\tau}{2}, \quad t_6 = \frac{5\tau}{8}, \\ t_7 &= \frac{3\tau}{4}, \quad t_8 = \frac{7\tau}{8}, \quad t_9 = \tau. \end{aligned}$$

На рисунке 9.13, *a* представлена графически зависимость смещения ξ от x -координаты для указанных фиксированных моментов

времени. Соответствующие девять графиков помечены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При их построении использовалось соотношение (9.51). Заметим, что некоторые графики (например, 1, 5, 9) совпадают. На рисунке 9.13, б представлена графически зависимость скорости частиц среды v от x -координаты для тех же девяти фиксированных моментов времени; соответствующие графики обозначены, как на рисунке 9.13, а цифрами от 1 до 9. При построении этих графиков использовалось соотношение (9.54). Наконец, на рисунке 9.13, в представлена графически зависимость относительной деформации среды ε от x -координаты для рассматриваемых здесь девяти моментов времени; соответствующие графики пронумерованы от 1 до 9. При их построении использовалось соотношение (9.55).

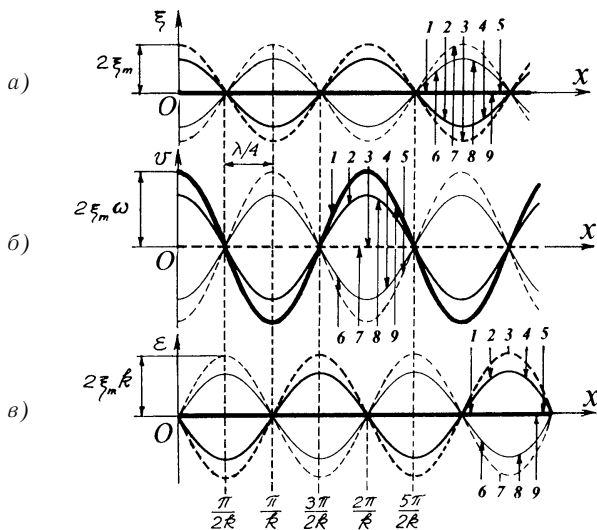


Рис. 9.13

Толстыми линиями показаны мгновенные распределения смещений, скоростей частиц, относительных деформаций в момент времени $t_1 = 0$ (эти графики обозначены цифрой 1). В момент $t_1 = 0$ скорости частиц среды в пучностях стоячей волны оказываются максимально большими (они равны $2\xi_m \omega$), а смещения и относительные деформации везде по x -оси равны нулю. Сплошными, но менее толстыми линиями показаны мгновенные распределения

смещений, скоростей частиц, относительных деформаций в момент времени $t_2 = \frac{\tau}{8}$ (эти графики обозначены цифрой 2). Толстыми пунктирными линиями показаны мгновенные распределения смещений, скоростей частиц, относительных деформаций в момент времени $t_3 = \frac{\tau}{4}$ (графики, обозначенные цифрой 3). В этот момент скорость везде по x -оси равна нулю, смещения оказываются максимально большими (равными $2\xi_m$) в пучностях, а относительные деформации оказываются максимально большими (равными $2\xi_m k$) в узлах стоячей волны.



Обратим внимание на то, что в узлах стоячей волны скорость частиц всегда равна нулю, а в пучностях стоячей волны всегда равна нулю относительная деформация. Это хорошо видно на графиках на рисунке 9.13.

Примечание

Тот факт, что в узлах стоячей волны скорость частиц среды равна нулю, отнюдь не означает, что в узлах молекулы среды покоятся. Уместно напомнить сделанные в п. 9.1.1 замечания о том, что мы отвлекаемся от молекулярного строения среды и рассматриваем ее как сплошную среду, обладающую определенной плотностью и определенными упругими свойствами. В узлах стоячей волны равна нулю не скорость молекул, а скорость частиц среды, совершающих вынужденные колебания. Объем «частицы среды», хоть и мал, однако вмещает в себя весьма большое число молекул.

9.3.4. Плотность энергии в стоячей волне

Плотности кинетической и потенциальной энергии ($\eta(t, x)$ и $u(t, x)$ соответственно) в момент времени t в точке x среды, в которой совершается волновое движение, описываются, согласно (9.31) — (9.33), формулами:

$$\eta(t, x) = \frac{1}{2} \rho v^2(t, x), \quad (9.56)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \rho v_\phi^2 \varepsilon^2(t, x). \quad (9.57)$$

Если речь идет о бегущей волне, то следует подставить в (9.56) и (9.57) выражения (9.27) и (9.29), соответственно. В случае стоячей волны, образующейся при отражении без потери полуволны, надо подставить в (9.56) выражение (9.54), а в (9.57) — выражение

(9.55). В результате найдем плотность кинетической энергии частиц среды в стоячей волне:

$$\eta(t, x) = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \cos^2 kx \cdot \cos^2 \omega t \quad (9.58)$$

и плотность потенциальной энергии упругой деформации:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 v_\phi^2 k^2 \sin^2 kx \cdot \sin^2 \omega t,$$

или, с учетом (9.26),

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \sin^2 kx \cdot \sin^2 \omega t. \quad (9.59)$$

Заметим, что соотношения (9.58) и (9.59) справедливы как для поперечной, так и для продольной стоячей волны.

Из (9.58) следует, что в точках среды, где $\cos kx = 0$, плотность кинетической энергии η равна нулю во все моменты времени, а из (9.59) следует, что в точках среды, где $\sin kx = 0$, всегда равна нулю плотность потенциальной энергии u . Если $\cos kx = 0$, то $kx = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$, т. е. $x = \frac{\lambda}{4}(2n - 1)$ (n — целые числа); эти точки x фиксируют положения на x -оси узлов стоячей волны (см. (9.52)). Если $\sin kx = 0$, то $kx = \pi n$, т. е. $x = \frac{\lambda}{4}(2n - 1)$; эти точки x фиксируют положения на x -оси пучностей стоячей волны (см. (9.53)). Таким образом, *во все моменты времени в узлах стоячей волны равна нулю плотность кинетической энергии, а в пучностях всегда равна нулю плотность потенциальной энергии*. В случае бегущей волны плотности кинетической и потенциальной энергий перемещаются по среде со скоростью v_ϕ .



Что происходит с течением времени с плотностями кинетической и потенциальной энергий в стоячей волне?

Ответ на этот вопрос дают рисунки 9.14 и 9.15. На рисунке 9.14 представлены графически зависимости η и u от пространственной координаты для трех фиксированных моментов времени: $t_1 = 0$ (позиция а), $t_2 = \frac{\tau}{8}$ (позиция б), $t_3 = \frac{\tau}{4}$ (позиция в), а на рисунке 9.15 — зависимость плотности механической энергии ω от пространственной координаты для трех указанных моментов времени ($\omega = \eta + u$). Сплошные вертикали на обоих рисунках фиксируют положения пучностей стоячей волны, а пунктирные — ее узлов.

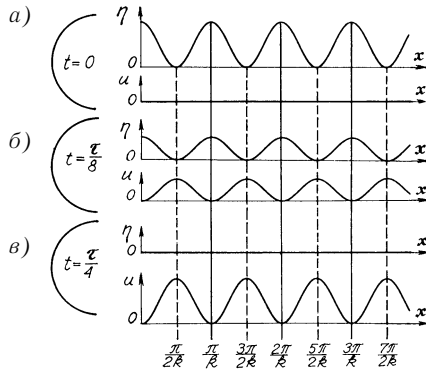


Рис. 9.14

Графики на рисунках построены при использовании соотношений:

$$\eta(t, x) = \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2 \cos^2 \omega t (1 + \cos 2kx), \quad (9.60)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t (1 - \cos 2kx), \quad (9.61)$$

которые следуют, соответственно, из (9.58) и (9.59), если воспользоваться тригонометрическими тождествами $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ и $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.

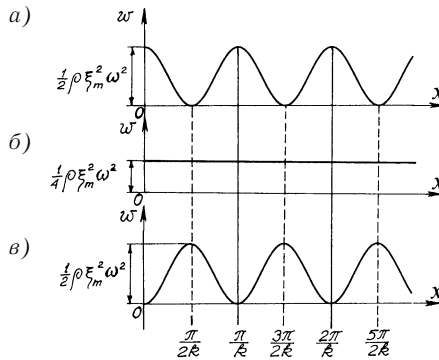


Рис. 9.15

В момент $t_1 = 0$ имеем $\cos^2 \omega t_1 = 1$ и $\sin^2 \omega t_1 = 0$. В этом случае получаем из (9.60) и (9.61):

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2 (1 + \cos 2kx); \\ u &= 0; \\ \omega &= \eta + 0 = \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2 (1 + \cos 2kx). \end{aligned} \right\} \quad (9.62)$$

Можно видеть, что в момент $t_1 = 0$ плотность u потенциальной энергии везде по x -оси равна нулю; механическая энергия в этот момент полностью представлена кинетической энергией частиц среды, которая сосредоточена в основном вблизи пучностей стоячей волны.

В момент $t_3 = \frac{\tau}{4}$ имеем $\cos^2 \omega t_3 = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$ и $\sin^2 \omega t_3 = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$.

В этом случае получаем из (9.60) и (9.61):

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0; \\ u &= \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2 (1 - \cos 2kx); \\ \omega &= 0 + u = \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2 (1 - \cos 2kx). \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

Можно видеть, что в момент $t_3 = \frac{\tau}{4}$ везде по x -оси равна нулю плотность η кинетической энергии; механическая энергия в этот момент полностью представлена потенциальной энергией упругой деформации, которая сосредоточена в основном вблизи стоячей волны.

В момент $t_2 = \frac{\tau}{8}$ имеем $\cos^2 \omega t_2 = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ и $\sin^2 \omega t_2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$. В этом случае получаем из (9.60) и (9.61):

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{8} \rho \xi_m^2 \omega^2 (1 + \cos 2kx); \\ u &= \frac{1}{8} \rho \xi_m^2 \omega^2 (1 - \cos 2kx); \\ \omega &= \eta + u = \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

Можно видеть, что в момент $t_3 = \frac{\tau}{8}$ (т. е. посередине между моментами t_1 и t_3) половина механической энергии находится в виде

кинетической энергии и сосредоточена вблизи пучностей, а половина находится в виде потенциальной энергии и сосредоточена вблизи узлов стоячей волны.

Мы видим, таким образом, что в течение четверти периода τ вся энергия в стоячей волне переходит из областей пучностей в области узлов, превращаясь при этом из кинетической энергии в потенциальную, или переходит из областей узлов в области пучностей, превращаясь при этом из потенциальной энергии в кинетическую. Все это похоже на взаимопревращения потенциальной и кинетической энергий в колебательной системе, например, в маятнике. Там также в течение четверти периода колебаний потенциальная энергия маятника, отклоненного от равновесного положения, превращается в кинетическую энергию, которая в течение следующей четверти периода превращается снова в потенциальную.

По существу, стоячая волна не является волновым движением, хотя и появляется в результате сложения двух волн, бегущих навстречу друг другу. В стоячей волне в стержне (струне, шнуре, столбе воздуха в трубе) не совершается перенос энергии вдоль стержня, а происходит *периодическая миграция энергии от узлов к пучностям и от пучностей к узлам, сопровождающаяся превращением потенциальной энергии в кинетическую и кинетической энергии в потенциальную*, соответственно. Время миграции энергии от узлов к пучностям (или от пучностей к узлам) равно $\frac{\tau}{4}$.

Можно сказать также, что в стоячей волне совершается *периодическое перераспределение механической энергии между узлами и пучностями, сопровождающееся взаимопревращениями кинетической и потенциальной энергий*.

9.3.5. Колебания упругих тел как стоячие волны

До сих пор мы не интересовались *размерами* среды, в которой совершается волновое движение. Когда рассматриваются стоячие волны, необходимо учитывать эти размеры. Возьмем для примера стержень длиной l . Волна, бегущая по стержню слева направо, отражается от его правого конца и бежит в обратном направлении. Эта обратная волна отражается, в свою очередь, от левого конца стержня. В результате сложения волн, отраженных от концов стержня, должна возникнуть стоячая волна. Однако она возникает отнюдь не всегда, а только тогда, когда длина λ бегущей волны и длина l стержня *оказываются в определенном соотношении*. Его вид зависит от условий отражения

волны на концах стержня (их называют *краевыми условиями*). Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. Концы стержня закреплены. В этом случае концы стержня должны являться узлами стоячей волны. Так как расстояние между соседними узлами равно $\frac{\lambda}{2}$, то, следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{\lambda}{2} n = l, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.65)$$

Учитывая, что

$$\lambda = v_{\phi} \tau = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega}, \quad (9.66)$$

перепишем (9.62) в виде:

$$\omega = \frac{\pi v_{\phi}}{l} n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.67)$$

Итак, стоячие волны, возникающие в стержне длиной l с закрепленными концами, могут иметь только такие циклические частоты ω , которые удовлетворяют условию (9.67).

С л у ч а й 2. Закреплен только один конец стержня. Закрепленный конец стержня должен быть узлом стоячей волны, а свободный конец — пучностью. Расстояние между пучностью и соседним узлом равно $\frac{\lambda}{2}$, а между данной пучностью и последую-

щими узлами оно равно, соответственно, $\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4} + 3\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4} + 4\frac{\lambda}{2}, \dots$, или, иначе говоря, $\frac{\lambda}{4}(1 + 2), \frac{\lambda}{4}(1 + 4), \frac{\lambda}{4}(1 + 6), \dots$.

Таким образом, образование стоячей волны в стержне длиной l с одним закрепленным концом возможно при выполнении условия $\frac{\lambda}{4}(1 + 2m) = l$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Это условие можно переписать в виде

$$\frac{\lambda}{4}(2n - 1) = l, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.68)$$

или, с учетом (9.66), в виде

$$\omega = \frac{\pi v_{\phi}}{2l}(2n - 1), \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.69)$$

Выше отмечалось, что стоячая волна, в сущности, волной не является, а имитирует колебательный процесс. Действительно,

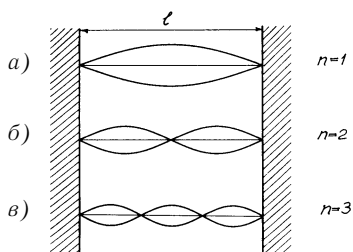


Рис. 9.16

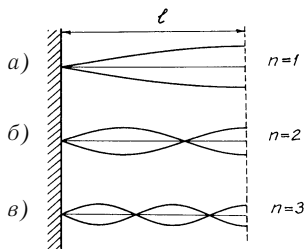


Рис. 9.17

частоты стоячих волн, возникающих в стержне (или ином теле), являются собственными частотами колебаний данного стержня. На рисунке 9.16, *а—в*, представлены поперечные стоячие волны в стержне с закрепленными концами. Они соответствуют различным свободным колебаниям стержня — первой гармонике, или основному тону (позиция *а*), второй гармонике, или первому обертону (позиция *б*), третьей гармонике, или второму обертону (позиция *в*). На рисунке 9.17, *а—в* представлены поперечные стоячие волны в стержне с закрепленным левым концом. Они также соответствуют различным свободным колебаниям стержня — первой, второй, третьей гармоникам.

9.4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

9.4.1. Принцип суперпозиции и явление интерференции волн

Пусть по среде распространяются одновременно две волны *1* и *2*. Обозначим через $\vec{\xi}_1(t, \vec{r})$ вектор смещения частиц среды в точке \vec{r} в момент *t* при распространении по среде волны *1* в отсутствие волны *2*, а через $\vec{\xi}_2(t, \vec{r})$ — вектор смещения при распространении волны *2* в отсутствие волны *1*. Как показывает опыт, при наличии обеих волн вектор смещения $\vec{\xi}(t, \vec{r})$ будет равен векторной сумме $\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2$:

$$\vec{\xi}(t, \vec{r}) = \vec{\xi}_1(t, \vec{r}) + \vec{\xi}_2(t, \vec{r}). \quad (9.70)$$

Получается, что, оказавшись вместе в данной среде, обе волны просто накладываются одна на другую, *не искажая друг друга*. В этом и заключается сущность *принципа суперпозиции* для волнового движения. В предыдущем параграфе мы уже пользовались этим принципом, рассматривая наложение друг на друга прямой и обратной (отраженной) плоских гармонических волн, приводящее к образованию стоячей волны.

В справедливости принципа суперпозиции легко убедиться, вспомнив, что различные звуковые волны распространяются в воздухе, ничуть не искажая друг друга. Если бросить в воду два камня, то можно наблюдать, как две образовавшиеся кольцевые волны свободно проходят одна сквозь другую.

Фактически на существование принципа суперпозиции для волнового движения указал в XV столетии знаменитый итальянский ученый и художник Леонардо да Винчи. В его рукописях, объединенных под общим названием «Атлантический Кодекс», есть следующее утверждение» «Если ты бросишь одновременно два камешка на некотором расстоянии друг от друга на неподвижную поверхность воды, то увидишь, как вокруг каждого из них возникнут два независимых друг от друга множества кругов, которые, вырастая, наконец встретятся, потом войдут одно в другое, пересекаясь друг с другом и всегда сохраняя в качестве своего центра те места, куда камни ударились...»

Предположим теперь, что волны 1 и 2, одновременно распространяющиеся по среде, удовлетворяют следующим трем условиям: 1) они имеют одну и ту же циклическую частоту ω ; 2) они имеют постоянную во времени разность фаз $\phi(\vec{r})$ в каждой точке пространства; 3) векторы смещения $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ в каждой точке пространства либо параллельны, либо антипараллельны, так что векторная сумма (9.70) преобразуется в алгебраическую. Такие волны, равно как и создающие их источники, называют *когерентными* (от латинского слова *cohaesus*, означающего «связанный, сцепленный»).

При наложении друг на друга двух или более когерентных волн возникает определенное, *не изменяющееся со временем* распределение в объеме среды амплитуд результирующих колебаний частиц среды. Конкретнее говоря, внутри объема среды, по которой распространяются когерентные волны, возникает устойчивая (не меняющаяся во времени) картина из чередующихся поверхностей с большой амплитудой колебаний и с малой или даже нуле-

вой амплитудой колебаний. Эту картину называют *интерференционной картиной* и говорят, что в данном случае наблюдается *интерференция волн*.

Итак, интерференция волн есть *сложение в пространстве двух или более волн, при котором образуется постоянное во времени распределение амплитуды результирующих колебаний в различных точках пространства*. Это распределение называют интерференционной картиной. Она наблюдается, когда складываются когерентные волны.

Если ξ_{1m} и ξ_{2m} — амплитуды двух гармонических волн с одинаковой частотой, а $\varphi(\vec{r})$ — разность фаз этих волн в точке \vec{r} , то амплитуда $\xi_m(\vec{r})$ результирующего колебания частиц в точке \vec{r} равна

$$\xi_m(\vec{r}) = \sqrt{\xi_{1m}^2 + \xi_{2m}^2 + 2\xi_{1m}\xi_{2m}\cos\varphi(\vec{r})}. \quad (9.71)$$

Геометрическое место точек внутри объема среды, для которой $\cos\varphi(\vec{r}) = 1$, представляет собой набор поверхностей с максимальной результирующей амплитудой, равной, согласно (9.71),

$$\xi_{\max} = \xi_{1m} + \xi_{2m}. \quad (9.72)$$

Геометрическое место точек, для которых $\cos\varphi(\vec{r}) = -1$, представляет собой набор *поверхностей с минимальной результирующей амплитудой*, равной

$$\xi_{\min} = |\xi_{1m} - \xi_{2m}|. \quad (9.73)$$

(При $\xi_{1m} = \xi_{2m}$ имеем $\xi_{\min} = 0$; в этом случае можно говорить об *узловых поверхностях*.)

Интерференция присуща волновым процессам любой природы. Обнаружение в том или ином эксперименте интерференционной картины указывает на то, что мы имеем дело с волновым процессом. Коротче говоря, *интерференции без волн не бывает*.

Отметим, что отнюдь не обязательно иметь два независимых когерентных источника, чтобы наблюдать устойчивую интерференционную картину. Вторую волну, которая должна быть когерентна с исходной волной, можно получить в результате отражения исходной волны от границы среды. В этом случае будут складываться падающая и отраженная волны, а для них отмеченные ранее три условия когерентности всегда выполняются. Таким образом,

рассмотренное достаточно подробно в предыдущем параграфе образование стоячей волны является *одним из случаев интерференции волн*. Он позволяет нам понять, как вследствие интерференции происходит *перераспределение* энергии складывающихся друг с другом волн в пространстве среды, по которой распространяются эти волны.

Интерференционная картина, возникающая при сложении падающей и отраженной плоских волн, представляет собой чередование плоскостей, содержащих пучности стоячей волны, и плоскостей, содержащих ее узлы. Эти плоскости параллельны и равноотстоят одна от другой на расстояние $\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi v_{\phi}}{2\omega}$; это есть расстояние между соседними пучностью и узлом. Плоскости с пучностями являются поверхностями с максимальной результирующей амплитудой, равной $2\xi_m$, а плоскости с узлами являются поверхностями с нулевой результирующей амплитудой.

Стоячая волна — *частный* случай интерференции волн. В *общем* случае могут интерферировать когерентные волны, направления распространения которых образуют друг с другом *произвольный угол*, отличающийся от 180° . При этом необходимо, чтобы волны были поперечными, поскольку для продольных волн, распространяющихся под произвольным углом друг к другу, третье условие когерентности заведомо не выполняется.

9.4.2. Интерференция от двух точечных источников: условия интерференционных максимумов и минимумов

Рассмотрим интерференцию волн от двух точечных источников O_1 и O_2 , находящихся на расстоянии d один от другого. Будем полагать, простоты ради, что источники колеблются синфазно (гребни волн выходят из источников одновременно). Выберем произвольно точку наблюдения P (рис. 9.18) и найдем условия, при которых в этой точке реализуется максимум либо минимум на интерференционной картине, создаваемой источниками O_1 и O_2 .

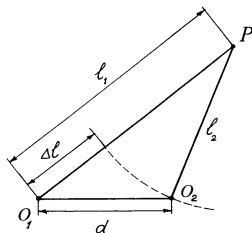


Рис. 9.18

Поскольку источники колеблются синфазно, то разность фаз ϕ волн, приходящих в точку P из O_1 и O_2 , определяется только

разностью Δl расстояний от источников волн до этой точки. Величину $\Delta l = l_1 - l_2$ называют *разностью хода* интерферирующих волн. Легко сообразить, что определяемая разностью хода Δl разность фаз φ волн есть

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda}. \quad (9.74)$$

Исходя из (9.71), заключаем, что в точке P реализуется интерференционный максимум (максимальная амплитуда результирующих колебаний частиц среды), если определяемая формулой (9.74) разность фаз φ удовлетворяет условию: $\cos \varphi = 1$, т. е. если

$$\varphi = \pi n, \text{ где } n \text{ — целые числа.} \quad (1^*)$$

Подставив (1*) в (9.74), получим *условие интерференционных максимумов*:

$$\Delta l = \lambda n \text{ (} n \text{ — целые числа).} \quad (9.75)$$

Итак, *амплитуда результирующих колебаний частиц среды в данной точке максимальна, если разность хода волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна целому числу длин волн*. При выполнении этого условия гребни обеих волн приходят в точку P одновременно (то же можно сказать о впадинах волн); поэтому и возникает интерференционный максимум.

