ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

Кафедраи алгебра ва назарияи ададҳо

РАҲМОНОВ З.Ҳ.

АЛГЕБРА ВА НАЗАРИЯИ АДАДҲО

Китоби дарсӣ

Душанбе — 2020

Мундариҷа

Обозначения . . . 5

1 Системаи муодилаҳои хаттӣ. Муайянкунандаҳо 7

1.1 Системаи муодилҳои хаттӣ . . . 7

1.2 Системаҳои муодилаҳои баробарқувва . . . 8

1.3 Усули пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо . . . 9

1.4 Усули пай дар пай хориҷкунӣ барои системаи муодилаҳои якҷинса . . . 11

1.5 Муайянкунандаи тартиби дуюм. Теоремаи Крамер барои системаи ду муодилаи хаттии дуномаълума . . . 13

1.6 Муайянкунандаи тартиби сеюм. Теоремаи Крамер барои системаи се муодилаҳои сеномаълума . . . 16

1.7 Ҷойивазкуниҳо . . . 19

1.8 Гузоришҳо . . . 21

1.9 Гурӯҳҳо . . . 22

1.10 Зарби гузоришҳо . . . 23

1.11 Муайянкунандаи тартиби n – ум . . . 25

1.12 Хосиятҳои муайянкунандаҳо . . . 26

1.13 Муайянкунандаи матритсаи кососимметрӣ. . . . 29

1.14 Минорҳо ва пуркунандаҳои алгебравӣ . . . 30

1.15 Ҳисобкунии муайянкунандаҳо . . . 32

1.16 Хосияти ортогоналии пуркунандаҳои алгебравӣ . . . 35

1.17 Муайянкунандаи Вандермонд . . . 36

1.18 Теоремаи Лаплас . . . 37

1.19 Қоидаи Крамер . . . 39

2 Назарияи умумии системаи муодилаҳои хаттӣ 43

2.1 Фазои $n-$ченакаи векторӣ . . . 43

2.2 Вобастагии хаттии векторҳо . . . 45

2.3 Миқдори векторҳои системаи хаттӣ новобаста дар фазои n-ченакаи векторӣ . 47

2.4 Системаи максималии хаттӣ новобаста . . . 48

2.5 Системаҳои баробарқувва . . . 49

2.6 Теоремаи асосӣ оиди хаттӣ ифодашавии як система ба воситаи системаи дигар 50

2.7 Ранги системаи векторҳои n – ченака . . . 52

2.8 Ранги матритсаҳо . . . 53

2.9 Теорема оиди миқдори максимали сатрҳои хаттӣ новобастаи матритса 56

2.10 Системаи муодилаҳои хаттӣ . . . 56

2.11 Ҷустуҷӯи ҳамаи ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттӣ . . . 57

2.12 Системаи муодилаҳои хаттии якҷинса . . . 59

2.13 Системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттӣ якҷинса 60

2.14 Алоқаи байни ҳалҳои системаи муодилаҳои ғайри якҷинса ва системаи якҷинсаи он 62

3 Алгебраи матритсаҳо 65
3.1 Зарби матритсаҳо 65
3.2 Хосиятҳои зарби матритсаҳо 67
3.3 Теорема дар бораи зарби муайянкунандаҳо 68
3.4 Матритсаи баръакс 70
3.5 Зарби матритсаҳои рост кунҷа 73
3.6 Ранги ҳосили зарби матритсаҳо 75
3.7 Ҷамъи матритсаҳо ва зарби матритса ба адад 76

4 Ададҳои комплексӣ 79
4.1 Системаи ададҳои комплексӣ 79
4.2 Амалҳо бо ададҳои комплексӣ дар навишти муқаррарӣ 83
4.3 Мазмуни геометрии амалҳо бо ададҳои комплексӣ 84
4.4 Решабарорӣ аз ададҳои комплексӣ 88
4.5 Решаҳо аз воҳид 91

5 Бисёраъзогиҳо ва решаҳои онҳо 93
5.1 Бисёраъзогиҳо ва амалҳо бо онҳо 93
5.2 Тақсимкунандаҳо 98
5.3 Калонтарин тақсимкунандаи умумӣ 99
5.4 Решаҳои бисёраъзогиҳо 101

6 Алгебраи хаттӣ 107
6.1 Таърифи фазои хаттӣ 107
6.2 Изоморфизми фазоҳои хаттӣ 108
6.3 Фазоҳои хаттии охирнокченака 109
6.4 Алоқаи байни базисҳо 111
6.5 Дигаргунсозии координатаҳои векторҳо 112
6.6 Операторҳои хаттӣ 113
6.7 Алоқаи байни операторҳои хаттӣ ва матритсаи квадратӣ 115
6.8 Алоқаи байни матритсаҳои операторҳои хаттӣ дар базисҳои гуногун 117
6.9 Амалҳо бо операторҳои хаттӣ 118
6.10 Зерфазоҳои хаттӣ 119
6.11 Буриш ва суммаи зерфазоҳо 120
6.12 Соҳаи қиматҳо ва ядрои оператори хаттӣ 121
6.13 Операторҳои хаттии вайроннашуда 123
6.14 Решаҳои характеристикӣ ва қиматҳои хусусии оператор 123
6.15 Таърифи фазои Евклидӣ 126
6.16 Векторҳои ортогоналӣ, системаи ортогоналӣ, протсессияи ортогонализатсия ва базиси ортонормиронидашуда. 127
6.17 Изоморфизми фазоҳои Евклидӣ. 130
6.18 Матритсаҳои ортогоналӣ. 131
6.19 Оператори симметрӣ 132

Ишораҳо

$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos 2\pi\alpha + i\sin 2\pi\alpha$.

При ссылках теоремы, леммы и формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения.

$c, c_1, c_2, \cdots$,–положительные постоянные, не всегда одни и те же.

ε–положительные сколь угодно малые постоянные.

$L = \ln N$ – натуральный логарифм N.

$\varphi(q)$ – функция Эйлера.

$\tau(n)$ – число делителей числа n.

$\zeta(s)$ – дзета функция Римана.

$\Gamma(n)$ – гамма функция Эйлера.

$[x]$ – целая часть числа x.

$\{x\}$ – дробная часть числа x.

$\|x\| = \min\Big(\{x\}, 1 - \{x\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа.

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b.

Запись $A \ll B$ или $A = O(B)$ означает, что существует $c > 0$ такое, что $|A| \leq cB$.

Боби 1

Системаи муодилаҳои хаттӣ. Муайянкунандаҳо

1.1 Системаи муодилҳои хаттӣ

Мо ба омӯхтани системаи муодилаҳои дараҷаи якум бо якчанд номаълумҳо, ки онҳоро одатан *системаи муодилаҳои хаттӣ* меноманд, оғоз мекунем.

Дар фарқият аз алгебраи элементарӣ, мо системаҳои миқдори муодилаҳо ва миқдори номаълумҳояшон ададҳои дилхоҳбударо меомӯзем ва шарт нест, ки миқдори муодилаҳо ба миқдори номаълумҳо баробар бошанд.

Бигзор ба мо системаи $s-$муодилаҳои $n-$номаълума дода шуда бошад. Шарт мекунем, ки аз ишораҳои зерин истифода барем: *(Аз ишораҳои зерин истифода мебарем)* номаълумҳоро бо ҳарфи $x-$и индексдор, яъне $x_1, \ldots, x_n$; коэффитсиенти назди номаълуми j-юм дар муодилаи i-юм бо a_{ij}; аъзои озоди муодилаи i-юм бо b_i $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, n)$ ишора мекунем.

Ҳамин тавр, системаи додашударо дар намуди умумӣ чунин навиштан мумкин аст:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Коэффитсиентҳои назди номаълумҳо таблитсаи росткунҷаи *(ҷадвали росткунҷашакли)*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

- ро ташкил мекунанд, ки он *матритсаи аз s – сатр ва n – сутун* иборатбуда номида шуда, ададҳои a_{ij} элеменҳои он мебошанд. Агар $s = n$ бошад, онро матритсаи квадратии тартиби n меноманд, яъне

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагонали ин матритса, ки аз кунҷи чапи болоӣ ба кунҷи рости поёнӣ мегузарад, яъне диагонале, ки аз элементҳои $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ тартиб дода шудааст, *диагонали асосӣ* номида мешавад.

Матритсаи квадратии тартиби n матритсаи воҳидӣ номида мешавад, агар ҳамаи элементҳои диагонали асосӣ баробари воҳид ва элементҳои боқимондаи он баробари сифр бошанд, яъне

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таъриф. *Ҳалли системаи муодилаҳои (1.1.1) гуфта, чунин системаи n ададҳои $k_1, k_2, ..., k_n$ - ро меноманд, ки ҳангоми онҳоро мувофиқан ба ҷои номаълумҳои $x_1, x_2, ..., x_n$ гузоштан, ҳар як муодилаи система ба айният табдил ёбад.*

Таъриф. *Агар системаи муодилаҳои хаттии (1.1.1) ҳал дошта бошад, онро ҳамҷоя ва агар ҳал надошта бошад, онро ноҳамҷоя маноманд.*

Масалан, системаи

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$$

ноҳамҷоя мебошад, чунки тарафҳои чапи онҳо якхела буда, тарафи росташон гуногун аст. Аз ҳамин сабаб, ягон системаи ададҳои $(k_1, k_2)-$ якбора ҳар ду муодиларо қаноат намекунонанд.

Таъриф. *Системаи ҳамҷояро муайян меноманд, агар вай танҳо якто ҳал дошта бошад, ва онро номуайян меноманд, агар миқдори ҳалҳои он аз якто зиёд бошад.*

Масалан, системаи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

муайян аст, чунки танҳо якто ҳалли $(1; 1)$-ро дорад. Системаи

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

номуайян аст, чунки ҳамаи ҷуфтҳои ададҳои намуди $(k; 3k - 1)$, $k-$дилхоҳ адади ҳақиқӣ, ҳалли он мебошад.

1.2 Системаҳои муодилаҳои баробарқувва

Таъриф. *Ду системаи муодилаҳои хаттии n – номаълума баробарқувва ё эквивалент номида мешаванд, агар ҳарду ноҳамҷоя бошанд, ё ин ки дилхоҳ ҳалли системаи якум ҳалли системаи дуюм ва баръакс, дилхоҳ ҳалли системаи дуюм ҳалли системаи якум бошад.*

Ҳарду тарафи муодилаи якуми системаи (1.1.1)-ро ба адади c зарб карда, онро аз муодилаи дуюм аъзо ба аъзо тарҳ намуда, системаи нави зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Теоремаи 1.2.1. *Системаҳои (1.1.1) ва (1.2.1) баробарқувва мебошанд.*

Исбот. Бигзор $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ дилхоҳ ҳалли системаи (1.1.1) бошад. Маълум аст, ки ин ҳал ба ғайр аз муодилаи дуюм ҳамаи муодилаҳои системаи (1.2.1)-ро қаноат мекунад. Ин ҳал инчунин муодилаи дуюмро ҳам қаноат мекунад, чунки ин муодила бо муодилаҳои якум ва дуюми системаи (1.1.1) ифода карда шудааст.

Баръакс дилхоҳ ҳалли системаи (1.2.1) системаи (1.1.1) – ро қаноат мекунад. Дар ҳақиқат, агар аз муодилаи дуюми системаи (1.2.1) муодилаи якуми онро, ки ба адади $-c$ зарб карда шудааст, тарҳ кунем, муодилаи дуюми системаи (1.1.1) – ро ҳосил мекунем.

Теорема исбот шуд.

Маълум аст, ки агар ба системаи (1.1.1) дигаргунсозии дар боло дида баромадаамонро якчанд маротиба татбиқ кунем, системаи ҳосилшудаи нав боз ба системаи аввалаи (1.1.1) баробарқувва мемонад.

Мумкин аст, ки баъди иҷрои ин дигаргунсозиҳо дар система муодилае пайдо шавад, ки ҳамаи коэффитсиентҳои тарафи чапи он баробари сифр шавад. Агар аъзои озоди ин муодила баробари сифр бошад, пас он дилхоҳ қимати номаълумҳоро қаноат мекунад, аз ҳамин сабаб ин муодиларо аз система партофта, системае ҳосил мекунем, ки он ба системаи аввала баробарқувва мебошад. Агар аъзои озоди ин муодила баробари сифр набошад, пас ин муодила ягон қимати номаълумҳоро қаноат намекунад, аз ҳамин сабаб ин система ва системаи аввалаи ба он баробарқувва ноҳамҷоя мебошанд.

1.3 Усули пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо

Бигзор ба мо системаи s – муодилаҳои хаттии n – номаълумаи дар мавзӯъҳои гузашта дидабаромадашудаи (1.1.1) дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Умумиятро маҳдуд накарда, фарз мекунем, ки коэффитсиенти $a_{11} \neq 0$ аст. Дар ҳақиқат, агар $a_{11} = 0$ бошад, мо усули пай дар пай хориҷкуниро аз муодилае сар мекунем, ки коэффитсиенти назди номаълуми якум баробари сифр намебошад.

Системаи (1.1.1)-ро дигаргун менамоем, яъне аз ҳамаи муодилаҳо ба ғайр аз муодилаи якум x_1- ро хориҷ мекунем. Барои ин ҳарду тарафи муодилаи якумро ба адади $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ зарб намуда, онро аз муодилаи дуюм тарҳ мекунем, баъд боз ҳар ду тарафи муодилаи якумро ба адади $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ зарб намуда, онро аз муодилаи сеюм тарҳ менамоем ва ҳоказо.

Ҳамин тавр, бо ин роҳ мо ба системаи нави s – муодилаҳои хаттии n – номаълумаи зерин меоем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + ... + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad\quad .... \\ \qquad\quad a'_{s2}x_2 + a'_{s3}x_3 + ... + a'_{sn}x_n = b'_s. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Мувофиқи теоремаи мавзӯи гузашта системаҳои (1.3.1) ва (1.1.1) баробарқувваанд. Акнун системаи (1.3.1) – ро дигаргун месозем. Ба муодилаи якуми (1.3.1) кордор намешавем. Ҳисоб мекунем, ки дар системаи (1.3.1) муодилае мавҷуд нест, ки ҳамаи коэффитсиентҳои назди номаълумҳо баробари сифр аст, агар аъзои озоди ин муодила баробари сифр мебуд, ин гуна муодиларо аз система мепартофтем, дар ҳолати баръакс мо аллакай исбот мекардем, ки системаи мо ноҳамҷоя мебошад.

Барои муайянӣ фарз мекунем, ки коэффитсиенти назди x_2 дар муодилаи дуюми системаи (1.3.1), яъне $a^{'}_{22} \neq 0$ аст. Дар системаи (1.3.1) аз муодилаҳои сеюм, чорум ва ҳоказо муодилаи $s-$ ум номаълуми x_2–ро хориҷ мекунем. Бо ин мақсад, ҳар ду тарафи муодилаи сеюм, чорум ва ҳар як муодилаи ояндаро аз муодилаи дуюм, ки мувофиқан ба ададҳои

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}},\quad \frac{a'_{42}}{a'_{22}},\ldots,\quad \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}$$

зарб карда шудааст, тарҳ менамоем. Дар натиҷа системаи зеринро ҳосил мекунем, ки он ба системаи (1.3.1) баробарқувва аст:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\qquad a^{'}_{22}x_2+a^{'}_{23}x_3+...+a^{'}_{2n}x_n=b^{'}_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^{''}_{33}x_3+...+a^{''}_{3n}x_n=b^{''}_3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^{''}_{t3}x_3+...+a^{''}_{tn}x_n=b^{''}_t. \end{cases}$$

Акнун системаи мо аз t, $(t \leq s)$ муодила иборат мебошад, чунки мумкин аст баъзе муодилаҳо партофта шуда бошанд. Дар қадами оянда аз муодилаҳои чорум ва ҳоказо t-юм номаълуми x_3- ро хориҷ мекунем.

Дар кадом ҳолат раванди пай дар пай хориҷкунӣ ба охир мерасад?

Агар дар раванди пай дар пай хориҷкунӣ ба муодилае дучор оем, ки коэффитсиенти назди номаълумҳо баробари сифр буда, аъзои озоди он ғайри сифр бошад, он гоҳ системаи додашудаи (1.1.1) ноҳамҷоя мебошад.

Дар ҳолати баръакс мо системаи муодилаҳои зеринро ҳосил менамоем, ки он ба системаи аввалаи (1.1.1) баробарқувва аст:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{1,k-1}x_{k-1} \ + \ a_{1k}x_k \ +\ldots+ \ a_{1n}x_n \ =b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2,k-1}x_{k-1} \ + \ a'_{2k}x_k \ +\ldots+ \ a'_{2n}x_n \ =b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad . \\ \qquad\qquad\qquad a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1}+a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k+\ldots+a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n=b^{(k-2)}_{k-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^{(k-1)}_{kk}x_k+\ldots+ \ a^{(k-1)}_{kn}x_n=b^{(k-1)}_k. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Дар ин ҷо $a_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, $\ldots$, $a^{(k-2)}_{k-1,k-1} \neq 0$, $a^{(k-1)}_{kk} \neq 0$. Инчунин қайд мекунем, ки $k \leq s$ аст ва бешубҳа $k \leq n$ мебошад.

Дар ин ҳолат системаи (1.1.1) ҳамҷоя мебошад ва он муайян аст, агар $k=n$ бошад ва номуайян аст, агар $k<n$ бошад. Дар ҳақиқат, ҳангоми $k=n$ будан системаи (1.3.2) намуди зеринро мегирад.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\quad a^{'}_{22}x_2+...+a^{'}_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a^{(n-1)}_{nn}x_n=b^{(n-1)}_n. \end{cases} \quad . \tag{1.3.3}$$

Аз муодилаи охирини системаи (1.3.3) қимати муайяни номаълуми x_n–ро ёфта, онро дар муодилаи пеш аз охирин гузошта, қимати ягонаи номаълуми x_{n-1}–ро муайян мекунем. Ин равандро давом дода, қиматҳои аниқи ягонаи номаълумҳои $x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_2, x_1$ -ро пай дар пай меёбем. Бо ин роҳ мо ҳалли ягонаи системаи (1.3.3)- ро ҳосил мекунем. Пас системаи (1.3.3) ва системаи ба он баробарқувваи (1.1.1) ҳалли ягона доранд. Яъне системаи (1.1.1) ҳамҷоя ва муайян мебошад.

Ҳангоми $k < n$ будан, $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$–ро номаълумҳои озод ҳисоб намуда, ба онҳо қиматҳои дилхоҳи $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$–ро мебахшем. Қиматҳои ададии дар тарафи чапи муодилаҳо ҳосилшударо ба тарафи рост гузаронида, системаи намуди (1.3.3)- ро ҳосил мекунем, ки он аз k–то муодилаи k–номаълума иборат аст, яъне миқдори муодилаҳо ба миқдори номаълумҳо баробар аст. Ин системаро бо усули дар боло нишондодашуда ҳал намуда, барои номаълумҳои $x_1, x_2, ..., x_k$ ҳалли ягонаи $(c_1, c_2, \dots, c_k)$–ро меёбем. Ҳамин тавр, барои системаи (1.3.2) ҳалли умуми $(c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$ -ро муайян намудем, ки дар инҷо $c_{k+1}, \dots, c_n$ ададҳои дилхоҳ мебошанд. Пас системаи (1.3.2) беохир бисёр ҳал дорад.

Бо ин роҳ ҳал намудани систеами муодилаҳои хаттиро усули пай дар пай хориҷкунии Гаусс меноманд.

Хулоса: *Усули пай дар пай хориҷкунии Гауссро барои дилхоҳ системаи муодилаҳои хаттӣ истифода бурдан мумкин аст. Агар дар раванди пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо ба зиддият дучор оем, яъне муодилае ҳосил кунем, ки дар он коэффитсиентҳои назди номаълумҳо ба сифр баробар асту аъзои озоди он нобаробари сифр мебошад, пас ингуна система ноҳамҷоя аст. Агар ба зиддият дучор наоем, система ҳамҷоя аст. Системаи ҳамҷоя муайян аст, агар он ба намуди секунҷа, яъне (1.3.3) оварда шавад ва он номуайян аст, агар он ба намуди трапетсия оварда шуда бошад.*

1.4 Усули пай дар пай хориҷкунӣ барои системаи муодилаҳои якҷинса

Таъриф. *Системаи муодилаҳои хаттиро якҷинса меноманд, агар ҳамаи аъзоҳои озоди он баробари сифр бошанд.*

Яъне системаи муодилаҳои хаттии якҷинсаро дар намуди умумӣ ба тарзи зерин навиштан мумкин аст:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Системаи муодилаҳои хаттии якҷинса доимо ҳамҷоя мебошад, чунки вай ҳалли нулии $(0, 0, \dots, 0)$– ро дорад.

Бигзор дар системаи якҷинса миқдори муодилаҳо аз миқдори номаълумҳо хурд бошад. Ҳангоми ҳал намудани чунин система бо усули пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо онро ба намуди секунҷа овардан мумкин нест, чунки дар раванди пай дар пай хориҷкунӣ миқдори муодилаҳо метавонад кам шавад, лекин зиёд намешавад. Аз ҳамин сабаб, ин система ба намуди трапетсия оварда мешавад, яъне он номуайян аст.

Хулоса. *Агар дар системаи муодилаҳои хаттии якҷинса миқдори муодилаҳо аз миқдори номаълумҳо хурд бошад, он гоҳ ин система ба ғайр аз ҳалли нулӣ боз ҳалҳои ғайринулӣ низ дорад, ки миқдори онҳо беохир бисёр аст.*

Мисоли 1. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

Матритсаи васеъкардашудаи ин системаро дигаргун мекунем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Ҳамин тавр, мо системаи зеринро ҳосил кардем:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Ҷавоб: $(2; -3; -1)$. Система муайян будааст.

Мисоли 2. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \;\; x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 \qquad\quad - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ \qquad\quad 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$$

Матритсаи васеъкардашудаи ин системаро дигаргун мекунем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -89 & 56 & -88 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 120 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -89 & 56 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right).$$

Ҳамин тавр, мо ба системае омадем, ки он муодилаи $0 = 32$ – ро дорад. Аз ҳамин сабаб система ноҳамҷоя мебошад.

Мисоли 3. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Ин системаи муодилаҳои якҷинса буда, дар он миқдори муодилаҳо аз миқдори номаълумҳо хурд мебошад. Аз ҳамин сабаб, вай бояд номуайян бошад. Азбаски ҳамаи аъзоҳои озод баробари сифранд, пас мо матритсаи аз коэффитсиентҳо тартибдодашударо дигаргун мекунем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ҳамин тавр мо ба системаи зерин омадем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + \ 3x_4 = 0, \\ \qquad 9x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 0, \\ \qquad\qquad 10x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Ба сифати номаълуми озод номаълуми x_4–ро мегирем. Бигзор $x_4 = c$, c адади дилхоҳ бошад, он гоҳ системаро ба намуди зерин менависем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3c \\ 9x_2 + 5x_3 = 13c \\ x_3 = \dfrac{4}{5}c \\ x_4 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -\dfrac{7}{5}c \\ x_2 = c \\ x_3 = \dfrac{4}{5}c \\ x_4 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{5}c \\ x_2 = c \\ x_3 = \dfrac{4}{5}c \\ x_4 = c \end{cases}.$$

Ҳамин тавр, намуди умумии ҳалли системаи муодилаҳоро ба тариқи зерин менависем:

$$\left(\frac{3}{5}c;\ c;\ \frac{4}{5}c;\ c\right).$$

1.5 Муайянкунандаи тартиби дуюм. Теоремаи Крамер барои системаи ду муодилаи хаттии дуномаълума

Бигзор ба мо системаи ду муодилаҳои хаттии дуномаълумаи зерин дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

Аз коэффитсиентҳои назди номаълумҳо матритсаи квадратии зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1.5.2)$$

Мувофиқан муодилаи якумро ба a_{22} ва дуюмро ба a_{12} зарб карда, аз муодилаи якум муодилаи дуюмро аъзо ба аъзо тарҳ мекунем. Айнан ҳамин тавр, муодилаи якумро ба a_{21} ва муодилаи дуюмро ба a_{11} зарб карда, аз муодилаи дуюм муодилаи якумро аъзо ба аъзо тарҳ мекунем. Дар натиҷа системаи (1.5.1) намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases}$$

Фарз мекунем, ки $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ аст. Пас

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (1.5.3)$$

Ин қимати номаълумҳоро ба муодилаҳои системаи (1.5.1) гузошта, бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки (1.5.3) дар ҳақиқат ҳалли системаи (1.5.1) мебошад. Масъалаи ягонагии ин ҳалро дар мавзӯъҳои оянда дида мебароем.