Если разность фаз удовлетворяет условию: $\cos \varphi = -1$, т. е. если

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(2n - 1) \text{ (} n \text{ — целые числа),} \quad (2^*)$$

то в точке P реализуется интерференционный минимум. Используя (2*) и (9.74), находим *условие интерференционных минимумов*:

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2}(2n - 1) \text{ (} n \text{ — целые числа).} \quad (9.76)$$

Итак, *амплитуда результирующих колебаний частиц среды в данной точке минимальна, если разность хода волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна нечетному числу полуволн*. При выполнении этого условия в точку P приходят одновременно гребень одной волны и впадина другой, т. е. интерферирующие волны приходят в противофазе; поэтому и возникает интерференционный минимум.

Напомним, что условия (9.75) и (9.76) получены при совпадении фаз колебаний источников волн. Если же источник O_1 колеблется с отставанием по фазе φ_0 по отношению к источнику O_2 , то в этом случае вместо $\varphi = 2\pi\Delta l/\lambda$ следовало бы использовать в (9.71) разность фаз

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi\Delta l}{\lambda}. \quad (9.77)$$

9.4.3. Интерференция от двух точечных источников: интерференционная картина как совокупность гиперboloидов вращения



Что представляют собой поверхности с интерференционными максимумами и минимумами, образующие в своей совокупности интерференционную картину от двух точечных источников?

Отвечая на этот вопрос, будем по-прежнему полагать, что источники колеблются однофазно.

Из соображений симметрии ясно, что одна из поверхностей с интерференционными максимумами есть плоскость, перпендикулярная к отрезку O_1O_2 и делящая его пополам. Обозначим ее через S_0 . Опять-таки из соображений симметрии заключаем, что остальные поверхности с максимальной амплитудой результирующих колебаний, а также поверхности с минимальной амплитудой являются *поверхностями вращения* вокруг оси, проходящей через O_1 и O_2 . Предположим сначала, что все точки наблюдения находятся вместе с источниками волн O_1 и O_2 в плоскости рисунка, т. е. рассмотрим сечение объемной интерференционной картины плоскостью рисунка. Выясним, как будут выглядеть линии с интерференционными максимумами и минимумами, представляющие собой сечения соответствующих поверхностей плоскостью рисунка.

Каждая из указанных линий является геометрическим местом точек в плоскости рисунка, для которых модуль разности расстояний от источников O_1 и O_2 есть величина постоянная. Она равна или целому числу длин волн (для линий с интерференционными максимумами), или нечетному числу полуволен (для линий с интерференционными минимумами). Геометрическое место точек, для которых имеет одно и то же значение модуль разности расстояний от двух заданных точек, есть *гипербола*, фокусами которой являются эти заданные точки. Таким образом, *линии с интерференционными максимумами и минимумами представляют собой гиперболы, фокусами которых служат источники волн O_1 и O_2 .*

На рисунке 9.19 изображена одна из гипербол. Она имеет две ветви, зеркально симметричные относительно прямой MN (эта прямая есть сечение плоскости

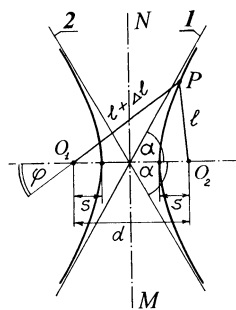


Рис. 9.19

S_0 плоскостью рисунка). Прямые 1 и 2 — асимптоты данной гиперболы. Угол α , образуемый асимптотами с прямой O_1O_2 , зависит от Δl — модуля разности расстояний от фокусов O_1 и O_2 гиперболы до произвольно выбранной на гиперболе точки P :

$$\cos \alpha = \frac{\Delta l}{d}, \quad (9.78)$$

где α — расстояние между фокусами O_1 и O_2 . Ветви гиперболы пересекают отрезок O_1O_2 на расстоянии s от ближайшего фокуса, равном

$$s = \frac{1}{2}(\alpha - \Delta l). \quad (9.79)$$

Равенство (9.79) очевидно, если учесть, что в соответствии с определением гиперболы, $\alpha = (s + \Delta l) + s$.

Докажем равенство (9.78). Рассмотрим треугольник O_1PO_2 , полагая $O_1P = l + \Delta l$ и $O_2P = l$ и обозначив через φ угол между сторонами O_1P и O_1O_2 (см. рисунок 9.19). Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника O_1PO_2 и запишем

$$l^2 = (l + \Delta l)^2 + d^2 - 2(l + \Delta l)d \cos \varphi. \quad (1^*)$$

Отсюда находим, что $2(l + \Delta l)d \cos \varphi = 2l\Delta l + (\Delta l)^2 + d^2$ и, следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2 + d^2}{2(l + \Delta l)d}. \quad (2^*)$$

Легко сообразить, глядя на рисунок 9.19, что $\cos \alpha = \lim_{l \rightarrow \infty} \cos \varphi$.

Найти предел $\lim_{l \rightarrow \infty} \cos \varphi$ нетрудно, если предварительно разделить на $2l$ числитель и знаменатель в правой части равенства (2*):

$$\cos \varphi = \frac{\Delta l + \frac{(\Delta l)^2 + d^2}{2l}}{\left(1 + \frac{\Delta l}{2l}\right)d}. \quad (3^*)$$

Хорошо видно, что правая часть равенства (3*) в пределе при $l \rightarrow \infty$ превращается в $\frac{\Delta l}{d}$. Итак, $\cos \alpha = \lim_{l \rightarrow \infty} \cos \varphi = \frac{\Delta l}{d}$, что и требовалось доказать.

Обращаясь к гиперболам, представляющим линии с интерференционными максимумами, нужно в (9.78) и (9.79) положить $\Delta l = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots$. Количество таких гипербол определяется неравенством

$$\Delta l < d. \quad (4^*)$$

Рассматривая гиперболы, являющиеся линиями с интерференционными минимумами, надо в (9.78) и (9.79) положить $\Delta l = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2} \dots$ и учесть (4*).

Построим интерференционную картину для конкретного случая, когда синфазно колеблются два точечных источника, расстояние между которыми

$$d = \frac{5}{2}\lambda. \quad (5^*)$$

Учитывая (4*), заключаем, что в данном случае интерференционная картина должна содержать две гиперболы с интерференционными максимумами (с $\Delta l = \lambda$ и $\Delta l = 2\lambda$; обозначим эти гиперболы через 1 и 2, соответственно) и две гиперболы с интерференционными минимумами (с $\Delta l = \frac{\lambda}{2}$ и $\Delta l = 3\frac{\lambda}{2}$ — гиперболы 3 и 4, соответственно). Используя (5*) и соотношения (9.78) и (9.79), находим соответственно для гипербол 1, 2, 3, 4:

$$s_1 = \frac{1}{2}(d - \lambda) = \frac{3}{10}d, \quad \cos \alpha_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{2}{5}, \quad \alpha_1 = 66^\circ 25';$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(d - 2\lambda) = \frac{1}{10}d, \quad \cos \alpha_2 = \frac{2\lambda}{d} = \frac{4}{5}, \quad \alpha_2 = 36^\circ 50';$$

$$s_3 = \frac{1}{2}\left(d - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{2}{5}d, \quad \cos \alpha_3 = \frac{\lambda}{2d} = \frac{1}{5}, \quad \alpha_3 = 78^\circ 30';$$

$$s_4 = \frac{1}{2}\left(d - 3\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{5}d, \quad \cos \alpha_4 = \frac{3\lambda}{2d} = \frac{3}{5}, \quad \alpha_4 = 53^\circ 10'.$$

Полученные данные позволяют изобразить искомую интерференционную картину (рис. 9.20). Линии с интерференционными максимумами — прямая MN и гиперболы 1 и 2. Линии с интерференционными минимумами — гиперболы 3 и 4 показаны пунк-

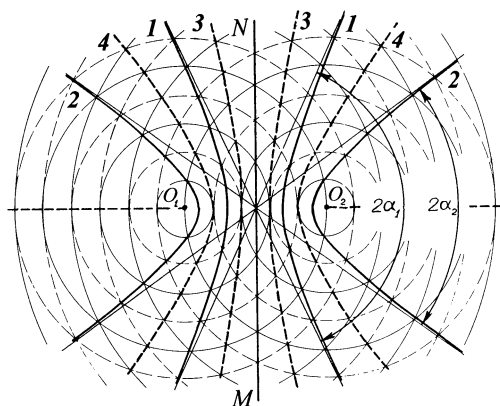


Рис. 9.20

тиром и прямая, проходящая через O_1 и O_2 . Сплошными окружностями показаны сечения плоскостью рисунка волновых поверхностей, соответствующих гребням сферических волн от источников O_1 и O_2 , а пунктирными — сечения волновых поверхностей, соответствующих впадинам волн от источников.



Обратим внимание на то, что пересечения сплошных окружностей друг с другом, как и пересечения друг с другом пунктирных окружностей, попадают на линии с интерференционными максимумами, а пересечения сплошных и пунктирных окружностей попадают на линии с интерференционными минимумами.

Чтобы получить объемную интерференционную картину, надо мысленно вращать изображенную на рисунке 9.20 картину линий вокруг оси, проходящей через O_1 и O_2 . При этом асимптоты гипербол оставят в пространстве след в виде *конических поверхностей*, а сами гиперболы оставят след в виде *двуполостных гиперboloидов вращения*. В целом интерференционная картина от двух точечных источников будет состоять в данном случае из плоскости S_0 , четырех двуполостных гиперboloидов вращения и прямой, проходящей через фокусы гиперboloидов.

Представление о том, как выглядит двуполостный гиперboloид вращения, дает рисунок 9.21, *a*. Заметим, что если мысленно

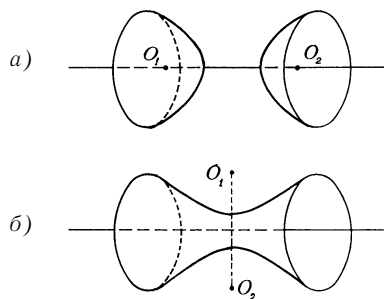


Рис. 9.21

вращать гипербола не вокруг прямой O_1O_2 , а вокруг прямой MN , то мы получили бы поверхность, называемую *однополостным* гиперболоидом вращения (рис. 9.21, б).

9.4.4. Фигуры Хладни



Рассматривавшиеся в § 9.3 стоячие волны образуются при интерференции волн, распространяющихся навстречу друг другу вдоль одного и того же направления. Стоячие волны могут возникать также при интерференции волн, распространяющихся в разных направлениях *в плоскости* (например, волн внутри металлической плоской пластинки). Существует наглядный и красивый способ наблюдения стоячих волн в плоских пластинках; его предложил в 1787 году немецкий физик Эрнст Хладни.

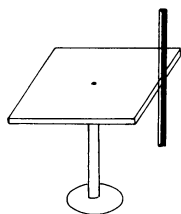


Рис. 9.22

На горизонтально ориентированную и закрепленную в какой-либо точке (например, в центре) квадратную металлическую или стеклянную пластинку насыпают мелкий сухой песок и возбуждают поперечные колебания (а значит, и поперечные волны) в пластинке, проводя смычком скрипки по ее ребру в том или ином месте (рис. 9.22). Насыпанный на пластинку песок сбрасывается с тех участков, которые колеблются с относительно большой амплитудой, и собираются на участках, соответствующих узловым линиям интерференционной картины. Эти линии образуют так называемые *фигуры Хладни*. Вид фигур зависит от формы пластинки (вместо квадратной можно взять круглую или иную пластинку), положения закрепленной точки, места, в каком смычок соприкасается с ребром пластинки, а также от того, в каких точках пластинки на нее надавят пальцами.

На рисунке 9.23, а, б приведены для примера две фигуры Хладни. В обоих примерах использовалась квадратная металлическая пластинка, закреплен-

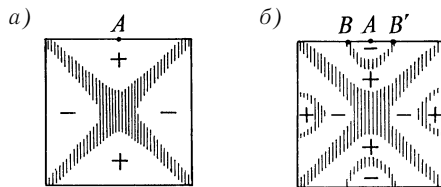


Рис. 9.23

ная в центре квадрата, а смычком проводили по ребру пластинки в точке A (в середине стороны квадрата). Но в примере a на пластинку пальцами не надавливали, а в примере $б$ давили в точках B и B' . Плюсом отмечены те пучности, где пластинка выгнута в данный момент кверху, а минусом — книзу. Через четверть периода пластинка станет плоской, а еще через четверть периода плюсы и минусы поменяются местами.

9.5. ЗВУК

9.5.1. Объективные и субъективные характеристики звука

В широком смысле звук — это упругие волны относительно небольшой интенсивности (*звуковые*, или *акустические* волны). В узком смысле звук — явление, *воспринимаемое органами слуха* человека и животных. Определяя звуковые волны как упругие волны, *которые можно слышать*, следует учитывать, что человек слышит звук только в диапазоне частот $\nu = \frac{1}{\tau}$ от 16 Гц до 20 000 Гц. Однако

понятие звуковых (акустических) волн этим диапазоном не ограничивается. Неслышимый для человека звук с частотой ниже 16 Гц называют *инфразвуком*, а с частотой выше 20 кГц — *ультразвуком*. Высокочастотные ультразвуковые волны с частотой более 10^9 Гц называют *гиперзвуком*.

Различают *объективные* и *субъективные* характеристики звуковых волн. Первые не зависят от особенностей восприятия звука человеком, а вторые, напротив, основываются на восприятии звука.

К объективным характеристикам относятся физические величины, описывающие любой волновой процесс: *частота звука*

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega}$$

и плотность потока энергии звуковой волны (интенсивность звука) (см. (9.42))

$$j = \frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2 \omega^2 v_{\text{ф}}$$

Напомним, что плотность потока энергии выражается в *ваттах на квадратный метр* ($\text{Вт}/\text{м}^2$); такова же и единица интенсивности звука.

Важной объективной характеристикой звука является его *спектральный состав (спектр)*; он показывает, из колебаний каких частот образован данный звук и как распределена амплитуда звуковой волны между различными гармоническими составляющими. Гармоническая составляющая — это звук, издаваемый гармонически колеблющимся телом; его называют *музыкальным тоном* или *чистым тоном* (или просто *тоном*). Например, *аккорд* характеризуется линейчатым спектром (звук состоит из нескольких тонов), а *шум* имеет сплошной спектр.

К субъективным характеристикам звука относятся высота тона, громкость тона и тембр. *Высота тона* определяется частотой ν . Чем больше ν , тем больше высота тона. *Громкость тона* является субъективной оценкой интенсивности данного тона. Как показывает опыт, для каждой частоты в диапазоне слышимых звуков существует *порог слышимости* — интенсивность звука, меньше которой человеческое ухо не реагирует на звук данной частоты. Существует также *порог болевых ощущений* — интенсивность звука, выше которой звук данной частоты вызывает боль в ушах.



На рисунке 9.24 показаны две эмпирические кривые — зависимость от частоты порога слышимости (кривая 1) и порога болевых ощущений (кривая 2). Из-за весьма большого диапазона рассматриваемых

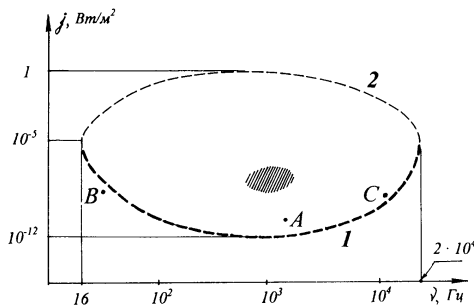


Рис. 9.24

значений частоты и интенсивности звука здесь на обеих координатных осях использована не линейная, а логарифмическая шкала. Можно видеть, что наименьшее значение порога слышимости (оно равно 10^{-12} Вт/м²), как и наибольшее значение порога болевых ощущений (оно равно 1 Вт/м²), соответствуют частоте звука около 1000 Гц. Область координатной νj -плоскости, ограниченную кривыми 1 и 2, называют *областью слышимости*. В разговорной речи используется небольшая часть этой области, отмеченная на рисунке штриховкой.

Обратим внимание: хотя звук, соответствующий точке *A* (назовем его *A*-звуком), характеризуется меньшей интенсивностью, чем *B*-звук, однако, поскольку он находится над порогом слышимости, человек его слышит, тогда как более интенсивного *B*-звука человек не услышит, поскольку тот находится под порогом слышимости. Хотя интенсивность *A*-звука меньше интенсивности *C*-звука, однако *A*-звук воспринимается громче *C*-звука, поскольку более удален от порога слышимости. Мы видим, таким образом, что объективная характеристика «интенсивность звука» и субъективная характеристика «громкость звука» различаются. Интенсивность звука и ее субъективная оценка (громкость звука) — разные понятия.

Тембр — субъективная оценка спектрального состава звука. Наиболее простой звук — чистый тон; его спектр представляется одной определенной частотой. Более сложные звуки можно рассматривать как результат суперпозиции (наложения) чистых тонов с частотами $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots$ и амплитудами $\xi_{1m}, \xi_{2m}, \xi_{3m}, \dots$. Частоте ν соответствует основной тон, а остальным частотам — обертоны. Высота и громкость основного тона определяют высоту и громкость звука. Обертоны же (их частоты и амплитуды) определяют в своей совокупности тембр звука.

Звуки, характеризующиеся одинаковой частотой и интенсивностью основного тона, могут заметно различаться по тембру благодаря наличию наряду с основным тоном различных обертонов. Именно по тембру мы различаем, например, звучание рояля и кларнета. На рисунке 9.25, *a, б* сопоставляются временные развертки звуковых колебаний, создаваемых роялем (позиция *a*) и кларнетом (позиция *б*) при одном и том же периоде, равном 0,01 с. Форма колебаний различна, поскольку одновременно с колебаниями одинаковой для обоих инструментов основной частоты совершаются колебания с частотами обертонов, амплитуды которых для разных инструментов различны.

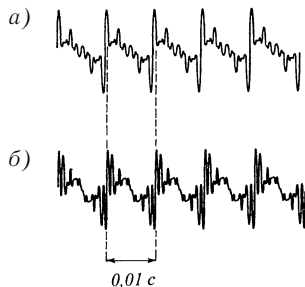


Рис. 9.25

Отдельно отметим *аккорд* — одновременное звучание двух или более чистых тонов с близкими громкостями. Такое звучание может быть приятно для слуха (*консонанс*), но может вызывать и неприятное слуховое ощущение (*диссонанс*).

9.5.2. Излучение звука и его скорость

Зажмем в тисках или плотно прижмем к краю стола железную линейку. Отклонив конец линейки и затем отпустив его, возбуждем колебания линейки. Если расстояние от тисков до конца линейки относительно велико, мы не будем воспринимать на слух ее колебания. Но если закрепить линейку так, чтобы из тисков выступал достаточно короткий конец, то при возбуждении его колебаний мы услышим звук.

Легко понять, как рождаются в данном случае звуковые волны. Колеблющаяся линейка периодически сжимает прилегающий к одной из ее сторон слой воздуха и одновременно создает разрежение с другой стороны. Чередующиеся во времени сжатия и разрежения воздуха распространяются в обе стороны в виде упругой продольной волны, т. е. в виде звуковой волны. Волна достигает нашего уха и вызывает периодические изменения давления, воздействующие на наш слуховой аппарат. Как только частота ν этих колебаний превысит 16 Гц, мы услышим низкий звук. При увеличении частоты колебаний возрастает высота звука. Чем короче колеблющийся конец линейки, тем больше частота колебаний, тем больше высота звука.

Источники (излучатели) звука многообразны. Вспомним завывание ветра, шум морского прибоя, журчание ручья, шелест листьев, пение птиц. Особое место среди излучателей звука занимают *музыкальные инструменты*. Они звучат при возбуждении в них соответствующих колебаний. В одних случаях это могут быть *свободные колебания*, возбуждаемые ударами (камертон, колокол, рояль) или щипками (гитара, арфа, гусли). В других случаях это могут быть *автоколебания*, которые возникают в смычковых и дуговых инструментах, органных трубках.

Поясним, как возникают автоколебания струны у смычкового инструмента, например, скрипки. При движении волоска смычка струна под действием силы трения покоя начинает отклоняться от положения равновесия. Когда сила упругости деформированной струны превзойдет силу трения покоя, струна оторвется от волоска смычка, отклонится в другую сторону от положения равновесия и в момент наибольшего отклонения снова будет захвачена смычком. Так, дважды за период струна пополнится

энергией, обеспечивающей ее колебания с постоянной амплитудой.

Обычно звуковые волны достигают наших ушей, распространяясь по воздуху. Однако звук хорошо распространяется также в воде и в твердых телах. Многие обитатели морских глубин общаются друг с другом посредством звуковых волн. Хорошо проводит звук земля. В приключенческих романах можно прочитать, как герой прикладывает ухо к земле и улавливает топот копыт приближающегося противника. В главе 10 мы познакомимся с использованием звуковых волн для «прослушивания» земных недр.

Скорость звука в воздухе вблизи земной поверхности равна при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 331 м/с (это значение соответствует формуле (9.14), если учесть, что модуль объемной упругости воздуха равен $1,42 \cdot 10^5\text{ Па}$). По мере увеличения температуры воздуха скорость звука линейно растет, увеличиваясь на $0,6\text{ м/с}$ с каждым градусом. При температуре, например, $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ скорость звука в воздухе равна 520 м/с .

В воде скорость звука заметно больше, чем в воздухе. Так, при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ она составляет 1480 м/с (модуль объемной упругости воды равен $2,2 \cdot 10^9\text{ Па}$). При повышении температуры воздуха до $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ скорость звука увеличивается до 1540 м/с .

В металлах и сплавах скорость звука еще больше. Так, в соответствии с формулой (9.12) скорость продольной звуковой волны равна 3340 м/с в меди, 5090 м/с в алюминии, 5000 м/с в стали. Скорость поперечных звуковых волн примерно в $1,5$ раза меньше, чем продольных.

Можно на простом опыте убедиться, что скорость звука в твердом теле больше, чем в воздухе. Если приложить ухо к концу рельса и попросить приятеля резко ударить чем-нибудь тяжелым по другому концу этого рельса, то мы услышим два удара. Сначала звук придет к нам по рельсу, а затем по воздуху.

9.5.3. Акустический резонанс

Чтобы увеличить интенсивность звука, производимого каким-либо источником, применяют объемные колебательные системы, настроенные в резонанс с источником звука (так называемые *объемные резонаторы*).

Если ударить молоточком по вилке камертона, держа ее в руке, возникнет относительно негромкий звук. Закрепим камертон на крышке деревянного прямоугольного ящика с одним открытым

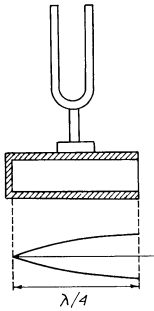


Рис. 9.26

концом, проследив, чтобы длина ящика и, соответственно, воздушного столба внутри него равнялась четверти длины звуковой волны, излучаемой камертоном (рис. 9.26). Такой ящик оказывается настроенным на частоту камертона. Возникающие в нем вынужденные колебания воздушного столба находятся *в резонансе* со свободными колебаниями вилки камертона и поэтому их амплитуда существенно возрастает — наступает акустический резонанс, и мы слышим достаточно громкий звук.