Қимати номаълумҳо дар (1.5.3) махраҷи якхела дошта, бо осонӣ бо элементҳои матритсаи (1.5.2) ифода карда мешавад ва он ба фарқи ҳосили зарби элементҳои диагонали асосӣ ва ҳосили зарби элементҳои диагонали дуюм баробар аст. Ин ададро *муайянкунандаи* матритсаи (1.5.2) меноманд. Ҳамин тавр, мо ба таърифи зерин меоем.

Таъриф. *Муайянкунандаи матритсаи квадратии (1.5.2) гуфта, ададеро меноманд, ки он ба фарқи ҳосили зарби элементҳои диагонали асосӣ ва ҳосили зарби элементҳои диагонали дуюм баробар аст ва онро ба таври зерин ишора мекунанд:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ин муайянкунандаро инчунин муайянкунандаи тартиби дуюм меноманд, чунки матритсаи (1.5.2) матритсаи квадратии тартиби дуюм мебошад.

Мисол:

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - (-1) \cdot 8 = 43.$$

Қайд мекунем, ки матритса ҷадвали ададҳо буда, муайянкунандаи он адади муайян мебошад ва бо тарзи муайян бо матритса алоқаманд аст. Ҳосили зарбҳои $a_{11}a_{22}$ ва $a_{12}a_{21}$ аъзоҳои муайянкунанда номида мешаванд.

Аз таърифи муайянкунанда истифода бурда, суратҳои (1.5.3)–ро ҳам бо воситаи муайянкунадаи тартиби дуюм ифода карда, ҳосил менамоем.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ҳамин тавр, мо боз як усули муайян намудани ҳалли системаи (1.5.1)–ро ёфтем, ки онро қоидаи Крамер меноманд.

Таъриф. *Муайянкунандаи асосии системаи (1.5.1) гуфта, муайянкунандаеро меноманд, ки он аз коэффитсиентҳои назди номаълумҳо тартиб дода шуда аст:*

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Теорема. (Қоидаи Крамер барои системаи ду муодилаи дуномаълума.) *Агар муайянкунандаи асосии системаи (1.5.1) ғайрисифрӣ бошад, он гоҳ система ҳамҷояи муайян аст ва ҳалли он бо ёрии формулаи*

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}$$

ҳисоб карда мешавад. Дар ин ҷо d_j - муайянкунандае мебошад, ки аз d дар натиҷаи иваз кардани сутуни j - юм бо сутуни аъзоҳои озод ҳосил шудааст:

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Мисол. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$$

Муайянкунандаи ин система ғайрисифрӣ мебошад:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0,$$

аз ҳамин сабаб, қоидаи Крамерро татбиқ мекунем. Муайянкунандаҳои d_1 ва d_2 – ро ҳисоб мекунем:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -21 + 2 = -19,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 7 = -11.$$

Ҳамин тавр, ҷуфти ададҳои зерин ҳалли система мебошанд:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{19}{7}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{11}{7}.$$

Ҷавоб. $\left(\frac{19}{7}; \frac{11}{7}\right)$

1.6 Муайянкунандаи тартиби сеюм. Теоремаи Крамер барои системаи се муодилаҳои сеномаълума

Бигзор ба мо системаи се муодилаҳои хаттии сеномаълумаи зерин дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Аз коэффитсиентҳои назди номаълумҳо матритсаи зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.6.2}$$

Агар мо ҳарду тарафҳои муодилаи якумро ба адади $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, муодилаи дуюмро ба адади $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ ва муодилаи сеюмро ба адади $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ зарб карда, онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ кунем, пас бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки коэффитсиенти назди x_2 ва x_3 ба сифр баробар мешавад, яъне ин номаълумҳо хориҷ мешавад ва мо баробарии зеринро ҳосил менамоем:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})x_1 =$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 - a_{13}a_{22}b_3 - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33}. \tag{1.6.3}$$

Коэффитсиенти назди $x-$ ро дар ин ифода *муайянкунандаи тартиби сеюми* матритсаи (1.6.2) меноманд. Барои навишти он ҳамон ишораеро истифода мебарем, ки барои муайянкунандаи тартиби дуюм истифода шуда буд. Ҳамин тавр

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ҳарчанд ифодаи муайянкунандаи тартиби сеюм кифоя калон бошад ҳам, қонуни тартиб додани аъзоҳои он аз элементҳои матритсаи (1.6.2) хеле оддӣ мебошад. Дар ҳақиқат, аз се аъзое, ки бо аломати ҷамъ гирифта мешавад, яктоаш ба ҳосили зарби элементҳои диагонали асосӣ баробар аст. Ду ҳосили зарби боқимонда мувофиқан ба ҳосили зарби элементҳои ба ин диагонал паралел ва элементи дар кунҷи муқобили матритса ҷойгирбуда баробаранд. Аъзоҳое, ки ба муайянкунанда бо аломати тарҳ дохиланд, нисбат ба диагонали дуюм айнан ҳамин хел тартиб дода мешаванд.

Тарафи рости (1.6.3) ҳам муайянкунандаи тартиби сеюм мебошад, воқеан муайянкунандае, ки аз муайянкунандаи матритсаи (1.6.2) дар натиҷаи иваз кардани сутуни якум бо сутуни аъзоҳои озод ҳосил шудааст. Агар муайянкунандаи матритсаи (1.6.2)–ро бо d ва муайянкунандае, ки аз он бо иваз намудани сутуни j–юм ($j = 1, 2, 3$) бо сутуни аъзоҳои озод ҳосил мешавад, бо d_j ишора кунем, пас баробарии (1.6.3) намуди $dx_1 = d_1$-ро мегирад. Аз ин ҷо ҳангоми $d \neq 0$ будан, ҳосил мекунем:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}. \tag{1.6.4}$$

Бо ҳамин роҳ муодилаҳои системаи (1.6.1) –ро мувофиқан ба ададҳои $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$ зарб карда, барои x_2 ифодаи зеринро ҳосил мекунем (ҳангоми $d \neq 0$):

$$x_2 = \frac{d_2}{d}. \tag{1.6.5}$$

Дар охир ин муодилаҳоро мувофиқан ба ададҳои $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ зарб карда, барои x_3 ифодаи зеринро ҳосил мекунем (ҳангоми $d \neq 0$):

$$x_3 = \frac{d_3}{d}. \tag{1.6.6}$$

Ифодаҳои (1.6.4)–(1.6.6)-ро дар муодилаҳои (1.6.1) гузошта, баъди ҳисобкуниҳои зиёд нишон додан мумкин аст, ки онҳо ҳар яке аз муодилаҳои системаро қаноат мекунонанд, яъне ададҳои (1.6.4)–(1.6.6) ҳалли системаи (1.6.1) мебошанд. Ҳамин тавр, мо тасдиқоти зеринро исбот намудем:

Теорема (Қоидаи Крамер барои системаи се муодилаҳои сеномаълума). *Агар муайянкунандаи асосии системаи (1.6.1) ғайри сифр бошад, он гоҳ система ҳамҷояи муайян аст ва ҳалли он бо ёрии формулаи*

$$x_j = \frac{d_j}{d}, \quad j = 1, 2, 3$$

ҳисоб карда мешавад. Дар ин ҷо d_j *- муайянкунандае мебошад, ки аз* d *дар натиҷаи иваз кардани сутуни* j *- юм бо сутуни аъзоҳои озод ҳосил шудааст.*

Исботи дигари ин теоремаро барои системаи n муодилаҳои n–номаълума бе истифодаи ҳисобкуниҳое, ки мо аз онҳо даст кашидем, дар мавзӯъҳои оянда дида мебароем.

Мисол. Системаро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Муайянкунандаи ин система ғайрисифрӣ мебошад:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 5 - 2 + 30 - 6 = 28 \neq 0.$$

Аз ҳамин сабаб қоидаи Крамерро татбиқ мекунем. Муайянкунандаҳои d_1, d_2, d_3 – ро ҳисоб мекунем:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 20 + 3 - 8 - 0 - 2 = 13,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 - 1 + 40 = 47,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 + 12 - 6 = 21.$$

Ҳамин тариқ, системаи ададҳои зерин ҳалли система мебошанд:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{21}{28}.$$

Ҷавоб: $\left(\frac{13}{28}; \frac{47}{28}; \frac{21}{28}\right)$

Мисолҳо оид ба ҳисоб намудани муайянкунандаҳои тартиби сеюм

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 60 + 2 - 9 - 16 - 15 = 40.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 40 - 24 - 105 + 10 + 224 - 45 = 100.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -9-20-32+20+24+12=-5.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 168-16+40+70-256-6=0.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -20-12-10+15+10+16=-1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 12+3+3-2-9-6=1.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-0=2.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 25-21=4.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10-18=-8.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} = 448+245+200-175-392-320=6.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} = 405+144+100-80-225-324=20.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45+84+96-105-72-48=0.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-c^3-a^3-b^3=3abc-c^3-a^3-b^3.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-cab-bca-bca=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc+x^3+x^3-bx^2-ax^2-cx^2=2x^3-(a+b+c)x^2+abc.$$

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = (a+x)(b+x)(c+x)+x^3+x^3-x^2(b+x)-x^2(a+x)-x^2(c+x)=$$

$$=(ab+ax+bx+x^2)(c+x)+2x^3-bx^2-x^3-ax^2-x^3-cx^2-x^3=$$

$$=abc+acx+bcx+cx^2+abx+ax^2+bx^2+x^3+2x^3-3x^3-bx^2-ax^2-cx^2=$$

$$=abc+acx+bcx+abx=abc+(ab+bc+ac)x.$$

1.7 Ҷойивазкуниҳо

Барои муайян намудан ва омӯхтани муайянкунандаҳои тартиби n–ум ба мо баъзе мафҳумҳо ва хосиятҳои маҷмӯъҳои охирнок лозим аст. Бигзор M маҷмӯи охирноки аз n элемент иборатбуда бошад. Элементҳои ин маҷмӯъро метавонем бо воситаи n ададҳои аввалаи натуралии $1, 2, ..., n$ рақамгузорӣ кунем. Азбаски хосиятҳои индивидуалии элементҳои маҷмӯи M ба мо лозим нестанд, мо ҳисоб мекунем, ки элементҳои маҷмӯи M бевосита ададҳои $1, 2, ..., n$ мебошанд.

Ба ғайр аз ҷойгиршавии $1, 2, ..., n$ ин ададҳоро бо тарзҳои дигар ҳам ҷойгир намудан мумкин аст. Масалан ададҳои $1, 2, 3, 4$ – ро инчунин бо тарзҳои зерин ҷойгир намудан мумкин аст: $3, 2, 1, 4$ ё $2, 4, 1, 3$ ва ҳоказо.

Таърифи 1.7.1. *Ҳар гуна ҷойгиршавии ададҳои* $1, 2, ..., n$ *–ро бо ягон тарзи муайян ҷойивазкунӣ аз* n *адад меноманд.*

Теоремаи 1.7.1. *Миқдори ҳамаи ҷойивазкуниҳо аз* n *адад ба* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ *баробар аст.*

Исбот. Дилхоҳ ҷойивазкунӣ аз n ададро ба намуди умумии $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо i_s яке аз ададҳои $1, 2, ..., n$ буда, ягон адад ду бор вонамехӯрад.

Аз ҳамин сабаб, ба сифати i_1 дилхоҳ аз ададҳои$1, 2, ..., n$–ро гирифтан мумкин аст. Ин ба мо n–то имкониятҳои гуногунро медиҳад. Агар i_1 аллакай интихоб шуда бошад, ба сифати i_2 яке аз $n-1$ ададҳои боқимондаро интихоб намудан мумкин аст, яъне i_2–ро бо $n-1$ тарз интихоб намудан мумкин аст. Пас миқдори интихобҳои гуногуни i_1 ва i_2 ба $n(n-1)$ баробар аст. Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки миқдори тарзҳои гуногуни интихоби i_1, i_2, i_3 ба $n(n-1)(n-2)$ баробар аст. Пас миқдори тарзҳои гуногуни интихоби $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ ба $n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 = n!$ баробар мебошад. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тавр, миқдори ҷойивазкуниҳо аз n адад ҳангоми $n = 2$ ба $2!$ (ҷойивазкуниҳои 12 ва 21; дар мисолҳо ҳангоми $n \leq 9$, ададҳоро бо вергул ҷудо намекунем); ҳангоми $n = 3$ ин миқдор ба $3! = 6$ ва ҳангоми $n = 4$ ба $4! = 24$ баробар аст. Қайд мекунем, ки бо зиёдшавии n миқдори ҷойивазкуниҳо фавқулодда тез меафзояд. Масалан, ҳангоми $n = 5$ онҳо ба $5! = 120$ баробар буда, барои $n = 10$ миқдори онҳо $10! = 3628800$ баробар мешаванд.

Таърифи 1.7.2. *Иваз кардани ҷойи ду ададро дар ҷойивазкунӣ, ки дар натиҷаи он ҷойивазкунии нав ҳосил мешавад, транспозитсия меноманд.*

Теоремаи 1.7.2. *Ҳамаи* $n!$ *ҷойивазкуниҳоро ҳамин хел пай дар пай ҷойгир намудан мумкин аст, ки ҳар як ҷойивазкунии пасоянд аз ҷойивазкунии пешоянд бо ёрии як транспозитсия ҳосил мешавад ва ин ҷойгиркуниро аз дилхоҳ ҷойивазкунӣ сар кардан мумкин аст.*

Исбот. Исботро ба усули индуксияи математикӣ мегузаронем. Тасдиқоти теорема барои $n = 2$ дуруст аст. Агар аз ҷойивазкунии 12 оғоз намоем, он гоҳ ҷойгиршавии мо намуди 12, 21–ро дорад, агар аз ҷойивазкунии 21 оғоз кунем, он гоҳ ҷойгиршавии мо намуди 21, 12–ро дорад.

Фарз мекунем, ки тасдиқоти теорема барои $n-1$ дуруст аст ва онро барои n исбот мекунем. Бигзор мо бояд пай дар пай ҷойгирнамоиро аз ҷойивазкунии

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n \tag{1.7.1}$$

сар кунем. Ҳамаи он ҷойивазкуниҳоро мебинем, ки дар ҷои аввал i_1 истодааст. Миқдори ин гуна ҷойивазкуниҳо мувофиқи фарзи индуксия ба $(n-1)!$ баробар аст. Ин ҷойивазкуниҳоро мувофиқи шарти теорема пайи ҳам навиштан мумкин аст. Ва мо онро аз ҷойивазкунии (1.7.1) сар мекунем ва ин паиҳамнависӣ дар ҳақиқати ҳол ба пайиҳамнависии ҳамаи ҷойивазкуниҳо аз $n-1$ адад оварда мешавад. Дар охир аз ҷойивазкунии бо ин усул ҳосил карадаи i_1- ро бо дилхоҳ дигар адад масалан бо i_2 транспазитсия мекунем ва акнун ҳаммаи ингуна ҷойивазкуниро ба намуди даркори пайи ҳам менависем. Баъди ин дар ҷои i_1, i_3- ро менависем ва ҳоказо. Бо ин роҳ ҳаммаи ҷойивазкуниҳоро дар бар гирифтан мумкин аст. Теорема исбот шуд.

Натиҷаи 1.7.1. *Аз дилхоҳ ҷойивазкунии аз* n *адад ба ҷойивазкунии дигар бо ёрии якчанд транспазитсия гузаштан мумкин аст.*

Таърифи 1.7.3. *Мегӯянд, ки дар ҷойивазкунӣ ададҳои* i *ва* j *инверсияро ташкил мекунанд, агар* $i > j$ *бошад, аммо дар ҷойивазкунӣ* i *аз* j *пештар истода бошад.*

Мисол. Дар ҷойивазкунии 15324 адади 5 бо ададҳои 3, 2 ва 4 инверсия ташкил мекунад, инчунин адади 3 бо адади 2 ҳам инверсия ташкил мекунад. Дар ин ҷойивазкунӣ миқдори инверсияҳо 4–то мебошад.

Таърифи 1.7.4. *Ҷойивазкуниҳоро ҷуфт меноманд, агар дар он миқдори инверсияҳо ба адади ҷуфт баробар бошад, дар ҳолати баръакс онро тоқ меноманд.*

Мисол: Ҷойивазкунии дар боло дидабаромадашудаи 15324 ҷуфт аст. Ҷойивазкунии 312 $(n = 3)$ 2–то инверсия дорад, аз ҳамин сабаб ҷуфт мебошад. Ҷойивазкунии 43761285 $(n = 9)$ бошад 13–то инверсия дорад, пас тоқ мебошад.

Теоремаи 1.7.3. *Ҳар гуна транспазитсия ҷуфтии ҷойивазкуниро дигар мекунад.*

Исбот: Вобаста аз ҷойгиршавии ададҳои транспозитсияшавандаи i ва j исботро дар ду ҳолат мегузаронем.

Ҳолати якум: Ададҳои i ва j ҳамсояанд, яъне дар байни онҳо адади дигар нест, яъне ҷойивазкунии мо намуди зеринро дорад:

$$\ldots,\ i,\ j,\ \ldots, \tag{1.7.2}$$

дар инҷо бо нуқтаҳо он ададҳоро ишора намудем, ки ба онҳо транспозитсия дахл надорад. Транспозитсия ҷойивазкунии (1.7.2)-ро ба ҷойивазкунии

$$\ldots,\ j,\ i,\ \ldots \tag{1.7.3}$$

табдил медиҳад. Фаҳмо аст, ки дар ҷойивазкуниҳои (1.7.2) ва (1.7.3) ададҳои i ва j бо ададҳое, ки дар ҷойҳои худ мемонанд, инверсияҳои якхела ташкил мекунанд, яъне миқдори инверсияҳои ин ҷойивазкуниҳо нисбат ба i ва нисбат ба j ба ҳам баробар аст. Агар i бо j пештар инверсия ташкил намекард, акнун дар ҷойивазкунии нав якто инверсияи нав пайдо мешавад, яъне миқдори инверсияҳо як воҳид зиёд мешавад. Агар i ва j пештар инверсия ташкил мекарданд, акнун онҳо инверсия ташкил намекунанд. Яъне миқдори инверсияҳо як воҳид кам мешавад. Ҳолати якуми теорема исбот шуд.

Ҳолати дуюм: Бигзор дар байни ададҳои транспозитсияшавандаи i ва j s–то, $s > 0$ ададҳо ҷойгиранд, яъне ҷойивазкунӣ намуди зеринро дорад:

$$\ldots,\ i,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s,\ j,\ \ldots \tag{1.7.4}$$

Транспозитсияҳои ададҳои i ва j–ро дар натиҷаи пай дар пай иҷро намудани $2s + 1$-то транпозитсияи ададҳои ҳамсоя иҷро кардан мумкин аст. Яъне транспозитсияи i ва k_1, баъд i (аллакай дар ҷои k_1 истодааст) бо k_2 ва ҳоказо то вақте, ки i ҷои k_s–ро намегирад, баъд ин s–то транспозитсияҳо боз транспозитсияе, ки ҷои i ва j–ро иваз мекунад ва s–то транспозитсияҳои адади j бо ададҳои $k_s, k_{s-1}, \ldots, k_1$, ки дар натиҷаи иҷрои онҳо j ҷои i–ро мегирад ва $k_1, k_2 \ldots, k_s$ ба ҷойҳои аввала бармегарданд.

Ҳамин тавр мо ҷуфтии ҷойивазкуниро ба миқдори тоқ дигар намудем, пас ҷойивазкунии (1.7.4) ва ҷойивазкунии

$$\ldots,\ j,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s,\ i,\ \ldots$$

ҷуфтиҳои муқобил доранд. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 1.7.4. *Ҳангоми* $n \geq 2$ *будан, миқдори ҷойивазкуниҳои ҷуфт ва тоқ бо ҳам баробаранд, яъне онҳо ба* $\frac{1}{2}n!$ *баробар мешаванд.*

Исбот. Мувофиқи теоремаи 1.7.2 ҳамаи $n!$ ҷойивазкуниҳоро ҳамин хел пай дар пай ҷойгир намудан мумкин аст, ки ҳар як ҷойивазкунии пасоянд аз ҷойивазкунии пешоянд бо ёрии як транспозитсия ҳосил мешавад. Ҷойивазкунии ҳамсоя ҷуфтиҳои гуногун доранд, яъне пай дар пай ҷойгирнамоии ҷойивазкуниҳои ҷуфт ва тоқ якдигарро иваз менамоянд. Аз ҷуфт будани адади $n!$ ҳангоми $n \geq 2$ тасдиқоти теорема бармеояд.

1.8 Гузоришҳо

Боз як мафҳуми нав, яъне мафҳуми гузориши дараҷаи n–умро муайян мекунем. Дар зери якдигар ду ҷойивазкунии аз n– ададҳоро навишта аз ду тарафи онҳо қавс мегирем, масалан ҳангоми $n = 5$ (будан гузоришро дар намуди зерин менависем):

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8.1}$$

Дар ин мисол дар зери ададди 3 ададди 5 истодааст, дар зери ададди 5 ададди 2 истодааст ва ҳоказо. Мо мегӯем, ки ададди 3 ба 5, ададди 5 ба 2, ададди 1 ба 3, ададди 4 ба 4 ва ададди 2 ба 1 мегузарад. Ҳамин тавр ду ҷойивазкнии дар зери якдигар навишташудаи (1.8.1) ягон инъикоси байни ҳам яккиматаи панҷ ададди натуралии авваларо ба худашон муайян мекунад, яъне инъикосе, ки ба ҳар яки ададҳои натуралии 1,2,3,4,5 яке аз ин ададҳо мувофиқ гузошта мешавад, илова бар ин ба ададҳои гуногун дар ин мувофиқгузорӣ ададҳои гуногун мувофиқ гузошта мешаванд.

Айнан ҳамин тавр ду ҷойивазкнии аз n–адад, ки дар зери якдигар навишташудаанд, ягон инъикоси байни ҳам яккиматаи n–ададди натуралии авваларо ба худашон муайян мекунад.

Таърифи 1.8.1. *Ҳаргуна инъикоси байни ҳам яккиматаи A–и байни n–то ададҳои натуралии авваларо ба худашон гузориши дараҷаи n–ум меноманд.*

Ҳар гуна гузориши A–ро бо ёрии ду ҷойивазкуние, ки яке онҳо дар зери дигараш ҷойгир аст, навиштан мумкин аст.

$$A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{1.8.2}$$

дар инҷо бо воситаи α_i ададеро ишора мекунем, ки ҳангоми гузориши A ададди i ба он мегузарад, $i = 1, 2, \dots, n$.

Гузориши A–ро бо тарзҳои гуногун ба намуди (1.8.2) навиштан мумкин аст. Масалан гузориши (1.8.1)–ро боз ба намудҳои зерин навиштан мумкин аст:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аз як навишти гузориши A ба навишти дигар бо ёри якчанд транспозитсияи сутунҳо гузаштан мумкин аст. Илова бар ин ҳамин хел навишти намуди (1.8.2)–ро ҳосил намудан мумкин аст, ки дар сатри болоӣ (ё поёнӣ) ҷойивазкунии аз n–ададди пешакӣ додашуда, истодааст. Аз он ҷумла дилхоҳ гузориши дараҷаи n–уми A–ро ба намуди

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

навиштан мумкин аст, ки сатри болоии он ин ададҳои натуралии 1, 2, ..., n бо тартиби афзуншавиашон ҷойгиранд. Ин намуди навиштро *навишти стандартӣ* меноманд. Дар навишти стандартӣ гузоришҳои гуногун аз якдигар танҳо бо сатри дуюмашон фарқ мекунанд. Аз инҷо мебарояд, ки ба ҳар як гузориши дараҷаи n якто ҷойивазкунӣ аз n адад (сатри дуюми он) мувофиқ меояд, ва баръакс ба ҳар як ҷойивазкунӣ аз n адад якто гузориши дараҷаи n мувофиқ меояд. Аз ҳамин сабаб мо тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 1.8.1. *Миқдори гузоришҳои дараҷаи n ба миқдори ҷойивазкуниҳо аз n адад, яъне ба $n!$ баробар аст.*

Яке аз мисолҳои гузориши дараҷаи n–ум гузориши воҳидии

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

мебошад, ки ҳангоми он ҳамаи ададҳо бетаъғйир мемонанд, яъне ҳар як адад ба худаш мегузарад.

Чи хеле, ки мо дар боло гуфтем аз як навишт ба навишти дигар бо ёрии иҷро намудани якчанд транспозитсияҳои сутунҳо гузаштан мумкин аст. Ҳангоми иҷро намудани як транспозитсия мувофиқи теоремаи 1.7.3 ҷуфтиҳои сатри якум ва сатри дуюми гузориш ҳамчун ҷойивазкуниҳо дигар мешаванд, аз ҳамин сабаб якхела ё гуногун будани ҷуфтиҳои онҳо нигоҳ дошта мешавад. Аз ин ҷо мо тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 1.8.2. *Дар дилхоҳ навиштҳои гузориши A ҷуфтиҳои сатри болоӣ ва поёнӣ якхелаанд ё ин сатрҳо ҷуфтиҳои гуногун доранд.*

Аз ин теорема истифода бурда мафҳуми гузоришҳои ҷуфт ва тоқро дохил мекунем.

Таърифи 1.8.2. *Гузоришро ҷуфт меноманд, агар ҷуфтиҳои сатрҳои он якхела бошанд ва тоқ меноманд агар онҳо ҷуфтиҳои гуногун дошта бошанд.*

Аз он ҷумла гузориши воҳидӣ ҷуфт мебошад. Агар гузориши A дар намуди стандартӣ дода шуда бошад, онгоҳ ҷуфтии он бо ҷуфтии сатри дуюми он якхела аст, яъне дар намуди стандартӣ гузориш ҷуфт (тоқ) мебошад, агар сатри дуюми он ҷойивазкунии ҷуфтро (тоқро) ташкил кунад. Аз ҳамин сабаб миқдори гузоришҳои ҷуфт (тоқ) ба миқдори ҷойивазкуниҳои тоқ (ҷуфт) баробар аст. Аз инҷо дар асоси теоремаи 1.7.4 тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 1.8.3. *Миқдори гузоришҳои ҷуфт ба миқдори гузоришҳои тоқ, яъне ба $\frac{1}{2}n!$ баробар аст.*

1.9 Гурӯҳҳо

Ишораҳои зеринро дохил мекунем, ки дар оянда ҳам аз онҳо истифода мебарем:
$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – маҷмӯи ададҳои натуралӣ;
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – маҷмӯи ададҳои бутун;
$Z_m = \{0, \pm m, \pm 2m, \ldots\}$ – маҷмӯи ададҳои бутуни ба m каратӣ;
$Q = \left\{\dfrac{p}{q} : \ p \in Z, \ q \in N\right\}$ – маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ;
R – маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ.

Таърифи 1.9.1. *Мегӯянд, ки дар маҷмӯи G амали алгебравии $*$ дода шудааст, агар барои дилхоҳ элементҳои a ва b аз G муносибати $a * b \in G$ иҷро шавад.*

`Мисолҳо`: Амалҳои ҷамъ $(+)$ ва зарб $(\cdot)$ дар маҷмӯҳои N, Z, Z_m, Q, R амали алгебравӣ мебошанд. Амали зарб дар маҷмӯи Z_- – ададҳои манфии бутун амали алгебравӣ намебошад.

Таърифи 1.9.2. *Маҷмӯъи G бо амали алгебравии $*$ яъне $(G, *)$ гурӯҳ номида мешавад, агар барои дилхоҳ элементҳои он шартҳои зерин иҷро шавад:*

- *қонуни ассотсиативӣ барои амали $*$: $(a * b) * c = a * (b * c)$ барои дилхоҳ a, b, c аз G;*
- *мавҷудияти элементи воҳидии (нулии) $e \in G$ нисбат ба амали $*$, ки барои дилхоҳ $a \in G$ баробарии $a * e = a$ ҷой дорад;*
- *мавҷудияти элементи баръакси (муқобили) a', барои дилхоҳ $a \in G$: $a * a' = e$.*

Таърифи 1.9.3. *Гурӯҳи $(G, *)$ – ро абелӣ меноманд, агар барои дилхоҳ $a \in G$ ва $b \in G$ қонуни коммутативии $a * b = b * a$ иҷро шавад.*

`Мисолҳо`: $(Z, +)$, $(Z_m, +)$ $(Q, +)$, $(R, +)$, $(Q\backslash\{0\}, \cdot)$, $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ – гурӯҳ мебошанд.

Дар ҳақиқат ҳосили зарби ду адади ратсионалӣ боз адади ратсионалӣ буда, амали зарб дар маҷмӯъи ададҳои ратсионалӣ ба қонуни асосиативӣ қаноат мекунад. 1 – адади ратсионалӣ буда нисбат ба адади зарб роли элементи воҳидро мебозад ва барои дилхоҳ адади ратсионалии ғайринулии $\frac{p}{q}$, адади $\frac{q}{p}$ адади баръакс мебошад, яъне

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1.$$

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқии ғайринулӣ аз рӯи амали зарб гурӯҳ мебошад.

Маҷмӯи $(Z,\cdot)$–гурӯҳ намебошад, чунки барои ададҳои бутуни нобаробари ± 1 дар ин маҷмӯъ элементи баръакс мавҷуд нест, яъне шарти сеюм иҷро намешавад.

Вобаста аз шумораи элементҳояш гурӯҳ метавонад охирнок ё ин ки беохир бошад. Ҳамаи гурӯҳҳои дар боло овардаамон: $(Z,+),(Q,+)$, $(R,+)$, $(Q\setminus\{0\},\cdot)$, $(R\setminus\{0\},\cdot)$ мисоли гурӯҳҳои беохир мебошанд.

Мисолҳои гурӯҳҳои охирнок: $(\{0\},+)$ – гурӯҳи якэлемента, $(\{1\},\cdot)$ – гурӯҳи якэлемента, $(\{1;-1\},\cdot)$ – гурӯҳи дуэлемента.

1.10 Зарби гузоришҳо

Мо медонем, ки ҳаргуна инъикоси байни ҳам якқиматаи ададҳои натуралии $1,2,\dots,n$ ба худашон гузориши дараҷаи n–ум мебошад. Натиҷаи пай дар пай иҷро намудани ду инъикосҳои байни ҳам якқиматаи ададҳои натуралии $1,2,\dots,n$ ба худашон, яъне пай дар пай иҷро намудани ду гузоришҳои дараҷаи n–ум боз ягон гузориши дараҷаи n–ум мешавад, ки онро зарби гузориши якум бар дуюм меноманд. Масалан агар ба мо гузоришҳои дараҷаи чоруми зерин дода шуда бошанд:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},$$

он гоҳ

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}.$$

Дар ҳақиқат, ҳангоми гузориши A адади 1 ба 3, ҳангоми гузориши B адади 3 ба 4 мегузарад, пас ҳангоми гузориши AB адади 1 ба 4 мегузарад ва ҳоказо. Ҳамин тавр мо ба таърифи зерин меоем.

Таърифи 1.10.1. *Зарби гузоришҳои дараҷаи n–уми*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\\alpha_1&\alpha_2&\dots&\alpha_n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\\beta_1&\beta_2&\dots&\beta_n\end{pmatrix}$$

гуфта, гузоришеро меноманд, ки дар натиҷаи пай дар пай иҷрошавии ин гузоришҳо ҳосил мешавад:

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\\beta\alpha_1&\beta\alpha_2&\dots&\beta\alpha_n\end{pmatrix}.$$

Ҳамин тавр, зарби гузоришҳои дараҷаи n–ум амали алгебравӣ мебошад.

Маҷмӯи ҳамаи гузоришҳои дараҷаи n–умро бо воситаи S_n ишорат менамоем. Фақат гузоришҳои дараҷаҳои якхеладоштаро зарб кардан мумкин аст. *Зарби гузоришҳои дараҷаи n–ум, ҳангоми $n\geq 3$ будан, ғайрикоммутативӣ мебошад.* Дар ҳақиқат, барои гузоришҳои дар боло овардаамон ҳосили зарби BA намуди зеринро дорад:

$$BA=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix},$$

яъне гузориши BA аз гузориши AB фарқ мекунад. Ин гуна мисолҳоро барои дилхоҳ n, ҳангоми $n\geq 3$ овардан мумкин аст, ҳарчанд барои баъзе ҷуфтҳо қонуни коммутативӣ мумкин аст, иҷро шавад.

Теоремаи 1.10.1. *Маҷмӯъи S_n – ҳамаи гузоришҳои дараҷаи n– ум, нисбат ба амали зарби гузоришҳо гурӯҳ мебошад.*

Исбот. Нишон медиҳем, ки барои зарби гузоришҳои дараҷаи n–ум ҳамаи се шарти гурӯҳ иҷро мешавад.

Зарби гузоришҳо ассотсиативӣ мебошад. Бигзор гузоришҳои A, B ва C дода шуда бошанд, ки адади $i_1, 1 \leq i_1 \leq n$ дар натиҷаи гузориши A ба адади i_2, адади i_2 дар натиҷаи гузориши B ба адади i_3 гузаранд, ва адади i_3 дар натиҷаи гузориши C ба адади i_4 гузарад:

$$i_1 \overset{A}{\to} i_2 \overset{B}{\to} i_3 \overset{C}{\to} i_4.$$

Он гоҳ дар натиҷаи гузориши AB адади i_1 ба адади i_3 ва дар натиҷаи гузориши BC адади i_2 ба адади i_4 мегузарад:

$$i_1 \overset{AB}{\to} i_3, \qquad i_2 \overset{BC}{\to} i_4$$

Пас, дар натиҷаи гузориши $(AB)C$ ва ҳам дар натиҷаи гузориши $A(BC)$ адади i_1 ба адади i_4 мегузарад:

$$i_1 \overset{AB}{\to} i_3 \overset{C}{\to} i_4, \qquad i_1 \overset{A}{\to} i_2 \overset{BC}{\to} i_4.$$

Аз ҳамин сабаб

$$(AB)C = A(BC).$$

Гузориши воҳидии E дар зарби гузоришҳо роли воҳидро мебозад, яъне ҳосили зарби дилхоҳ гузориши A ба E ва ҳосили зарби E ба A ба гузориши A баробар аст:

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = A,$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = A.$$

Гузориши баръакс барои гузориши дараҷаи $n-$ уми A гуфта, гузориши A^{-1}-ро меноманд, ки

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки барои гузориши

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

гузориши баръакс ба тариқи зерин муайян карда мешавад:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

яъне A^{-1} аз A дар натиҷаи иваз кардани ҷои сатрҳои болоӣ ва поёнӣ ҳосил мешавад.

Теорема исбот шуд.

Аз ғайрикоммутативӣ будани зарби гузоришҳои дараҷаи n–ум, ҳангоми $n \geq 3$ натиҷаи зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 1.10.1. *Гурӯҳи симметрии S_n ҳангоми $n \geq 3$ будан гурӯҳи абелӣ намебошад.*

Теоремаи 1.10.2. *Маҷмӯъи A_n– ҳамаи гузоришҳои дараҷаи n– уми ҷуфт нисбат ба амали зарби гузоришҳо гурӯҳ мебошад.*

1.11 Муайянкунандаи тартиби n – ум

Аллакай мо бо муайянкунандаҳои тартиби дуюм ва сеюм шинос шудем ва ифодаҳои онҳоро ба хотир меорем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{12}a_{33}.$$

Мо мебинем, ки ҳар як аъзои муайянкунандаи тартиби дуюм ба ҳосили зарби ду элементҳое, ки дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногун ҷойгирбуда баробар аст ва ҳамаи чунин ҳосили зарбҳои имкопазир ба сифати аъзоҳои муайянкунанда истифода шудаанд. Айнан ҳамин тавр, дилхоҳ аъзои муайянкунандаи тартиби сеюм ба ҳосили зарби се элементҳои дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногун ҷойгирбуда баробар аст ва ҳамаи чунин ҳосили зарбҳои имконпазир ба сифати аъзоҳои муайянкунанда истифода шудаанд.

Бигзор ба мо матритсаи квадратии тартиби n дода шудааст:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.11.1}$$

Ҳамаи ҳосили зарбҳои имконпазири n элементҳои дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногуни ин матритса, яъне ҳосили зарби намуди

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n} \tag{1.11.2}$$

-ро дида мебароем. Дар ин ҷо $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ягон ҷойивазкунӣ аз ададҳои $1, 2, \dots, n$ мебошад. Миқдори ин гуна ҳосили зарбҳои намуди (1.11.2) ба миқдори ҷойивазкуниҳои гуногун аз n адад, яъне ба $n!$ баробар аст. Ҳамаи чунин ҳосили зарбҳоро аъзоҳои муйянкунандаи тартиби n – и матритсаи A ҳисоб мекунем.

Барои муайян кардани аломате, ки бо он ҳосили зарби (1.11.2) ба муайянкунанда дохил мешавад, аз индексҳои ин ҳосили зарб гузориши зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{1.11.3}$$

Дар ин ҷо i ба α_i мегузарад, агар дар ҳайати ҳосили зарби (1.11.2) элементи дар буриши сатри i-юм ва сутуни α_i-юм ҷойгиршуда мавҷуд бошад.

Ифодаҳои муайянкунандаҳои тартиби дуюм ва сеюмро дида баромада, ба осонӣ боварӣ ҳосил мекунем, ки ба онҳо бо аломати "$+$" ҳамон ҳосили зарбҳо дохил мешаванд, агар индексҳои он гузориши ҷуфтро ташкил кунанд ва бо аломати "$-$" ҳосили зарбҳое дохил мешаванд, ки индексҳои онҳо гузориши тоқро ташкил мекунанд. Ин қонуниятро барои дохил намудани мафҳуми муайянкунандаи тартиби n–ум нигоҳ медорем.

Ҳамин тавр, мо ба таърифи зерини муайянкунандаи тартиби n – ум меоем.

Таърифи 1.11.1. *Муайянкунандаи тартиби n – уми матритсаи A гуфта, суммаи алгебравии $n!$ аъзоҳоро меноманд. Ҳар як аъзо ба ҳосили зарби n – то элементҳои матритсаи A, ки дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногун ҷойгиранд, баробар аст. Ин ҳосили зарб ба муайянкунанда бо аломати "$+$" дохил мешавад агар индексҳои ин гузориши ҷуфтро ташкил кунанд ва бо аломати "$-$" дохил мешавад агар индексҳои ин гузориши тоқро ташкил кунанд.*

Барои навишти муайянкунандаи тартиби n – уми матритсаи A ба монади ҳолати $n = 2$ ва $n = 3$ аз ишораи зерин истифода мебарем:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.12 Хосиятҳои муайянкунандаҳо

Транспонидани матритсаи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

гуфта, чунин дигаргунсозиро меноманд, ки ҳамаи сатрҳо бо ҳамон тартиб ба сутунҳо табдил меёбанд, яъне гузариши аз матритсаи A ба матритсаи

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

транспониронидан мебошад.

Хосияти 1. *Ҳангоми транспониронидан қимати муайянкунанда тағйир намеёбад:* $|A| = |A'|$.

Исбот. Дилхоҳ аъзои муайянкунандаи $|A|$ намуди зерин дорад:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{1.12.1}$$

дар ин ҷо индексҳои дуюм $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ягон ҷойивазкунии аз ададҳои $1, 2, \dots, n$ мебошад. Ҳамаи зарбшавандаҳои ҳосили зарби (1.12.1) дар муайянкунандаи $|A^{'}|$ ҳам дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногун ҷойгиранд, яъне ҳосили зарбҳои (1.12.1) аъзоҳои муайянкунандаи $|A^{'}|$ ҳам мебошанд. Тасдиқоти баръакс ҳам ҷой дорад, аз ҳамин сабаб муайянкунандаҳои $|A|$ ва $|A^{'}|$ аз аъзоҳои якхела иборатанд.

Аломати аъзои (1.12.1) дар муайянкунандаи $|A|$ бо ҷуфтии гузориши

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.12.2}$$

муайян карда мешавад. Дар муайянкунандаи $|A'|$ индексҳои якум рақами сутун ва индексҳои дуюм рақами сатрро нишон медиҳанд, аз ҳамин сабаб аломати аъзои (1.12.1) дар муайянкунандаи $|A'|$ бо ҷуфтии гузориши

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \tag{1.12.3}$$

муайян карда мешавад. Гузоришҳои (1.12.2) ва (1.12.3) умуман гузоришҳои гуногун мебошанд, лекин онҳо ҷуфтҳои якхела доранд, аз ҳамин сабаб ҳосили зарби (1.12.1) дар муайянкунандаҳои $|A|$ ва $|A^{'}|$ аломатҳои якхела доранд. Ҳамин тавр, муайянкунандаҳои $|A|$ ва $|A^{'}|$ аз суммаи аъзоҳои якхела, ки бо аломатҳои якхела гирифта шудаанд, иборатанд, яъне онҳо ба якдигар баробаранд.

Аз хосияти 1 бармеояд, ки ҳар гуна тасдиқоте, ки барои сатр ҷой доранд барои сутунҳо ҳам дуруст аст, яъне дар муаяйнкунанда сатрҳо ва сутунҳо баробарҳуқуқанд.

Аз ҳамин сабаб, хосиятҳои минбаъдаи 2 – 9–ро фақат барои сатрҳо дида баромада, дар назар мегирем, ки онҳо барои сутунҳо ҳам ҷой доранд.

Хосияти 2. *Муайянкунандае, ки яке аз сатрҳояш аз сифрҳо иборатанд, ба сифр баробар аст.*

Исбот. Бигзор ҳамаи элементҳои сатри i – юм аз сифрҳо иборат бошанд. Ба ҳар як аъзои муайянкунанда якто элемент аз сатри i – юм дохил мешавад, пас ҳамаи аъзоҳои муайянкунанда ба сифр баробаранд.

Хосияти 3. *Агар дар муайянкунанда ҷойи ду сатрро иваз намоем, аломати он тағйир меёбад.*

Исбот. Бигзор дар муайянкунандаи

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \tag{1.12.4}$$

ҷои сатрҳои i – юм ва j – юм иваз карда шудаанду сатрҳои боқимонда дар ҷойҳои худ бетағйир мондаанд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (j) \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \tag{1.12.5}$$

(дар қавсҳо рақами сатрҳо нишон дода шудаанд). Агар

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \tag{1.12.6}$$

аъзои муайянкунандаи (1.12.4) бошад, пас ҳамаи зарбшавандаҳои вай дар муайянкунандаи (1.12.5) ҳам дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногун ҷойгиранд. Ҳамин тавр, муайянкунандаҳои (1.12.4) ва (1.12.5) аз аъзоҳои якхела иборатанд.

Аломати аъзои (1.12.6) дар муайянкунандаи (1.12.4) ба гузориши

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{1.12.7}$$

дар муайянкунандаи (1.12.5) бошад, ба гузориши

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.12.8}$$

муайян карда мешавад, чунки масалан элементи $a_{i\alpha_i}$ акнун дар сатри j – юм ва сутуни аввалаи α_i – юм ҷойгир аст. Гузориши (1.12.8) аз гузориши (1.12.7) бо ёрии як транспазитсияи сатри болоӣ ҳосил мешавад, яъне ин гузоришҳо ҷуфтҳои гуногун доранд.

Аз ҳамин сабаб, ҳамаи аъзоҳои муайянкунандаи (1.12.4) дар муайянкунандаи (1.12.5) бо аломатҳои муқобил дохил мешаванд. Яъне муайянкунандаҳои (1.12.4) ва (1.12.5) аз якдигар танҳо бо аломатишон фарқ мекунанд.

Хосияти 4. *Муайянкундае, ки ду сатри якхела дорад, ба сифр баробар аст.*

Исбот. Бигзор қимати муайянкунанда ба адади d баробар асту сатрҳои i – юм ва j – юми он ба ҳамдигар баробаранд. Баъди иваз намудани ҷойи сатрҳои i – юм ва j – юм мувофиқи хосияти 3 муайянкунанда ба $-d$ баробар мешавад. Азбаски ҳангоми ҷои сатрҳои якхеларо иваз намудан муайянкунанда тағйир намеёбад, пас $d = -d$, яъне $d = 0$ аст.

Хосияти 5. *Агар ҳамаи элементҳои ягон сатри муайянкунанда ба адади k зарб карда шаванд, он гоҳ худи муайянкунанда ҳам ба k зарб карда мешавад.*

Исбот. Бигзор ҳамаи элеменҳои сатри i – юм ба k зарб карда шаванд. Ҳар як аъзои муайянкунанда якто элемент аз сатри i – юм доранд, пас ҳар як аъзои муайянкунанда ба k зарб карда мешавад, яъне худи муайянкунанда ҳам ба k зарб карда мешавад.

Ин хосиятро ба тариқи зерин ҳам баён намудан мумкин аст: *зарбшавандаи умумии ҳамаи элементҳои ягон сатри муайянкунандаро аз зери аломати муайянкунанда берун баровардан мумкин аст.*

Хосияти 6. *Муайянкунандае, ки ду сатри мутаносиб дорад ба сифр баробар аст.*

Исбот. Бигзор сатрҳои i – юм ва j – юм байни ҳам мутаносибанд, яъне элементҳои сатри j – юм аз элементҳои мувофиқи сатри i – юм дар натиҷаи ба адади k зарб задан ҳосил мешаванд. Ин зарбшавандаи умумии k – ро аз сатри j-юм аз зери аломати муайянкунанда берун баровардa муайянкунандае ҳосил мекунем, ки он ду сатри баробар дорад ва мувофиқи хосияти 4-ум ба нул баробар аст.

Хосияти 7. *Агар ҳамаи элементҳои сатри i – юми муайянкунанда ҳамчун суммаи ду ҷамъшавандаҳо тасвир карда шуда бошанд:*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, 2, ..n,$$

онгоҳ муайянкунанда ба суммаи ду муайянкунандаҳо, ки ҳамаи сатрҳои онҳо ба ғайр аз сатри i – юм бо муайянкунандаи додашуда яккхела буда сатри i – юми муайянкунандаи якум аз элементҳои b_j ва сатри i – юми муайянкунандаи дуюм аз элементҳои c_j иборат мебошанд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.12.9)$$

Исбот. Дар ҳақиқат, дилхоҳ аъзои муайянкунандаи додашударо ба намуди зерин тасвир намудан мумкин аст:

$$\begin{aligned} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} &= a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots (b_{\alpha_i} + c_{\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} = \\ &= a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots b_{\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots c_{\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}. \end{aligned}$$

Ҷамъшавандаҳои якуми ин суммаҳоро якҷо намуда, муайянкунандае ҳосил мекунем, ки аз муайянкунандаи додашуда танҳо бо он фарқ мекунад, ки дар сатри i – юм ба ҷои элементҳои a_{ij} элементҳои b_j истодаанд. Мувофиқан, ҷамшавандаҳои дуюм муайянкунандаеро ташкил мекунад, ки дар сатри i – юм элементҳои c_j истодаанд. Ҳамин тавр муносибати (1.12.9) ҷой дорад.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки хосияти 7 дар ҳолате, ки ҳар як элементи сатри i – юм ба суммаи m, $m \geq 2$ ҷамъшаванда баробар будан ҳам ҷой дорад.