Струна, натянутая, например, между двумя стенами, звучит негромко. Ее колебания не в состоянии породить интенсивные периодические сжатия и разрежения в окружающем воздухе. Однако если эту струну натянуть на резонирующий ящик (а еще лучше на корпус скрипки или гитары), то благодаря акустическому резонансу возникнет достаточно громкий звук. Этот звук излучает не сама струна, а дека и столб воздуха под ней, настроенные в резонанс с тоном, который издает струна.

Понятно, что дека и столб воздуха должны резонировать на колебания различных частот, возбуждаемых струной во время работы скрипача или гитариста. Именно поэтому корпуса-резонаторы музыкальных инструментов имеют достаточно сложную форму, изготавливаются с использованием специально подбираемых пород деревьев и подвергаются тщательной обработке.

9.5.4. Затухание плоской звуковой волны

Звуковая волна, распространяясь по среде, постепенно затухает по мере удаления от источника звука. Затухание плоской звуковой волны обусловлено двумя причинами: *поглощением звука*, происходящим в результате превращения механической энергии волны во внутреннюю энергию среды, и *рассеянием звука* на неоднородностях среды. Опыт показывает, что интенсивность j плоской звуковой волны, распространяющейся по x -оси, уменьшается с расстоянием x от источника звука по *экспоненциальному закону*:

$$j(x) = j(0)e^{-2\alpha x}. \quad (9.80)$$

Здесь $j(0)$ — интенсивность звука при $x = 0$ (в точке, где находится источник звука), α — так называемый *коэффициент затухания звука*, $e = 2,71828$ — основание натуральных логарифмов.

Чем больше коэффициент затухания α , тем быстрее затухает с расстоянием звук. Обозначив через x_0 величину $\frac{1}{2\alpha}$, выражение

(9.80) запишем в виде $j(x_0) = j(0) \cdot \frac{1}{e}$. Следовательно, величина

$$x_0 = \frac{1}{2\alpha} \quad (9.81)$$

есть расстояние от источника звука, на котором его начальная интенсивность уменьшилась в $e \approx 2,7$ раза.

Будем, для простоты, учитывать только поглощение звука, т. е. полагать, что его затухание происходит только за счет *превращения механической энергии волны во внутреннюю энергию среды* (при этом происходит некоторое нагревание среды). Однако не будем принимать во внимание явление *теплопроводности*, т. е. переноса энергии из более нагретых областей среды в менее нагретые. При таких условиях коэффициент затухания звука α может быть представлен соотношением:

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{v_\phi^3 \rho} \eta, \quad (9.82)$$

где ρ — плотность среды, η — коэффициент внутреннего трения. Наличие у любой реальной среды внутреннего трения (вязкости) — принципиальный фактор, обуславливающий превращение механической энергии волны во внутреннюю энергию среды.

Сопоставим коэффициенты затухания звука для воздуха и воды. Как уже отмечалось, у воздуха при 20 °С коэффициент внутреннего трения в 60 раз меньше, чем у воды. Однако надо учесть также, что плотность воздуха и скорость звука в воздухе существенно меньше этих величин для воды. В результате получаем (и опыт это подтверждает), что *звук затухает с расстоянием значительно быстрее в воздухе, нежели в воде*.

Обратим также внимание на квадрат циклической частоты ω^2 в соотношении (9.82). Затухание звука с расстоянием происходит *тем быстрее, чем больше частота звуковой волны*. Звуки, являющиеся суперпозицией многих гармоник (например, гром во время грозы), будучи резкими и достаточно высокими вблизи источника звука, становятся по мере удаления от него более глухими и низкими вследствие относительно быстрого затухания звуковых волн высоких частот.



Используя формулу (9.82), оценим, во сколько раз коэффициент затухания звука α в воде меньше, чем в воздухе при 20 °С. По сравнению с воздухом, вода характеризуется в 5 раз большей скоростью звука v_ϕ ,

в 830 раз большей плотностью ρ , в 60 раз большей вязкостью η . Следовательно, коэффициент затухания в воде должен быть в $125 \cdot 830/60 \approx 1700$ раз меньше, чем в воздухе. Так оно и есть. Однако означает ли это, что если звук хорошо слышен в воздухе на расстоянии 100 м, то он будет так же хорошо слышен в воде на расстоянии 170 км?

Нет, не означает. Дело в том, что экспоненциальный закон затухания звука с расстоянием описывает затухание звука *полностью* лишь в случае *плоской*, т. е. нерасходящейся звуковой волны. Если же волна является, например, *сферической* (или близка к таковой), то нужно принимать во внимание еще одну причину затухания звука — *расхождение волны*, т. е. тот факт, что по мере удаления от источника поток излучаемой звуковой энергии Φ должен распределяться по увеличивающейся с расстоянием волновой поверхности (ее площадь равна $4\pi r^2$, где r — расстояние от источника звука). Это, естественно, приводит к уменьшению плотности потока, т. е. интенсивности звука.

Предположим, что $\alpha = 0$, т. е. нет ни поглощения, ни рассеяния звука. В этом случае поток энергии звуковой волны $\Phi(r_0)$ на расстоянии r_0 вблизи от точечного источника будет равен потоку энергии $\Phi(r)$ на сколь угодно удаленном от источника расстоянии r . Так как, в соответствии с (9.40), $\Phi(r_0) = 4\pi r_0^2 j(r_0)$ и $\Phi(r) = 4\pi r^2 j(r)$, то из равенства $\Phi(r) = \Phi(r_0)$ следует, что

$$j(r) = j(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2. \quad (9.83)$$

Итак, в отсутствие поглощения и рассеяния затухание звука от точечного источника должно происходить по закону $j(r) \sim \frac{1}{r^2}$. Если, к тому же, есть поглощение и рассеяние, то затухание звука с расстоянием будет происходить по закону:

$$j(r) \sim \frac{1}{r^2} e^{-2\alpha r}. \quad (9.84)$$

Когда мы сравниваем затухание звука в воздухе и в воде, необходимо учитывать оба множителя в правой части соотношения (9.84). По сравнению с воздухом, множитель $e^{-2\alpha r}$ в воде медленно изменяется с расстоянием, но есть еще множитель $\frac{1}{r^2}$, и он «не позволяет» звуковой волне распространяться в воде на расстояние в сотни километров от источника звука.

9.5.5. Ультразвук и инфразвук

Ультразвук (звуковые волны с частотой $\nu > 20$ кГц) человеческим ухом не воспринимается. Однако летучие мыши и дельфины улавливают ультразвук, который сами же и излучают. Они используют его для ориентирования в пространстве и определения

положения различных объектов. Подробнее мы поговорим об этом в п. 9.5.6.

Основные искусственные излучатели ультразвука работают, используя преобразование электрических колебаний в механические (*магнитострикционные* и *пьезоэлектрические* излучатели), а в приемниках ультразвука применяется обратное преобразование. Поэтому обсуждение генерации и приема ультразвуковых волн должно быть отложено до того, как будут рассмотрены электрические и магнитные явления. Ограничимся замечаниями, касающимися особенностей ультразвука и его применений.

Ультразвуковые волны характеризуются двумя особенностями: 1) они могут обладать *значительной интенсивностью*, поскольку интенсивность звука пропорциональна квадрату его частоты. Используемая в технике интенсивность ультразвука достигает (10^5 — 10^6) Вт/м²; 2) ультразвуковые волны способны формировать *направленное излучение*, подобное световому лучу, что связано с малостью длины волны ультразвука. Используя соотношение $\lambda = \frac{v_{\text{ф}}}{\nu}$,

находим, что длины волн ультразвука с частотами в диапазоне $\nu = (10^5$ — $10^7)$ Гц составляют $\lambda = (0,33$ — $0,0033)$ см в воздухе и $\lambda = (1,5$ — $0,015)$ см в воде. Малая длина ультразвуковых волн позволяет в ряде случаев рассматривать их распространение методами *геометрической акустики*.

Благодаря указанным особенностям ультразвук находит широкое применение. Ультразвук *большой интенсивности* (порядка 10^5 Вт/м²) вызывает раздробление облучаемого вещества и поэтому может применяться для получения очень тонких порошков, снятия ржавчины и жировых пленок с поверхности металла, очистки тканей от пятен и загрязнений. С помощью интенсивного узконаправленного ультразвукового луча можно производить механическую обработку материалов — резание, шлифование, сверление, точечную сварку. Ультразвуковые лучи *относительно малой интенсивности* (до $(10^2$ — $10^3)$ Вт/м²) применяются в *дефектоскопии* (для обнаружения микротрещин и малейших дефектов в различных объектах, в частности в железнодорожных рельсах, сварных швах, отливках), в *гидроакустике* (для обнаружения подводных препятствий и косяков рыбы, а также для исследования рельефа морского дна), в *медицине* (для диагностики внутренних органов человека, микромассажа и локального нагревания тканей организма, хирургического лечения).

Инфразвуковые волны (волны с частотой $\nu < 16$ Гц) изучены мало и в технике пока не используются. В противоположность

ультразвуку, инфразвук обладает крайне высокой проникающей способностью; он может распространяться в атмосфере на десятки тысяч километров. Установлено заметное воздействие инфразвука на состояние и поведение людей и животных. Многие животные (известно около 100 видов) начинают испытывать волнение перед землетрясением и пробуждением вулкана, что можно объяснить действием на них инфразвуков, порождаемых этими природными явлениями. Есть опыт прогнозирования по инфразвуку приближения цунами — гигантских приливных волн, порождаемых подводным землетрясением.

9.5.6. Эхолокация у летучих мышей и дельфинов



Почему летучие мыши уверенно летают и охотятся за насекомыми в полнейшей темноте? Заинтересовавшись этим вопросом, швейцарский биолог Ш. Жюрин и итальянский естествоиспытатель Л. Спалланцани в 1794 году проделали над летучими мышами ряд опытов. Было установлено, что летучие мыши, лишенные зрения, продолжают уверенно летать в тесном помещении, по-прежнему прекрасно ориентируясь в темноте; они полностью сохраняют способность охотиться за насекомыми. А вот мыши, у которых уши залеплены воском, становятся беспомощными. Даже на свету они теряют способность ориентироваться в пространстве и все время натываются на разные препятствия. Было высказано правильное предположение: *летучие мыши ориентируются в полете при помощи слуха*. Возможно, они издают во время полета какие-то звуки и улавливают эхо от препятствий и даже насекомых. По эхо-сигналам они и ориентируются в полете.

В те времена такое предположение было оценено как несерьезное, так как было известно, что летучие мыши летают совершенно бесшумно. Тогда еще не знали, что наряду со слышимыми звуками бывают звуки, которые человеческое ухо не воспринимает.

Правильность предположения, высказанного Спалланцани и Жюрином, была подтверждена лишь в XX столетии. В 1938 г. американские исследователи Д. Гриффин и Г. Пирс, применив специальную аппаратуру (ультразвуковой микрофон), установили, что великолепная ориентировка летучих мышей в пространстве и, в частности, в полной темноте связана с их способностью воспринимать *ультразвуковое эхо*. Оказалось, что во время полета мышь излучает короткие ультразвуковые сигналы, а затем воспринимает эхо-сигналы от ближайших препятствий и от пролетающих вблизи насекомых. Способ ориентировки по ультразвуковому эху получил название *эхолокации*.

Летучие мыши — обладатели прекрасных природных *звуковых радаров*, или, иначе говоря, природных *сонаров* (в слове «сонар» первый слог происходит от английского слова *sound*, означающего «звук»). Устройство сонаров различно у разных видов летучих мышей. Одни излучают ультразвуковые волны через рот, другие — через ноздри, окруженные кожистыми выростами наподобие рупоров.

Излучают летучие мыши на частотах $\nu = (40—80)$ кГц. Длина излучаемой ультразвуковой волны в воздухе составляет $\lambda = \frac{v_{\text{ф}}}{\nu} = (4—8)$ мм. Летучая мышь посылает короткий ультразвуковой сигнал, который в несколько десятков раз превышает длину волны. Обозначим через T его длительность, а через L — протяженность в пространстве. Полагая $\nu = 40$ кГц и, соответственно, $\lambda = 8$ мм и считая, что в сигнале «укладываются» $n = 40$ длин волны, находим: $T = \frac{n}{\nu} = 10^{-3}$ с, $L = n\lambda \approx 30$ см. Ежесекундно летучая мышь производит несколько десятков коротких ультразвуковых сигналов.

Отраженные от объекта эхо-сигналы летучая мышь воспринимает ушами, имеющими сравнительно большие размеры. Слуховой аппарат у летучих мышей значительно совершеннее, чем у человека. Дело здесь не только в том, что мыши улавливают ультразвуковые частоты. Они способны улавливать крайне слабые звуки, например звук, отраженный пролетающим комаром. Кроме того, летучая мышь удивительно точно определяет направление на объект, который отразил звуковой сигнал.

Как и летучие мыши, дельфины обладают великолепными природными органами. Эхолокацию у дельфинов обнаружили в середине XX столетия. Дельфины используют частоты от 80 кГц до 100 кГц. Мощность излучаемых дельфинами локационных сигналов может быть очень большой; дельфины способны обнаруживать косяки рыбы на расстояниях свыше километра. Дельфин может воспринимать крайне слабые эхо-сигналы, выделяя их в сильнейшем шуме. Это объясняется наличием у дельфина двух типов слуха.

Можно говорить, что в слуховом аппарате дельфина есть «входные ворота» двух типов. «Ворота» первого типа — вытянутая нижняя челюсть. Через эти «ворота» к внутреннему уху дельфина поступают ультразвуковые волны, направление которых совпадает с направлением челюсти (с точностью до нескольких градусов). Именно по этому направлению осуществляется эхолокация. «Ворота» второго типа — те места по бокам головы дельфина, где когда-то у далеких предков дельфинов, живших на суше, были уши. Ушей, как таковых, у дельфинов нет; наружные слуховые отверстия почти заросли, однако звуки они пропускают хорошо. Через эти «входные ворота» к внутреннему уху дельфина поступают со всевозможных сторон звуковые волны относительно низких частот ($10^2—10^4$ Гц).

Итак, *первый тип* слуха дельфинов — *остронаправленный эхолокационный слух на ультразвуковых частотах*. Благодаря своей направленности этот слух предназначен для восприятия лишь ультразвуковых сигналов, отраженных от объектов, прослушиваемых дельфином. *Второй тип* слуха — *слух кругового обзора*. Он предназначен для восприятия дельфином «обычных» звуков, заполняющих окружающее пространство.

Эхо-сигналы отличаются от остальных звуков, приходящих к дельфину, не только по степени направленности, но и по частоте. Эхо-сигналы и обычные звуки воспринимаются разными устройствами слухового аппарата (проходят через разные «входные ворота»). Поэтому и оказывается возможным выделение даже весьма слабых эхо-сигналов на фоне сильного шума.

9.6. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В АКУСТИКЕ

9.6.1. Общие замечания

Если источник и приемник звука неподвижны относительно среды, в которой распространяется звук, то частота ν' колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна чистоте ν колебаний источника звука. Равенство частот исчезает, когда источник движется относительно среды, а также когда относительно среды движется приемник. В 1842 году австрийский физик Христиан Доплер установил:

Частота ν' воспринимаемого наблюдателем звука выше частоты ν источника звука, когда наблюдатель и источник сближаются (в частности, когда источник движется навстречу наблюдателю), и ниже ν , когда источник и наблюдатель удаляются друг от друга.

Этот эффект называют *эффектом Доплера*.

Эффект Доплера можно наблюдать, например, сопоставляя высоту звука сирены пожарного автомобиля в случаях, когда он приближается к нам и когда удаляется от нас. В первом случае высота звука сирены представляется нам более высокой, чем во втором случае.

Рассмотрим эффект Доплера для нескольких конкретных ситуаций, полагая для простоты, что движение как источника, так и приемника звука совершается вдоль прямой, проходящей через приемник и источник. Источник генерирует последовательность волновых гребней, отстоящих друг от друга во времени на τ . Приемник регистрирует последовательность гребней, отстоящих друг от друга во времени на τ' . Поскольку $\tau = \frac{1}{\nu}$ и $\tau' = \frac{1}{\nu'}$, то, понятно, что, найдя зависимость τ' от τ , мы тем самым найдем зависимость воспринимаемой частоты ν' от частоты ν звука, генерируемого источником.

Чтобы найти зависимость τ' от τ , достаточно проследить мысленно за двумя следующими друг за другом гребнями, которые обозначим как гребень 1 и гребень 2. Примем, что гребень 1 родился в момент времени $t = 0$ и, значит, гребень 2 родился в момент $t = \tau$. Обозначим через t_1 и t_2 моменты регистрации приемником гребней 1 и 2, соответственно; ясно, что $t_2 = t_1 + \tau'$. Обозначим через l_1 и l_2 расстояния от приемника до источника звука

соответственно в моменты t_1 и t_2 . Очевидно, что l_1 равно расстоянию, которое пробежал гребень 1 за время от рождения до регистрации приемником, т. е. за время t_1 . Аналогично, l_2 равно расстоянию, которое пробежал гребень 2 за время от рождения до регистрации, т. е. за время $t_2 - \tau'$. Гребни двигались со скоростью звука в среде v_ϕ ; следовательно,

$$l_1 = t_1 v_\phi, \quad l_2 = (t_2 - \tau) v_\phi. \quad (9.85)$$

Для дальнейшего обсуждения эффекта Доплера рассмотрим конкретные ситуации.

9.6.2. Случаи, когда источник звука покоится

Предположим, что источник звука *покоится* относительно среды, а приемник (наблюдатель) *удаляется* от него со скоростью $v_{\text{пр}}$. Расстояние $l_2 - l_1$ он преодолет за время τ' , т. е. за время от регистрации гребня 1 до регистрации гребня 2; следовательно,

$$l_2 - l_1 = \tau' v_{\text{пр}}. \quad (1^*)$$

Подставив (9.85) в (1*), получим

$$(t_2 - \tau) v_\phi - t_1 v_\phi = \tau' v_{\text{пр}}. \quad (2^*)$$

Учитывая, что $t_2 = t_1 + \tau'$, преобразуем (2*) к виду $(\tau' - \tau) v_\phi = \tau' v_{\text{пр}}$. Таким образом,

$$\tau' \left(1 - \frac{v_{\text{пр}}}{v_\phi} \right) = \tau.$$

Так как $\tau' = \frac{1}{v'}$ и $\tau = \frac{1}{v}$, получаем отсюда

$$v' = v \left(1 - \frac{v_{\text{пр}}}{v_\phi} \right). \quad (9.86)$$

Если бы приемник не удалялся от неподвижного источника, а напротив, *приближался* к нему со скоростью $v_{\text{пр}}$, то вместо (1*) следовало бы использовать соотношение

$$l_1 - l_2 = \tau' v_{\text{пр}}, \quad (3^*)$$

которое после подстановки в него (9.85) превратилось бы в соотношение $(\tau - \tau') v_\phi = \tau' v_{\text{пр}}$. Отсюда следует, что

$$v' = v \left(1 + \frac{v_{\text{пр}}}{v_\phi} \right). \quad (9.87)$$

Итак, мы убедились, что когда наблюдатель удаляется от неподвижного источника звука, он воспринимает звук частотой $\nu' < \nu$, а когда приближается к источнику, то воспринимает звук частотой $\nu' > \nu$.

9.6.3. Случаи, когда приемник звука покоится

Теперь предположим, что покоится относительно среды наблюдатель, а источник звука удаляется от него со скоростью $v_{\text{ист}}$. Казалось бы, в этом случае надо в соотношениях (9.86) и (9.87) просто заменить $v_{\text{пр}}$ на $v_{\text{ист}}$. Разве не всё равно — удаляется ли наблюдатель от неподвижного источника звука или источник удаляется с той же по модулю скоростью от неподвижного наблюдателя? Нетрудно сообразить, что отмеченные два случая различны, поскольку кроме приемника и источника звука есть также среда, по которой бегут гребни волн. Заметим, что скорость этих гребней не зависит от того, покоится или не покоится их излучатель; поэтому соотношения (9.85) справедливы как при покое, так и при движении относительно среды источника звука.

Итак, наблюдатель (приемник) *покоится* относительно среды, а источник звука *удаляется* от него со скоростью $v_{\text{ист}}$. Расстояние $l_2 - l_1$ он преодолет за время τ , т. е. за время от момента рождения гребня 1 до момента рождения гребня 2; следовательно,

$$l_2 - l_1 = \tau v_{\text{ист}}. \quad (1^*)$$

Подставив (9.85) в (1*), получим

$$(t_2 - \tau)v_{\phi} - t_1 v_{\phi} = \tau v_{\text{ист}}. \quad (2^*)$$

Поскольку $t_2 = t_1 + \tau'$, преобразуем (2*) к виду $(\tau' - \tau)v_{\phi} = \tau v_{\text{ист}}$. Таким образом,

$$\tau' = \tau \left(1 + \frac{v_{\text{ист}}}{v_{\phi}} \right).$$

Отсюда получаем

$$\nu' = \nu \frac{1}{1 + v_{\text{ист}}/v_{\phi}}. \quad (9.88)$$

Если источник приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью $v_{\text{ист}}$, то вместо (1*) надо использовать соотношение:

$$l_1 - l_2 = \tau v_{\text{пр}}. \quad (3^*)$$

В результате приходим к выражению:

$$v' = v \frac{1}{1 - v_{\text{ист}}/v_{\phi}}. \quad (9.89)$$

Задача 1. Наблюдатель приближается к неподвижному источнику звука со скоростью $v_{\text{пр}} = 120$ м/с. С какой скоростью должен был бы приближаться данный источник к неподвижному наблюдателю, чтобы регистрируемая частота звука была во столько же раз больше генерируемой частоты звука, что и в рассматриваемом случае? Скорость звука в среде $v_{\phi} = 330$ м/с.

□ Положив в (9.89) $\frac{v'}{v} = 1 + \frac{v_{\text{пр}}}{v_{\phi}}$, получим

$$1 + \frac{v_{\text{пр}}}{v_{\phi}} = \frac{1}{1 - \frac{v_{\text{ист}}}{v_{\phi}}}.$$

После соответствующих алгебраических преобразований находим отсюда искомую скорость источника звука $v_{\text{ист}} = \frac{v_{\text{пр}}v_{\phi}}{v_{\text{пр}} + v_{\phi}} = 88$ м/с.

В данном случае регистрируемая частота звука больше генерируемой частоты в $\frac{v_{\text{пр}} + v_{\phi}}{v_{\phi}} = 1,36$ раза. Это можно наблюдать, когда наблюдатель приближается к неподвижному источнику звука со скоростью 120 м/с или когда источник звука приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью 88 м/с. ■

Задача 2. Звуковая волна частотой $\nu = 6200$ Гц испускается в направлении к перпендикулярно ориентированному щиту, который удаляется от источника звука со скоростью $v = 5$ м/с. Чему равна частота волны, отраженной от щита? Скорость звука в среде $v_{\phi} = 330$ м/с.

□ В рассматриваемом случае эффект Доплера проявляется дважды. Сначала щит «ведет себя» как наблюдатель, удаляющийся со скоростью от неподвижного источника звука. В соответствии с формулой (9.86) этот «наблюдатель» зарегистрирует частоту звука

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{v_{\phi}}\right) = 6106 \text{ Гц.}$$

Именно с такой частотой возбуждятся колебания частиц щита-отражателя, который теперь становится источником отраженной волны, удаляющимся со скоростью v . Искомая частота ν'' этой волны может быть найдена, если воспользоваться формулой (9.88):

$$\nu'' = \nu' \frac{1}{1 + \frac{v}{v_\phi}} = 6015 \text{ Гц.}$$

Таким образом, *доплеровский сдвиг частоты* при отражении от удаляющейся стенки в данном случае равен

$$(6200 - 6015) \text{ Гц} = 185 \text{ Гц.} \quad \blacksquare$$

9.6.4. Случаи, когда приемник и источник звука движутся навстречу или удаляются друг от друга

Пусть приемник удаляется от источника звука, двигаясь относительно среды со скоростью $v_{\text{пр}}$, и одновременно источник удаляется от приемника, двигаясь относительно среды со скоростью $v_{\text{ист}}$. В этом случае расстояние $l_2 - l_1$ складывается из расстояния $\tau v_{\text{ист}}$, пройденного источником с момента рождения гребня 1 до момента рождения гребня 2, и расстояния $\tau' v_{\text{пр}}$, пройденного приемником от момента регистрации гребня 1 до момента регистрации гребня 2; следовательно,

$$l_2 - l_1 = \tau v_{\text{ист}} + \tau' v_{\text{пр}}. \quad (1^*)$$

Подставив (9.85) в (1*), получим:

$$(t_2 - \tau)v_\phi - t_1 v_\phi = \tau v_{\text{ист}} + \tau' v_{\text{пр}}. \quad (2^*)$$

Так как $t_2 = t_1 + \tau'$, преобразуем (2*) к виду

$$(\tau' - \tau)v_\phi = \tau v_{\text{ист}} + \tau' v_{\text{пр}}.$$

Таким образом,

$$\tau' \left(1 - \frac{v_{\text{пр}}}{v_\phi}\right) = \tau \left(1 + \frac{v_{\text{ист}}}{v_\phi}\right)$$

и, следовательно,

$$\nu' = \nu \frac{1 - v_{\text{пр}}/v_\phi}{1 + v_{\text{ист}}/v_\phi}. \quad (9.90)$$

Если приемник и источник звука движутся навстречу друг другу со скоростями, соответственно, $v_{\text{пр}}$ и $v_{\text{ист}}$, то надо в (1*) заменить $l_2 - l_1$ на $l_1 - l_2$.

В результате придем к соотношению:

$$v' = v \frac{1 + v_{\text{пр}}/v_{\text{ф}}}{1 - v_{\text{ист}}/v_{\text{ф}}}. \quad (9.91)$$

Задача 1. Рассмотрим три случая: а) источник звука покоится, наблюдатель удаляется со скоростью $\frac{v_{\text{ф}}}{2}$ ($v_{\text{ф}}$ — скорость звука в среде); б) наблюдатель покоится, источник удаляется со скоростью $\frac{v_{\text{ф}}}{2}$; в) источник и наблюдатель разбегаются со скоростями $\frac{v_{\text{ф}}}{4}$ относительно среды. Требуется найти в этих случаях отношение регистрируемой наблюдателем частоты звука к частоте звука, генерируемого источником. Найти также среди данных случаев максимальный и минимальный доплеровский сдвиг частоты, если источник генерирует звук частотой ν .

□ В случаях а, б, в, воспользуемся соответственно формулами (9.86), (9.88), (9.90) и получим:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{2} \text{ (случай а), } \frac{\nu'}{\nu} = \frac{2}{3} \text{ (случай б), } \frac{\nu'}{\nu} = \frac{3}{5} \text{ (случай в).}$$

Доплеровский сдвиг частоты $\Delta\nu = \nu - \nu'$ максимален в случае а: $\Delta\nu = \nu - \frac{1}{2}\nu = \frac{1}{2}\nu$ и минимален в случае б: $\Delta\nu = \nu - \frac{2}{3}\nu = \frac{1}{3}\nu$. ■

Задача 2. Источник звука движется навстречу наблюдателю со скоростью $v_{\text{ист}} = 60$ м/с. С какой скоростью должен при этом двигаться навстречу источнику наблюдатель, чтобы регистрируемая им частота звука оказалась в $N = 1,5$ раза больше частоты звука, генерируемого источником? Скорость звука в среде $v_{\text{ф}} = 330$ м/с.

□ Воспользуемся формулой (9.91), где примем $\frac{\nu'}{\nu} = N$. После соответствующих алгебраических преобразований находим, что искомая скорость наблюдателя должна составлять

$$v_{\text{пр}} = v_{\text{ф}}(N - 1) - Nv_{\text{ист}} = 25 \text{ м/с. } \blacksquare$$

Задача 3. Источник звука генерирует волны частотой $\nu = 10\,000$ Гц. Источник и наблюдатель движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями. Чему должна быть равна наименьшая скорость их движения, при которой наблюдатель не услышит звука? Скорость звука в среде $= 330$ м/с.

□ Наблюдатель перестанет слышать звук, как только регистрируемая частота звука достигнет нижнего порога ультразвука, т. е. достигнет значения $\nu' = 20\,000$ Гц. Обозначив через v искомую скорость и воспользовавшись формулой (9.91), где $\frac{\nu'}{\nu} = 2$, запишем

$$\frac{1 + v/v_\phi}{1 - v/v_\phi} = 2.$$

Отсюда следует, что $v = \frac{3}{5}v_\phi = 110$ м/с ≈ 400 км/ч. ■

9.6.5. Общая формула, описывающая эффект Доплера в акустике

Общая формула, описывающая эффект Доплера в акустике, имеет вид

$$\nu' = \nu \frac{1 + V_{\text{пр}}/v_\phi}{1 + V_{\text{ист}}/v_\phi}, \quad (9.92)$$

где через $V_{\text{пр}}$ и $V_{\text{ист}}$ обозначены проекции векторов $\vec{v}_{\text{пр}}$ и $\vec{v}_{\text{ист}}$ на x -ось, проходящую через приемник и источник звука в направлении от приемника к источнику, через $v_{\text{пр}}$ и $v_{\text{ист}}$ (равно как и v_ϕ) — модули этих векторов (см. формулы (9.86)—(9.91)).

Рассмотрим шесть случаев, показанных на рисунке 9.27, a — e (Пр — приемник, И — источник звука).

Из рисунка видно, что:

$$V_{\text{пр}} = -v_{\text{пр}}, \quad V_{\text{ист}} = 0 \quad \text{— случай } a;$$

$$V_{\text{пр}} = v_{\text{пр}}, \quad V_{\text{ист}} = 0 \quad \text{— случай } б;$$

$$V_{\text{пр}} = 0, \quad V_{\text{ист}} = v_{\text{ист}} \quad \text{— случай } в;$$

$$V_{\text{пр}} = 0, \quad V_{\text{ист}} = -v_{\text{ист}} \quad \text{— случай } г;$$

$$V_{\text{пр}} = -v_{\text{пр}}, \quad V_{\text{ист}} = v_{\text{ист}} \quad \text{— случай } д;$$

$$V_{\text{пр}} = v_{\text{пр}}, \quad V_{\text{ист}} = -v_{\text{ист}} \quad \text{— случай } е.$$

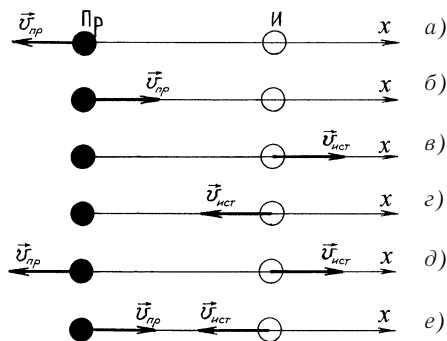


Рис. 9.27

Подставив эти соотношения в (9.92), соответственно получим для случаев *a*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* — (9.86); (9.87); (9.88); (9.89); (9.90) и (9.91).

На рисунке 9.28 представлены еще три случая (они ранее не рассматривались). В случае *a* приемник и источник звука движутся со своими скоростями по направлению *x*-оси, а в случае *б* — против направления *x*-оси. В случае *а*: $V_{\text{пр}} = v_{\text{пр}}$ и $V_{\text{ист}} = v_{\text{ист}}$; подставив в (9.92), получаем

$$v' = v \frac{1 + v_{\text{пр}}/v_{\text{ф}}}{1 + v_{\text{ист}}/v_{\text{ф}}}. \quad (9.93)$$

В случае *б*: $V_{\text{пр}} = -v_{\text{пр}}$ и $V_{\text{ист}} = -v_{\text{ист}}$; подставив в (9.92), получаем

$$v' = v \frac{1 - v_{\text{пр}}/v_{\text{ф}}}{1 - v_{\text{ист}}/v_{\text{ф}}}. \quad (9.94)$$

Если в случаях *a* и *б* окажется, что $v_{\text{пр}} = v_{\text{ист}}$, доплеровский сдвиг частоты равен нулю ($v' = v$).

Особенно интересен случай *в* на рисунке 9.28, поскольку здесь, в отличие от всех прежних случаев, векторы $\vec{v}_{\text{пр}}$ и $\vec{v}_{\text{ист}}$ составляют

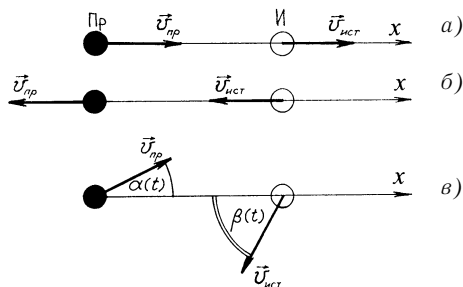


Рис. 9.28

некоторые углы с x -осью. В данном случае регистрируемая приемником частота звука будет изменяться со временем, даже если величины v , $v_{\text{пр}}$, $v_{\text{ист}}$ будут постоянными. Из рисунка видно, что для некоторого момента времени $V_{\text{пр}}(t) = v_{\text{пр}} \cos \alpha(t)$ и $V_{\text{ист}}(t) = v_{\text{ист}} \cos \beta(t)$. Подставив эти равенства в общую формулу (9.92), получим:

$$v'(t) = v \frac{1 + v_{\text{пр}} \cos \alpha(t) / v_{\text{ф}}}{1 - v_{\text{ист}} \cos \beta(t) / v_{\text{ф}}}. \quad (9.95)$$

В общем случае углы α и β изменяются со временем. Но есть ситуации, когда эти углы со временем не изменяются, оставаясь отличными от нуля. Предположим, что приемник и источник звука находятся на концах жесткого стержня, который вращается вокруг точки, произвольно выбранной на стержне. В этом случае $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ — доплеровский сдвиг частоты отсутствует. В частности, он отсутствует, если приемник движется по окружности вокруг источника или источник движется вокруг приемника.

9.7. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА И НЕКОТОРЫЕ ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

9.7.1. Принцип Гюйгенса

Современник Ньютона голландский физик Христиан Гюйгенс сформулировал в 1690 году общий принцип, описывающий поведение волн. Впоследствии этот принцип был назван *принципом Гюйгенса*. Согласно формулировке принципа, данной Гюйгенсом, *каждая точка среды, до которой дошел волновой фронт, сама становится источником вторичных волн*. Вторичные волны являются сферическими, если среда однородная. Зная положение волновой поверхности в некоторый момент времени t , можно найти ее положение в момент $t + \Delta t$, если, согласно принципу Гюйгенса, рассматривать каждую точку волновой поверхности как источник сферических вторичных волн. Искомая волновая поверхность в момент $t + \Delta t$ будет представлять собой *огibaющую волновых поверхностей вторичных волн*, каждая из которых распространилась на расстояние $v_{\text{ф}} \Delta t$.

На рисунках 9.29, а и 9.29, б толстой сплошной линией показана волновая поверхность в момент t , а пунктирной линией — волновая поверхность в момент $t + \Delta t$, построенная в соответствии с принципом Гюйгенса. Как и следовало ожидать, в однородной среде плоская волна остается плоской (рис. 9.29, а), а сферическая волна — сферической (рис. 9.29, б).

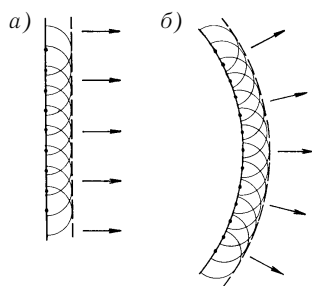


Рис. 9.29

Принцип Гюйгенса в равной мере пригоден для волн любой природы — не только механических, но и электромагнитных, в частности, световых. Гюйгенс сформулировал свой принцип, имея в виду механические волны, в том числе звуковые. В этом случае принцип Гюйгенса имеет наглядное истолкование: частицы среды, до которых доходят колебания, начинают, в свою очередь, колебаться и возбуждают колебания соседних частиц среды.

9.7.2. Закон отражения волн

Рассмотрим с помощью принципа Гюйгенса отражение плоской волны от плоской отражающей поверхности (рис. 9.30). Плоскость AC на рисунке — волновая поверхность волны, падающей на отражающую плоскость MN , а A_1A и B_1B — параллельные прямые, перпендикулярные к волновой поверхности (их называют *лучами*). Угол между падающим лучом и перпендикуляром к плоскости MN называют *углом падения*.

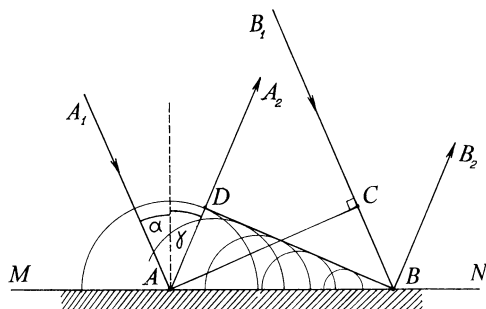


Рис. 9.30

Найдем положение волновых поверхностей отраженной волны. Различные точки волновой поверхности AC падающей волны дойдут до отражающей границы неодновременно. Возбуждение колебаний частиц среды в точке B начинается позже, чем в точке A , — через промежуток времени

$$\Delta t = \frac{CB}{v_{\phi}}; \quad (1^*)$$

оно начинается в тот момент, когда вторичная волна, распространяющаяся из точки A , будет представлять собой полусферу радиусом

$$AD = v_{\phi}\Delta t. \quad (2^*)$$

Огибающая вторичных волн, показанных на рисунке пунктиром, есть касательная к ним плоскость DB ; она как раз и представляет собой искомую *волновую поверхность отраженной волны*, а перпендикулярные к ней прямые AA_2 и BB_2 представляют собой *отраженные лучи*. Угол γ между отраженным лучом и перпендикуляром к отражающей плоскости называют *углом отражения*. Легко видеть, что

$$AD = AB\sin\gamma, \quad BC = AB\sin\alpha. \quad (3^*)$$

Из (1*) и (2*) следует, что $AD = BC$. Учитывая это, заключаем из (3*):

$$\alpha = \gamma. \quad (9.96)$$

Итак, *угол падения равен углу отражения*. Из выполненного по Гюйгенсу построения следует также, что *падающий и отраженный лучи находятся в одной плоскости с перпендикуляром, восстановленным в точке падения*. Эти два утверждения представляют собой *закон отражения волн*.

9.7.3. Закон преломления волн

Рассмотрим две однородные среды (среду 1 и среду 2), граница раздела которых есть плоскость. Обозначим через $v_{\phi 1}$ и $v_{\phi 2}$ скорости распространения волн в средах 1 и 2, соответственно. Предположим, для определенности, что $v_{\phi 1} > v_{\phi 2}$. Пусть на плоскость раздела сред падает распространяющаяся в среде 1 плоская волна, угол падения которой равен α . В общем случае эта волна частично отразится от плоскости раздела сред (угол отражения γ равен углу падения α), а частично пройдет через плоскость раздела в среду 2, испытав при этом *преломление*. Рассмот-

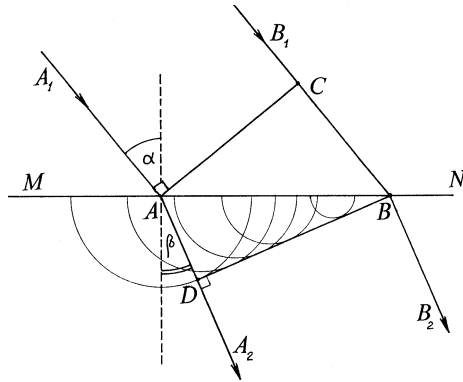


Рис. 9.31

рим преломление плоской волны, воспользовавшись принципом Гюйгенса (рис. 9.31).

Плоскость AC на рисунке есть волновая поверхность падающей волны; α — угол падения. Поверхностью раздела сред является плоскость MN . Возбуждение колебаний частиц в точке B на этой поверхности начинается позднее, чем в точке A , — через промежуток времени

$$\Delta t = \frac{CB}{v_{\phi 1}}. \quad (1^*)$$

К моменту, когда точка B только начнет генерировать вторичную волну, волна из точки A в среде 2 уже будет иметь вид полусферы радиусом

$$AD = v_{\phi 2} \Delta t. \quad (2^*)$$

Волновую поверхность *преломленной волны*, распространяющейся в среде 2, получим, проведя, в соответствии с принципом Гюйгенса, поверхность, касательную ко всем вторичным волнам в этой среде (они показаны на рисунке пунктиром). Это есть плоскость DB , а перпендикулярные к ней прямые AA_2 и BB_2 есть *преломленные лучи*. Угол β между преломленным лучом и перпендикуляром к плоскости раздела сред называют *углом преломления*.

Из (1*) и (2*) следует, что

$$\frac{CB}{AD} = \frac{v_{\phi 1}}{v_{\phi 2}}. \quad (3^*)$$

Легко видеть из рисунка, что $CB = AB \sin\alpha$ и $AD = AB \sin\beta$; поэтому

$$\frac{CB}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \quad (4^*)$$

Сопоставляя (3*) и (4*), получаем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_{\phi 1}}{v_{\phi 2}}. \quad (9.97)$$

В нашем случае $v_{\phi 1} > v_{\phi 2}$, поэтому $\alpha > \beta$. Соотношение (9.97) показывает, что преломление волн при переходе из одной среды в другую связано с различием скоростей распространения волн в этих средах.

Учитывая (9.97) и выполненные на рисунке 9.31 построения, сформулируем **закон преломления волн**:

Падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восстановленным в точке падения; при этом отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скорости падающей волны к скорости преломленной волны.

Замечание

Ни закон отражения, ни закон преломления волн, установленные на основе принципа Гюйгенса, ничего не говорят об интенсивностях отраженной и преломленной волн. Вопрос об интенсивностях волн рассмотрел спустя 130 лет французский физик Огюстен Френель для световых волн, которые ученый представлял в виде поперечных упругих волн, распространяющихся в некоем эфире. В 1823 году Френель установил зависимости интенсивностей отраженной и преломленной волн от угла падения (так называемые *формулы Френеля*). Их обсуждение выходит за рамки данной книги.

9.7.4. Возникновение звуковой ударной волны при полете сверхзвукового самолета

Предположим, что скорость источника звука v больше скорости звука v_{ϕ} в данной среде: $v > v_{\phi}$. Источник в своем движении опережает создаваемые им волны.

С такой ситуацией мы встречаемся, когда над нами пролетает сверхзвуковой самолет, т. е. самолет, имеющий скорость $v > v_{\phi}$. Если летит обычный самолет ($v < v_{\phi}$), мы сначала слышим звук

от него, а уже потом над нами пролетает он сам. При полете же сверхзвукового самолета образуется *звуковая ударная волна* в воздухе. Мы услышим не гул, а резкий громкий хлопок, похожий на взрыв. Могут даже вылететь стекла в окнах домов. Поэтому сверхзвуковые самолеты над городами не летают.

Проследим, как образуется ударная звуковая волна. Предположим, что $v = 4v_\phi$. Рассмотрим несколько последовательных положений летящего самолета, выбранных через равные промежутки времени Δt (рис. 9.32). Эти положения обозначены точками A, B, C, D . Понятно, что $AB = BC = CD = v\Delta t = 4v_\phi\Delta t$. На рисунке 9.32, *а* самолет находится в точке B . В этот момент времени фронт сферической звуковой волны, зародившейся в момент прохождения самолетом точки A , имеет вид сферы радиусом $r = v_\phi\Delta t$. На рисунке 9.32, *б* самолет находится в точке C . В этот момент фронт волны, распространяющейся из A , имеет вид сферы радиусом $2r$, а фронт волны из B — вид сферы радиусом r . На рисунке 9.32, *в* самолет находится в точке D . В этот момент фронт волны из A имеет вид сферы радиусом $3r$, волны из B — радиусом $2r$, волны из C — радиусом r .

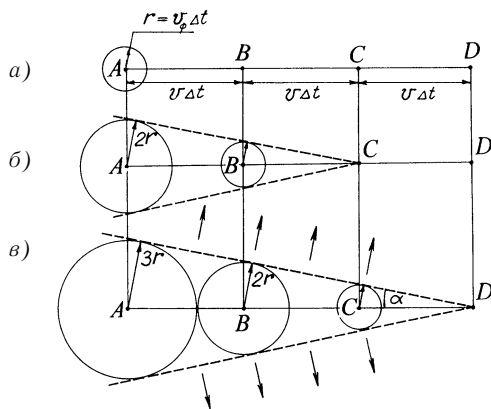


Рис. 9.32

Проведем мысленно поверхность, *огibaющую* звуковые волны, родившиеся за время полета самолета от A до D . Она представляет собой *коническую поверхность*, сечение которой плоскостью рисунка показано прямыми пунктирными линиями. Эта коническая поверхность является фронтом ударной звуковой волны; его

называют *конусом Маха* — в честь австрийского физика Эрнста Маха, специализировавшегося в области газовой динамики, акустики, оптики.

По мере движения самолета фронт ударной звуковой волны распространяется со скоростью звука по направлениям, показанным стрелками на рисунке 9.32, *в*. Как только он достигнет наблюдателя, тот услышит резкий и громкий хлопок. Чем больше скорость самолета, тем более узким будет конус Маха. Легко сообразить, что

$$\sin \alpha = \frac{v_{\Phi}}{v}. \quad (9.98)$$

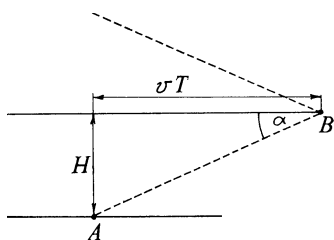


Рис. 9.33

Задача (рис. 9.33). Сверхзвуковой самолет летит горизонтально со скоростью v . Наблюдатель на поверхности Земли услышал хлопок через время T после того, как увидел самолет над головой. На какой высоте летел самолет? Скорость звука в воздухе v_{Φ} .

□ Наблюдатель находится в точке A на рисунке. Он услышит хлопок, когда самолет окажется в точке B .