Таърифи 1.12.1. *Мегӯянд, ки сатри i – юми муайянкунанда ба комбинатсияи хаттии сатрҳои боқимондаи он баробар аст, агар барои дилхоҳ сатри j – юм, $j = 1, \dots i-1, i+1, \dots n$ чунинададҳои k_j мавҷуд бошанд, ки ҳангоми сатри j – юмро ба адади k_j зарб намуда ҳамаи ин сатрҳоро ба ғайр аз сатри i – юм ҷамъ намудан, сатри i-юм ҳосил шавад.*

Қайд кардан ҷоиз аст, ки дар ин таъриф баъзе аз коэффитсиентҳои k_j метавонанд баробари сифр бошанд, яъне сатри i – юм ба комбинатсияи хаттии як қисми сатрҳо баробар мебошад. Аз ҷумла, агар танҳо яке аз коэффитсиентҳои k_j ғайри сифр бошад, мо ҳолати мутаносибии сатрҳоро ҳосил мекунем. Ва ниҳоят агар сатри i – юми муайянкунанда пурра аз сифрҳо иборат бошанд, пас ин сатр ба комбинатсияи хатти сатрҳои боқимондаи он бо коэффитсиентҳои $k_j = 0$, баробар аст.

Хосияти 8. *Агар яке аз сатрҳои муайянкунанда ба комбинатсияи хаттии сатрҳои боқимондаи онҳо баробар бошад, пас муайянкунанда ба сифр баробар аст.*

Исбот. Бигзор сатри i – юм ба комбинатсияи хаттии s – то сатрҳои боқимондаи он баробар бошад, $(1 \leq s \leq n-1)$. Он гоҳ дилхоҳ элементи сатри i – юм ба суммаи s – то ҷамъшавандаҳо баробар аст ва мувофиқи хосияти 7 муайянкунандаи мо ба суммаи s – то муайянкунандаҳо баробар аст, ки сатри i- юми онҳо бо яке аз сатрҳои дигар мутаносиб мебошад. Мувофиқи хосияти 6 ҳамаи ин муайянкунандаҳо ба сифр баробар мебошанд.

Хосияти 9. *Агар ба элементҳои ягон сатри муайянкунанда элементҳои мувофиқи сатри дигари он, ки ба адади k зарб кардашудааст, ҷамъ карда шаванд, қимати муайянкунанда тағйир намеёбад.*

Исбот. Бигзор ба сатри i – юм муайянкунандаи d сатри j – юми ба адади k зарб кардашуда, $j \neq i$, ҷамъ карда шуда бошад, яъне дар муайянкунандаи нав элементҳои сатри i – юм дар намуди $a_{is} + ka_{js}$, $s = 1, 2, \ldots, n$ тасвир шудаанд. Онгоҳ мувофиқи хосияти 7 ин муайянкунанда ба суммаи ду муйянкунандаҳо баробар аст, ки якумаш ба d баробар асту дуюмаш ду сатри мутаносиб доранд ва аз ҳамин сабаб қимати он ба сифр баробар аст.

Азбаски адади k метавонад, манфӣ бошад, пас *муайянкунанда ҳангоми аз як сатри он сатри дигарашро тарҳ кардан тағйир намеёбад.* Ва умуман *муайянкунанда тағйир намеёбад агар ба ягон сатри он комбинатсияи сатрҳои дигари он ҷамъ карда шавад.*

1.13 Муайянкунандаи матритсаи кососимметрӣ.

Таърифи 1.13.1. *Матритсаи квадратиро симметрӣ меноманд, агар элементҳои нисбат ба диагонали асосӣ симметрии он баробар бошанд, яъне барои дилхоҳ i ва j баробарии $a_{ij} = a_{ji}$ иҷро шавад.*

Ҳамин тавр матритсаи симметрӣ намуди зерин дорад:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мисолҳои матритсаҳои симметрӣ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 43 & 21 & -13 & 56 \\ 21 & 6 & 19 & 44 \\ -13 & 19 & 7 & 5 \\ 56 & 44 & 5 & 67 \end{pmatrix}.$$

Таърифи 1.13.2. *Матритсаи квадратиро кососимметрӣ меноманд, агар элементҳои нисбат ба диагонали асосӣ симметрии он, аз якдигар танҳо бо аломаташон фарқ кунанд, яъне барои дилхоҳ i ва j баробарии $a_{ij} = -a_{ji}$ иҷро шавад.*

Аз ин таъриф бармеояд, ки элементҳои диагонали асосии матритсаи кососимметрӣ аз сифрҳо иборат мебошанд, яъне $a_{ii} = 0$. Ҳамин тавр матритсаи кососимметрӣ намуди зерин дорад:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Мисолҳои матритсаҳои кососимметрӣ:

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -18 \\ -2 & 0 & 3 \\ 18 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -21 & 19 & -11 \\ 21 & 0 & 19 & 44 \\ -19 & -19 & 0 & 5 \\ 11 & -44 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Муайянкунандаи матритсаи кососимметриро *муайянкунандаи кососимметрӣ* меноманд.

Теоремаи 1.13.1. *Муайянкунандаи кососиметрии тартиби тоқ ба сифр баробар аст.*

Исбот. Бигзор ба мо муайянкунандаи кососимметрии тартибаш тоқи

$$d = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

дода шуда бошад. Ҳар як сатри ин муайянкунандаро ба адади -1 зарб намуда, мувофиқи хосияти 5, муайянкунандае ҳосил мекунем, ки он ба $(-1)^n d$ баробар аст, яъне

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n d. \tag{1.13.1}$$

Аз тарафи дигар (1.13.1) ба муайянкунандаи транспонидашудаи d ва мувофиқи хосияти 1 боз ба d баробар аст, яъне

$$(-1)^n d = d.$$

Ҳангоми n тоқ будан бармеояд, ки $-d = d$, яъне $d = 0$ мебошад.

1.14 Минорҳо ва пуркунандаҳои алгебравӣ

Ҳисобкунии муайянкунандаҳо бевосита бо истифодаи таърифи муайянкунанда, яъне навиштани ҳамаи $n!$ аъзоҳо ва муйянкунии аломати ин аъзоҳо кори ниҳоят дуру дароз ва мураккаб мебошад. Усулҳои нисбатан оддие мавҷуданд, ки онҳо ба ифодакунии муайянкунандаи тартиби n бо воситаи муайянкунандаҳои тартибашон аз n хурдтар, асос карда шудаанд. Бо ин мақсад мо мафҳумҳои *минор* ва *пуркунандаи алгебравиро* дохил менамоем.

Бигзор ба мо муайянкунандаи d – и тартиби n дода шудааст. Адади бутуни k – ро интихоб мекунем, ки ба шарти $1 \leq k \leq n-1$ қаноат мекунад ва дар муайянкунандаи d дилхоҳ k – сатр ва k – сутунро интихоб мекунем. Элементҳои дар буриши ин сатрҳо ва сутунҳо ҷойгирбуда, матритсаи квадратии тартиби k – ро ташкил мекунанд. Муайянкунандаи ин матритсаро *минори тартиби k-и муайянкунандаи d* меноманд. Инчунин гуфтан мумкин аст, ки ин минори тартиби k аз муайянкунандаи d дар натиҷаи хат задани $n-k$ сатр ва $n-k$ сутун ҳосил шуда аст. Аз он ҷумла, ҳангоми хат задани як сатр ва як сутун мо минори тартиби $n-1$ – ум ҳосил мекунем. Аз тарафи дигар минорҳои тартиби якум, ин элементҳои алоҳидаи муайянкунандаи d мебошанд.

Бигзор дар муайянкунандаи тартиби n – уми d, минори тартиби k – уми M гирифта шудааст. Агар мо он сатрҳо ва он сутунҳое, ки дар буриши онҳо минори M ҷойгир аст, хат занем, пас минори тартиби $n-k$ – ум боқӣ мемонад, ки онро *минори пуркунанда* барои минори M меноманд. Баръакс, агар мо он сатрҳо ва он сутунҳое, ки дар онҳо элементҳои минори M' ҷойгиранд хат занем, онгоҳ минори M боқӣ мемонад. Ҳамин тавр, оиди ҷуфти *минорҳои байни ҳам пуркунанда* гуфта гузаштан мумкин аст.

Дар мисоли зерин, M барои муайянкунандаи d минори тартиби дуюми дар сатрҳои 2, 4 ва сутунҳои 1, 3 ҷойгирбуда мебошад. M' бошад барои M – минори пуркунанда аст:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M' = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Таърифи 1.14.1. *Агар минори M – и тартиби k – ум дар сатрҳои $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ва сутунҳои $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ҷойгир бошад, онгоҳ бузургии $(-1)^{S_M}M'$, $S_M = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$ пуркунандаи алгебравии минори M номида мешавад.*

Теоремаи 1.14.1. *Ҳосили зарби минори M – и тартиби k – юм бар пуркунандаи алгебравиаш дар муайянкунандаи d, суммаи алгебравие мебошанд, ки ҷамъшавандаҳои он дар натиҷаи зарби аъзоҳои минори M ба аъзоҳои минори пуркунандаи $M^{'}$ бо аломати $(-1)^{S_M}$ ҳосил мешаванд. Ин суммаи алгебривӣ ба як қисми аъзоҳои муайянкунандаи d баробар аст ва аломати онҳо дар ин сумма бо аломате, ки ба муайянкунанда дохил мешаванд яккела мебошад.*

Исбот. Исботи ин теоремаро аз ҳолате, ки минори M дар кунҷи чапи болоии муайянкунандаи d ҷойгир аст, оғоз мекунем:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & M & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & M' & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

яъне минори M дар сатрҳо бо рақамҳои $1, 2, \ldots, k$ ва дар сутунҳо бо ҳамин рақамҳо ҷойгир аст. Пас минори пуркунандаи $M^{'}$ дар кунҷи рости поёни ҷойгир аст. Адади S_M дар ин ҳолат ҷуфт мебошад:

$$S_M = 1 + 2 + \ldots + k + 1 + 2 + \ldots + k = 2(1 + 2 + \ldots + k),$$

Пас пуркунандаи алгебравӣ барои M худи минори M' мебошад.

Дилхоҳ аъзои

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{k\alpha_k} \tag{1.14.1}$$

минори M – ро мегирем, ки он ба M бо аломати $(-1)^l$ дохил мешавад, ки дар ин ҷо l миқдори инверсияҳои гузориши

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix} \tag{1.14.2}$$

мебошад. Айнан ҳамин тавр дилхоҳ аъзои

$$a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\ldots a_{n\beta_n} \tag{1.14.3}$$

минори M' ба ин минор бо аломати $(-1)^{l'}$ дохил мешавад, ки дар ин ҷо l' миқдори инверсияҳои гузориши

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{1.14.4}$$

мебошад. Аъзоҳои (1.14.1) ва (1.14.3) – ро зарб намуда, ҳосили зарби n элементҳои дар сатрҳои гуногун ва сутунҳои гуногун ҷойгирбудаи муайянкунандаи d – ро ҳосил мекунем,

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\ldots a_{n\beta_n} \tag{1.14.5}$$

яъне ин ҳосили зарб аъзои муайянкунандаи d мебошанд. Аломати аъзои (1.14.5) дар ҳосили зарби $MM^{'}$ ба ҳосили зарби аломатҳои аъзоҳои (1.14.1) ва (1.14.3), яъне ба $(-1)^l \cdot (-1)^{l^{'}} = (-1)^{l+l^{'}}$ баробар аст.

Аломати аъзои (1.14.5) дар муайянкунандаи d низ, ҳамингуна аст. Аз индексҳои ҳосили зарби (1.14.5) гузориши

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

тартиб медиҳем. Ин гузориш танҳо $l + l^{'}$ – то инверсия дорад, чунки ягон то аз α – ҳо бо ягон β- ҳо инверсия ташкил намекунад: ҳамаи α –ҳо аз k калон набуда, ҳамаи β – ҳо аз $k+1$ хурд нестанд.

Исботи ҳолате, ки минори M дар кунҷи чапи болоии муайянкунандаи d ҷойгир аст, ба охир расид. Акнун ба исботи ҳолати умумӣ мегузарем, яъне фарз мекунем, ки минори M дар дилхоҳ сатрҳо ва дилхоҳ сутунҳои муайянкунандаи d ҷойгир аст. Рақами сатрҳо ва сутунҳое, ки дар он минори M ҷойгир аст, мувофиқан бо $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ва $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ишора мекунем ва дар айни ҳол

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Кушиш мекунем, ки бо иваз кардани ҷойи сатрҳо ва иваз кардани ҷойи сутунҳо минори M – ро дар кунҷи чапи болоӣ ҷойгир кунем ва дар айни ҳол минори пуркунандаи M' тағйир наёбад. Бо ин мақсад ҷойи сатри i_1 – ро бо ҷойи сатри $i_1 - 1$, баъд бо ҷойи сатри $i_1 - 2$ ва ҳоказо бо ҷойи сатри якум иваз мекунем, яъне мо бо воситаи $i_1 - 1$ бар иваз намудани ҷойи сатрҳо сатри i_1 – ро ба ҷойи сатри якум овардем. Баъд сатри i_2 – ро ҳам бо ёрии $i_2 - 2$ маротиба пай дар пай иваз намудани ҷойи он бо ҷойи сатрҳои дар боло ҷойгиршуда ба ҷойи сатри дуюм ҷойгир мекунем. Айнан ҳамин тавр сатри i_k – ро бо ёри $i_k - k$ маротиба иваз намудани ҷойи сатрҳои ҳамсоя ба ҷойи сатри k – юм ҷойгир мекунем. Ҳамин тавр бо иҷро намудани

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_k - k) = (i_1 + i_2 + \ldots + i_k) - (1 + 2 + \ldots + k)$$

маротиба транспозитсияи сатрҳои ҳамсоя, минори M – ро дар k сатри аввала ҷойгир мекунем. Айнан ҳамин тавр, бо иҷро намудани

$$(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \ldots + (j_k - k) = (j_1 + j_2 + \ldots + j_k) - (1 + 2 + \ldots + k)$$

маротиба транспозитсияи сутунҳои ҳамсоя минори M – ро дар k сутуни аввала ҷойгир мекунем.

Баъд ин дигаргунсозиҳо мо муайянкунандаи $d^{'}$ – ро ҳосил мекунем, ки дар он минори M дар кунҷи чапи болои ҷойгир аст. Азбаски мо танҳо ҷойи сатрҳои ҳамсоя ва ҷойи сутунҳои ҳамсояро иваз намудем, пас байни ҳам ҷойгиршавии сатрҳои $M^{'}$ ва сутунҳои он бетағйир мемонанд ва $M^{'}$ дар кунҷи рости поёнии $d^{'}$ ҷойгир мешавад.

Чи хеле, ки мо дар боло нишон додем, ҳосили зарби $MM^{'}$ суммаи як миқдор аъзоҳои муайянкунандаи $d^{'}$ мебошанд. Аломатҳои ин аъзоҳо бо аломатҳои онҳо ба $d^{'}$ дохил мешаванд, якхела мебошанд. Аз тарафи дигар $d^{'}$ аз d бо воситаи

$$\begin{aligned}
&[i_1 + i_2 + \ldots + i_k) - (1 + 2 + \ldots + k)]+ \\
&\quad +[(j_1 + j_2 + \ldots + j_k) - (1 + 2 + \ldots + k)] = \\
&\qquad = S_M - (1 + 2 + ... + k)
\end{aligned}$$

транспозитсияи сатрҳо ва сутунҳо ҳосил шудааст ва мувофиқи хосияти 3, аъзоҳои $d^{'}$ аз мувофиқи d танҳо бо аломати $(-1)^{S_M}$ фарқ мекунад. Аз инҷо мебарояд, ки ҳосили зарби $(-1)^{S_M} MM^{'}$ аз як миқдори аъзоҳои муайянкунандаи d иборатанд. Аломати ин аъзоҳо бо аломате, ки онҳо ба d дохил мешаванд, якхелаанд.

Теорема исбот шуд.

1.15 Ҳисобкунии муайянкунандаҳо

Теорема оиди ҳосили зарби минори тартиби k – ум бар пуркунандаи алгебравиаш, ки дар мавзӯи гузашта исбот намудем, ба мо имконият медиҳад, ки ҳисобкунии муайянкунандаи тартиби n – уми

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

–ро ба ҳисобкунии якчанд муайякунандаи тартиби $n-1$ – ум оварда шавад. Бо ин мақсад ишораҳои зеринро дохил мекунем: агар a_{ij} элементи дилхоҳи муайянкунандаи d бошад, бо воситаи M_{ij} минори ин элементро ишора мекунем, яъне миноре, ки он аз муайянкунандаи d дар натиҷаи хат задани сатри i – юм ва сутуни j – юм ҳосил шудааст. Бо воситаи A_{ij} бошад пуркунандаи алгебравии элементи a_{ij} – ро ишора мекунем, яъне

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теоремаи 1.15.1. *Суммаи ҳосили зарбҳои элементҳои дилхоҳ сатри муайянкунанда ба пуркунандаҳои алгебравиашон ба муайянкунандаи d баробар аст.*

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15.1}$$

Исбот. Дар мавзӯи гузашта нишон додем, ки ҳосили зарби $a_{ij}A_{ij}$ суммаи алгебравии як қисми аъзоҳои муайянкунандаи d мебошад ва аломати ин аъзоҳо дар ин сумма бо аломате, ки ба муайянкунанда дохил мешаванд якхела аст. Миқдори ин аъзоҳо ба миқдори аъзоҳои минори M_{ij}, яъне ба $(n-1)!$ баробар аст.

Сатри дилхоҳи i – юми муайянкунандаи d – ро интихоб намуда ҳосили зарбҳои элементҳои ин сатрро бар пуркунандаҳои алгебравияшон тартиб медиҳем:

$$a_{i1}A_{i1}, \; a_{i2}A_{i2}, \; \ldots, \; a_{in}A_{in}. \tag{1.15.2}$$

Ягон аъзои муайянкунандаи d ба ҳайати ду ҳосили зарбҳои гуногун (1.15.2) дохил намешаванд. Дар ҳақиқат, ҳамаи аъзоҳои муайянкунандаи d, ки ба ҳосили зарби $a_{i1}A_{i1}$ дохиланд, аз сатри i – юм элементи a_{i1} - ро доранд ва аз ҳамин сабаб онҳо аз аъзоҳои ҳосили зарби $a_{i2}A_{i2}$ фарқ мекунанд, чунки аъзоҳои ҳосили зарби $a_{i2}A_{i2}$ аз сатри i – юм элементи a_{i2}-ро доранд ва ҳоказо. Пас ҳамаи аъзоҳои муайянкунандаи d, ки дар ҳосили зарбҳои (1.15.2) дохиланд, гуногун мебошанд.

Аз тарафи дигар миқдори умумии аъзоҳои муайянкунандаи d, ки ба ҳамаи ҳосили зарбҳои (1.15.2) дохил мешаванд ба

$$n \cdot (n-1)! = n!,$$

баробар аст, яъне ҳамаи аъзоҳои d дар ҳосили зарбҳои (1.15.2) иштирок мекунанд. Пас суммаи онҳо ба муайянкунандаи d баробар аст:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = d \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема исбот шуд.

Формулаи (1.15.3) – ро *ҷудокунии муайянкунандаи d аз рӯи сатри i – юм* меноманд. Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки *ҷудокунии муайянкунандаи d аз рӯи сутуни j – юм* ҷой дорад:

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15.3}$$

Дар ҷудокунии (1.15.3) пуркунандаҳои алгебравиро бо минорҳои мувофиқашон бо назардошти аломатҳои плюс ё минус иваз намуда, ҳисобкунии муайянкунандаи тартиби n – умро ба ҳисобкунии n – то муайянкунандаҳои тартиби $n-1$ – ум меорем. Қайд мекунем, ки агар баъзе аз элементҳои сатри i – юм баробари сифр бошанд, пас минорҳои ин элементҳоро ҳисоб намудан лозим нест. Аз ҳамин сабаб пешакӣ муайякунандаро бо истифодаи хосияти 9, ҳамин хел дигаргун мекунем, ки дар яке аз сатрҳо ё дар яке сутунҳо аксарияти элементҳо бо сифрҳо иваз шаванд:

Теоремаи 1.15.2. *Қимати муайянкунандаро тағйир надода, дар дилхоҳ сатр ҳамаи элементҳои онро ба гайр аз яктоашон бо сифрҳо иваз намудан мумкин аст.*

Исбот. Дар ҳақиқат агар дар сатри i – юм $a_{ik} \neq 0$ бошад, пас мувофиқи хосияти 9 дилхоҳ элементи a_{ij}, $j \neq k$ бо сифр иваз мешавад, агар аз сатри j – юм сатри k – юми ба ададӣ a_{ij}/a_{ik} зарб кардашуда, тарҳ карда шавад.

Ин теорема имконият медиҳад, ки ҳисобкунии муайянкунандаи тартиби n – ум ба ҳисобкунии якто муайянкунандаи тартиби $n-1$ – ум оварда шавад.

Теоремаи 1.15.3. *Агар ҳамаи элементҳои дар зери диагонали асосӣ (ё болои диагонали асосӣ) ҷойгирбудаи муаяйнкунанда баробари сифр бошанд, он гоҳ ин муайянкунанда ба ҳосили зарби элементҳои диагонали асосӣ баробар аст.*

Исбот. Исботро бо усули индуксияи математикӣ мегузаронем. Барои муайянкунандаи тартиби дуюм тасдиқоти теорема аён аст. Фарз мекунем, ки ин тасдиқот барои муайянкунандаи тартиби $n-1$ – ум ҷой дорад ва муайянкунандаи тартиби n – уми зеринро дида мебароем:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Онро аз рӯи сатри якум ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$d = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Барои минори дар тарафи рости ин баробарӣ фарзи индуксияро тадбиқ намудан мумкин аст ва он ба ҳосили зарби $a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$ баробар аст, пас

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Теорема исбот шуд.

Мисолҳо.

1. Муайянкунандаи тартиби чорум ҳисоб карда шавад

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ин муайянкунандаро аз рӯи сатри сеюм ҷудо мекунем, ки дар он якто элементи ба сифр баробар мавҷуд аст:

$$d = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Муайянкунандаҳои тартиби сеюмро ҳисоб намуда, ҳосил мекунем:

$$d = 2 \cdot 16 - 40 + 48 = 40.$$

2. Муайянкунандаи тартиби панҷум ҳисоб карда шавад

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ба сатрҳои дуюм ва чорум сатри панҷумро ҷамъ мекунем, ки мувофиқан ба ададҳои 3 ва -4 зарб карда шудааст:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ин муайянкунандаро аз рӯи сутуни сеюм, ки танҳо якто элементи ғайрисифрӣ дорад, ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$d=(-1)^{5+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Ба сатрҳои якум, сеюм ва чоруми ин муайянкунанда сатри дуюмро ҷамъ мекунем, ки мувофиқан ба ададҳои 2, -3 ва -2 зарб карда шудааст:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & 26 & -34 & -26\\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix},$$

ва ин муайянкунандаи тартиби чорумро аз рӯи сутуни якум ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$d=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Ин муайянкунандаи тартиби сеюмро пешакӣ аз рӯи сатри сеюм ҷудо намуда ҳисоб мекунем:

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 36\cdot\begin{vmatrix} 25 & 17\\ -34 & -26 \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot(-33)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 17\\ 26 & -26 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot(-24)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 25\\ 26 & -34 \end{vmatrix}=$$
$$=36\cdot(-72)-(-33)\cdot(-104)+(-24)\cdot(-208)=-1032.$$

1.16 Хосияти ортогоналии пуркунандаҳои алгебравӣ

Теоремаи 1.16.1. *Суммаи ҳосили зарбҳои элементҳои сутуни k –юми муайянкунанда, $k=1,2,\dots,n$ бар пуркунандаҳои алгебравии мувофиқи сутуни дигар ба сифр баробар аст:*

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\ldots+a_{nk}A_{nj}=0,\qquad \text{агар } j\neq k. \tag{1.16.1}$$

Исбот. Бигзор муайянкунандаи тартиби n – уми зерин дода шуда бошад:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Онро аз рӯи дилхоҳ сутуни j – юм ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$d=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj}, \tag{1.16.2}$$

ва баъд дар ин ҷудокунӣ элементҳои сутуни j – юмро бо n – то ададҳои дилхоҳи $b_1,b_2,\dots,b_n$ иваз мекунем. Ифодаи ҳосилкардаи мо

$$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$$

ҷудокунии муайянкунандаи

$$d'=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_2 & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

мебошад. Муайянкунандаи d' аз муайянкунандаи d дар натиҷаи иваз намудани сутуни j – юм бо сутуни ададҳои $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ҳосил мешавад. Қайд мекунем, ки ивазкунии сутуни j – юм ба минорҳои элементҳои ин сутун таъсир намерасонад. Аз ҳамин сабаб ба пуркунандаҳои алгебравии элементҳои ин сутун ҳам таъсир намерасонад.