Из рисунка видно, что искомая высота есть $H = vT \operatorname{tg} \alpha$. Выразим $\operatorname{tg} \alpha$ через $\sin \alpha$ и воспользуемся формулой (9.98); получим

$$H = vT \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = v_{\Phi} T \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\Phi}}{v}\right)^2}}. \quad \blacksquare$$

В данной задаче предполагалось, что свет от самолета дошел до земного наблюдателя мгновенно. На самом деле свет распространяется с конечной скоростью, но в данном случае это можно не принимать во внимание.

9.8. СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

9.8.1. Типы землетрясений

Слово «сейсмический» образовано от греческого слова *seismos*, означающего одновременно «колебание» и «землетрясение». С точки зрения физики, «трясение земли» представляет

собой колебания частиц подземных пород, распространяющиеся в виде упругих волн во все стороны от источника волн. Эти упругие волны называют *сейсмическими волнами*. По характеру источников сейсмических волн различают четыре типа землетрясений — тектонические, вулканические, техногенные, обвальные. Соответственно говорят о четырех причинах, вызывающих землетрясения.

Тектонические землетрясения возникают, когда в подземных горных породах под действием геологических сил происходят разрывы и подвижки. *Вулканические* землетрясения возникают в процессе вулканической деятельности; они могут быть связаны с переходом магмы из твердого состояния в жидкое, а также со взрывами, происходящими при извержении вулкана. *Техногенные* землетрясения — это искусственные, инициированные человеком землетрясения, возникающие при обычных или ядерных взрывах. *Обвальные* землетрясения — относительно слабые землетрясения, происходящие у самой поверхности земли в местах, где имеются подземные пустоты или горные разработки. Они возникают при обрушении сводов пещеры или шахты.

Наиболее распространены и могут оказаться наиболее разрушительными тектонические землетрясения. Ниже будем рассматривать только этот тип землетрясений.

9.8.2. Созревание и возникновение тектонического землетрясения

Кратко говоря, всякое тектоническое землетрясение *долго «созревает», а возникнув, быстро свершается*. Подробнее говоря, энергия землетрясения *постепенно накапливается* в некотором объеме подземного пространства, называемом *очагом* землетрясения; в момент возникновения землетрясения накопившаяся энергия *начинает бурно высвобождаться* в некотором месте внутри очага, называемом *фокусом*, или *гипоцентром* землетрясения, и превращается частью во внутреннюю энергию горных пород, а частью в *энергию сейсмических волн*, распространяющихся во все стороны от гипоцентра. Быстро достигнув земной поверхности, сейсмические волны производят сотрясения и разрушения, подчас весьма значительные.



Какая энергия постепенно накапливается в очаге землетрясения? Где и почему происходит внезапное высвобождение накопившейся энергии?

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо хотя бы вкратце коснуться современной теории *глобальной тектоники литосферных плит*. Согласно этой теории, земная кора (*литосфера*) не является монолитной сферической оболочкой, а состоит из ряда блоков (*литосферных плит*). В этом нет ничего удивительного, если учесть, что снаружи (со стороны космоса) ничто не давит на земную кору, тогда как изнутри на нее давит «полужидкая» и достаточно горячая *астеносфера* — поверхностный слой земной мантии. Естественно, что в таких условиях литосферная оболочка не может сохраняться монолитной; она должна потрескаться на отдельные куски. Литосферные плиты не находятся в покое. Под воздействием астеносферы (за счет внутренней энергии астеносферы) они медленно, со средней скоростью около 5 см/год, *перемещаются* по ней. Там, где литосферные плиты трутся друг о друга или надвигаются одна на другую, возникают разломы, образуются горные хребты, извергаются вулканы, происходят землетрясения.



На рисунке 9.34 показаны литосферные плиты: 1 — Тихоокеанская, 2 — Североамериканская, 3 — Евразийская, 4 — Африканская, 5 — Южноамериканская, 6 — Индо-Австралийская, 7 — Антарктическая, 8 — Наска, 9 — Сомалийская, 10 — Китайская, 11 — Амурская, 12 — Тибетская, 13 — Аравийская, 14 — Филиппинская, 15 — Охотская, 16 — Иранская, 17 — Карибская, 18 — Кокос. Точки и пятна — места тектонических

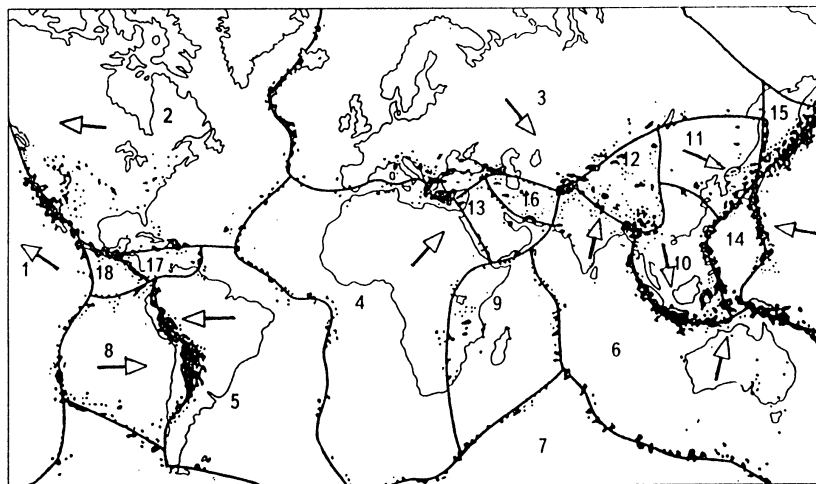


Рис. 9.34

землетрясений, наблюдавшихся в течение последней четверти XX столетия; они наглядно обозначают границы литосферных плит. Стрелками отмечены направления движения некоторых литосферных плит. Отодвигание плит друг от друга (например, плит 5 и 4 или 1 и 8) происходит за счет того, что края этих плит все время нарастают вследствие извержения подводных вулканов, цепью протянувшихся вдоль границы между плитами. При сближении плит (например, плит 8 и 5 или 6 и 3) края одной из них как бы ныряют под края другой, приподнимая и сминая их.

Рисунок 9.34 позволяет указать *области повышенной сейсмичности* на земном шаре, т. е. области, где относительно часто происходят тектонические землетрясения. Эти области располагаются вдоль границ литосферных плит и образуют на суше два сейсмически активных пояса: *Тихоокеанский* (он кольцом охватывает берега Тихого океана) и *Средиземноморский* (он простирается через юг Европы и доходит на востоке до Малайского архипелага).

Итак, очаги наиболее значительных тектонических землетрясений возникают время от времени в сейсмически активных поясах — в тех местах, где в данное время начинает возрастать сила взаимодействия краев соседних литосферных плит. В подобных местах происходит *деформация* горных пород, находящихся вблизи контактирующих краев плит. Кинетическая энергия плит частично превращается здесь в *постепенно накапливающуюся потенциальную энергию упругой деформации*. Процесс постепенного накопления энергии деформации как раз и есть процесс созревания тектонического землетрясения. Он может протекать достаточно долго, постепенно увеличивая размеры очага землетрясения.

Но возрастание механического напряжения в очаге землетрясения не может продолжаться сколь угодно долго. Как только в каком-то месте очага (в гиперцентре землетрясения) будет превзойдена прочность горной породы, *там произойдет разрыв породы*, который быстро распространится от гипоцентра в пределах напряженной области (области очага).

Разрыв подземных пород геологи называют *разломом*. Различают три основных типа геологических разломов. Растягивающие усилия могут привести к тому, что некоторый объем породы соскользнет вниз — возникнет разлом, называемый *нормальным сбросом* (рис. 9.35, а). При сжатии часть породы может быть «выдавлена» вверх, такой разлом называют *обращенным сбросом* (рис. 9.35, б). Возможно также перемещение одного объема породы относительно другого при наличии

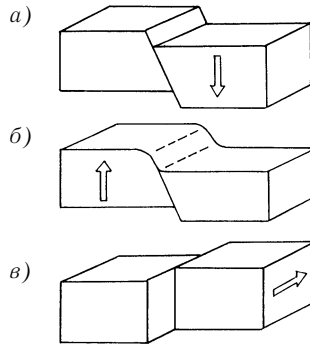


Рис. 9.35

сдвигающих усилий; в этом случае говорят о *поперечном сбросе* (рис. 9.35, в).

Как только образуется разлом, накопившаяся в очаге огромная энергия *деформации высвобождается и превращается частично в энергию сейсмических волн*, которые побегут во все стороны от гипоцентра землетрясения. Долго «созревавшее» землетрясение, наконец, свершилось. После высвобождения энергии деформации механическое напряжение в очаге снимается (или, по крайней мере, снижается), и землетрясение прекращается.

Сегодняшняя литосфера Земли характеризуется богатством и разнообразием разломов — от глубинных разломов, идущих по краям литосферных плит, до разломов в пределах плит и далее — до неглубоких разломов в приповерхностных областях земной коры. Первопричиной тектонических землетрясений являются в первую очередь и главным образом глубинные разломы, идущие по краям литосферных плит.

В заключение заметим, что не следует путать гипоцентр (фокус) землетрясения с его эпицентром. *Эпицентр* землетрясения есть точка на поверхности земли, находящаяся непосредственно над гипоцентром. В эпицентре наблюдаются наиболее серьезные разрушения, вызванные сейсмическими волнами, пришедшими из гипоцентра. *Глубина гипоцентра*, иначе говоря, расстояние от гипоцентра до эпицентра, — одна из важнейших характеристик землетрясения. Она может достигать 700 км. Землетрясения с глубиной гипоцентра (фокуса) от 700 до 300 км называют *глубокофокусными*, с глубиной от 300 км до 70 км — *промежуточными*, с глубиной до 70 км — *мелкофокусными*.

9.8.3. Сейсмические волны, возникающие при землетрясении

Различают сейсмические волны *объемного типа* и *поверхностного типа*. Из очага землетрясения распространяются во все стороны волны объемного типа. По достижении земной поверхности они, во-первых, испытывают отражение и, во-вторых, возбуждают волны *поверхностного типа*, которые распространяются вдоль поверхности земли, не проникая в глубину более, чем на несколько десятков километров.

Существуют *продольные* и *поперечные* волны объемного типа. Продольные волны называют также *первичными волнами*, или *P-волнами* (рис. 9.36, а), а поперечные волны — *вторичными волнами*, или *S-волнами* (рис. 9.36, б). У гранита (одной из основных горных пород континентальной коры) модуль Юнга $E = 8 \cdot 10^{10}$ Па,

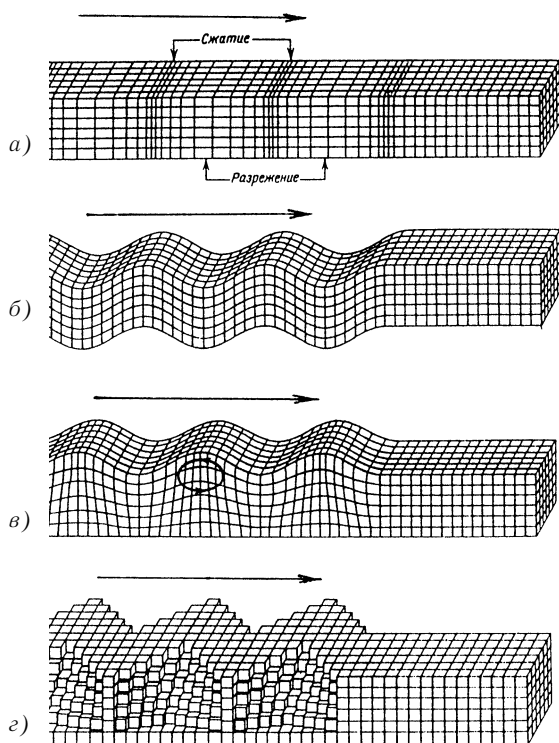


Рис. 9.36

модуль сдвига $G = 3 \cdot 10^{10}$ Па, средняя плотность $\rho = 2600$ кг/м³. Поэтому в граните скорость P -волны равна $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5,5$ км/с, а скорость S -волны равна $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3,4$ км/с. Можно приближенно считать, что таковы скорости P -волны и S -волны вблизи земной поверхности на суше.

С глубиной скорость сейсмических волн возрастает несмотря на то, что с ростом давления увеличивается плотность горных пород. Дело в том, что с глубиной модули упругости среды растут быстрее, чем плотность. Существенную роль играет при этом возрастание с глубиной температуры недр. Увеличение с глубиной скорости P -волны и S -волны показано на рисунке 9.38, б (см. п. 9.8.6).



Обратим внимание на то, что на всех глубинах вплоть до 2900 км скорость P -волны примерно в 1,6—1,8 раза больше скорости S -волны. Следовательно, из очага землетрясения в эпицентр раньше приходит P -волна и лишь несколько позднее S -волна. Этим и объясняются названия волн «первичная» и «вторичная». Пришедшая относительно интенсивная P -волна производит действие, похожее на удар воздушной волны, вызывающей грохот и треск стекол в окнах. Спустя время, измеряемое секундами, приходит S -волна, которая раскачивает всё на своем пути из стороны в сторону и смещает поверхность грунта как по вертикали, так и по горизонтали. Повреждения и разрушения, вызываемые S -волной, значительно больше по сравнению с P -волной.

Измерив по характеру сейсмограммы разницу Δt времен прихода в эпицентр P -волны и S -волны, можно оценить глубину H фокуса данного землетрясения. Пусть v_1 — скорость P -волны, а v_2 — скорость S -волны, тогда получим

$$H = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \Delta t. \quad (9.99)$$

Встречая на своем пути от очага к поверхности слои пород с отличающимися свойствами, сейсмические волны объемного типа *отражаются* и *преломляются*. Строго говоря, преломление (иначе говоря, рефракция) волн происходит при любых изменениях в пространстве среди ее модулей упругости и плотности; частичное отражение энергии волн происходит при достаточно резких изменениях свойств среды.

Сейсмические волны поверхностного типа (их называют также *L-волнами*) делятся на два вида — *волны Рэлея* (рис. 9.36, в) и *волны Лява* (рис. 9.36, г). Они названы так по именам

ученых, разработавших теорию распространения таких волн. Как можно видеть из рисунка 9.36, *в*, волны Рэлея подобны волнам на поверхности воды — частицы среды движутся в вертикальной плоскости, описывая эллипсы. Из рисунка 9.36, *г* видно, что волны Лява являются, по сути дела, поперечными волнами без вертикальных смещений; они заставляют частицы среды колебаться в горизонтальной плоскости под прямым углом к направлению своего распространения. Сейсмические волны поверхностного типа, как правило, оказываются наиболее разрушительными.

9.8.4. Оценка «силы землетрясения»: баллы и магнитуда

Представим, что где-то произошло мощное землетрясение, и телекомментатор сообщает: «Сила землетрясения составила 7,5 балла по шкале Рихтера». С точки зрения сейсмолога, эта фраза не имеет смысла. Дело не в том, что «сила землетрясения» не имеет никакого отношения к физической величине, называемой «силой» и выражаемой в ньютонах. Понятно, что слова «сила землетрясения» следует воспринимать как характеристику мощи землетрясения, степени его разрушительности. Процитированная фраза не имеет смысла, поскольку по *шкале Рихтера* (шкале, предложенной в 1935 году американским сейсмологом Чарльзом Рихтером) измеряют «силу землетрясения» не в баллах, а в значениях специальной безразмерной величины — так называемой *магнитуды* (магнит здесь не при чем; по-латыни *magitudo* есть просто «величина»). А в *баллах* (притом целочисленных) измеряют «силу землетрясения» не по шкале Рихтера, а по одной из специальных балльных шкал; например, по принятой сегодня в России и многих европейских странах 12-балльной шкале Медведева—Шпонхойера—Карника (по так называемой шкале MSK-64). У сейсмолога не было бы возражений, если бы телекомментатор сообщил: «Сила землетрясения имела магнитуду 7,5 по шкале Рихтера» или: «Сила землетрясения составила около 7 баллов по шкале MSK-64». Обе эти фразы имеют определенный смысл. Однако смысл этих фраз различен.

Обсудим сначала смысл балльных шкал. Баллы — это выражение с помощью римских цифр качественной оценки «силы землетрясения» по характеру и степени сотрясений и разрушений, *наблюдаемых на поверхности земли в эпицентре землетрясения*. В данном случае мы не выясняем, на какой глубине находился фокус землетрясения и как велика энергия деформации подземных пород,

превратившаяся в энергию сейсмических волн. Мы судим о «силе землетрясения» только по результатам, наблюдаемым на поверхности земли в эпицентре.

Для оценки силы землетрясения используется 12-балльная шкала MSK-64 (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Землетрясение	Число баллов	Что происходит
Слабое	I	Сотрясения почвы улавливают только сейсмографы.
	II	Ощущается людьми, лежащими в постели.
	III	Слегка качаются люстры.
	IV	Звенят оконные стекла и посуда.
Сильное	V	Выплескивается вода из чашки, раскачиваются висящие предметы, осыпается побелка в домах.
	VI	Лопаются стекла в окнах, трескается штукатурка и кирпичная кладка, сдвигается с места мебель.
	VII	Появляются крупные трещины в стенках, отламываются куски штукатурки, падают кирпичи, трудно стоять на ногах.
	VIII	Падают карнизы, балконы, дымовые трубы, трудно вести автомобиль, на склонах гор появляются оползни и трещины.
	IX	Происходят обвалы зданий, а также обвалы и оползни в горах, вести автомобиль практически невозможно.
Разрушительное	X	Разрушены многие здания, серьезно повреждены плотины, рушатся мосты, деформируются железнодорожные пути, возникают мощные оползни.
	XI	На поверхности земли образуются многочисленные и широкие (до метра и больше) трещины и вертикальные перемещения по ним, наблюдается общее разрушение зданий.
	XII	Происходит изменение рельефа местности, огромные обвалы и оползни, глубокие и широкие трещины и провалы, разрушаются крупные сооружения, изменяются русла рек.

Чем дальше от эпицентра, тем меньшим количеством баллов оценивается «сила землетрясения». Наибольшее для данного землетрясения количество баллов (допустим, это VIII баллов) фикси-

руют в пределах некоторого участка поверхности вокруг эпицентра. Этот участок обводят на карте-плане плавной замкнутой кривой, которую называют *изосейстом*. Вокруг этого изосейста описывают следующий изосейст, очерчивающий территорию, в пределах которой «сила землетрясения» не менее VII баллов. Третий изосейст очерчивает территорию, в пределах которой «сила землетрясения» не менее VI баллов. И так далее. В результате сейсмологи получают *картину изосейстов* данного землетрясения.

Теперь обсудим смысл шкалы магнитуд (шкалы Рихтера). *Магнитуда характеризует энергию деформации пород внутри очага, выделяющуюся в виде сейсмических волн* (так называемую *энергию землетрясения*). Энергия землетрясения W связана с магнитудой M соотношением:

$$M = \frac{2}{3} \lg W - 3. \quad (9.100)$$

Здесь \lg — десятичный логарифм, энергия W выражается в джоулях. На практике магнитуду данного землетрясения определяют, измеряя, во-первых, максимальную амплитуду колебаний, записанных сейсмографом, находящимся на некотором расстоянии от эпицентра, и, во-вторых, интервал времени между приходом к данному сейсмографу P -волны и S -волны (этот интервал позволяет определить расстояние от сейсмографа до фокуса землетрясения). Измерив магнитуду и используя (9.100), вычисляют энергию землетрясения.

Из (9.100) видно, что, например, магнитуде $M = 3,0$ соответствует $\lg W = 9$ и, следовательно, $W = 10^9$ Дж. Как видно из (9.100), наименьшего и наибольшего значений магнитуды не существует: $-\infty < M < \infty$. Однако магнитуду принято отсчитывать от $M = 0$,

что соответствует энергии землетрясения $W = 10^{\frac{9}{2}}$ Дж = $\sqrt{10^9}$ Дж $\approx 3 \cdot 10^4$ Дж. Такая энергия высвобождается при падении камня массой 500 кг с высоты 6 м. Подобное землетрясение может зарегистрировать лишь очень точный сейсмограф. Поэтому нет смысла рассматривать магнитуды $M < 0$. Верхней границей шкалы магнитуд принято считать значение $M = 9,5$. Ему соответствует энергия $W \approx 10^{19}$ Дж. Дело в том, что горные породы не могут накопить энергии более примерно 10^{19} Дж без разрушения и, значит, землетрясения на Земле не могут иметь магнитуду больше 9,5. Сейсмические процессы, характеризующиеся большей энергией, чем 10^{19} Дж, могут быть вызваны лишь столкновением с Землей астероида.

Итак, шкала магнитуд рассматривается на отрезке $0 \leq M \leq 9,5$. Пусть $M_1 = \frac{2}{3} \lg W_1 - 3$ и $M_2 = \frac{2}{3} \lg W_2 - 3$. Легко видеть, что

$$M_2 - M_1 = \frac{2}{3} \lg \frac{W_2}{W_1}. \quad (1^*)$$

Предположим, что $M_2 - M_1 = 1$. Из (1*) получаем $\lg \frac{W_2}{W_1} = \frac{3}{2}$

и, следовательно, $\frac{W_2}{W_1} = \sqrt{10^3} \approx 30$. Таким образом, *увеличению энергии землетрясения в 30 раз соответствует увеличение магнитуды на единицу.*

По оценкам сейсмологов, ежегодно на Земле происходят в среднем одно землетрясение с магнитудой от 8,0, десять землетрясений с магнитудой от 7,0 до 7,9, сто — с магнитудой от 6,0 до 6,9, тысяча — с магнитудой от 5,0 до 5,9.

9.8.5. Связь между значением магнитуды, глубиной гипоцентра землетрясения и количеством баллов в эпицентре

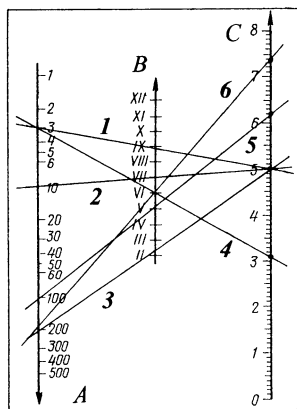


Рис. 9.37

Эта связь может быть прослежена, если воспользоваться номограммой, представленной на рисунке 9.37. Здесь изображены три параллельные шкалы: *A* — глубина гипоцентра в километрах (шкала логарифмическая), *B* — количество баллов, характеризующее степень сотрясений и разрушений в эпицентре, *C* — магнитуда землетрясения. Масштаб шкал и их относительное расположение на номограмме подобраны таким образом, что если провести прямую через точку на шкале *A*, соответствующую глубине гипоцентра, и точку на шкале *C*, соответствующую значению магнитуды, то пересечение указанной прямой

со шкалой *B* укажет балльность данного землетрясения, оцениваемую в его эпицентре.