Акнун ба сифати ададҳои $b_1, b_2, \ldots, b_n$ элементҳои сутуни k – юми муайянкунандаи d – ро ҳангоми $k \neq j$ интихоб мекунем. Муайянкунандаи дар натиҷаи ин ивазкунӣ ҳосил шуда, ду сутуни якхела дорад, (сутунҳои j -юм ва k – юм) аз ҳамин сабаб баробари сифр аст. Пас ҷудокунии ин муайянкунанда аз рӯи сутуни j – юм ҳам баробари сифр мебошад, яъне формулаи (1.16.2) ҷой дорад.

Тасдиқоти теорема ва формулаи (1.16.2) – ро, яъне ҷудокунии муайянкунандаро аз рӯи сутуни j – юм ба намуди мухтасар навишта, ҳосил мекунем:

Натиҷаи 1.16.1. *Барои дилхоҳ сутуни k – юми муайянкунандаи d муносибати зерин ҷой дорад:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} = \begin{cases} d, & \text{агар} \quad k = j, \\ 0, & \text{агар} \quad k \neq j, \end{cases} , \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки барои сатрҳо ҳам чунин тасдиқот ҷой дорад:

Натиҷаи 1.16.2. *Барои дилхоҳ сатри k – юми муайянкунандаи d муносибати зерин ҷой дорад:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} d, & \text{агар} \quad k = i, \\ 0, & \text{агар} \quad k \neq i, \end{cases} , \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

1.17 Муайянкунандаи Вандермонд

Таърифи 1.17.1. *Муайянкунандаи Вандермонд гуфта муайянкунандаи зеринро меноманд:*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Теоремаи 1.17.1. *Барои дилхоҳ n, муайянкунандаи Вандермонд ба ҳосили зарби ҳамаи фарқҳои имконпазири намуди $a_i - a_j$, $1 \leq j < i \leq n$ баробар аст:*

$$d = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Исбот. Исботро бо усули индуксияи математикӣ мегузаронем. Барои $n = 2$ муайянкунандаи Вандермондро бевосита ҳисоб намуда, ҳосил мекунем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Фарз мекунем, ки тасдиқоти теорема барои муайянкунандаи Вандермонди тартиби $n - 1$ – ум ҷой дорад. Муайянкунандаи d – ро ба тариқи зерин дигаргун мекунем: аз сатри n – ум (охирин) сатри $n - 1$ – умро, ки ба a_1 зарб карда шудааст, тарҳ мекунем, баъд аз сатри $n - 1$ – ум сатри $n - 2$ – умро, ки ҳам ба a_1 зарб карда шудааст, тарҳ мекунем ва ҳоказо аз сатри дуюм сатри якумро, ки он ҳам ба a_1 зарб карда шудааст, тарҳ мекунем. Баъди ин дигаргунсозиҳо муайянкунандаи d намуди зеринро мегирад:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Ин муайянкунандаро аз рӯи сутуни якум ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \hdotsfor{4} \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \qquad (1.17.1)$$

Зарбшавандаҳои умумии сутунҳоро аз зери аломати муайянкунанда бароварда ҳосил мекунем:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \hdotsfor{4} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Зарбшавандаи охирин муайянкунандаи Вандермонди тартиби $n-1$ – ум мебошад ва мувофиқи фарзи индуксия вай ба ҳосили зарби ҳамаи фарқҳои намуди $a_i - a_j$, $2 \le j < i \le n$ баробар аст:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \hdotsfor{4} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Тарафи рости ин баробариро ба (1.17.1) гузошта ҳосил мекунем:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Теорема исбот шуд.

1.18 Теоремаи Лаплас

Ҷудокуни муайянкунандаро аз рӯи ягон сатр (ё сутун) ба ҳолати умумӣ гузаронида ҷудокунии муайянкунандаро аз рӯи якчанд сатр (якчанд сутун) дида мебароем.

Теоремаи 1.18.1. *Бигзор дар муайянкунандаҳои тартиби* n *–уми* d *дилхоҳ* k *сатр (ё* k *сутун) интихоб карда шуда бошад,* $1 \le k \le n-1$. *Он гоҳ, суммаи ҳосили зарбҳои ҳамаи минорҳои тартиби* k *– юми дар сатрҳои интихоб шуда, хобида бар пуркунандаҳои алгебравиашон ба муайянкунанда* d *баробар аст.*

Исбот. Бигзор дар муайянкунандаи d сатрҳои $i_1, i_2, \dots, i_k$ интихоб карда шудаанд. Мо медонем, ки ҳосили зарби дилхоҳ минори M – и тартиби k – юми дар ин сатрҳо ҷойгиршуда бар пуркунандаи алгебравиаш ба як қисми аъзоҳои муайянкунандаи d баробар аст ва аломати онҳо дар ин сумма бо аломате, ки ба муайянкунанда дохил мешаванд, якхела мебошад.

Теоремаро исбот мекунем, нишон медиҳем, ки дар натиҷаи ба сифати M ҳамаи чунин минорҳои тартиби k – юми дар сатрҳои интихобшуда ҷойгирбударо гирифтан ҳамаи аъзоҳои муайянкунадаро ҳосил мекунем ва аз ин аъзоҳо ягонтоашон ду бор вонамехӯранд.

Аз элементҳое, ки ба аъзои дилхоҳи муайянкунандаи d, яъне ба ҳосили зарби

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}, \tag{1.18.1}$$

дохил мешаванд, алоҳида элементҳои ба сатрҳои интихобшудаи $i_1, i_2, \ldots, i_k$ таълуқ бударо (доштаро) ҷудо мекунем:

$$a_{i_1\alpha_{i_1}}a_{i_2\alpha_{i_2}}\ldots a_{i_k\alpha_{i_k}}, \tag{1.18.2}$$

ки онҳо дар k сутунҳои гуногуни α_{i_1}, α_{i_2}, ... α_{i_k} ҷойгиранд. Рақами ин сутунҳо пурра бо дода шудани аъзои (1.18.1) муайян карда мешаванд. Агар бо M минори тартиби k – юми дар буриши сутунҳои α_{i_1}, α_{i_2}, ... α_{i_k} ва сатрҳои интихобкардаи $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ҷойгирбударо ишора кунем (намоем), пас ҳосили зарби (1.18.2) яке аз аъзоҳои минори M буда, ҳосили зарби ҳамаи элентҳои (1.18.1), ки ба (1.18.2) дохил нашудаанд, аъзои минори пуркунандаи M мебошад. Ҳамин тавр, ҳар як аъзои муайянкунанда ба ҳайати ҳосили зарби ягон минори тартиби k – юми пурра муайяни дар сатрҳои интихобшуда ҷойгирбуда ба минори пуркунандааш дохил мешавад, илова бар ин ҳосили зарби аъзоҳои пурра муайяни ин минорҳо мебошад. Барои якхела будани аломати ин аъзо бо аломате, ки он ба муайянкунанда дохил мешавад, кифоя аст, ки минори пуркунандаро бо пуркунандаи алгебравӣ иваз намойем.

Теорема исбот шуд.

Мисолҳо.

1. Муайянкунанда ҳисоб карда шавад

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Аз рӯи сутунҳои якум ва сеюм, ки дар онҳо сифрҳо қулай ҷойгир шудаанд, ҷудо намуда ҳосил мекунем:

$$d=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=(-8)\cdot(-20)-(-10)\cdot(-62)-7\cdot 87=-1069.$$

2. Муайянкунанда ҳисоб карда шавад

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Ба сутунҳои якум ва сеюми ин муайянкунанда сутуни чорумро ҷамъ мекунем, ки мувофиқан ба ададҳои 2 ва 1 зарб карда шудааст, баъди ин дар муайянкунандаи ҳосилшуда аз сутуни якум сутуни дуюро тарҳ мекунем:

$$d=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 \\ -13 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 \\ -14 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Дар сатрҳои сеюм ва чоруми муайянкунандаи охирин танҳо якто минори ғайрисифрӣ мавҷуд аст. Аз ҳамин сабаб онро аз рӯи сатрҳо чудо намуда ҳосил мекунем:

$$d = (-1)^{3+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -14 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) \cdot (-6+14) = 40.$$

1.19 Қоидаи Крамер

Назарияи муайянкунандаҳои тартиби n – умро танҳо ба шабеҳи муайянкунандаҳои тартиби дуюм ва сеюм дохил намудем. Аз ҳамин сабаб муайянкунандаҳои тартиби n – умро чун муайянкунандаҳои тартиби дуюм ва сеюм барои ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ истифода бурдан мумкин аст. Бигзор ба мо системаи n – то муодилаҳои хаттии n – номаълумаи зерин дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.19.1}$$

Аз коэффитсентҳои назди номаълумҳо муайянкунандаи зеринро

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

тартиб медиҳем, ки онро *муайянкунандаи асосии* системаи (1.19.1) меноманд. Бо воситаи d_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ муайянкунандаеро ишора мекунем, ки аз d дар натиҷаи ивази сутуни j – юм бо сутуни аъзоҳои озод ҳосил мешавад, яъне

$$d_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj} = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ij}. \tag{1.19.2}$$

Теоремаи 1.19.1. *Агар муайянкунандаи асосии системаи n – то муодилаҳои хаттии n – номаълумаи (1.19.1) ғайри сифр бошад, он гоҳ ин система ҳал дорад ва ин ҳал ягона буда бо қоидаи Крамер, яъне бо ёрии формулаҳои*

$$x_j = \frac{d_j}{d} : \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.19.3}$$

ҳисоб карда мешавад.

Исбот. Фарз мекунем, ки системаи (1.19.1) ҳамҷоя аст ва $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ яке аз ҳалҳои он мебошанд. Ин ҳалро ба ҷойи номаълумҳо гузашта системаи айниятҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases}$$

Бигзор j яке аз ададҳои $1, 2, \ldots, n$ бошад. Ҳарду тарафи айнияти якумро ба A_{1j}, яъне ба пуркунандаи алгебравии элементи a_{ij} дар муайянкунандаи d, ҳар ду тарафи айнияти дуюмро ба A_{2j} ва ҳоказо ҳар ду тарафи айнияти n – умро ба A_{nj} зарб зада, онҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ карда баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})\alpha_1 + \\ &(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})\alpha_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})\alpha_n = \\ &\qquad = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj} \end{aligned} \tag{1.19.4}$$

Коэффитсиенти назди α_j дар ин ҷо ба d баробар буда, коэффитсиентҳои ҳамаи α_k – ҳо, $k \neq j$ баробари сифр мебошанд. Тарафи рости ин баробарӣ бо назардошти (1.19.2) ба d_j баробар аст. Пас баробарии (1.19.4) намуди зеринро мегирад:

$$d\alpha_j = d_j,$$

азбаски $d \neq 0$, пас

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки агар (1.19.1) ҳамҷоя бошанд, пас вай ҳалли ягонаи зеринро дорад:

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{d_n}{d} \tag{1.19.5}$$

Акнун нишон медиҳем, ки системаи ададҳои (1.19.5) дар ҳақиқат системаи (1.19.1) – ро қаноат мекунонанд, яъне системаи (1.19.1) ҳамҷоя мебошад. Бо ин мақсад системаи (1.19.1) – ро бо ёрии ишораи сумма ба намуди мухтасари зерин менависем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ...n.$$

Ба ҷои номаълумҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ қиматҳои онҳоро аз (1.19.5) гузошта, баъди ин ба ҷои $d_1, d_2, \dots, d_n$ ифодаҳои онҳоро мегузорем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} \tag{1.19.6}$$

Мувофиқи натиҷаи 1.16.2 барои суммаи дарунӣ аз рӯи тағйирёбандаи суммиронии j муносибати зерин ҷой дорад:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} d, & \text{агар} \quad k = i, \\ 0, & \text{агар} \quad k \neq i, \end{cases} , \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Аз ҳамин сабаб дар суммаи берунӣ аз рӯи k танҳо як ҷамъшавандаи $b_i d$ боқӣ мемонад ва тарафи рости (1.19.6) намуди зеринро мегирад:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_i d = b_i.$$

Ҳамин тавр, нишон додем, ки системаи ададҳои (1.19.5) системаи (1.19.1) – ро қаноат мекунонанд.

Теорема исбот шуд.

Мисол. Системаи муодилаҳои хаттӣ ҳал карда шавад

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 8 \\ x_1 & -3x_2 & & -6x_4 & = & 9 \\ & 2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -5 \\ x_1 & +4x_2 & -7x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Муайянкунандаи асосии ин система нобаробари сифр мебошад:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27,$$

пас мувофиқи қоидаи Крамер ин система ҳалли ягона дорад. Азбаски

$$d_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81,\qquad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27,\qquad d_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27,$$

Ҳамин тавр

$$x_1=3,\quad x_2=-4,\qquad x_3=-1,\quad x_4=1$$

ҳалли ягонаи сисемаи мо мебошад.

Боз як ҳолати хусусии системаи n – то муодилаҳои хаттии n – номаълумаро дида мебароем. Бигзор системаи n – то муодилаҳои хаттии n – номаълумаи якҷинсаи зерин дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1.19.7}$$

Ҳамаи муайянкунадаҳои d_j, $j=1,2,\ldots,n$ дар ин ҳолат сутуне доранд, ки пурра аз сифрҳо иборат мебошад, пас онҳо ба сифр баробаранд. Ҳамин тавр агар муайянкунандаи асосии системаи (1.19.7) нобаробари сифр бошад, пас мувофиқи қоидаи Крамер ин система ҳалли ягонаи сифрии зеринро дорад:

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad \ldots,\quad x_n=0.$$

Аз инҷо тасдиқоти зериро ҳосил мекунем

Натиҷаи 1.19.1. *Агар системаи n – то муодилаҳои хаттии n – номаълумаи якҷинса ба ғайр аз ҳалҳои сифрӣ боз ҳалҳои дигар дошта бошад, пас баробари сифр будани муайянкунандаи асосии он зарур мебошад.*

Мисол. Барои кадом қиматҳои k системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} kx_1+x_2=0\\ x_1+kx_2=0\end{cases}$$

мумкин аст, ки ҳалҳои ғайрисифрӣ дошта метавонад?

Ҳал: муайянкунандаи асосии ин система

$$\begin{vmatrix} k & 1\\ 1 & k\end{vmatrix}=k^2-1$$

фақат ҳангоми $k=\pm1$ будан баробари сифр мешавад. Ба осонӣ санҷидан мумкин аст, барои ҳар як аз ду қиматҳои k система ҳалҳои аз сифр фарқдошта дорад.

давом дорад!

Боби 2

Назарияи умумии системаи муодилаҳои хаттӣ

2.1 Фазои n–ченакаи векторӣ

Барои сохтани назарияи умумии системаи муодилаҳои хаттӣ воситаҳое, ки бо ёрии онҳо қоидаи Крамерро дида баромадем, кифоя намебошанд. Ба ғайр аз матритсаҳо ва назарияи муайянкунандаҳо боз мафҳуми нави *фазои бисёрченакаи векторӣ*, ки барои тамоми математика манфиат дорад, лозим аст.

Таърифи 2.1.1. *Системаи ба тартиб овардашудаи n – то ададҳои*

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

вектори n – ченака номида мешавад. Ададҳои a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – ро координатаҳои вектори α меноманд. Маҷмӯи ҳамаи векторҳои n – ченака бо R^n ишора карда мешавад.

Таърифи 2.1.2. *Мегӯянд, ки вектори α ба вектори*

$$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

баробар аст, агар координатаҳои мувофиқи онҳо баробар бошанд, яъне $a_i = b_i$ барои $i = 1, 2, \ldots, n$.

Барои ишораи векторҳо аз ҳарфҳои хурди юнонӣ истифода мебаранд. Ҳарфҳои хурди лотинӣ барои ишораи ададҳо, яъне координатаҳои вектор истифода бурда мешаванд.

Мисолҳои векторҳои n–ченака чунинанд:

1. векторҳо дар ҳамворӣ ё фазои сеченака, ки аввалашон дар ибтидои координата ҷойгиранд, мувофиқан векторҳои дученака ва сеченака мебошанд;
2. коэффитсиентҳои дилхоҳ муодилаи хаттии n – номаълума вектори n – ченакаро ташкил мекунад;
3. дилхоҳ ҳалли системаи муодилаҳои хаттии n – номаълума вектори n – ченака мебошад;
4. агар матритсаи аз s – сатр ва n – сутун иборат буда, дода шуда бошад, пас сатрҳои он векторҳои n – ченака, сутунҳои он векторҳои s – ченака мебошанд.

Таърифи 2.1.3. *Суммаи векторҳои α ва β гуфта вектори $\alpha + \beta$ аз R^n – ро меноманд, ки ба тариқи зерин муайян карда мешавад:*

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

яъне ҳангоми ҷамъ кардани векторҳо координатаҳои мувофиқи онҳо ҷамъ карда мешаванд.

Вектори $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ *вектори сифрӣ* номида мешавад. Вектори $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ – ро ба вектори α *муқобил* меноманд.

Теоремаи 2.1.1. *R^n аз рӯи амали ҷамъи векторҳо гурӯҳи абелӣ мебошад, яъне $(R^n, +)$ – гурӯҳ.*

Исбот. Амали ҷамъи векторҳои n – ченака амали алгебравӣ мебошад, чунки суммаи дилхоҳ ду векторҳои n – ченакаи $\alpha \in R^n$ ва $\beta \in R^n$ боз вектори n – ченакаи $\alpha + \beta \in R^n$ мебошад. Ҳамаи се шартҳои гурӯҳро дар алоҳидагӣ месанҷем.

- Қонуни ассосиативӣ барои амали ҷамъи векторҳо:

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)+\gamma = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) + (c_1, c_2, \ldots, c_n) = \\ &= ((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2, \ldots, (a_n+b_n)+c_n) = \\ &= (a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2), \ldots, a_n+(b_n+c_n)) = \\ &= \alpha + (\beta+\gamma).\end{aligned}$$

- Вектори сифрии $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ роли элементи нулиро мебозад, яъне барои дилхоҳ вектори $\alpha \in R^n$ муносибати зерин иҷро мешавад:

$$\alpha + \theta = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (0, 0, \ldots, 0) =$$

$$= (a_1+0, a_2+0, \ldots, a_n+0) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \alpha.$$

- Барои дилхоҳ вектори $\alpha \in R^n$ вектори муқобили $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ мавҷуд аст, ки

$$\begin{aligned}\alpha + (-\alpha) &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = \\ &= (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2), \ldots, a_2+(-a_n)) = \\ &= (0, 0, \ldots, 0) = \theta\end{aligned}$$

- Амали ҷамъи векторҳо амали коммутативӣ мебошад, яъне барои дилхоҳ векторҳои $\alpha \in R^n$ ва $\beta \in R^n$ муносибати

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ &= (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) = \\ &= (b_1+a_1, b_2+a_2, \ldots, b_n+a_n) = \beta + \alpha.\end{aligned}$$

иҷро мешавад. Теорема исбот шуд.

Аз теоремаи исботшуда бармеояд, ки барои амали ҷамъи векторҳо дар R^n амали баръакс — фарқи векторҳо мавҷуд аст:

Таърифи 2.1.4. *Фарқи векторҳои α ва β гуфта вектори $\alpha - \beta$ аз R^n – ро меноманд, ки он ба тариқи зерин муайян карда мешавад:*

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n).$$

Таърифи 2.1.5. *Ҳосили зарби вектори $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ба адади k гуфта, вектори $k\alpha = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$ – ро меноманд, яъне ҳангоми зарб кардани вектор ба адади k ҳар як координатаи он ба ин адад зарб карда мешавад.*

Аз ин таъриф хосиятҳои муҳими зерин бармеояд:

$$\begin{aligned}&k(\alpha \pm \beta) = k\alpha \pm k\beta; \\ &(k \pm l)\alpha = k\alpha \pm l\alpha; \\ &kl(\alpha) = (kl)\alpha; \\ &1 \cdot \alpha = \alpha.\end{aligned}$$

Ин хосиятҳоро бевосита бо истифодаи таърифҳои боло оиди ҷамъи векторҳо дар R^n ва зарби онҳо ба адад санҷидан мумкин аст. Аз ин хосиятҳо ҳамчун натиҷа боз хосияҳои зерин бармеояд:

$$\begin{aligned}&0 \cdot \alpha = \theta;\\&(-1) \cdot \alpha = -\alpha;\\&k \cdot \theta = \theta.\end{aligned}$$

Таърифи 2.1.6. *Маҷмӯи ҳамаи вектори* n *– ченакаи ҳақиқӣ бо амали ҷамъи векторҳо ва зарби вектор ба адад, фазои* n *– ченакаи вектории* R^n *номида мешаванд.*

Қайд мекунем, ки дар таърифи фазои n – ченакаи векторӣ мафҳуми зарби вектор ба вектор дохил намешавад.

Боз як мисолро дида мебароем. Тарафи рости муодилаи хаттии n – номаълума, яъне ифодаи намуди

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

шакли хаттии аз номаълумҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номида мешавад. Шакли хаттӣ пурра бо Дода шудани вектори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ муайян карда мешавад.

2.2 Вобастагии хаттии векторҳо

Таърифи 2.2.1. *Вектори* β *аз фазои* n *– ченакаи вектории* R^n *ба вектори* $\alpha \in R^n$ *мутаносиб номида мешаванд агар чунин адади* k *мавҷуд бошад, ки* $\beta = k \cdot \alpha$.

Мисол. Вектори $\beta = (5, 10, 20)$ ба вектори $\alpha = (1, 2, 4)$ мутаносиб аст, чунки

$$\beta = (5, 10, 20) = 5 \cdot (1, 2, 4) = 5\alpha.$$

Қайд кардан ҷоиз аст, ки вектори нулии $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ ба дилхоҳ вектори $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ мутаносиб аст. Дар ҳақиқат

$$0 \cdot \alpha = 0 \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \theta.$$

Агар $\beta = k \cdot \alpha$ ва $\beta \neq 0$ бошад, пас $k \neq 0$. Аз ин ҷо мебарояд, ки $\alpha = k^{-1}\beta$ яъне барои векторҳои ғайринулӣ мутаносибии векторҳо мафҳуми симметрӣ мебошад.

Мафҳуми умумикардашудаи мутаносибии векторҳо ин мафҳуми *комбинатсияи хаттии векторҳо* мебошад. Бо ин мафҳум мо аллакай дар мавзӯи хосияти муайянкунандаҳо шинос шуда будем.

Таърифи 2.2.2. *Мегӯянд, ки вектори* β *ба комбинатсияи хаттии векторҳои* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *баробар аст, агар чунин ададҳои* $l_1, l_2, \ldots, l_s$ *мавҷуд бошад, ки*

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s.$$

Ҳамин тавр, координатаи j – юми вектори β, $j = 1, 2, \ldots, n$ мувофиқи таърифи суммаи векторҳо ва таърифи зарби вектор ба адад ба суммаи ҳосили зарбҳои координатаҳои j – юми векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ мувофиқан ба ададҳои $l_1, l_2, \ldots, l_s$ баробар аст.

Таърифи 2.2.3. *Мегӯянд, ки системаи векторҳои*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r, \quad (r \geq 2) \tag{2.2.1}$$

хаттӣ вобаста аст, агар ақалан яке аз ин векторҳо ба комбинатсияи хаттии векторҳои боқимонда баробар бошад ва дар ҳолати муқобил хаттӣ новобаста меноманд.

Акнун шакли дигари ин таърифро медиҳем.

Теоремаи 2.2.1. *Барои он ки системаи векторҳои (2.2.1) хаттӣ вобаста бошанд, зарур ва кифоя аст, ки чунин ададҳои ақалан яктоашон ғайрисифрии* $k_1, k_2, \ldots, k_r$ *мавҷуд бошанд, ки барои онҳо баробарии зерин иҷро шавад:*

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_r\alpha_r = 0. \tag{2.2.2}$$

Исботи шарти зарурӣ. Бигзор системаи (2.2.1) хаттӣ вобаста бошад, яъне ақалан яке аз векторҳои ин система ба комбинатсияи хаттии векторҳои боқимонда баробар аст. Барои муаяйнӣ бигзор ин вектори α_r бошад, яъне

$$\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1}.$$

Аз ин ҷо баробарии зерин бармеояд:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1} + (-1)\alpha_r = \theta.$$

Дар байни коэффитсиентҳои $l_1, l_2, \ldots, l_{r-1}, -1$ ақалан яктоаш нобаробари сифр мебошад. Шарти зарурӣ исбот шуд.

Исботи шарти кифоягӣ. Бигзор чунин ададҳои ақаллан яктоашон ғайрисифрии $k_1, k_2, \ldots, k_r$ мавҷуд бошанд, ки барои онҳо баробарии

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = \theta$$

иҷро мешавад ва барои муайянӣ бигзор $k_r \neq 0$ бошад. Он гоҳ

$$\alpha_r = \left(-\frac{k_1}{k_r}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k_r}\right)\alpha_2 + \ldots + \left(-\frac{k_{r-1}}{k_r}\right)\alpha_{r-1},$$

яъне α_r ба комбинатсияи хаттии векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ баробар аст ва системаи (2.2.1) хаттӣ вобаста мебошад. Шарти кифоягӣ исбот шуд.

Мисол. Системаи векторҳои

$$\alpha_1 = (5, 2, 1), \quad \alpha_2 = (-1, 3, 3), \quad \alpha_3 = (9, 7, 5), \quad \alpha_4 = (3, 8, 7)$$

хаттӣ вобаста мебошад, чунки ин векторҳо бо муносибати зерин алоқаманд мебошанд:

$$4\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = \theta.$$

Дар ин муносибат ҳамаи коэффитсиентҳо ғайрисифр мебошанд. Аз тарафи дигар дар байни ин векторҳо вобастагиҳои хаттии дигар мавҷуданд, ки баъзе аз коэффитсиентҳояшон ба сифр баробаранд, масалан:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = \theta, \quad 3\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = \theta.$$

Теоремаи 2.2.1 оиди хаттӣ вобастагии векторҳоро барои ҳолати $r = 1$, ҳам тадбиқ кардан мумкин аст, яъне барои ҳолате, ки система танҳо аз як вектор иборат мебошад: *ин система хаттӣ вобаста мебошад, фақат ва фақат дар ҳамон вақте, ки* $\alpha = \theta$.

Теоремаи 2.2.2. *Агар ягон зерсистемаи системаи (векторҳои) додашудаи (2.2.1) хаттӣ вобаста бошад, онгоҳ худи система ҳам хаттӣ вобаста аст.*

Исбот. Бигзор векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $s < r$ аз системаи (2.2.1) бо муносибати

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = \theta$$

алоқаманд бошанд, ки дар он на ҳамаи коэффитсиентҳо ба сифр баробаранд. Аз ин ҷо ва аз муносибати зерин бармеояд:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s + 0 \cdot \alpha_{s-1} + \ldots + 0 \cdot \alpha_r = \theta$$

яъне системаи (2.2.1) хаттӣ вобаста мебошад. Теорема исбот шуд.

Аз ин теорема хаттӣ вобастагии системаҳои зерин бармеояд:

- *системае, ки ду вектори баробар дорад;*
- *системае, ки ду вектори мутаносиб дорад;*
- *системае, ки ба он вектори сифрӣ дохил мешавад.*

Теоремаи 2.2.2 – ро батариқи зерин ҳам баён намудан мумкин аст.

Теоремаи 2.2.3. *Агар системаи векторҳои (2.2.1) хаттӣ новобаста бошад, онгоҳ дилхоҳ зерсистемаи он ҳам хаттӣ новобаста аст.*

2.3 Миқдори векторҳои системаи хаттӣ новобаста дар фазои n-ченакаи векторӣ

Савол ба миён меояд, ки ба системаи хаттӣ новобастаи векторҳои n – ченака чи гуна бисёр векторҳо дохил шуда метавонанд. Оё чунин системаҳои миқдори векторҳояшон дилхоҳ калон мавҷуданд? Барои ба ин савол ҷавоб додан дар фазои n – ченакаи вектории R^n векторҳои зеринро дида мебароем:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \varepsilon_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \varepsilon_3 = (0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1), \end{array}\right\}, \tag{2.3.1}$$

ки онҳоро векторҳои воҳидии ин фазо меноманд.

Теоремаи 2.3.1. *Системаи векторҳои воҳидӣ хаттӣ новобаста мебошад.*

Исбот. Бигзор барои ададҳои $k_1, k_2, \ldots, k_n$ баробарии зерин иҷро шавад:

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = \theta. \tag{2.3.2}$$

Дар тарафи чапи ин баробарӣ ба ҷойи векторҳои воҳидӣ қимати онҳоро гузошта ҳосил мекунем:

$$\begin{array}{l} k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = \\ = k_1(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0) + k_2(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0) + k_3(0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0) + \ldots + k_n(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1) = \\ = (k_1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0) + (0,\ k_2,\ 0,\ \ldots,\ 0) + (0,\ 0,\ k_3,\ \ldots,\ 0) + \ldots + (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ k_n,\ ) = \\ = (k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n) \end{array}$$

Тарафҳои рости баробарии охирин бо тарафи рости (2.3.2) баробар аст, пас тарафҳои чапи онҳо ҳам баробаранд, яъне

$$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n) = \theta = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Аз ин ҷо мебароянд, ки баробари (2.3.2) фақат ва фақат ҳангоми ба сифр баробар будани ҳамаи коэффитсиентҳои $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ҷой дорад. Пас системаи векторҳои воҳидии n – ченакаи (2.3.1) хаттӣ новобаста аст. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тавр мо дар фазои n - ченакаи вектори R^n якто системаи хаттӣ новобаста аз n иборатбударо ёфтем. Дар оянда мо нишон медиҳем, ки ин гуна системаҳои хаттӣ новобаста аз n иборатбуда беохир бисёранд.

Аз тарафи дигар теоремаи зеринро исбот мекунем:

Теоремаи 2.3.2. *Ҳар гуна* s *– то вектоҳои* n *- ченака ҳангоми* $s > n$ *будан, хаттӣ вобаста мебошад.*

Исбот. Бигзор $s > n$ ва ба мо векторҳои зерин дода шуда бошад:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = (a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}), \\ \alpha_2 = (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_s = (a_{s1},\ a_{s2},\ \ldots,\ a_{sn}), \end{array}.$$

Мо бояд нишон диҳем, ки ин система хаттӣ вобаста аст, яъне чунин ададҳои ақалан яктоашон ғайринулии $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – ро ёбем, ки барои онҳо баробарии зерин иҷро шавад:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = \theta. \tag{2.3.3}$$

Дар (2.3.3) ба ҷойи векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ва вектори θ қимати координатҳои онҳоро гузошта пай дар пай ҳосил мекунем:

$$\begin{array}{l} k_1(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) + k_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \ldots + k_s(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}) = (0, 0, , \ldots, 0), \\ (a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{s1}k_s, a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{s2}k_s, \ldots, a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \ldots + a_{sn}k_s) = \\ \qquad = (0, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

Аз баробарии охирин ба баробариҳои координатаҳои мувофиқ гузашта ба системаи баробариҳои зерин меоем:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + ... + a_{s1}k_s = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{s2}k_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + ... + a_{sn}k_s = 0 \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Системаи баробариҳои (2.3.4) ин системаи n – то муодилаҳои s – номаълумаи якҷинса мебошад. Миқдори муодилаҳо – n дар ин система аз миқдори номаълумҳо – s хурд мебошад. (Дар ин система миқдори муолилаҳо–n аз миқдори номаълумҳо– s хурд мебошад, яъне $n < s$.) Аз ҳамин сабаб мувофиқи мавзӯи "*Усули пай дар пай хориҷкунӣ барои системаи муодилаҳои якҷинса*" системаи (2.3.4) ҳалҳои ғайрисифрӣ дорад. Ҳамин тавр мо ҳамин хел ададҳои $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – ро интихоб намуданамон мумкин аст, ки ақалан яке аз онҳо нобаробари сифр мебошад ва онҳо (2.3.4)-ро қаноат мекунонанд. Теорема исбот шуд.

2.4 Системаи максималии хаттӣ новобаста

Таърифи 2.4.1. *Системаи векторҳои* n *– ченакаи хаттӣ новобастаи*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{2.4.1}$$

системаи максималии хаттӣ новобаста номида мешавад, агар ҳангоми ба он илова намудани дилхоҳ вектор вай ба системаи хаттӣ вобаста мубаддал гардад.

Аз ин таъриф, аз теоремаҳои 2.3.1 ва 2.3.2 дар мавзӯи гузашта мо натиҷаҳои зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 2.4.1. *Дар фазои n – ченакаи вектории R^n дилхоҳ системаи хаттӣ новобастаи аз n вектор иборатбуда, максималӣ мебошад. Инчунин дилхоҳ системаи максималии хаттӣ новобастаи векторҳои ин фазо зиёда аз n вектор иборат буда наметавонанд.*

Натиҷаи 2.4.2. *Дилхоҳ системаи хаттӣ новобастаи векторҳои n – ченака ба ягон системаи максимали хаттӣ новобаста дохил мешавад.*

Дар ҳақиқат агар системаи хаттӣ новобастаи дода шуда максималӣ набошад, пас ба вай боз як вектор илова намудан мумкин аст, ки системаи нави ҳосилшуда хаттӣ новобаста мебошад. Агар ин системаи нав ҳоло ҳам максималӣ набошад пас ба вай боз як вектор илова намудан мумкин аст ва ҳоказо. Аз тарафи дигар ин протсесс то беохир давом карда наметавонад, чун ки дилхоҳ системаи $n+1$ – то векторҳои n – ченака хаттӣ вобаста мебошад.

Аз баски дилхоҳ системаи аз як вектори n-ченака ғайри нулӣ иборатбуда хаттӣ новобаста аст, пас мо ба тасдиқоти зерин меоем:

Натиҷаи 2.4.3. *Ҳар гуна вектори ғайри нулӣ ба ягон системаи максималӣ хаттӣ новобаста дохил мешаванд.*

Натиҷаи 2.4.4. *Дар фазои n – ченакаи вектории R^n беохир бисёр системаҳои максималӣ хаттӣ новобастаи гуногун мавҷуд аст.*

Савол ба миён меояд, ки оё дар фазои n – ченакаи вектории R^n системаҳои максималӣ хаттӣ новобастаи миқдори векторашон аз n кам мавҷуд аст ё ин ки миқдори векторҳо дар дилхоҳ ин гуна система ба n баробар аст.

Ба ин савол мо баъди омухтани мафҳуми системаҳои баробарқувва ва теоремаи асосӣ ҷавоб медиҳем.

2.5 Системаҳои баробарқувва

Таърифи 2.5.1. *Агар вектори β ба комбинатсияи хаттии векторҳои*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \tag{2.5.1}$$

баробар бошад, онгоҳ мегӯянд, ки β бо системаи (2.5.1) хаттӣ ифода карда мешаванд.

Фаҳмо аст, ки агар вектори β бо ягон зерсистемаи системаи (2.5.1) хаттӣ ифода карда шаванд, онгоҳ вай бо худи система ҳам хаттӣ ифода карда мешавад. Барои ин кифоя аст, ки векторҳои системаи (2.5.1), ки ба ин зерсистема дохил намешаванд дар комбинатсияи хаттӣ бо коэффитсиентҳои баробари сифр гирифта шаванд.

Мафҳуми хаттӣ ифодашавиро барои системаи векторҳо ба тариқи зерин умуми мекунем:

Таърифи 2.5.2. *Мегуянд, ки системаи векторҳои*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \tag{2.5.2}$$

бо воситаи системаи (2.5.1) хаттӣ ифода карда мешавад, агар ҳар як вектори β_i, $i = 1, 2, \dots, s$ ба комбинатсияи хаттии системаи (2.5.1) баробар бошад.

Теоремаи 2.5.1. *Мафҳуми хаттӣ ифодашавии як система бо системаи дигар мафҳуми транзитивӣ мебошад, яъне агар системаи (2.5.2) бо воситаи системаи (2.5.1) хаттӣ ифода карда шавад, системаи*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \tag{2.5.3}$$

бо системаи (2.5.2) хаттӣ ифода карда шавад, пас системаи (2.5.3) бо системаи (2.5.1) хаттӣ ифода карда мешавад.

Исбот. Бигзор системаи (2.5.3) бо системаи (2.5.2) ва системаи (2.5.2) бо системаи (2.5.1) хаттӣ ифода карда шавад:

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji}\beta_i, \quad j = 1, 2, \ldots, t, \tag{2.5.4}$$

$$\beta_i = \sum_{m=1}^{r} k_{im}\alpha_m \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.5.5}$$

Тарафи рости (2.5.5) – ро ба (2.5.4) гузошта ҳосил мекунем.

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji} \left(\sum_{m=1}^{r} k_{im}\alpha_m \right) = \sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{s} l_{ji}k_{im} \right) \alpha_m$$

Баробарии охирин нишон медиҳад, ки дилхоҳ вектори системаи (2.5.5) ба комбинатсияи хаттии вектори системаи (2.5.3) баробар аст, яъне системаи (2.5.5) бо системаи (2.5.3) хаттӣ ифода мешавад. Теорема исбот шуд.

Таърифи 2.5.3. *Ду системаи векторҳо баробарқувва (эквивалент) номида мешаванд, агар ҳар яки аз ин системаҳо бо системаи дуюм хаттӣ ифода карда шаванд.*

Аз хосияти транзитивии мафҳуми хаттӣ ифодашавии як система бо системаи дигар (теоремаи 2.5.1) ва мафҳуми баробарқуввагии системаи векторҳо тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем:

Натиҷаи 2.5.1. *Агар ду системаи векторҳо баробарқувва бошанд ва вектори додашуда бо яке аз ин системаҳо хаттӣ ифода шавад пас ин вектор бо системаи дуюм ҳам хаттӣ ифода мешавад.*

Агар аз ду системаи баробарқувваи векторҳо якеаш хаттӣ новобаста аст дода шуда бошанд, пас оиди хаттӣ новобаста будани системаи дуюм мо чизе дигар гуфта наметавонем. Агар ҳарду системаҳои баробарқувва хаттӣ новобаста бошанд, онгоҳ оиди миқдори векторҳои ин системаҳо мо баъди исботи теоремаи асосӣ ба тасдиқоти хеле муҳим меоем.

2.6 Теоремаи асосӣ оиди хаттӣ ифодашавии як система ба воситаи системаи дигар

Теоремаи 2.6.1. *Агар дар фазои n – ченакаи векторӣи R^n ба мо ду системаи векторҳои*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r, \tag{2.6.1}$$

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_s, \tag{2.6.2}$$

дода шуда бошанд,ки системаи (2.6.1) хаттӣ новобаста аст ва он бо воситаи системаи (2.6.2) хаттӣ ифода карда мешавад, онгоҳ миқдори векторҳои системаи (2.6.1) аз миқдори системаи (2.6.2) зиёд намебошад, яъне $r \leq s$

Исбот. Исботро аз баръаксаш мегузаронем. Бигзор $r > s$ мувофиқи шарти теорема ҳар як вектори системаи (2.6.1) бо воситаи системаи (2.6.2) хаттӣ ифода карда мешавад:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1s}\beta_s \\ \alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{2s}\beta_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + ... + a_{rs}\beta_s \end{cases} \tag{2.6.3}$$

Коэффитсиентҳои ин ифодаҳои хаттӣ, системаи r – то векторҳои s – ченакаи зеринро ташкил медиҳанд:

$$\begin{cases} \gamma_1 = (a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1s}) \\ \gamma_2 = (a_{21},\ a_{22},\ \dots,\ a_{2s}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_r = (a_{r1},\ a_{r2},\ \dots,\ a_{rs}) \end{cases}$$

Аз баски $r > s$ яъне миқдори векторҳои ин система — r аз ченаки онҳо — s калон аст, пас мувофики теоремаи 2.3.2 ин векторҳо хаттӣ вобаста мебошанд, яъне чунин ададҳои ақалан яктоашон ба сифр нобаробари $k_1, k_2, \dots, k_r$ мавҷуданд, ки

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \dots + k_r\gamma_r = \theta.$$

Ба ҷойи векторҳои $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ ва вектори θ қимати координатҳои онҳоро гузошта пай дар пай ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} & k_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1s}) + k_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2s}) + \dots + \\ & + k_r(a_{r1}, a_{s2}, \dots, a_{rs}) = (0, 0, , \dots, 0), \\ & (a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{r1}k_r, a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \\ & + \dots + a_{r2}k_r, \dots, a_{1s}k_1 + a_{2s}k_2 + \dots + a_{rs}k_r) = \\ & = (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Аз баробарии охирин ба баробариҳои координатаҳои мувофиқ гузашта ба системаи баробариҳои зерин меоем:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + ... + a_{r1}k_r = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{r2}k_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + ... + a_{rs}k_r = 0 \end{cases}$$

Ин баробариҳоро ба намуди мухтасари зерин менависем:

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}k_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, s. \tag{2.6.4}$$

Акнун комбинатсияи хаттии зерини векторҳои системаи (2.6.2) – ро бо коэффитсиентҳои $k_1, k_2, \dots, k_r$ дида мебароем:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i$$

Дар ин ифода ба ҷойи векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ифодаҳои онҳоро аз (2.6.3) гузошта бо назардошти муносибати (2.6.4) ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=1}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij}k_i \right) \beta_j = 0$$

Азбаски ақалан яке аз коэффитсиентҳои $k_1, k_2, \dots, k_r$ нобаробари сифр аст, пас системаи векторҳои (2.6.1) хаттӣ вобаста аст ва ин ба шарти теорема оиди хаттӣ новобастагии системаи (2.6.2) зид аст. Аз ҳамин сабаб фарзи мо оиди $r > s$ нодуруст аст ва $r \le s$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Натиҷаи 2.6.1. *Дилхоҳ ду системаҳои хаттӣ новобастаи баробарқувва аз миқдори якхелаи векторҳо иборатанд.*

Исбот. Бигзор системаи векторҳои хаттӣ новобастаи (2.6.1) ва (2.6.2) барорбарқувва бошанд. Аз баробарқуввагии онҳо мебароянд, ки системаи (2.6.2) бо воситаи системаи (2.6.1) хаттӣ ифода карда мешаванд, пас мувофиқи теоремаи асосӣ миқдори векторҳои системаи (2.6.1) аз миқдори векторҳои системаи (2.6.2) зиёд намебошад, яъне $r \leq s$. Айнан ҳамин тавр азбаски системаи (2.6.2) хаттӣ новобаста аст ва бо воситаи системаи (2.6.1) хаттӣ ифода карда мешаванд, пас миқдори векторҳои системаи (2.6.2) аз миқдори векторҳои он (2.6.1) зиёд нест, яъне $s \leq r$. Ҳамин тавр мо нишон додем, ки $r \leq s$ ва $s \leq r$, яъне $r = s$ Натиҷа исбот шуд.

Аз ин ҷо мебарояд, ки дилхоҳ ду системаи максималии хаттӣ новобастаи векторҳои n – ченака баробарқувваанд ва аз миқдори якхелаи векторҳо иборатанд. Мо медонем, ки дар фазои вектори n – ченакаи R^n системаи максималӣ хаттӣ новобастаи аз n вектор иборат буда (ба монанди системаи векторҳои воҳидии $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$) мавҷуд аст, пас ба саволи дар мавзӯи гузашта гузоштаамон ҷавоби зерин медиҳем:

Натиҷаи 2.6.2. *Дилхоҳ системаи максималӣ хаттӣ новобастаи векторҳои n – ченака аз n вектор иборат аст.*

2.7 Ранги системаи векторҳои n – ченака

Таърифи 2.7.1. *Зерсистемаи системаи векторҳои n – ченакаи*

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_r, \tag{2.7.1}$$

зерсистемаи максималӣ номида мешаванд, агар ҳангоми ба он ҳамроҳ намудани дилхоҳ вектори ин система он ба зерсистемаи хаттӣ вобаста мубаддал гардад.

Теоремаи 2.7.1. *Дилхоҳ ду зерсистемаи максималии системаи векторҳои n – ченака аз миқдори якхелаи векторҳо иборат мебошанд.*

Исбот. Агар дар системаи векторҳои (2.7.1) зерсистемаи

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \qquad s < r \tag{2.7.2}$$

максималӣ бошад, пас дилхоҳ векторҳои $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ ба воситаи системаи (2.7.2) хаттӣ ифода карда мешавад. Аз тарафи дигар дилхоҳ вектори α_i аз системаи (2.7.2) бо воситаи (2.7.1) хаттӣ ифода мешавад: кифоя аст, ки коэффитсиенти назди вектори α_i – ро баробари 1 ва коэффитсиентҳои дигарро баробари 0 гирем. Ҳамин тавр гуфтан мумкин аст, ки системаҳои (2.7.1) ва (2.7.2) баробарқувва мебошанд. Аз ин ҷо бармеояд, ки системаи (2.7.1) ба дилхоҳ зерсистемаи максималии худ баробарқувва мебошад. Пас мувофиқи хосияти транзитиви мафҳуми хаттӣ ифодашави як система бо системаи дигар (теоремаи 2.5.1) дилхоҳ зерсистемаҳои максималии системаи (2.7.1) байни худ баробарқувва мебошанд. Аз хаттӣ новобастагии ин гуна зерсистемаҳои максималӣ бармеояд, ки онҳо аз миқдори якхелаи векторҳо иборатанд.

Таърифи 2.7.2. *Миқдори векторҳои дилхоҳ зерсистемаи максималии системаи додашудаи векторҳо ранги ин система номида мешавад.*

Ин мафҳум ва теоремаи асосии 2.6.1 – ро истифода бурда тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем:

Теоремаи 2.7.2. *Бигзор ду системаҳои додашудаи векторҳои* n *– ченакаи*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r, \tag{2.7.3}$$
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_s, \tag{2.7.4}$$

мувофиқан рангҳо k *ва* l *дошта бошанд. Агар системаи якум бо воситаи системаи дуюм хаттӣ ифода шавад, пас* $k \leq l$. *Агар ин системаҳо баробарқувва бошанд,он гоҳ* $k = l$.