Предположим, энергия землетрясения W соответствует магнитуде $M = 5,0$. Воспользовавшись соотношением (9.100), находим

$W = 10^{12}$ Дж. Заметим, что именно такова, по оценке специалистов, энергия, выделившаяся при взрыве атомной бомбы на атолле Бикини в 1946 году. Это позволяет заключить, что землетрясение с магнитудой 5,0 — достаточно мощное землетрясение. Однако оцениваемая по степени разрушений в эпицентре балльность этого землетрясения будет разной при разных значениях глубины гипоцентра. Используя номограмму на рисунке 9.37, получаем следующие количества баллов:

IX баллов для глубины гипоцентра 3 км (прямая А);

VII баллов для глубины гипоцентра 10 км (прямая В);

II балла для глубины гипоцентра 200 км (прямая С).

Итак, если мощное землетрясение зародилось на глубине 200 км, то оно будет ощущаться в эпицентре разве что людьми, лежащими в постели, не более того. Если такая же энергия высвободилась на глубине 3 км, то в эпицентре произойдут обвалы зданий.

Задача 1. Характеристики первого землетрясения: магнитуда 3,1, глубина гипоцентра 3 км; второго землетрясения: магнитуда 6,2, глубина гипоцентра 100 км. Требуется сравнить балльности этих землетрясений в их эпицентрах.

□ Используя номограмму на рисунке 9.37 находим, что первое землетрясение имеет балльность VI (прямая 4), а второе — балльность V (прямая 5). В данном случае землетрясение с меньшей магнитудой оказывается разрушительнее землетрясения с большей магнитудой. ■

Задача 2. Сейсмограф, находящийся на расстоянии $L = 100$ км от эпицентра землетрясения, зарегистрировал интервал $\Delta t = 24$ с между временами прихода P -волны и S -волны. Используя этот результат и измерив максимальную амплитуду колебаний на сейсмограмме, сейсмолог заключил, что магнитуда землетрясения равна $M = 7,4$. Скорость P -волны $v_1 = 5,5$ км/с, скорость S -волны $v_2 = 3,4$ км/с. Требуется оценить балльность данного землетрясения в его эпицентре.

□ Обозначим через H глубину гипоцентра. Зная Δt , можно найти расстояние от гипоцентра до сейсмографа, т. е. величину $\sqrt{H^2 + L^2}$. Именно эту величину надо подставить в (9.99) вместо H ; таким образом, $\sqrt{H^2 + L^2} = \frac{v_1 v_2 \Delta t}{v_1 - v_2} = 214$ км. Так как $L = 100$ км, то, следовательно, $H = 190$ км. Зная глубину гипоцентра H и магнитуду M , находим с помощью номограммы на рисунке 9.37 количество баллов в эпицентре; оно равно VI баллам (прямая 6). ■

9.8.6. Сейсмическое прослушивание земного шара

Центр земного шара находится на глубине 6370 км от поверхности. Глубины от 6370 км до 5100 км заполнены твердым веществом *внутреннего ядра* плотностью около 12 000 кг/м³. Далее — от 5100 км до 2900 км — находится жидкое *внешнее ядро*. Ядро окружено *мантией*, которая на глубинах от 2900 км до 300 км находится в твердом состоянии, а на глубинах от 300 км до 100 км — в вязком, «полужидком» состоянии (этот шаровой слой мантии называют *астеноферой*). На глубине около 50 км проходит нижняя граница земной коры, отделяющая ее от мантии, — *граница Моховичича* (названа в честь хорватского геофизика Андрея Моховичича).

Все отмеченные выше данные о внутреннем строении земного шара получены на основе *сейсмического прослушивания земных недр*. В той или иной точке на поверхности Земли производят взрыв, иначе говоря, устраивают искусственное землетрясение, а в ряде специально подбираемых точек земной поверхности устанавливают весьма чувствительные сейсмографы, которые улавливают сейсмические волны, родившиеся в точке взрыва и проделавшие определенный путь внутри земных недр. Один из основателей сейсмологии российский ученый Борис Борисович Голицын говорил: «*Можно уподобить взрыв или землетрясение фонарю, который зажигается на короткое время и освещает нам внутренность Земли, позволяя тем самым рассмотреть то, что там происходит*».

На рисунке 9.38 показаны полученные сейсмологами и геофизиками скорости сейсмических *P*-волн и *S*-волн в зависимости

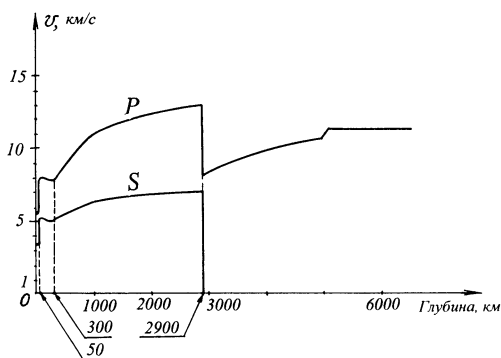


Рис. 9.38

ти от глубины. Первый скачок скорости обеих волн наблюдается на границе Мохоровичича — там, где кончается базальтовая «подстилка» земной коры. Ниже этой границы скорость волн сначала не растет с глубиной, а в области вязкой астеносферы даже немного уменьшается. При переходе волн из астеносферы в твердую мантию скорость с глубиной снова начинает расти, достигая на глубине 2900 км значения 13 км/с для P -волн и 7 км/с для S -волн. Здесь твердая мантия сменяется жидкой массой внешнего ядра, поэтому S -волны, будучи поперечными волнами, далее не распространяются, а скорость P -волн падает скачком до значения 8 км/с. По мере дальнейшего углубления скорость P -волн снова начинает возрастать — вплоть до глубины 5100 км, с которой начинается твердое внутреннее ядро земного шара.



Обратим внимание: по мере погружения в недра Земли и приближения к ее центру твердое вещество подземных пород сначала «размягчается», затем снова твердеет, потом становится жидким (несмотря на огромное давление!) и, наконец, опять затвердевает. Физическое объяснение такой картины отложим до рассмотрения тепловых явлений.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

9.1. Сравните энергии, переносимые плоскими бегущими волнами, имеющими одинаковые амплитуды, но различающимися в 3 раза длиной волны.

9.2. Укажите две причины, которые обуславливают уменьшение амплитуды волны на поверхности воды по мере ее удаления от источника.

9.3. С использованием единиц физических величин в СИ уравнение плоской волны имеет вид:

$$\xi(t, x) = 5 \cdot 10^{-6} \sin(1800t - 6x).$$

Чему равны амплитуда и фазовая скорость волны, а так-

же период колебаний ее источника?

9.4. Используя условие задачи 9.3, найдите расстояние между ближайшими точками волны, колеблющимися в противофазе.

9.5. Используя условие задачи 9.3, найдите интенсивность волны, полагая, что плотность среды равна $4 \cdot 10^3$ кг/м³.

9.6. Напишите уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении x -оси, если известно, что в точке $x = 0$ смещение частиц среды в момент $t = 0$ равно амплитуде волны ξ_m . Цикли-

ческая частота и волновое число равны, соответственно, ω и k .

9.7. Как зависит от времени и x -координаты скорость, с какой совершают колебания частицы среды в волне, уравнение которой было получено в задаче 9.6?

9.8. По среде плотностью ρ распространяется продольная плоская волна, характеризующаяся длиной λ и циклической частотой ω . Чему равен модуль Юнга такой среды?

9.9. По среде, характеризующейся плотностью ρ и модулем Юнга E , распространяется продольная плоская волна амплитудой ξ_m . Период колебаний источника волны τ . Чему равны: а) интенсивность волны; б) длина волны?

9.10. По среде распространяется плоская волна, характеризующаяся амплитудой ξ_m , циклической частотой ω , волновым числом k . Чему равны модули скорости $|v|$ и относительной деформации $|\epsilon|$ частиц среды на расстоянии: а) $\frac{\pi}{4k}$ от положения равновесия частиц среды; б) $\frac{\pi}{6k}$ от положения, соответствующего максимуму смещения частиц среды?

Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 9.9.

9.11. По среде плотностью ρ распространяется плоская волна, характеризующаяся амплитудой ξ_m , циклической частотой

ω , волновым числом k . Чему равна плотность механической энергии волны на расстоянии от положения равновесия частиц среды, равном: а) $\frac{\pi}{8k}$; б) $\frac{\pi}{4k}$;

в) $\frac{3\pi}{8k}$?

Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 9.10.

9.12. Стоячая волна образована сложением плоских бегущих волн, имеющих циклическую частоту ω и модуль фазовой скорости v_ϕ . Чему равно расстояние между соседними узлами стоячей волны?

9.13. Амплитуда колебаний частиц среды в пучности стоячей волны равна $2\xi_m$. Длина волны λ . Чему равна амплитуда колебаний частиц среды на расстоянии от узла стоячей волны, равном:

а) $\frac{\lambda}{6}$; б) $\frac{\lambda}{8}$; в) $\frac{\lambda}{12}$?

Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 9.12.

9.14. Используя условие задачи 9.13, найдите максимальное значение относительной деформации частиц среды на расстоянии от узла стоячей волны, равном: а) $\frac{\lambda}{12}$; б) $\frac{\lambda}{8}$; в) $\frac{\lambda}{6}$; г) $\frac{\lambda}{4}$.

Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 9.13, в.

9.15. В момент $t = 0$ плотность кинетической энергии в пучности стоячей волны равна ξ_0 . Циклическая частота волны ω . Чему равна плот-

ность кинетической энергии в пучности стоячей волны в моменты:

- а) $\frac{\pi}{8\omega}$; б) $\frac{\pi}{4\omega}$; в) $\frac{3\pi}{8\omega}$; г) $\frac{\pi}{2\omega}$?

Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 9.14.

9.16. В среде плотностью ρ образовалась плоская стоячая волна, характеризующаяся амплитудой $2\xi_m$ и циклической частотой ω . В момент $t = 0$ плотность механической энергии в пучности стоячей волны равна $\frac{1}{2}\rho\xi_m^2\omega^2$. Чему она будет

равна в моменты: а) $\frac{\pi}{2\omega}$; б) $\frac{3\pi}{4\omega}$;

- в) $\frac{\pi}{\omega}$?

Подсказка. Воспользуйтесь рисунком 9.15.

9.17. Сколько двуполосных гиперболоидов вращения, являющихся поверхностями с интерференционными максимумами, возникает при интерференции от двух синфазно колеблющихся точечных источников волн, расположенных на расстоянии $d = \frac{7\lambda}{2}$

друг от друга? Здесь λ — длина волны генерируемой каждым источником.

9.18. Дополните предыдущую задачу заданием найти для гиперболоидов расстояния от фокуса гиперболоида до точки его пересечения с отрезком прямой, соединяющим источники волн.

9.19. Рассматриваем участок железнодорожного пути длиной $L = 850$ м. На одном конце участка резко и сильно ударяем по рельсу молотком. На другом конце участка находится наблюдатель, который с помощью секундомера регистрирует два удара, разделенные во времени на $\Delta t = 2,4$ с. Скорость звука в воздухе $v_\phi = 330$ м/с. Используя результаты данного опыта, оцените скорость звука в рельсовой стали.

9.20. Источник звука генерирует звуковую волну частотой $\nu = 26$ Гц. С какой наименьшей скоростью должен удаляться источник звука от наблюдателя, чтобы тот не услышал звука? Нижняя граница частотного диапазона, воспринимаемого ухом человека, равна $\nu_0 = 16$ Гц. Скорость звука в воздухе $v_\phi = 330$ м/с.

9.21. Изменим условие предыдущей задачи, предположив, что теперь источник звука покоится, а наблюдатель удаляется от него. С какой наименьшей скоростью он должен удаляться, чтобы не слышать звука?

9.22. В момент $t = 0$ наблюдатель начинает удаляться от источника звука с ускорением \vec{a} , направленным от источника. Частота звука, генерируемого источником, равна ν ; скорость звука в воздухе v_ϕ . Как будет изменяться со временем частота

та звука, регистрируемая наблюдателем?

9.23. Источник звука генерирует звуковую волну частотой ν и движется от A к B мимо покоящегося наблюдателя, находящегося в точке C (рис. 9.39); $AD = DB = DC$. Какую

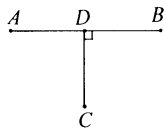


Рис. 9.39

частоту зарегистрирует наблюдатель в моменты, когда источник звука находится:

- а) в точке A ; б) в точке D ;
- в) в точке B ?

9.24. Сверхзвуковой самолет летит со скоростью $v = 990$ м/с по восходящей прямой, составляющей угол $\beta = 20^\circ$ с горизонтом. Находящийся на поверхности Земли наблюдатель услышал хлопок через время $T = 4$ с после того, как увидел самолет над головой. На какой высоте находился самолет в тот момент, когда его увидел над собой наблюдатель? Скорость звука в воздухе $v_\phi = 330$ м/с.

9.25. Решите предыдущую задачу, рассматривая более простую ситуацию — когда сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Сравните результат с результатом, полученным в предыдущей задаче.

А. ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

А.1. Основные тригонометрические тождества

Рассматривая *синус*, *косинус*, *тангенс*, *котангенс* как *отношения определенных сторон в прямоугольном треугольнике с острым углом α* , получим:

синус угла α ($\sin \alpha$) есть отношение катета, противолежащего углу α , к гипотенузе треугольника;

косинус угла α ($\cos \alpha$) есть отношение прилежащего катета к гипотенузе треугольника;

тангенс угла α ($\operatorname{tg} \alpha$) есть отношение противолежащего углу α катета к прилежащему;

котангенс угла α ($\operatorname{ctg} \alpha$) есть отношение прилежащего катета к противолежащему.

Используя рисунок А.1, запишем:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (\text{A.1})$$

Из (А.1) и соотношения $a^2 + b^2 = c^2$ получаем тригонометрические тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (\text{A.2a})$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad (\text{A.2б})$$

Используя рисунок А.1 и учитывая (А.1), находим следующую группу тригонометрических тождеств:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), & \cos \alpha &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), & \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

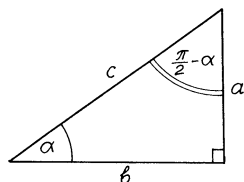


Рис. А.1

Здесь углы выражаются не в градусах, а в *радианах*, т. е. отношениях дуги, соответствующей данному углу, к радиусу; угол в 90° равен $\frac{\pi}{2}$ в радианах.

В приведенной таблице даны значения тригонометрических функций некоторых углов. (Эти значения легко получить, рассматривая соответствующие прямоугольные треугольники.)

Функция	Аргумент				
	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

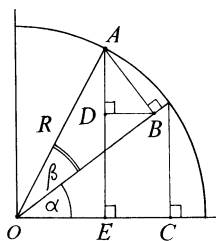


Рис. А.2

Используя рисунок А.2, можно вывести формулы для синуса и косинуса двух углов (α и β):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (\text{A.4})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (\text{A.5})$$

Приведем вывод. Из A опускаем на стороны угла α перпендикуляры AE и AB . Из B опускаем перпендикуляры, во-первых, на AE (перпендикуляр BD) и, во-вторых, на сторону угла α (перпендикуляр BC). Легко видеть, что

$$AE = R \sin(\alpha + \beta) = AD + DE;$$

$$AD = AB \cos \alpha = (R \sin \beta) \cos \alpha;$$

$$DE = BC = OB \sin \alpha = (R \cos \beta) \sin \alpha.$$

Подставив AD и DE в соотношение для AE , получим формулу (А.4).

Из рисунка А.2 видно также, что

$$\begin{aligned} OE &= R\cos(\alpha + \beta) = OC - EC; \\ OC &= OB\cos\alpha = (R\cos\beta)\cos\alpha; \\ EC &= DB = AB\sin\alpha = (R\sin\beta)\sin\alpha. \end{aligned}$$

Подставив OC и EC в соотношение для OE , получим формулу (А.5).

Используя рисунок А.3, можно вывести формулы для синуса и косинуса разности двух углов (α и β):

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta; \quad (\text{А.6})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \quad (\text{А.7})$$

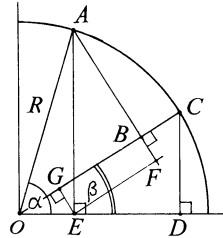


Рис. А.3

Приведем вывод. Из A опускаем на стороны угла β перпендикуляры AE и AB . Из C опускаем на сторону угла β перпендикуляр CD , а из E опускаем на сторону угла β перпендикуляр EG . Из E проводим прямую, параллельную OC , до ее пересечения с продолжением перпендикуляра AB ; F — точка пересечения. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} AB &= R\sin(\alpha - \beta) = AF - BF; \\ AF &= AE\cos\beta = (R\sin\alpha)\cos\beta. \end{aligned}$$

Чтобы найти BF , рассмотрим треугольники OCD и OEG . Они подобные, поэтому $\frac{GE}{OE} = \frac{CD}{OC}$. Поскольку $GE = BF$, $OE = R\cos\alpha$, $CD = R\sin\beta$, $OC = R$,

написанную выше пропорцию можно переписать так: $\frac{BF}{R\cos\alpha} = \frac{R\sin\beta}{R}$. Таким образом, $BF = R\cos\alpha \sin\beta$. Подставив AF и BF в соотношение для AB , получим формулу (А.6).

Из рисунка А.3 видно также, что

$$\begin{aligned} OB &= R\cos(\alpha - \beta) = OG + GB; \\ OG &= OE\cos\beta = (R\cos\alpha)\cos\beta; \\ GB &= EF = AE\sin\beta = (R\sin\alpha)\sin\beta. \end{aligned}$$

Подставив OG и GB в соотношение для OB , получим формулу (А.7).

Из (А.4), (А.5) следует, соответственно, что

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha; \quad (\text{А.8})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \quad (\text{А.9})$$

Учитывая, что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, находим из (A.9):

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad (\text{A.10})$$

Разделив правую половину равенств (A.8), (A.9) на $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, соответственно получим:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad (\text{A.11})$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (\text{A.12})$$

Используя (A.4), (A.5), (A.2б), находим формулу для тангенса суммы двух углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (\text{A.13})$$

а используя (A.6), (A.7), (A.2б) — формулу для тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{A.14})$$

Из (A.13) следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (\text{A.15})$$

Этот результат может быть получен также, если разделить (A.11) на (A.12).

Рассмотрим сумму синусов двух углов: $\sin \alpha + \sin \beta$. Очевидно, что α и β можно представить в виде:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Поэтому запишем, с учетом (A.4) и (A.6):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \end{aligned} \quad (1^*)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned} \quad (2^*)$$

Складывая равенства (1*) и (2*), получим тригонометрическое тождество:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{A.16})$$

Вычитая равенство (2*) из (1*), получим тождество:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{A.17})$$

Так как $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ и $\cos \beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$, то, согласно (A.16), $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\pi - (\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$. С учетом (A.3), получаем

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Используя аналогичные рассуждения, находим

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (\text{A.19})$$

А.2. Тригонометрические функции

Используя (A.1) изобразим графически, как изменяются величины $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если угол α увеличивается от нуля до $\frac{\pi}{2}$. В этом случае указанные величины *становятся функциями угла α , заданными на конечном промежутке:*

на отрезке $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ для функций $y = \sin \alpha$ и $y = \cos \alpha$,

на полуинтервале $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ для функции $y = \operatorname{tg} \alpha$,

на полуинтервале $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ для функции $y = \operatorname{ctg} \alpha$.

Графики этих тригонометрических функций на промежутке от нуля до $\frac{\pi}{2}$ представлены на рисунке А.4.

Однако *естественная область определения* тригонометрических функций не ограничена отрезком или полуинтервалом от нуля до $\frac{\pi}{2}$. Она охватывает всю числовую ось — от $-\infty$ до $+\infty$. Как

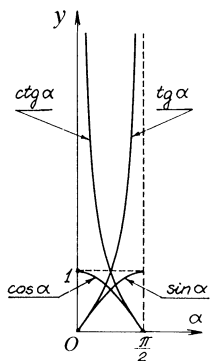


Рис. А.4

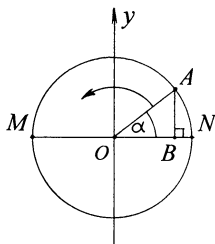


Рис. А.5

видно из рисунка А.5, угол α может изменяться от 0 до $+\infty$, если мысленно вращать вокруг O отрезок OA против часовой стрелки, заставляя его выполнить сколь угодно много оборотов. При вращении отрезка OA по часовой стрелке угол α изменялся бы от 0 до $-\infty$. В процессе вращения отрезка OA вокруг O точка A перемещается по окружности, а точка B — вдоль отрезка прямой от N к M и от M к N . Значения функций $y = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, $y = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{ctg} \alpha$ будут по-прежнему определяться отношениями (А.1) при условии, что $a = AB$, $b = OB$, $c = OA$. При этом $AB > 0$, если точка A оказывается над отрезком MN , и $AB < 0$ — если под отрезком; $OB > 0$, если точка B оказывается справа от y -оси, и $OB < 0$ — если слева.

Учитывая сделанные замечания, можно построить графики тригонометрических функций на естественной области определения — от $-\infty$ до $+\infty$. Понятно, что *при всех* значениях α будут выполняться тригонометрические тождества, полученные в п. А.1.

Теперь можно определить тригонометрические функции в общем случае — *не предполагая, что аргумент этих функций должен иметь смысл угла*. Поэтому в общем случае будем обозначать аргумент функций не через α , а через x , как это обычно принято. Графики тригонометрических функций $y = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, $y = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{ctg} \alpha$ представлены на рисунке А.6. Здесь $\frac{\pi}{2}$, π , 2π и т. д. выступают не как радианная мера углов, а просто как некоторые числа.

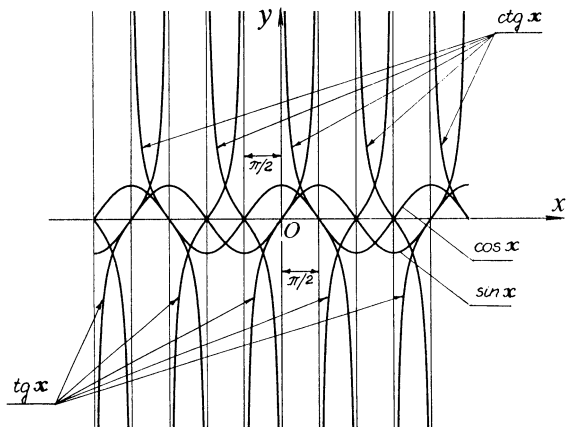


Рис. А.6

Сопоставим графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, представленные на рисунке А.7. Обе функции определены на всей числовой x -оси; они являются *периодическими* функциями с периодом 2π ; они принимают значения на отрезке $-1 \leq y \leq 1$, т. е. являются *ограниченными* функциями.

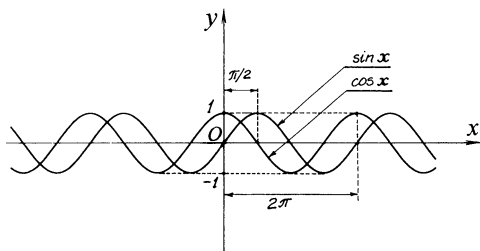


Рис. А.7

Легко видеть, что график функции $y = \cos x$ можно получить, смещая график $y = \sin x$ влево по x -оси на $\frac{\pi}{2}$, так что

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Соответственно, график функции $y = \sin x$ можно получить, сдвигая график $y = \cos x$ вправо по x -оси на $\frac{\pi}{2}$, так что

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

Замечание

Равенство $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha$ можно было получить в п. А.1, работая в рамках тригонометрии прямоугольного треугольника. Используя (А.4), где $\beta = \frac{\pi}{2}$, и учитывая, что $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, находим:

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \cos \alpha.$$

Используя (А.7) с $\beta = \frac{\pi}{2}$, можно было также получить:

$$\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \sin \alpha.$$

Из вида графика функции $y = \sin x$ следует, что эта функция — *нечетная*:

$$\sin(-x) = -\sin x. \quad (\text{A.20})$$

Отметим, что

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= 0, \text{ если } x = \pi t; \\ \sin x &= 1, \text{ если } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t; \\ \sin x &= -1, \text{ если } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.21})$$

Здесь t — целые числа.