Исбот. Бигзор зерсистемаҳои

$$\alpha_{i_1},\ \alpha_{i_2},\ \ldots,\ \alpha_{i_k}, \tag{2.7.5}$$
$$\beta_{j_1},\ \beta_{j_2},\ \ldots,\ \beta_{j_l}, \tag{2.7.6}$$

мувофиқан зерсистемаи максималии хаттӣ новобастаи системаҳои (2.7.3) ва (2.7.4) бошанд. Онгоҳ системаҳои (2.7.3) ва (2.7.5) баробарқувваанд. Айнан ҳамин тавр системаҳои (2.7.4) ва (2.7.6) ҳам баробарқувва мебошанд. Аз он, ки системаи (2.7.3) бо системаи (2.7.4) хаттӣ ифода мешавад, бармеояд, ки системаи (2.7.5) ҳам бо системаи (2.7.3) хаттӣ ифода мешавад ва аз ҳамин сабаб бо системаи он баробарқувваи (2.7.6) ҳам хаттӣ ифода мешавад. Аз ин ҷо бо назардошти теоремаи асосии 2.6.1 бармеояд, ки миқдори векторҳои системаи хаттӣ новбастагии (2.7.5) аз миқдори системаи (2.7.6) зиёд намебошад, яъне нобаробарии $k \leq l$ ҷой дорад. Тасдиқоти дуюми теорема бевосита аз тасдиқоти якум мебарояд, яъне аввал нишон медиҳем $k \leq l$ мебошад, баъд нишон медиҳем, ки $l \leq k$ аст.Теорема исбот шуд.

2.8 Ранги матритсаҳо

Бигзор матритсаи аз s – сатр ва n – сутун иборат будаи зерин дода шудааст:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

ва ададҳои s ва n байни ҳам алоқаманд намебошанд. Сутунҳои ин матритса ҳамчун векторҳои s – ченака умуман метавонанд хаттӣ вобаста бошанд.

Таърифи 2.8.1. *Ранги матритса гуфта миқдори максималии сутунҳои хаттӣ новобастаи онро меноманд.*

Яъне ранги матриса баробар аст ба ранги системаи сутунҳои матритса ё ин ки ба миқдори сутунҳое, ки ба дилхоҳ зерсистемаи максималии сутунҳо дохил мешаванд.

Айнан ҳамин тавр сатрҳои матрисаи A – ро ҳамчун векторҳои n – ченака дида баромадан мумкин аст. Пешакӣ қайд мекунем, ки ранги системаи сатрҳо ба ранги сутунҳо яъне ба ранги матритса баробар аст. Ин тасдиқоти ногаҳониро баъди муайян намудани тарзи дигари ҳисобкунии ранги матритсаҳо исбот мекунем.

Пеш аз ҳама барои матритсаҳои росткунҷа мафҳуми минорро дохил мекунем. Дар матритсаи A дилхоҳ k – сатр ва дилхоҳ k – сутунро, $k \leq min(s, n)$ интихоб мекунем. Элементҳои дар буриши ин сатрҳо ва ин сутунҳо ҷойгирбуда матритсаи квадратии тартиби k – ро ташкил мекунад. Муайянкунандаи ин матритса *минори тартиби* k *– юми* матритсаи A номида мешавад.

Лемма 2.8.1. *Агар ҳамаи минорҳои тартиби* k *– юми матритсаи* A *баробари сифр бошанд, пас ҳамаи минорҳои тартибашон аз* k *калон ҳам ба сифр баробаранд.*

Исбот. Дилхоҳ минори тартиби $k+j$, $k<k+j\le min(s,n)$ – ро мувофиқи теоремаи Лаплас аз рӯи k – сатр ҷудо намуда ҳамчун суммаи ҳосили зарбҳои минорҳои тартиби k ба минорҳои тартиби j тасвир мекунем. Аз ба сифр баробар будани ҳамаи минорҳои тартиби k – юм бармеояд, ки ҳамаи ин ҳосили зарбҳо ба сифр баробаранд. Лемма исбот шуд.

Теоремаи 2.8.1. ***(Дар бораи рангi матритсаҳо)*** *Калонтарин тартиби минорҳои ғайри нулии матритса ба ранги он баробар аст.*

Исбот. Бигзор калонтарин тартиби минорҳои ғайри нулии матритсаи A ба r баробар аст. Умумиятро маҳдуд накарда фарз мекунем, ки минори D – и тартибаш r – и дар кунҷи чапи болои воқеъ будаи матритсаи A нобаробари сифр мебошад:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & D & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{s,r+1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

яъне $D\ne 0$. Он гоҳ r – то сутунҳо аввалаи матритсаи A хаттӣ новобастаанд. Агар дар байни онҳо вобастаги хаттӣ мавҷуд мебуд, яъне чунин ададҳои ақалан яктоаш ғайринулии $k_1,k_2,\dots,k_r$ мавҷуд мебуданд, ки

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{r1}\\ a_{r+1,1}\\ \vdots\\ a_{s1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ \vdots\\ a_{r2}\\ a_{r+1,2}\\ \vdots\\ a_{s2}\end{pmatrix}+\dots+k_r\begin{pmatrix} a_{1r}\\ \vdots\\ a_{rr}\\ a_{r+1,r}\\ \vdots\\ a_{sr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

ва аз ин ҷо бевосита баробарии зерин ҳосил мешуд:

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{r1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ \vdots\\ a_{r2}\end{pmatrix}+\dots+k_r\begin{pmatrix} a_{1r}\\ \vdots\\ a_{rr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

яъне сутунҳои минори D хаттӣ вобаста мебуданд ва мувофиқи хосияти 8 минори D баробари сифр мешуд.

Акнун исбот мекунем, ки дилхоҳ сутуни l – уми матрисаи A, $r<l\le n$ ба комбинатсияи хаттии r-то сутунҳои аввалҳои он баробар аст. Бо ин мақсад дилхоҳ i – ро $1\le i\le s$ интихоб намуда муайянкунандаи ёрирасони тартиби $r+1$ - и зеринро месозем:

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1l}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rl}\\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{il}\end{vmatrix},$$

Барои дилхоҳ i муайянкунандаи Δ_i ба сифр баробар аст. Дар ҳақиқат ҳангоми $i>r$ будан Δ_i минори тартиби $r+1$ – и матритсаи A мебошад, пас мувофиқи интихоби адади r ин минор баробари сифр мебошад. Ҳангоми $i\le r$ будан Δ_i минори матритсаи A намебошад, аз тарафи дигар дар ин ҳолат Δ_i ду сатри якхела дорад ва пас боз баробари сифр мебошад.

Пуркунандаҳои алгебравии элементҳои сатри охирини муайянкунандаи Δ_i – ро дида мебароем. Пуркунандаи алгебравии элементи a_{il} минори D мебошад. Агар $1 \leq j \leq r$ бошад, онгоҳ пуркунандаи алгебравии элементи a_{ij} дар Δ_i адади

$$A_j = (-1)^{r+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1r} & a_{1l} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix},$$

мебошад, ки аз i вобаста намебошад ва аз ҳамин сабаб онро бо воситаи A_j ишора намудем. Муайянкунандаи Δ_i – ро аз рӯи сатри охирин ҷудо намуда бо назардошти муносибати $\Delta_i = 0$ ба баробарии зерин меойем:

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{1r}A_r + a_{il}D = 0,$$

аз ин ҷо бо назардошти нобаробарии $D \neq 0$ формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$a_{il} = \frac{A_1}{D}a_{i1} - \frac{A_2}{D}a_{i2} - \ldots - \frac{A_r}{D}a_{ir}. \tag{2.8.1}$$

Коэффитсиентҳои ин баробарӣ яъне ададҳои

$$-\frac{A_1}{D},\ -\frac{A_2}{D},\ \ldots,\ -\frac{A_r}{D} \tag{2.8.2}$$

аз i вобаста нестанд пас формулаи (2.8.1) барои ҳамаи $i = 1, 2, \ldots, s$ дуруст мебошад ва ҳамаи онҳоро ба намуди векторӣи зерин навишта ҳосил мекунем:

$$\begin{pmatrix} a_{1l} \\ \vdots \\ a_{rl} \\ a_{r+1,l} \\ \vdots \\ a_{sl} \end{pmatrix} = -\frac{A_1}{D}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} - \frac{A_2}{D}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ a_{r+1,2} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} - \ldots - \frac{A_r}{D}\begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{sr} \end{pmatrix},$$

яъне дар матрисаи A сутуни дилхоҳи i – юм, $i = 1, 2, \ldots, s$ ба комбинатсияи хаттии r – то сутунҳои аввала мувофиқан бо коэффитсиентҳои (2.8.2) баробар аст.

Ҳамин тавр дар системаи сутунҳои матритсаи A мо зерсистемаи максималии хаттӣ новобастаи аз r – то сутун иборат бударо ёфтем, яъне нишон додем, ки ранги матритсаи A ба r – калонтарин тартиби минорҳои ғайринулӣ баробар аст.

Теорема исбот шуд.

Аз ин теорема усули амали ҳисоб намудани ранги матриса мебарояд. Аз ҳамин сабаб масъалаи муайян намудани хаттӣ вобастагии системаи додашудаи векторҳо ба тариқи зерин ҳал карда мешавад: матрисае тартиб дода мешавад, ки вектроҳои системаи додашуда сутунҳои он мебошанд ва ранги ин матритсаро ҳисоб намуда миқдори максималии векторҳои хаттӣ новобастаи системаи ин системаро муайян мекунем.

Қоидаи ҳисобкунии ранги матритсаҳо *Ҳангоми ҳисобкунии ранги матритса бояд аз минорҳои тартибашон хурд ба минорҳои тартибашон калон гузашта шавад. Агар минори тартиби* k *– и ғайринуллии* D *ёфта шуда бошад, онгоҳ танҳо он минорҳои тартиби* $k+1$ *– ро ҳисоб кардан лозим аст, ки онҳо минори* D *– ро дар бар мегиранд. Агар ҳамаи ин гуна минорҳои* $k+1$ *баробари сифр бошанд, пас ранги матриса ба* k *баробар аст.*

2.9 Теорема оиди миқдори максимали сатрҳои хаттӣ новобастаи матритса

Теоремаи 2.9.1. *Миқдори максимали сатрҳои хаттӣ новобастаи дилхоҳ матритса ба миқдори максимали сутунҳои хаттӣ новобастаи он ба сутунҳои хаттӣ новобастаи он, яъне ба ранги матритса баробар аст.*

Исбот. Матритсаи додашудаи A–ро транспонированида, яъне сатрҳоро ба сутунҳо табдил дода матритсаи A' – ро ҳосил мекунем. Калонтарин тартибҳои минорҳои ғайри нулии матритсаҳои A ва A' баробаранд, чунки мувофиқи хосияти муайянкунандаҳо ҳангоми транспонироиндан муайянкунанда тағйир намеёбад, яъне дилхоҳ минори матритсаи A инчунин минори матритсаи A' ҳам мебошад.

Аз ин ҷо мувофиқи теоремаи 2.8.1 оиди ранги матритсаҳо бармеояд, ки ранги матритсаҳои A ва A' баробаранд. Яъне миқдори максимали сутунҳои хаттӣ новобастаи матритсаи A ба миқдори максимали сутунҳои хаттӣ новобастаи матритсаи A' (сатрҳои хаттӣ новобастаи матритсаи A) баробар аст.

Теорема исбот шуд.

Акнун боз як натиҷаи хеле муҳимро аз теорема дар бораи ранги матритиса нишон медиҳем.

Теоремаи 2.9.2. *Барои он ки муайянкунандаи тартиби n баробари сифр бошад зарур ва кифоя аст, ки сатрҳои он хаттӣ вобаста бошанд.*

Исботи шарти зарурӣ. Бигзор ба мо муайянкунандаи тартиби n баробари нул, яъне матритсаи квадрати тартиби n - и ягона минори тартиби n - и он ба нул баробар дода шуда аст. Аз ин ҷо мебарояд, ки калонтарин тартиби минори ғайринулии ин матриса аз n хурд аст. Аз ҳамин сабаб мувофиқи теорема дар бораи ранги матриса сатрҳои матритсаи хаттӣ вобастаанд. Шарти зарури исбот шуд.

Исботи шарти кифоягӣ. Исботи шарти кифоягӣ бевосита аз хосияти 8- уми муайянкунандаҳо мебароянд.

2.10 Системаи муодилаҳои хаттӣ

Акнун ба омӯхтани системаи муодилаҳои хаттии дилхоҳ мегузарем, яъне ба системаҳои намуди

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{2.10.1}$$

ки миқдори муодилаҳо – s ва миқдори номаълумҳо – n метавонанд баробар набошанд. Дар ин мавзӯъ бошад, мо танҳо масъалаи ҳамҷоя будан ё набудани ин гуна системаҳоро дида мебароем. Бо ин мақсад аз коэффитсентҳои назди номаълумҳо ва аъзоҳои озоди ин система матритсаҳои

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix},$$

тартиб медиҳем, ки онҳоро мувофиқан матрисаи асосӣ ва матрисаи васеъкардашудаи системаи муодилаҳои 2.10.1 меноманд. Матрисаи васеъкардашудаи $\bar{A}$ аз матритсаи A дар натиҷаи илова кардани сутуни аъзоҳои озод ҳосил мешавад.

Лемма 2.10.1. *Ранги матритсаи $\bar{A}$ ба ранги матритсаи A баробар аст ё ин ки аз он як воҳид калон мебошад.*

Исбот. Дар матритсаи A ягон системаи максималии хаттӣ новобастаи сутунҳоро интихоб менамоем. Ин системаи сутунҳо дар $\bar{A}$ ҳам хаттӣ новобаста мебошад. Агар вай хосияти максималиашро нигоҳ дорад, яъне сутуни аъзоҳои озод бо воситаи он хаттӣ ифода карда шавад, пас $rang\bar{A} = rangA$, дар ҳолати баръакс ба ин системаи сутунҳо сутуни аъзоҳои озодро ҳамроҳ намуда системаи хаттӣ новобастаи сутунҳои $\bar{A}$ – ро ҳосил мекунем, ки он дар $\bar{A}$ максималӣ мебошад. Дар ин ҳолат $rang\bar{A} = rangA + 1$.

Ба саволи ҳамҷоя будан ё набудани дилхоҳ системаи муодилаҳои хаттӣ тасдиқоти зерин пурра ҷавоб медиҳад.

Теоремаи 2.10.1. ***(Кронекер-Капеллӣ)*** *Барои он ки системаи муодилаҳои хаттии (2.10.1) ҳамҷоя бошад, зарур ва кифоя аст, ки ранги матритсаи асосӣ ба ранги матритсаи васеъкардашуда баробар бошад, яъне $rang\bar{A} = rangA$.*

Исботи шарти зарурӣ. Бигзор системаи (2.10.1) ҳамҷоя буда $k_1, k_2, \ldots, k_n$ яке аз ҳалҳои он бошад. Ин ададҳоро дар (2.10.1) ба ҷои номаълумҳо гузошта s – то айниятҳоро ҳосил мекунем. Ин айниятҳо нишон медиҳанд, ки сутуни охирини $\bar{A}$ ба комбинатсияи хаттии сутунҳои матрисаи A мувофиқан бо коэффитсиентҳои $k_1, k_2, \ldots, k_n$ баробар аст. Дилхоҳ сутуни боқимондаи матрисаи $\bar{A}$ ба матритсаи A ҳам таълуқ дорад ва аз ҳамин сабаб бо воситаи ин сутунҳо хаттӣ ифода карда мешавад, яъне системаи сутунҳои матрисаи $\bar{A}$ бо системаи сутунҳои матрисаи A хаттӣ ифода карда мешавад. Дилхоҳ сутуни матрисаи A сутуни матрисаи $\bar{A}$ ҳам мебошад, пас бо воситаи системаи сутунҳои матрисаи $\bar{A}$ хаттӣ ифода карда мешавад.

Ҳамин тавр мо нишон додем, ки системаи сутунҳои матрисаи A ва системаи сутунҳои матрисаи $\bar{A}$ баробарқувваанд ва мувофиқи тасдиқоти дуюми теоремаи 2.7.2 ҳар ду ин системаҳои векторҳои s – ченака рангҳои баробар доранд, яъне $rang\bar{A} = rangA$.

Исботи шарти кифоягӣ. Бигзор $rang\bar{A} = rangA$, пас дилхоҳ системаи сутунҳои максималӣ хаттӣ новобастаи матрисаи A дар матрисаи $\bar{A}$ ҳам максималӣ хаттӣ новобаста мебошад. Пас бо воситаи системаи сутунҳои матрисаи A сутуни охирини $\bar{A}$ хаттӣ ифода карда мешавад. Ҳамин тавр чунин коэффитсиентҳои $k_1, k_2, \ldots, k_n$ мавҷуданд, ки суммаи сутунҳои матритсаи A бо ин коэффитсиентҳо ба сутуни аъзоҳои озод баробар аст. Пас $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ҳалли системаи (2.10.1) буда, ин системаи муодилаҳои хаттӣ ҳамҷоя мебошад.

2.11 Ҷустуҷӯи ҳамаи ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттӣ

Теоремаи Кранекер – Капеллӣ, ки бо ёрии он ҳамҷоягии дилхоҳ системаи муодилаи хаттии

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \qquad (2.11.1)$$

муқаррар карда мешавад, мавҷудияти ҳалро тасдиқ мекунад, лекин тарзи амалии ҷустуҷӯи ҳалҳоро нишон намедиҳад.

Акнун ба иҷрои ҷустуҷӯи амалии ҳалҳо гузашта ба назди худ мақсад мегузорем, ки системаи дода шудаи (2.11.1) – ро бо системаи ба он баробарқувва иваз намоем, ки дар он миқдори муодилаҳо ва номаълумҳо бо ҳамдигар баробар буда муайянкунандаи асосии он нобаробари нул бошад ва онро бо усули Крамер ҳал намоем.

Акнун ин гуфтаҳоро муфассалтар дида мебароем. Бигзор ба мо системаи s –то муодилаи хаттии n – номаълумаи (2.11.1) дода шуда бошад. Фарз мекунем, ки ин система ҳамҷоя аст, пас мувофиқи теоремаи Кронекер – Капеллӣ муносибати $rang\bar{A} = rangA = r$ ҷой дорад. Яъне миқдори максималии сатрҳои хаттӣ новобастаи матрисаи асосии A ба r баробар аст ва барои муайянӣ бигзор r – то сатрҳои аввалаи A хаттӣ новобаста буда сатрҳои боқимонда ба комбинатсияи хаттии ин сатрҳо баробар аст.

Пас r – то сатрҳои аввалаи матритсаи васеъкардашудаи $\bar{A}$ ҳам, хаттӣ новобастаанд, чунки ҳар гуна хаттӣ вобастагии онҳо ин хаттӣ вобастагии r – то сатрҳои аввалаи матрисаи асосии A мебошад. Аз баробарии рангҳои матрисаҳои A ва $\bar{A}$ бармеояд, ки r – то сатрҳои аввалаи $\bar{A}$ дар он системаи максималӣ хаттӣ новобастаро ташкил мекунад, яъне дилхоҳ сатри дигари он ба комбинатсияи хаттии ин сатрҳо баробар мебошад.

Аз ин ҷо мебарояд, ки дилхоҳ муодилаи системаи (2.11.1) – ро ҳамчун комбинатсияи хатти r – то муодилаҳои аввала бо ягон коэффитсиентҳо тасвир намудан мумкин аст.

Аз ҳамин сабаб мувофиқи теоремаи 1.2.1 системаи (2.11.1) ва системаи r – то муодилаҳои аввалаи он байни ҳам баробарқувва мебошанд, яъне дилхоҳ ҳалли r – то муодилаҳои аввала ҳамаи муодилаҳои системаи (2.11.1) – ро қаноат мекунонад ва баръакс. Аз ҳамин сабаб кифоя аст (Пас), ки ҳамаи ҳалҳои r – то муодилаҳои аввалаи системаи (2.11.1), яъне ҳалҳои системаи зеринро меёбем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \qquad (2.11.2)$$

Аз баски сатрҳои аз коэффитсиентҳои назди номаълумҳои системаи (2.11.2) тартиб додашуда хаттӣ новобастаанд, яъне ранги матрисаи коэффитсиентҳои ин система ба r баробар аст, пас $r \leq n$ ва ғайр аз ин ақалан яке аз минорҳои тартиби r – и ин матриса нобаробари сифр мебошад.

Агар $r = n$ бошад, онгоҳ (2.11.2) системае мебошад, ки дар он миқдори муодилаҳо ва номаълумҳо бо ҳам дигар баробар аст, пас мувофиқи теоремаи Крамер ин система ва системаи ба он баробарқувваи (2.11.1) ҳаллӣ ягона доранд ва ин ҳал бо ёрии қоидаи Крамер ёфта мешавад.

Акнун бигзор $r < n$ бошад ва барои муайянӣ бигзор минори тартиби r – и аз коэффитсиентҳои назди r – то номаълумҳои аввала тартиб додашуда нобаробари сифр бошад. Дар ҳар як муодилаҳои (2.11.2) ҳамаи аъзоҳоро бо номаълумҳои $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ ба тарафи рост гузаронида ба ин номаълумҳо мувофиқан ягон қиматҳои $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ мебахшем. Ҳамин тавр мо системаи r – то муодилаҳои

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_n = b_1 - a_{1r+1}c_{r+1} + ... + a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_n = b_2 - a_{2r+1}c_{r+1} + ... + a_{2n}c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_n = b_r - a_{rr+1}c_{r+1} + ... + a_{rn}c_n \end{cases}$$

нисбат ба r – то номаълумҳои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ро ҳосил намудем. Мувофиқи қодаи Крамер ин система ҳалли ягонаи $c_1, c_2, \ldots, c_r$ дорад. Пас системаи ададҳои $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n$ ҳалли системаи (2.11.2) ва аз ҳамин сабаб ҳалли системаи (2.11.1) мебошад. Қиматҳои $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ барои номаълумҳои $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ки онҳоро номаълумҳои озод меноманд, ба таври дилхоҳ интихоб карда шудааст, пас барои системаи (2.11.2) бо ин роҳ беохир бисёр ҳалҳоро ёфтан мумкин аст.

Ҳамаи ин гуфтаҳоро якҷоя намуда қоидаи зерини ҳалли дилхоҳ системаи муодилаи хаттиро ҳосил мекунем.

Хулоса *Бигзор ба мо системаи муодилаҳои хаттии (2.11.1) дода шуда аст ва бигзор ин система ҳамҷоя ва ранги матритсаи асосии он ба r баробар аст. Дар матритсаи асосии*

A r – то сатрҳои хаттӣ новобастаро интихоб намуда, дар системаи муодилаҳои (2.11.1) танҳо он муодилаҳоро мемонем, ки коэффитсиентҳои он ба сатрҳои интихоб шуда дохиланд. Муодилаҳои боқимондаро аз система мепартоем. Дар тарафи чапи ин муодилаҳо чунин r – то номаълумҳоро мемонем, ки муайянкунандаи аз ин коэффитсиентҳои онҳо тартибдода шуда ғайри сифр бошад. Ҳамаи номаълумҳои боқимондаро аъзои озод элон намуда ба тарафи рост мегузаронем ва ба онҳо қиматҳои дилхоҳи ададӣ бахшида қимати номаълумҳои боқимондаро бо воситаи қоидаи Крамер ҳисоб менамоем. Бо ин роҳ мо ҳамаи ҳалҳои системаи (2.11.1)–ро меёбем.

Тасдиқоти зерини дар боло гирифтаамoро боз якбор гуфта мегузарем.

Теоремаи 2.11.1. *Барои он ки системаи ҳамҷояи (2.11.1) ҳалли ягона дошта бошад зарур ва кифоя аст, ки ранги матрисаи A ба миқдори номаълумҳо баробар бошад.*

давомаш бо мисолҳояш нест?

2.12 Системаи муодилаҳои хаттии якҷинса

Бигзор системаи s – то муодилаҳои хаттии якҷинсаи n – номаълумаи зерин дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.12.1}$$

Аз теоремаи Кронекер – Капеллӣ бармеояд, ки ин система доимо ҳамҷоя аст, чунки ҳангоми ба матриса илова намудани сутуни аз сифрҳо иборат буда, ранги он тағйир намеёбад. Ин бевосита ҳам маълум аст — системаи якҷинса доимо ҳалли нулии $(0, 0, \ldots, 0)$ дорад.