Из вида графика функции $y = \cos x$ следует, что эта функция — *четная*:

$$\cos(-x) = \cos x. \quad (\text{A.22})$$

Отметим, что

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2} + \pi t; \\ \cos x &= 1, \text{ если } x = 2\pi t; \\ \cos x &= -1, \text{ если } x = (2m + 1)\pi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.23})$$

Здесь t — целые числа.

Замечание

Используя свойства четности-нечетности функций, можно сразу получить (А.6) из (А.4), а (А.7) из (А.5):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Б. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Б.1. Задание вектора

Вектором называют величину, характеризующуюся, кроме числового значения, *направлением* в пространстве. Вектор принято изображать в виде стрелки, направление которой совпадает с направлением вектора, а длина равна числовому значению вектора, называемому *модулем*. Если \vec{a} — обозначение некоторого вектора, то a или $|\vec{a}|$ — обозначение его модуля. Два вектора \vec{a} и \vec{b} считают равными $|\vec{a} = \vec{b}|$, если они имеют одно и то же направление и равные модули.

Для числового задания вектора нужно указать три числа, например, модуль и два угла, определяющие направление вектора. Равенство двух векторов эквивалентно равенству трех чисел, определяющих векторы. Таким образом, *одно векторное уравнение равносильно трем скалярным*.

В качестве трех чисел, задающих вектор \vec{a} , могут рассматриваться три *проекции* этого вектора на соответствующие координаты оси. На рисунке Б.1 представлена *декартова система координат* с x -осью, y -осью, z -осью. Три проекции вектора на эти оси обозначим через a_x , a_y , a_z соответственно. Из рисунка видно, что

$$\left. \begin{aligned}a_x &= a \sin \theta \cos \varphi; \\ a_y &= a \sin \theta \sin \varphi; \\ a_z &= a \cos \theta; \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.\end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.1})$$

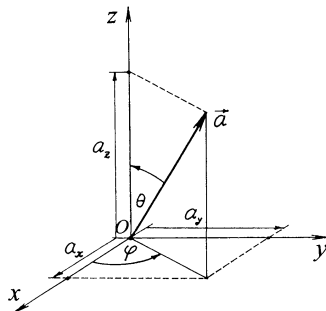


Рис. Б.1

Заметим, что формулировки физических законов в векторной форме отличаются компактностью и не зависят от выбора координатных осей.

Вектор $-\vec{a}$ имеет такой же модуль, что и вектор \vec{a} , но его направление противоположно направлению вектора \vec{a} . Проекции вектора на координатные оси имеют вид: $-a_x, -a_y, -a_z$.

Вектор $\xi\vec{a}$, где ξ — некоторый положительный скаляр, направлен так же, как вектор \vec{a} , а его модуль равен ξa . Если ξ — отрицательный скаляр, то вектор $\xi\vec{a}$ антипараллелен вектору \vec{a} , а его модуль равен $-\xi a$.

Б.2. Сложение, вычитание, разложение векторов

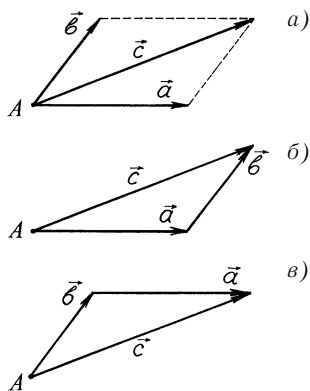


Рис. Б.2

Сложение двух векторов можно выполнить по *правилу параллелограмма* (рис. Б.2, а). На рисунке \vec{a} и \vec{b} — слагаемые векторы, \vec{c} — сумма, или результирующий вектор. Результирующий вектор лежит в плоскости слагаемых векторов.

Из рисунка Б.2, а следует *правило геометрического сложения*: для сложения векторов \vec{a} и \vec{b} надо от произвольной точки А отложить вектор \vec{a} и затем к его концу приложить начало вектора \vec{b} . Вектор, соединяющий точку А и конец вектора \vec{b} , есть результирующий вектор (рис. Б.2, б):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Можно было бы от точки А отложить сначала вектор \vec{b} и к его концу приложить начало вектора \vec{a} ; результат сложения не изменится (рис. Б.2, в). Таким образом, сложение векторов подчиняется **переместительному закону** (сложение векторов *коммутативно*):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (\text{Б.2})$$

Чтобы получить сумму \vec{d} трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, надо сначала сложить \vec{a} и \vec{b} и к результирующему вектору прибавить вектор \vec{c}

(см. рисунок Б.3). Из рисунка видно, что тот же результат получится, если к \vec{a} прибавить сумму $\vec{b} + \vec{c}$; следовательно, сложение векторов подчиняется **сочетательному закону** (сложение векторов *ассоциативно*):

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (\text{Б.3})$$

Заметим, что на рисунке Б.3 все векторы лежат в одной плоскости. В общем случае векторы \vec{c} и \vec{d} могут составлять некоторые углы с плоскостью векторов \vec{a} и \vec{b} ; в качестве примера приведен рисунок Б.4.

Для сложения трех и более векторов используют **геометрическое правило многоугольника векторов**: надо последовательно отложить в любом порядке слагаемые векторы, совмещая начало каждого последующего с концом предыдущего, и соединить начало первого вектора с концом последнего. Из коммутативности и ассоциативности сложения следует, что можно складывать векторы в любом порядке и можно, в частности, заменять любое их количество соответствующим результирующим вектором.

Подчеркнем, что рассмотренное правило геометрического сложения является необходимым условием для того, чтобы считать ту или иную величину вектором. Строго говоря, *вектор есть величина, характеризующаяся числовым значением и направлением в пространстве и подчиняющаяся геометрическому сложению*.

Переходя к *вычитанию* векторов, заметим, что вычесть из вектора \vec{a} вектор \vec{b} — это все равно, что прибавить к вектору \vec{a} вектор $-\vec{b}$. Сказанное поясняет рисунок Б.5, а. Этот рисунок может быть заменен рисунком Б.5, б из которого следует *правило*

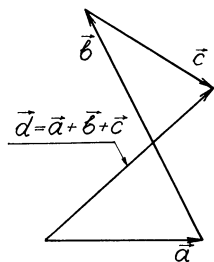


Рис. Б.3

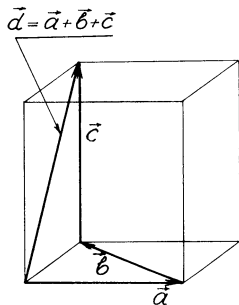


Рис. Б.4

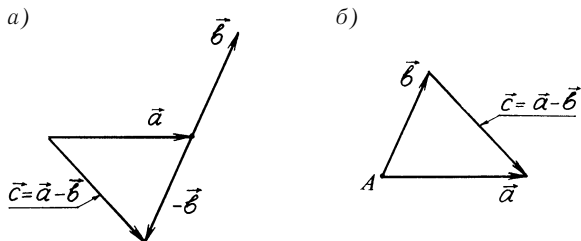


Рис. Б.5

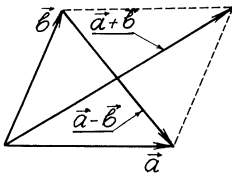


Рис. Б.6

На рисунке Б.6 изображен параллелограмм, составленный из векторов \vec{a} и \vec{b} . Одна диагональ квадрата — вектор $\vec{a} + \vec{b}$, а другая — вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

Отметим равенства, которые выражают *распределительный закон* умножения скаляра на вектор:

$$(\xi_1 \pm \xi_2)\vec{a} = \xi_1\vec{a} \pm \xi_2\vec{a}; \quad (\text{Б.4})$$

$$\xi(\vec{a} \pm \vec{b}) = \xi_1\vec{a} \pm \xi_2\vec{b}. \quad (\text{Б.5})$$

Обратным по отношению к геометрическому сложению является, кроме геометрического вычитания, также геометрическое *разложение* — замена данного вектора равной ему суммой двух или более векторов. Наиболее простой случай разложения — это случай, когда заданный вектор \vec{a} раскладывается на два вектора, имеющие направления, заданные, соответственно, двумя прямыми. Такое разложение вектора \vec{a} показано на рисунке Б.7; здесь MN и PQ — заданные направления разложения, \vec{b} и \vec{c} — векторы, на которые требовалось разложить вектор \vec{a} . Из рисунка видно, что для получения \vec{b} и \vec{c} надо провести через начало и конец вектора \vec{a} прямые, параллельные прямым MN и PQ . (Более сложные случаи разложения вектора (например, разложение на три вектора) мы рассматривать не будем.)

Пользуясь правилом сложения векторов, выразим вектор \vec{a} через его проекции на координатные оси:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (\text{Б.6})$$

Здесь \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — так называемые *орты* — векторы единичной длины (их модули равны единице), направленные, соответственно, по x -, y - и z -оси.

В заключение заменим некоторое *векторное* равенство

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} \quad (1^*)$$

на *скалярные равенства для проекций векторов*. Предположим, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} *компланарны*. Это означает, что если отложить их от общей точки, они будут лежать в одной плоскости. Выберем ее в качестве координатной *xy*-плоскости. В этом случае векторное равенство (1*) превращается в два скалярных:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_x + \vec{b}_x + \vec{c}_x &= \vec{d}_x; \\ \vec{a}_y + \vec{b}_y + \vec{c}_y &= \vec{d}_y. \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

Разумеется, значения проекций векторов будут зависеть от того, как сориентированы оси в *xy*-плоскости. Если, в частности, векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны или антипараллельны, то удобно выбрать направление одной из осей (пусть это будет *x*-ось) параллельно направлению одного из этих векторов; тогда система уравнений (2*) упростится:

$$\left. \begin{aligned} a_x + b_x + c_x &= d_x; \\ c_y &= d_y. \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

Если векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} *некомпланарны*, то придется проецировать их на три координатные оси, и векторное равенство (1*) превратится в три скалярных:

$$\left. \begin{aligned} a_x + b_x + c_x &= d_x; \\ a_y + b_y + c_y &= d_y; \\ a_z + b_z + c_z &= d_z. \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

Б.3. Скалярное произведение двух векторов

В векторной алгебре рассматривается не одно, а два различных действия умножения — *скалярное умножение векторов*, в результате которого получается скаляр, и *векторное умножение векторов*, в результате которого получается новый вектор.

Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называют произведение модулей векторов, умноженное на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b}). \quad (Б.7)$$

Здесь точка используется как знак скалярного умножения векторов, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} обозначается через (\vec{a}, \vec{b}) .

Если векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$; в частности, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$. Если векторы \vec{a} и \vec{b} антипараллельны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$. Если векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Для скалярного произведения векторов справедливы соотношения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad (\text{Б.8})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}; \quad (\text{Б.9})$$

$$\xi \vec{a} \cdot \mu \vec{b} = \xi \mu (\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad (\text{Б.10})$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \vec{a}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j. \quad (\text{Б.11})$$

Выразим скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ через проекции векторов \vec{a} и \vec{b} . В соответствии с (Б.6) и используя (Б.11), запишем:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + \\ &+ a_y b_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k}). \quad (1^*) \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1; \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} &= \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad (\text{Б.12}) \end{aligned}$$

Все слагаемые в (1*) с $\vec{i} \cdot \vec{j}$, $\vec{j} \cdot \vec{i}$, $\vec{j} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} \cdot \vec{j}$, $\vec{i} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} \cdot \vec{i}$ равны нулю. В результате получаем из (1*):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{Б.13})$$

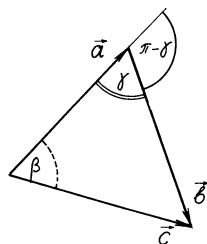


Рис. Б.8

Применяя свойства скалярного произведения векторов, докажем *теорему косинуса*, согласно которой *квадрат любой стороны в треугольнике равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними*. Рассмотрим треугольник, образованный векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , для которых выполняется векторное равенство $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. Б.8). Требуется доказать, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (\text{Б.14})$$

Для доказательства умножим обе части равенства $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ скалярно самих на себя; получим

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Согласно (Б.7), $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b})$. Из рисунка видно, что угол (\vec{a}, \vec{b}) между векторами \vec{a} и \vec{b} равен $\pi - \gamma$; поэтому

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - \gamma).$$

Так как $\cos(\pi - \gamma) = \cos \pi \cos \gamma + \sin \pi \sin \gamma = -\cos \gamma$, то, следовательно, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, что и требовалось доказать.

Докажем теорему: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырех его сторон.*

Для доказательства рассмотрим параллелограмм на рисунке Б.6, построенный на векторах \vec{a} и \vec{b} . Одна диагональ параллелограмма есть модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$, а другая — модуль вектора $\vec{a} - \vec{b}$. Каждый из этих векторов умножим скалярно самого на себя:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2.$$

Сложив эти равенства, получим

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (\text{Б.15})$$

Левая часть равенства (Б.15) — сумма квадратов модулей векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, т. е. сумма квадратов диагоналей параллелограмма, а правая часть — сумма квадратов четырех сторон квадрата. Теорема доказана.

Умножим скалярно векторы, представляющие диагонали параллелограмма:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 - b^2. \quad (\text{Б.16})$$

Из (Б.16) следует, что *диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны только тогда, когда $a = b$, т. е. когда параллелограмм есть ромб.*

Б.4. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называют вектор \vec{c} , равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в соответствии с *правилом правого винта*. Правило правого винта поясняет рисунок Б.9, а. Будем мысленно вращать вектор \vec{a} к вектору \vec{b} по меньшей дуге и в эту же сторону будем вращать рукоятку правого винта. Направление вектора \vec{b} будет соответствовать направлению осевого перемещения винта. Векторное произведение обозначают косым крестом:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

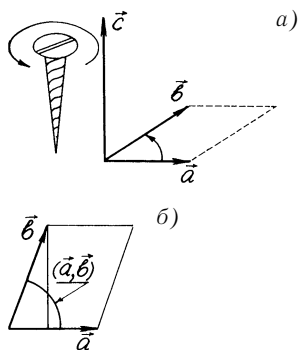


Рис. Б.9

Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах \vec{a} и \vec{b} (см. рисунок Б.9, б). Площадь параллелограмма равна произведению основания a на высоту параллелограмма, которая, в свою очередь, равна $b \sin(\vec{a}, \vec{b})$, где (\vec{a}, \vec{b}) — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} . Отсюда следует, что модуль векторного произведения векторов \vec{a} и \vec{b} равен

$$c = ab \sin(\vec{a}, \vec{b}). \quad (\text{Б.17})$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны или антипараллельны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$; в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ (векторное произведение вектора на самого себя равно нулю). Если векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны, то в этом случае $c = ab$.

Легко сообразить, что, в отличие от скалярного произведения векторов, векторное произведение двух векторов *не подчиняется переместительному закону*. При перестановке сомножителей их векторное произведение меняет направление на противоположное:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (\text{Б.18})$$

Для векторного произведения двух векторов справедливы соотношения:

$$\xi(\vec{a} \times \vec{b}) = \xi \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \xi \vec{b}; \quad (\text{Б.19})$$

$$\xi \vec{a} \times \mu \vec{b} = \xi \mu (\vec{a} \times \vec{b}); \quad (\text{Б.20})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{d}; \quad (\text{Б.21})$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \vec{a}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \vec{a}_i \times \vec{b}_j. \quad (\text{Б.22})$$

Обозначим через $(\vec{a} \times \vec{b})_x$, $(\vec{a} \times \vec{b})_y$, $(\vec{a} \times \vec{b})_z$, проекции вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, на x -ось, y -ось, z -ось, соответственно. Выразим эти проекции через проекции векторов \vec{a} и \vec{b} . Предварительно заметим, что везде мы молчаливо использовали *правую* систему декартовых координат. Направление z -оси в ней определяется в соответствии с правилом *правого* винта, если мысленно вращать x -ось к y -оси в сторону меньшего угла между ними. На рисунке Б.10, а представ-

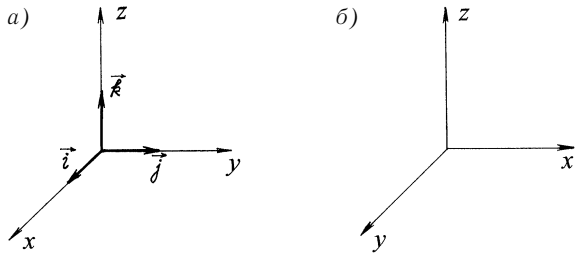


Рис. Б.10

лена правая система координат, а на рисунке Б.10, б — левая система. Чтобы в левой системе получить направление z -оси, надо при мысленном вращении x -оси к y -оси воспользоваться аналогией с левым винтом.

Замечание

Применение при векторном умножении правила правого винта предполагает использование правой системы координат. Если бы в нашем обществе было принято использовать на практике не правые, а левые винты, то при рассмотрении векторного умножения следовало бы ввести правило левого винта и, соответственно, пользоваться левой системой координат. Не делая в общем случае выбора в пользу правых или левых винтов, определим векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , как вектор, равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы мысленное вращение от \vec{a} к \vec{b} по меньшей дуге вокруг полученного вектора происходило в ту же сторону, как мысленное вращение x -оси к y -оси вокруг z -оси.

На рисунке Б.10, а изображены орты (единичные векторы) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Применив правило правого винта, находим

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}; & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}; & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.23})$$

К этим равенствам добавим очевидные равенства:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0. \quad (\text{Б.24})$$

С учетом (Б.6), запишем:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned} \quad (1^*)$$

Воспользовавшись соотношениями (Б.23) и (Б.24), перепишем равенство (1*) в более простом виде:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{j} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \quad (\text{Б.25})$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_x &= a_y b_z - a_z b_y; \\ (\vec{a} \times \vec{b})_y &= a_z b_x - a_x b_z; \\ (\vec{a} \times \vec{b})_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.26})$$

Используя свойства векторного умножения, докажем так называемую *теорему синусов*, согласно которой *в любом треугольнике отношение каких-либо двух сторон равно отношению синусов углов, противолежащих этим сторонам*. Рассмотрим треугольник, образованный векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , для которых выполняется равенство $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (можно воспользоваться рисунком Б.8). Надо доказать, что

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (\text{Б.27})$$

Умножим векторно на \vec{a} обе части равенства $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; получим

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a}.$$

Так как $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, то $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$. Необходимым условием равенства векторов $\vec{c} \times \vec{a}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ является равенство их модулей:

$$ca \sin(\vec{c}, \vec{a}) = ba \sin(\vec{b}, \vec{a}). \quad (2^*)$$

Равенство (2*) можно переписать в виде:

$$c \sin \beta = b \sin(\pi - \gamma). \quad (3^*)$$

Учитывая, что $\sin(\pi - \gamma) = \sin \pi \cos \gamma - \cos \pi \sin \gamma = \sin \gamma$, получаем из (3*) соотношение (5.27), что и требовалось доказать.

Построим параллелограмм на векторах \vec{a} и \vec{b} (см. рисунок Б.6). Умножим векторно $\vec{a} + \vec{b}$ на $\vec{a} - \vec{b}$:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b} = -2\vec{a} \times \vec{b}.$$

Из равенства векторов $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ и $-2\vec{a} \times \vec{b}$ заключаем, что равны их модули, а это, в свою очередь, означает, что *площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, в два раза больше площади данного параллелограмма*.

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

К главе 1

1.1. В $\frac{\pi}{2}$ раз.

1.2. В $\frac{5\pi}{3}$ раз.

1.3. Не может.

1.4. Точка движется равномерно со скоростью v_0 по окружности радиусом, равным радиусу обода колеса.

1.5. Точка описывает циклоиду. В моменты соприкосновения с плоскостью скорость точки равна нулю, а в моменты наибольшего удаления от плоскости равна $2v_0$.

1.6. Увеличится на $\frac{2v_0^2}{R}$.

1.7. $x_1 = v_0 t_1 = 15$ м.

1.8. На втором рисунке x_1 в 1,2 раза больше, чем на первом.

1.9. 10 м/с².

1.10. Первая точка движется равноускоренно ($a_1 = 3$ м/с²), а вторая равнозамедленно ($a_2 = -3$ м/с²).

1.11. При равноускоренном движении направления ускорения и скорости параллельны, а при равнозамедленном антипараллельны.

1.12. $\frac{(n^2 - 1)v_0^2}{2x} = 9$ м/с².

1.13. Ускорение тела направлено навстречу вектору \vec{v}_0 , а модуль

равен $\frac{2v_0}{t_1}$.

1.14. $x_0 - 2v_0 t_1$.

1.15. $x_0 + 2v_0 t_1$.

1.16. Так происходит, когда брошенное вертикально вверх тело движется к наивысшей точке своей траектории.

1.18. Не зависит.

1.19. $\frac{v_0 + \sqrt{2gh + v_0^2}}{g}$.

1.20. $\sqrt{v_0^2 + gH}$.

1.21. $\sqrt{\frac{gH}{2}}$.

1.22. $\frac{v_0^2}{2g}$.

1.23. В наивысшей точке, т. е. на высоте $\frac{v_0^2 \sin \alpha}{2g}$. В этой точке вектор скорости направлен горизонтально и равен по модулю $v_0 \cos \alpha$.

1.24. Скорость направлена горизонтально и равна по модулю $v_0 \cos \alpha$.

1.25. Высота и дальность полета на Луне в 6 раз больше, чем на Земле.

К главе 2

2.3. Могут.

2.4. Суть доказательства в неравенстве: $\frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} \neq \frac{m_1}{V_1} + \frac{m_2}{V_2}$.

2.5. Может (например, центр тяжести обычной баранки).

2.6. Коэффициент трения скольжения равен $\operatorname{tg} \alpha$.

2.7. Зависит.

2.8. а) $\frac{mg}{\cos \alpha}$; б) $mg \cos \alpha$.

2.9. $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$; $N = mg \cos \alpha$.

2.12. Кроме буксира и баржи есть также вода, и она действует на буксир и баржу не только с выталкивающей силой.

2.13. Сила реакции опоры оказывается больше силы тяжести мяча, поскольку вследствие деформации мяча возрастает сила нормального давления на пол.

2.14. $a = g \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}$;

$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

2.15. Да, является.

2.16. а) Mg ; б) вес левого груза увеличивается на $\frac{Mgm}{2M+m}$; в) веса обоих грузов станут равными нулю.

2.17. $m_1 = \frac{P}{g+a} = 1,3$ кг; $m_2 = \frac{P}{g-a} = 1,9$ кг.

2.18. $m_2 = \frac{m_1(g+a)}{g-a} = 4,8$ г;

$P = m_1(g+a) = 27,6$ Н.

2.19. Вес тела равен 10,3 Н в первые четыре секунды, 9,8 Н во время равномерного движения лифта, 8,8 Н в последние две секунды. Используя рычажные весы, нельзя заметить изменение веса тела.

2.20. Не увеличивается.

2.22. $\sqrt{\frac{gtg\alpha}{R+l\sin\alpha}}$.

2.24. $\frac{mv_0 \cos \alpha}{M}$.

2.25. Модуль скорости \vec{v} равен

$\frac{1}{2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, угол α между \vec{v} и

\vec{v}_1 определяется соотношением

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1}$.

2.26. $\frac{mv_0}{M+m} \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

К главе 3

3.1. Да, может.

3.2. Центр масс или покоится, или движется прямолинейно и равномерно.

3.3. а) 0; б) равен Φ ; в) равен $\Phi \cos \alpha$.

3.4. а) $\frac{1}{2} aF_2 = 0,24$ Н · м;

б) $a\left(\frac{1}{2}F_2 + F_1\right) = 0,48$ Н · м; в) 0.

3.5. а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{2} aF_2 = 0,24$ Н · м;

г) $\frac{1}{4} aF_2 = 0,12$ Н · м.

3.6. а) $\frac{1}{2} aF_1 = 0,12$ Н · м; б) $\frac{1}{2} aF_2 =$

$= 0,24$ Н · м; в) $aF_1 - \frac{1}{2} aF_2 = 0$.

3.7. а) $\frac{mga}{\sqrt{2}}$; б) 0; в) $\frac{mga}{2}$.

3.8. а) $\frac{mga}{2}$; б) 0; в) 0; г) $\frac{mga}{2\sqrt{2}}$.

3.9. Ось составляет $\frac{\pi}{6}$ с вектором момента относительно рассматриваемой точки.

3.11. $\alpha < \frac{l}{2h}$.

3.12. В 2 раза.

3.13. $T_A = \frac{1}{3}mg$; $T_B = Mg + \frac{2}{3}mg$.

3.14. $\sqrt{m_1 m_2}$.

3.15. $\frac{1}{2}mg \operatorname{ctg} \alpha$.

3.16. $\mu \geq \frac{1}{3}$.

3.17. Сила, с которой нужно натягивать трос, будет расти по мере подъема груза и может оказаться значительно больше его силы тяжести.

3.18. $\mu_{\min} = \frac{r}{R \sin \alpha} = 0,25$.

3.19. $\frac{1}{2}a(N - 1)$.

3.20. 40 см.

3.21. На расстоянии $\frac{a_2 l}{\pi r^2 - a^2} \approx 1$ см

по прямой, проходящей через центры круга и квадрата.

3.22. $x_C = \frac{41r}{44} = 10,25$ см; $y_C =$

$= \frac{13r}{11} = 13$ см.

3.23. $x_C = 7,5$ см; $y_C = 3,75$ см.

3.24. Выигрыш в силе не получается.

3.25. $8Mg = 2350$ Н.

3.26. $\frac{1}{2 \sin \alpha}$.

К главе 4

4.1. Для A : $2\pi n_A = 5,02$ рад/с; для B : $2\sqrt{2}\pi n_B = 7,1$ рад/с; для центра квадрата $\sqrt{2}\pi n_C = 3,55$ рад/с.

4.2. а) есть; б) есть.

4.3. 4,29 рад; 246° .

4.4. $\beta T = 200$ рад/с; $\beta T^2/(4\pi) = 79,6$ оборотов.

4.5. 50 рад/с².

4.6. Вращение равнопеременное.

4.7. $\frac{v}{R}$; 0.

4.8. $2\Omega(R' + R)$; $\Omega \frac{R' + R}{R}$.

4.9. Да, является.

4.10. а) $2ma^2$; б) ma^2 ; в) $4ma^2$; г) $3ma^2$.

4.11. $\frac{1}{6}ma^2$.

4.12. $\frac{2}{3}ma^2$.

4.13. $m\left(\frac{4}{5}r^2 + \frac{1}{2}l^2\right)$.

4.14. $\frac{7}{5}mr^2$.

4.15. Он изменяется от $\frac{2}{5}mr^2$ (когда Земля пересекает выбранный диаметр) до mR^2 (когда Земля максимально удалена от выбранного диаметра).

4.17. $\vec{g} \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2$.

4.18. $\vec{g} \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2) \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m \right)}$.

4.19. Относительно точки B : $\frac{m\omega l^2}{2}$, направлен навстречу

z -оси. Относительно z -оси: $-\frac{m\omega l^2}{2}$.

4.20. Относительно точки B : $\frac{m\omega l^2}{2\sqrt{2}}$, направлен под углом 135°

к z-оси. Относительно C: $\frac{m\omega l^2}{4}$,
направлен навстречу z-оси.

$$4.21. \frac{mr^2\omega}{2T} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$4.22. mg \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}.$$

$$4.23. \frac{2\pi nJ}{\Phi} = 94,2 \text{ с}; \frac{nT}{2} = 11 \text{ 750 обо-}$$

ротов.

$$4.24. \text{ а) } 2ma^2\omega; \text{ б) } ma^2\omega.$$

$$4.25. \frac{1}{2}(MR^2 + \frac{1}{3}ma^2)\omega.$$

$$4.26. \omega \frac{(M+2m)R^2}{MR^2 + 2mr^2}.$$

$$4.27. \frac{2mvr}{MR^2 + 2mr^2}.$$

$$4.28. \omega \frac{M+2m}{M}.$$

$$4.29. 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$4.30. \frac{1}{2}g\sin\alpha = 2,45 \text{ м/с}^2;$$

$$\mu > \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = 0,29\right).$$

$$4.31. \text{ а) } \frac{2m_2g}{3m_1 + 2m_2 + m};$$

$$\text{ б) } \frac{3m_1m_2g}{3m_1 + 2m_2 + m},$$

$$m_2g \frac{3m_1 + m}{3m_1 + 2m_2 + m};$$

$$\text{ в) } \mu > \frac{m_2}{3m_1 + 2m_2 + m}.$$

4.32. Быстрее скатился шар. Результат не зависит ни от массы, ни от радиуса тел.

К главе 5

5.1. а) $mgs \sin\alpha$; б) 0;

в) $-\mu mgs \cos\alpha$.

5.2. Центробежная сила работы не совершает.

5.3. а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет.

$$5.5. \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

5.6. В 3 раза.

$$5.7. -mgh.$$

$$5.8. \frac{1}{2}mv^2 - mgh = 80,1 \text{ Дж}.$$

5.9. Может при соответствующем выборе нулевого уровня потенциальной энергии

$$5.10. \text{ На } (\sqrt{5} - 2) \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

$$5.11. \frac{mv^2}{5} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

5.12. а) 6; б) 3.

5.13. 25 см.

5.14. $\frac{1}{2}mgl(\sqrt{3} - 1)$; работа силы

реакции нити равна нулю.

$$5.16. h(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) / \mu = 8 \text{ м}.$$

$$5.17. F \cos \alpha = 10,4 \text{ кДж}.$$

$$5.18. \frac{\mu mgs}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = 8,1 \text{ кДж}.$$

$$5.19. v_0 = \sqrt{gh}.$$

$$5.20. 1 : 3.$$

$$5.21. \frac{2mg(h+s)}{s^2} = 6 \text{ кН}.$$

5.22. Коэффициент трения скольжения $\sin\alpha (1 + \cos\alpha) = 0,27$; отношение энергий равно $\frac{1}{1 + \cos\alpha} = 0,54$.

$$5.23. \frac{N}{mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)} = \\ = 18,9 \text{ м/с} = 68 \text{ км/ч}.$$

$$5.24. l \frac{T - mg}{2mg} \approx 1 \text{ м.}$$

5.25. На $6mg$.

$$5.26. 5mg^2 t^2 \sin^2 \frac{\alpha}{14}.$$

5.27. Скорость $\frac{v_0}{2}$, потенциальная энергия $\frac{mv_0^2}{4}$.

$$5.28. \frac{5mgl}{4}.$$

$$5.29. \frac{v_0^2}{2\mu g(n+1)^2} \approx 20 \text{ см.}$$

$$5.30. \sqrt{5gl} \frac{M+m}{m}.$$

$$5.31. mg(h - h') - \frac{1}{2}mv^2 = 2,33 \text{ Дж.}$$

$$5.32. mgl \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right).$$

$$5.33. mgl \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \times \right. \\ \left. \times \sin \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0,97mgl.$$

К главе 6

6.1. В $(1 + \epsilon)(1 - \epsilon) = 1,53$ раза.

6.2. 1,87 года.

6.3. $3,54 \cdot 10^{22}$ Н.

6.4. 2500 Н.

6.5. 0,6 Н.

6.6. Земля притягивается к Луне с силой в 100 раз большей силы притяжения Земли к Юпитеру.

6.7. На высоте $(\sqrt{n} - 1)R_3 \approx 1430$ км.

6.8. В 4 раза.

$$6.9. \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 6,1 \cdot 10^{24} \text{ кг.}$$

$$6.10. \frac{4}{3}\pi\rho GR.$$

$$6.11. \frac{r_{\text{Л}}}{1 + \sqrt{\theta}} = 38 \text{ 400 км.}$$

$$6.12. \rho = \frac{3\pi}{GT^2} \left(\frac{r_{\text{К}}}{R_{\text{Ю}}} \right)^3 = 1,24 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$g = 4\pi^2 \frac{r_{\text{К}}^3}{T^2 R_{\text{Ю}}^2} = 25 \text{ м/с}^2.$$

$$6.13. \frac{24\pi}{GT^2} = 5,51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

6.14. $2V$.

$$6.15. g_{\text{М}} = 0,4g_0 = 3,9 \text{ м/с}^2; \rho_{\text{М}} = 0,74\rho = 4,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; V_{\text{М}} = 0,46V_1 = 3,63 \text{ км/с.}$$

6.16. В $2,5\bar{5}$ раза.

$$6.17. \text{ а) } \sqrt{\frac{GM_{\text{Ю}}}{R_{\text{Ю}}}} = 42 \text{ км/с;}$$

$$\text{ б) } \sqrt{\frac{2GM_{\text{Ю}}}{R_{\text{Ю}}}} = 59 \text{ км/с.}$$

$$6.18. \frac{6\pi}{GT^2}.$$

$$6.19. \text{ На } \frac{300\pi}{GT^2\rho} = 0,34\%.$$

$$6.20. \frac{300\pi}{nGT^2} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$$6.21. 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{GM_3}} = 5050 \text{ с} = 1,4 \text{ ч.}$$

6.22. В 6 раз.

$$6.23. R_{\text{М}}\sqrt{\theta} - R_3 \approx 3890 \text{ км.}$$

$$6.24. \frac{M_B}{M_A} = 4; \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{1}{2}.$$

$$6.25. v_1 = \sqrt{\frac{2GMrc_C}{r_3(r_3+r_C)}} = 40,1 \text{ км/с};$$

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_3+r_C)^3}{2MG}} \approx 6,3 \text{ года.}$$

$$6.26. v = \sqrt{\frac{2g_0R_3}{n}} = 6,45 \text{ км/с.}$$

$$6.27. \frac{1}{6} mg_0R_3(5 + (\sqrt{2} - 1)^2) = 10,76 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$$

$$6.28. \text{ На } (\sqrt{1+\varepsilon} - 1) \sqrt{\frac{g_0R_3^2}{r_1}} = 1,94 \text{ км/с.}$$

$$6.29. 6640 \text{ км.}$$

$$6.30. \Delta v_1 = V_1 \sqrt{\frac{R_3}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1 \right) = 375 \text{ м/с};$$

$$\Delta v_2 = V_1 \sqrt{\frac{R_3}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} \right) = 357 \text{ м/с}$$

($V_1 = 7,9 \text{ км/с}$ — первая космическая скорость).

$$6.31. \text{ а) } 1,68 \text{ км/с; б) } 2,38 \text{ км/с.}$$

$$6.32. \text{ На } \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = 350 \text{ м/с.}$$

$$6.33. \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \sqrt{\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = 310 \text{ м/с.}$$

$$6.34. 10 \text{ км/с.}$$

$$6.35. \frac{GM_{\text{С}}}{r_3^2} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

6.36. Вблизи Луны напряженность поля тяготения Солнца больше напряженности поля Земли в 2,2 раза.

$$6.37. \frac{4\pi}{3} Gr\rho = 5,28 \text{ м/с}^2.$$

К главе 7

7.1. На дно действует не давление, а сила давления. Следует говорить «давление на дне» (точнее: «давление в той или иной точке дна»).

7.2. Увеличивается на ρah .

7.3. $2l$.

$$7.4. \frac{FS_0}{S} = 0,04 \text{ Н.}$$

$$7.5. 1075 \text{ мм.}$$

$$7.6. \frac{2gH\rho\rho_0}{\rho + \rho_0}.$$

$$7.7. \frac{m}{S\rho} = 2,5 \text{ см.}$$

$$7.8. \frac{h_1\rho_1 - h_2\rho_2}{\rho} = 2,1 \text{ см.}$$

$$7.9. \frac{\rho_0}{\rho g} = 8,5 \text{ км.}$$

7.10. Осадка уменьшится, а выталкивающая сила не изменится.

$$7.11. \text{ В } \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{ раз.}$$

7.12. Одновременно с уменьшением веса чаши со штативом увеличивается вес чаши с сосудом. Поэтому для восстановления равновесия нужна гиря весом $2\rho_0Vg$.

7.13. Теперь нет выталкивающей силы, тогда как силы давления атмосферы и слоя воды по-прежнему действуют на подложку.

$$7.14. \frac{\rho_0 n}{n-1} = 1500 \text{ кг/м}^3.$$

$$7.15. \frac{V\rho_0}{\rho_0 - \rho} = 1980 \text{ м}^3.$$

$$7.16. \frac{2}{3} V \frac{\rho_0}{\rho} = 0,21 \text{ м}^3.$$

$$7.17. \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,58.$$

$$7.18. \frac{n\rho}{n-1} = 3\rho.$$

$$7.19. \rho \frac{P - P_1}{P} = 700 \text{ кг/м}^3. \text{ Неизвестная жидкость — бензин.}$$

$$7.20. \frac{V'g\rho\rho_0}{\rho - \rho_0} = 2,21 \text{ Н.}$$

$$7.21. \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{R^3}{r^3}.$$

7.22. В 2 раза.

$$7.23. \text{ В } \frac{PR^3}{(P - P_1)(R^3 - r^3)} \text{ раз.}$$

7.24. Уровень останется прежним.

7.25. Уровень чуть-чуть поднимется.

$$7.26. \frac{1}{2} S\rho_0gh^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 = 141 \text{ Дж.}$$

7.27. Плотность бензина 700 кг/м^3 . Плотность раствора медного купо-

роса 1130 кг/м^3 . Вес камня в воздухе $5,2 \text{ Н}$.

$$7.28. \text{ В } \frac{3}{\sqrt[3]{9}} \approx 1,44 \text{ раза.}$$

$$7.29. 4\pi\sigma R^2 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - 1\right) = 1,38 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

$$7.30. 2\pi D^2\sigma = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$7.31. \frac{2\sigma}{\rho_0gh} = 0,0015 \text{ мм.}$$

$$7.32. \text{ а) } \frac{2\sigma}{\rho h_1g} = 0,74 \text{ мм;}$$

$$\text{ б) } \frac{2\sigma}{\rho h_2g} = 0,37 \text{ мм; в) } \frac{2\sigma}{\rho rg} = 6 \text{ см.}$$

$$7.33. \rho = \frac{3\sigma}{2\pi GR\rho_0rh} = 3340 \text{ кг/м}^3.$$

$$7.34. \frac{2v}{3}; \rho + \frac{5\rho_0v^2}{18}.$$

К главе 8

8.1. Оба тела пройдут положения равновесия одновременно.

8.2. Период колебаний не изменится, максимальная скорость и ускорение увеличатся вдвое, механическая энергия увеличится в 4 раза.

8.3. Не могут, поскольку смещение и ускорение колеблются в противофазе. Модуль смещения: а) равен амплитуде, б) равен нулю, в) равен амплитуде, умноженной на $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$8.4. \frac{3}{4}.$$

8.5. Функция $x(t)$ есть $x(t) = x_m \sin(\omega_1 + \omega_2)t$; амплитуда x_m , циклическая частота $\omega_1 + \omega_2$, начальная фаза равны нулю.

$$8.6. \text{ а) } \omega x_m = 0,4 \text{ м/с; б) } \frac{\sqrt{3}\omega x_m}{2} = 0,35 \text{ м/с.}$$

8.7. Когда колебания возбуждают, отклонив тело от положения равновесия, не сообщая ему при этом начальной скорости. Кроме того, должна быть пренебрежимо мала постоянная затухания.

$$8.8. x(t) = 0,3\sin \pi t \text{ или } x(t) = 0,3\cos \left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$8.9. v(t) = 0,3\pi \cos \pi t.$$

8.10. Для кинетической энергии: $9 \cdot 10^{-4}\pi^2 \cos^2 \pi t$; для механической: $9 \cdot 10^{-4}\pi^2$; для потенциальной: $9 \cdot 10^{-4}\pi^2 \sin^2 \pi t$.

$$8.11. \text{ а) } \frac{1}{2} \frac{v_m}{\omega}; \text{ б) } \frac{1}{2} m v_m^2;$$

$$в) \frac{1}{2} m v_m^2 \sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right); г) \frac{m v_m^2}{8}.$$

8.12. Положение равновесия реализуется в моменты t , для которых $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, т. е. в моменты

$$t = \frac{n\pi - \frac{\pi}{6}}{\omega}, \text{ а максимальное смещение — в моменты } t, \text{ для которых}$$

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1, \text{ т. е. в моменты}$$

$$t = \frac{n\pi + \frac{\pi}{3}}{\omega} \text{ (здесь } n \text{ — целые числа).}$$

8.13. а) 0,24 м/с; б) 0,36 м/с²,

в) $1,73 \cdot 10^{-3}$ Дж.

8.14. а) 0,05 м; б) 0; в) 0,34 м/с².

$$\mathbf{8.15.} \frac{2mg}{k}.$$

$$\mathbf{8.16.} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

8.17. $2m$.

$$\mathbf{8.18.} 4\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$\mathbf{8.19.} 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

$$\mathbf{8.20.} \frac{R_3 \xi}{\sqrt{n}} = 1740 \text{ км.}$$

$$\mathbf{8.21.} l_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R_3}\right) = 3 \text{ м } 94 \text{ см.}$$

$$\mathbf{8.22.} \frac{T h}{R_3} = 27 \text{ с.}$$

$$\mathbf{8.23.} 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

$$\mathbf{8.24.} 2\pi \sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}} = 0,6 \text{ с.}$$

$$\mathbf{8.25.} 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}}.$$

8.26. а) Результирующее смещение равно нулю во все моменты времени, циклическая частота равна нулю; б) $x(t) = \sqrt{2} x_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, циклическая частота равна ω .

К главе 9

9.1. Энергия, переносимая волной с меньшей в 3 раза длиной волны, будет в 9 раз больше.

9.2. Поглощение энергии и расходимость волн.

9.3. Амплитуда волны $5 \cdot 10^{-4}$ см, фазовая скорость 300 м/с, период колебаний источника $3,5 \cdot 10^{-3}$ с.

9.4. 52,5 см.

9.5. 48,6 Вт/м².

9.6. $\xi(t, x) = \xi_m \cos(\omega t - kx)$.

9.7. $v(t, x) = \xi_m \omega \sin(\omega t - kx)$.

$$\mathbf{9.8.} \frac{\omega^2 \lambda^2 \rho}{4\pi^2}.$$

$$\mathbf{9.9.} \text{ а) } 2\pi^2 \xi_m^2 \frac{\sqrt{E\rho}}{\tau^2}; \text{ б) } \tau \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

$$\mathbf{9.10.} \text{ а) } |v| = \sqrt{2} \xi_m \frac{\omega}{2},$$

$$|\varepsilon| = \sqrt{2} \xi_m \frac{k}{2}; \text{ б) } |v| = \frac{1}{2} \xi_m \omega,$$

$$|\varepsilon| = \frac{1}{2} \xi_m k.$$

$$\mathbf{9.11.} \text{ а) } \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\text{ б) } \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2; \text{ в) } \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$9.12. \frac{\pi v_{\Phi}}{\omega}.$$

$$9.13. \text{ а) } \sqrt{3} \xi_m; \text{ б) } \sqrt{2} \xi_m; \text{ в) } \xi_m.$$

$$9.14. \text{ а) } \frac{2\sqrt{3}\pi\xi_m}{\lambda}; \text{ б) } \frac{2\sqrt{2}\pi\xi_m}{\lambda};$$

$$\text{ в) } \frac{2\pi\xi_m}{\lambda}; \text{ г) } 0.$$

$$9.15. \text{ а) } \eta_0 \cos^2 \frac{\pi}{8};$$

$$\text{ б) } \frac{\eta_0}{2}; \text{ в) } \eta_0 \cos^2 \frac{3\pi}{8}; \text{ г) } 0.$$

$$9.16. \text{ а) } 0; \text{ б) } \frac{1}{4} \rho \xi_m^2 \omega^2; \text{ в) } \frac{1}{2} \rho \xi_m^2 \omega^2.$$

$$9.17. 3.$$

$$9.18. \frac{d}{14}, \frac{3d}{14}, \frac{5d}{14}.$$

$$9.19. \frac{v_{\Phi} L}{L - v_{\Phi} \Delta t} = 4840 \text{ м/с} \approx 5 \text{ км/с}.$$

$$9.20. v_{\Phi} \frac{v - v_0}{v_0} = 206 \text{ м/с}.$$

$$9.21. v_{\Phi} \frac{v - v_0}{v} = 127 \text{ м/с}.$$

$$9.22. v'(t) = v \left(1 - \frac{at}{v_{\Phi}} \right).$$

$$9.23. \text{ а) } \frac{v}{1 - \frac{\sqrt{2}v}{2v_{\Phi}}}; \text{ б) } v; \text{ в) } \frac{v}{1 + \frac{\sqrt{2}v}{2v_{\Phi}}}.$$

$$9.24. \frac{v_{\Phi} T}{\cos \beta \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\Phi}}{v} \right)^2}} = 1490 \text{ м} \approx$$

$$\approx 1,5 \text{ км}.$$

$$9.25. 1400 \text{ м}.$$

Учебное издание

Тарасов Лев Васильевич

Современный курс физики

МЕХАНИКА

Редактор *Е. С. Гридасова*

Корректоры *В. Г. Акатова, В. Г. Овсянникова*

Технический редактор *Е. А. Вишнякова*

Младший редактор *М. А. Нозик*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 27.08.2008. Формат 60x90^{1/16}.

Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 37,00. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».

105082, Москва, ул. Б. Почтовая, д. 7, стр. 1.

Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.

Отдел реализации: тел. (499) 619-02-20, 619-31-88.

Интернет-магазин: www.onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».

Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.

109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.

Тел./факс (495) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54.

E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru

Издание осуществлено при техническом содействии
ООО «Издательство АСТ»