Бо воситаи A матрисаи аз коэффитсиентҳои системаи (2.12.1) тартибдодашударо ишора мекунем ва бигзор $rangA = r$ аст. Натиҷаҳои мавзӯи гузаштаро, яъне барои системаи муодилаҳои якҷинса усули ҷустуҷӯи ҳамаи ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттиро татбиқ намуда тасдиқотҳои зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 2.12.1. *Агар $rangA = n$ бошад, онгоҳ системаи муодилаҳои якҷинсаи (2.12.1) танҳо ҳалли нулӣ дорад, ҳангоми $rangA < n$ система инчунин ҳалҳои ғайри нулӣ ҳам дорад.*

Аз ин ҷо аз он ҷумла тасдиқоти зеринро ҳам ҳосил мекунем:

Натиҷаи 2.12.2. *Системаи n – то муодилаҳои хаттии якҷинсаи n – номаълума фақат ва фақат дар ҳамон вақт ҳалҳои ғайри нулӣ дорад, агар муайянкунандаи асосии он баробари нул бошад.*

Дар ҳақиқат баробари сифр будани муайянкунандаи асосӣ ба аз n хурд будани ранги матрисаи асосӣ он баробарқувва аст.

Натиҷаи 2.12.3. *Агар дар системаи муодалиҳои хаттӣ якҷинса миқдори номаълумҳо аз миқдори муодилаҳо зиёд бошад, пас система ҳатман ҳалҳои ғайри нули дорад.*

Азбаски дар ин ҳолат ранг ба миқдори номаълумҳо баробар шуда наметавонад. Акнун хосиятҳои ҳалҳои системаҳои муодалаҳои хаттии якҷинсаро дида мебароем. Агар вектори $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ҳалли системаи (2.12.1) бошад, яъне

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Онгоҳ вектори $k\beta = (kb_1, kb_2, \ldots, kb_n)$ ҳам ҳалли ин система мебошад. Дар ҳақиқат

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(kb_j) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j = k \cdot 0 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Бигзор акнун ба ғайр аз вектори β боз вектори $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ҳалли системаи (2.12.1) бошад, яъне

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

онгоҳ суммаи ин векторҳо

$$\beta + \gamma = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_n + c_n)$$

ҳам ҳалли ин система мебошад. Дар ҳақиқат ҳангоми ба ҷойи номаълумҳо координатаҳои вектори $\beta + \gamma$ гузошта ҳосил мекунем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_j + c_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0 + 0 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Ҳамин тавр мо нишон додем, ки суммаи ду ҳал ва ҳосили зарби дилхоҳ адад ба ҳалли системаи муодилаҳои хаттии якҷинса боз ҳалли ин система мебошад. Аз ин ҷо мо тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 2.12.4. *Дилхоҳ комбинатсияи хаттӣ ҳалҳои системаи муодилаҳои хатти якҷинса боз ҳалли ин система мешавад.*

Қайд кардан ҷоиз аст, ки ин тасдиқот барои системаи муодилаҳои ғайриякҷинса ҷой надорад, яъне суммаи ду ҳал ва ҳосили зарби дилхоҳ адад ба ҳалли системаи муодилаҳои хаттии ғайриякҷинса боз ҳалли ин система намебошад.

2.13 Системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттӣ якҷинса

Мо медонем, ки дилхоҳ системаи векторҳои n – ченакаи миқдори векторҳояш аз n калон аст, хаттӣ вобаста мебошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки аз маҷмӯи ҳамаи ҳалҳои системаи якҷинсаи зерин

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.13.1}$$

ки векторҳои n – ченака мебошанд, системаи охирноки максималии хаттӣ новобастаро интихоб намудан мумкин аст, ки дилхоҳ ҳалли системаи якҷинсаи (2.13.1) ба комбинатсияи хаттии векторҳои ин система баробар мебошад. Ин гуна системаро системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттии якҷинса меноманд. Ҳамин тавр мо таърифи зеринро ҳосил намудем:

Таърифи 2.13.1. *Дилхоҳ системаи максималӣ хаттӣ новобастаи ҳалҳои системаи якҷинсаро системаи фундаменталии ҳалҳо меноманд.*

Яъне системаи хаттӣ новобастаи ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинса системаи фундаменталӣ мебошад, агар ҳангоми ба он илова намудани дилхоҳ ҳалли ғайринулӣ он ба системаи хаттӣ вобаста мубаддал гардад. Боз як бори дигар қайд мекунем, ки *вектори n – ченака фақат ва факат дар ҳамон вақт ҳалли системаи якҷинсаи (2.13.1) мебошад, агар вай ба ягон комбинатсияи хаттии векторҳои системаи фундаменталии ҳалҳо баробар бошад.*

Фаҳмо аст, ки системаи фундаменталӣ барои системаи (2.13.1) фақат дар ҳолате мавҷуд аст, агар ин система ҳалҳои ғайри нулӣ дошта бошад, яъне ранги матритсаи асосии он аз миқдори номаълумҳо хурд бошад. Дар ин ҳолат системаи (2.13.1) метавонад системаҳои фундаменталии гуногунро дошта бошад. Ҳамаи ин системаҳои фундаменталӣ баробарқувваанд, чунки дилхоҳ вектори системаи фундаменталии додашуда хаттӣ бо системаи фундаменталии дигар ифода карда мешавад ва аз ҳамин сабаб ҳамаи системаҳои фундаменталии ҳалҳо аз миқдори якхелаи ҳалҳо иборат мебошанд.

Теоремаи 2.13.1. *Агар r – ранги матритсаи системаи муодилаҳои хаттии якҷинса аз n – миқдори номаълумҳои система хурд бошад, онгоҳ дилхоҳ системаи фундаменталии ҳалҳо аз $n-r$ ҳал иборат мебошанд.*

Исбот. Дар мавзӯи *"Ҷустуҷӯи ҳамаи ҳалҳои системаи муодилаҳои хаттӣ"* гуфта гузашта будем, ки $n-r$ ин миқдори номаълумҳои озоди системаи муодилаҳои хаттӣ якҷинса мебошад ва бигзор $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ин номаълумҳои озод бошанд. Дилхоҳ муайянкунандаи ғайри нулӣ d – и тартиби $n-r$ дида мебароем ва онро ба тариқи зерин менависем:

$$d = \begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \cdots & c_{1n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2} & \cdots & c_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

Элементҳои сатри i – юми ин муайянкунандаро $1 \le i \le n-r$ ба сифати қиматҳои номаълумҳои озод қабул намуда барои номаълумҳои $x_1, x_2, \ldots, x_r$ қиматҳои ба таври ягона муайяншударо ёфта ҳалли пурра муайяни системаи муодилаҳои (2.13.1) – ро ҳосил мекунем. Ҳалли ҳосилшударо ба намуди векторӣ зерин менависем:

$$\alpha_i = (c_{i1},\ c_{i2},\ \ldots,\ c_{ir},\ c_{i,r+1},\ c_{i,r+2},\ \ldots,\ c_{in})\,.$$

Системаи векторҳои ҳосилшудаи

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-r} \tag{2.13.2}$$

барои системаи муодилаҳои (2.13.1) системаи фундаменталии ҳалҳо мебошад. Дар ҳақиқат ин системаи векторҳо хаттӣ новобаста аст, чунки ба матритсаи сатрҳояш аз ин векторҳо тартиб дода шуда, минори ғайри нулии d – и тартиби $n-r$ дохил аст. Аз тарафи дигар бигзор

$$\beta = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r,\ b_{r+1},\ b_{r+2},\ \ldots,\ b_n)$$

дилхоҳ ҳалли системаи муодилаҳои (2.13.1) бошад. Нишон медиҳем, ки вектори β бо воситаи векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$ хаттӣ ифода карда мешаванд. Бигзор

$$\beta' = (b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n).$$

Сатри i – юми муайянкунандаи d – ро бо воситаи α'_i ишора намуда онро ҳамчун вектори $n-r$ – ченака дида мебароем, яъне

$$\alpha'_i = (c_{i,r+1},\ c_{i,r+2},\ \ldots,\ c_{in})\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-r.$$

Сатрҳои муайянкунандаи d, яъне системаи векторҳои (2.13.2) хаттӣ новобастаанд, чунки $d \neq 0$ аст. Аз тарафи дигар системаи векторҳои $n-r$ ченакаи

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-r},\ \beta',$$

хаттӣ вобаста мебошад, чунки миқдори векторҳои система аз ченаки онҳо калон аст, яъне чунин ададҳои $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$ мавҷуданд, ки

$$\beta' = k_1\alpha'_1 + k_2\alpha'_2 + \ldots + k_{n-r}\alpha'_{n-r}. \tag{2.13.3}$$

Акнун вектори n – ченакаи зеринро дида мебароем:

$$\delta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_{n-r}\alpha_{n-r} - \beta.$$

Вектори δ ба комбинатсияи хаттии ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинсаи (2.13.1) баробар аст, пас худаш ҳам ҳалли ин система мебошад.

Аз (2.13.3) бармеояд, ки дар ҳалли δ қимати ҳамаи номаълумҳои озод ба сифр баробар аст. Аз тарафи дигар ҳалли ягонаи системаи муодилаҳои (2.13.1), ки ҳангоми ба сифр баробар будани номаълумҳои озод ҳосил мешаванд ҳалли нулӣ мебошанд. Ҳамин тавр $\delta = 0$, яъне

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}.$$

Теорема исбот шуд.

Аз исботи ин теорема бар меоянд, ки агар ба сифати d ҳамаи муайянкунандаҳои ғайри нулии имконпазири тартибашон $n - r$ гирифта шаванд, он гоҳ мо ҳамаи системаҳои фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинсаи (2.13.1) ҳосил мекунем.

2.14 Алоқаи байни ҳалҳои системаи муодилаҳои ғайри якҷинса ва системаи якҷинсаи он

Бигзор ба мо системаи s – то муодилаҳои n – номаълумаи ғайри якҷинсаи зерин дода шуда бошанд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{2.14.1}$$

Системаи якҷинсаи зеринро

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.14.2}$$

ки аз системаи (2.14.1) дар натиҷаи ба сифр иваз намудани аъзоҳои озод ҳосил шуда аст, *системаи овардашуда* барои системаи (2.14.2) меноманд. Дар байни ҳалҳои системаҳои (2.14.1) ва (2.14.2) алоқаи зич мавҷуд аст, ки дар ду теоремаҳои зерин оварда шудааст.

Теоремаи 2.14.1. *Суммаи дилхоҳ ҳалли системаи муодилаҳои ғайри якҷинсаи (2.14.1) ва дилхоҳ ҳалли системаи овардашудаи (2.14.2) боз ҳалли системаи муодилаҳои ғайри якҷинса (2.14.1) мебошад.*

Исбот. Бигзор $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ва $d_1, d_2, \ldots, d_n$ мувофиқан ҳалҳои системаҳои муодилаҳои (2.14.1) ва (2.14.2) бошанд, яъне

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Дилхоҳ муодилаи системаи (2.14.1), масалан муодилаи i – юмро $i = 1, 2, \ldots, s$, интихоб намуда ба ҷои номаълумҳо адаҳои $c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n$ – ро гузошта ҳосил мекунем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = b_i + 0 = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 2.14.2. *Фарқи байни дилхоҳ ҳалли системаи муодилаҳои ғайри якҷинсаи (2.14.1) ҳалли системаи овардашудаи (2.14.2) мебошад.*

Исбот. Бигзор $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ва $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$ ҳалҳои системаи муодилаҳои (2.14.1) бошанд, яъне

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c'_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Дилхоҳ муодилаи системаи (2.14.2), масалан муодилаи i – юмро $i = 1, 2, \ldots, s$, интихоб намуда ба ҷойи номаълумҳо адаҳои $c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_n - c'_n$ – ро гузошта ҳосил мекунем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c_j - c'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c'_j = b_i - b_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Теорема исбот шуд.

Натиҷаи 2.14.1. *Як ҳалли системаи муодилаҳои ғайри якҷинсаи (2.14.1)– ро ёфта ва онро бо ҳар як ҳалли системаи овардашудаи (2.14.2) ҷамъ намуда ҳамаи ҳалҳои системаи (2.14.1) – ро ҳосил мекунем.*

Боби 3

Алгебраи матритсаҳо

3.1 Зарби матритсаҳо

Таърифи 3.1.1. *Дигаргунсозии хаттӣ номаълумҳо гуфта чунин гузаришро аз системаи n – то номаълумҳои $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ба системаи n – то номаълумҳои $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, меноманд, ки дар он номаълумҳои кӯҳна бо воситаи номаълумҳои нав хаттӣ ифода карда мешаванд:*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{array}\right\} \tag{3.1.1}$$

Дигаргунсози хаттии (3.1.1) пурра бо матрисаи коэффитсиентҳои худ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

муайян карда мешавад, чунки ду дигаргунсозӣ бо матритсаи якхела аз якдигар танҳо бо ҳарфҳои барои ишораи номаълумҳо истифодашаванда фарқ мекунанд, воқеъан интихоби ин ишораҳо пурра дар ихтиёри мо мебошад. Баръакс, агар матритсаи квадратии тартиби $n-$ум дода шуда бошад, мо метавонем дигаргунсози хаттӣ номаълумҳоро нависем, ки барои он матритсаи додашуда матритсаи коэффитсиентҳо мебошад. Ҳамин тавр, дар байни дигаргунсозиҳои хаттии $n-$номаълумҳо ва матритсаҳои квадрати тартиби $n-$ум мувофиқати байни ҳам яккимата мавҷуд аст, аз ҳамин сабаб ба ҳар як мафҳуми бо дигаргунсозиҳои хаттӣ алоқаманд ва ҳар гуна хосияти ин дигаргунсозиҳо, мафҳум ва хосияти монанд барои матритсаҳо мувофиқ меоянд.

Акнун масъалаи пай дар пай иҷрошавии ду дигаргунсозиҳои хаттиро дида мебароем. Бигзор баъди дигаргунсозии (3.1.1) дигаргунсозии хаттии

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n. \end{array}\right\} \tag{3.1.2}$$

иҷро карда шавад, ки он системаи номаълумҳои $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ – ро ба системаи номаълумҳои

$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ мегузаронад. Матритсаи ин дигаргунсозиро бо B ишора мекунем:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Дар (3.1.1) ба ҷои $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ ифодаҳои онҳоро аз (3.1.2) гузошта ифодаҳои хаттии номаълумҳои $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – ро бо воситаи номаълумҳои $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ ҳосил менамоем.

Ҳамин тавр, натиҷаи пай дар пай иҷрои ду дигаргунсозиҳои хаттии номаълумҳо боз дигаргунсози хаттӣ аст.

Мисол. Натиҷаи пай дар пай иҷро намудани дигаргунсозиҳои

$$\begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 \end{array}, \qquad \begin{array}{l} y_1 = 3z_1 - z_2 \\ y_2 = 2z_1 + 3z_2 \end{array}$$

дигаргунсозии зерин

$$\begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 = 3z_1 - z_2 - 2z_1 - 3z_2 = z_1 - 4z_2 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 = 9z_1 - 3z_2 + 4z_1 + 6z_2 = 13z_1 + 3z_2 \end{array}$$

мебошад, ки дар он номаълумҳои $x_1,\ x_2$ бо номаълумҳои $z_1,\ z_2$ ифода карда шудаанд.

Матритсаи дигаргунсозие, ки дар натиҷаи пай дар пай иҷро шавии дигаргунсозиҳои (3.1.1) ва (3.1.2) ҳосил шудааст, бо воситаи C ишора намуда қонунияти ифодашавии элементҳои c_{ik} – и ин матритсаро , $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ бо воситаи элементҳои матритсаҳои A ва B меёбем. Дигаргунсозиҳои (3.1.1) ва (3.1.2)– ро ба намудани мухтасари зерин:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

навишта, ҳосил мекунем

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) z_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ҳамин тариқ коэффитсиенти назди z_k дар ифодаи x_i, яъне элементи c_{ik}– и матритсаи

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

намуди зерин дорад:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1.3}$$

Ҳамин тавр, *элементи матритсаи C, ки дар бурриши сатри i – юм ва сутуни k – юм ҷойгир аст ба суммаи ҳосили зарбҳои элементҳои мувофиқи сатри i – юми матритсаи A ба элементҳои сутуни k – юми матритсаи B баробар аст.*

Формулаи (3.1.3), ки дар он элементҳои матритсаи C бо воситаи элементҳои матритсаҳои A ва B ифода карда шудаанд, имконият медиҳад, ки матритсаи C– ро якбора бе истифодаи дигаргунсозиҳои хаттии ба матритсаҳои A ва B мувофиқ нависем. Ба ин роҳ ба ҳар як ҷуфти матритсаҳои квадратӣ матритсаи сеюмро мувофиқ гузошта мешавад. Гуфтан мумкин аст, ки мо дар маҷмӯъи матритсаҳои квадратии тартиби n– ум амали алгебравиро муайян намудем. Ин амалро *зарби матритсаҳо,* матритсаи $C-$ро бошад, *ҳосили зарби* матритсаи A ба матритсаи B меноманд:

$$C = AB.$$

Алоқаи дар байни дигаргунсозиҳои хаттӣ ва зарби матритсаҳои муқаррар намудаамонро ба намуди тасдиқоти зерин баён мекунем:

Теоремаи 3.1.1. *Матритсаи дигаргунсозии хаттӣ номаълумҳо, ки он дар натиҷаи пай дар пай иҷро намудани ду дигаргунсозиҳо бо матритсаҳои A ва B ҳосил шудааст, ба ҳосили зарби ин матритсаҳо яъне AB баробар аст.*

`Мисолҳо.`

1. $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 9\cdot(-2) & 4\cdot(-3) + 9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3) + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$

4. `Натиҷаи пай дар пай иҷро намудани дигаргунсозиҳои зеринро ёбед:`

$$\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - y_2 + 3y_3 \\ x_2 &= y_1 - 2y_2 \\ x_3 &= 7y_2 - y_3 \end{aligned} \qquad \texttt{ва} \qquad \begin{aligned} y_1 &= 2z_1 + z_3 \\ y_2 &= z_2 - 5z_3 \\ y_3 &= 2z_2 \end{aligned}$$

`Матритсаҳо ин дигаргунсозиҳои додашударо зарб зада ҳосил мекунем:`

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix},$$

`пас дигаргунсозии матлуб намуди зерин дорад:`

$$\begin{aligned} x_1 &= 10z_1 + 5z_2 + 10z_3, \\ x_2 &= 2z_1 - 2z_2 + 11z_3, \\ x_3 &= 5z_2 - 35z_3 \end{aligned}$$

3.2 Хосиятҳои зарби матритсаҳо

Яке аз мисолҳои дар дарси гузашта дидаамонро масалан мисоли сеюмро гирифта ҳосили зарби матритсаҳои онро, ки дар тартиби баръакс гирифта шудаанд меёбем:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Аз ин мисол бармеояд, ки зарби матритсаҳо аз тартиби зарбшавандаҳо вобастагӣ дорад, яъне *зарби матритсаҳо ғайри коммутативӣ мебошад.* Ғайри коммутативӣ будани зарби матритсаҳоро аз таърифи матритсаи C, ки бо формулаи (3.1.3) дода шудааст, интизор шудан лозим буд. Дар ин формула матритсаҳои A ва B нобаробарҳуқуқ дохил шудаанд: аз матритсаи A сатрҳо гирифта шудаанду аз матритсаи B сутунҳо.

Мисолҳои матритсаҳои ғайри коммутативии тартиби $n-$умро, яъне матритсаҳои A ва B, ки ҳосили зарби онҳо ҳангоми иваз намудани ҷойи зарбшавандаҳо тағйир меёбад, барои дилхоҳ n, $n = 2, 3, \cdots$ нишон додан мумкин аст. Аз тарафи дигар ҳосили зарби ду матритсаи додашуда ногаҳонӣ метавонанд, коммутативӣ бошанд, ки инро мисоли зерин нишон медиҳад:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Бинобар ин зарби матритсаҳои квадратӣ дар ҳолати умумӣ коммутативӣ намебошанд, яъне

$$AB \neq BA.$$

Теоремаи 3.2.1. *Зарби матритсаҳо ассотсиативӣ мебошад, яъне*

$$(AB)C = A(BC). \tag{3.2.1}$$

Исбот. Бигзор матритсаҳои квадратии тартиби $n-$уми A, B ва C дода шуда бошанд. Онҳоро мухтасар ба тариқи $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ва $C = (c_{ij})$, ки намуди умумии элементҳои онҳо нишон дода шудааст, менависем. Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$AB = U = (u_{ij}), \qquad BC = V = (v_{ij}),$$
$$(AB)C = S = (s_{ij}), \qquad A(BC) = T = (t_{ij}).$$

Мо бояд нишон диҳем, ки муносибати (3.2.1) ҷой дорад, яъне $S = T$ мебошад. Мувофиқи таърифи зарби матритсаҳо элементҳои матритсаҳои U ва V мувофиқан бо формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$u_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}, \qquad v_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj},$$

Ин ифодаҳоро бо назардошти $S = UC$ ва $T = AV$ мувофиқан ба формулаҳое, ки элементҳои матритсаҳои S ва T муайян карда мешаванд, мегузорем:

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^{n} u_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

Азбаски тарафҳои рости ин баробариҳо баробаранд, пас тарафи чапи онҳоҳам баробар мебошанд, яъне $s_{ij} = t_{ij}$, яъне

$$S = T.$$

Теорема исбот шуд.

3.3 Теорема дар бораи зарби муайянкунандаҳо

Теоремаи 3.3.1. *Муайянкунандаи ҳосили зарби якчанд матритсаҳои квадратии тартиби $n-$ум ба ҳосили зарби муайянкунандаҳои ин матритсаҳо баробар аст, яъне*

$$\det(AB \cdots C) = \det A \det B \cdots \det C.$$

Исбот. Кифоя аст, ки теоремаро барои ду матритсаҳо исбот кунем. Бигзор матритсаҳои квадратии тартиби $n-$уми $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ дода шуда бошанд ва бигзор $AB = C = (c_{ij})$. Муайянкунандаи ёрирасони тартибаш ба $2n$ баробар будаи $\Delta-$ро месозем, ки кунҷи чапи болоиаш аз матритсаи A, кунҷи рости поёниаш аз матритсаи B, кунҷи рости болоиаш аз сифрҳо иборат буда, кунҷи чапи поёниаш ба матритсае баробар аст, ки элементҳои диагонали асосии он ба -1, элементҳои боқимондааш ба сифрҳо баробар мебошанд. Ҳамин тавр, муайянкунандаи Δ намуди зеринро дорад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

Ҳамаи минорҳои тартиби $n-$уми дар n сатрҳои аввалаи муайянкунандаи Δ ҷойгирбуда ба ғайр аз муайянкунандаи $|A|$ ақалан якто сутуни нулӣ доранд ва аз ҳамин сабаб онҳо ба нул баробаранд. Пас муайянкунандаи $\Delta-$ро мувофиқи теоремаи Лаплас аз рӯйи n сатри аввала ҷудо намуда баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\Delta = |A| \cdot |B|. \tag{3.3.1}$$

Аз тарафи дигар кӯшиш мекунем, ки муайянкунандаи $\Delta-$ро чунон дигаргун кунем, ки қимати он тағйир наёбаду ҳамаи элементҳои b_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$ бо сифр иваз шаванд. Ба ин мақсад ба сутуни $n+1-$уми Δ сутуни якум, ки ба b_{11}, сутуни дуюм, ки ба b_{21} ва ҳоказо ва сутуни $n-$ум, ки ба b_{n1} зарб карда шудаанд, ҷамъ менамоем. Баъд ба сутуни $n+2-$юми муайянкунандаи Δ сутунҳои якум, дуюм ва ҳокаъзо $n-$ум, ки мувофиқан ба $b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2}$ зарб кардашудаанд, ҷамъ мекунем. Умуман ба сутуни $n+j-$юми муайянкунандаи Δ, $j = 1, 2, \dots, n$, $n-$то сутунҳои авваларо мувофиқан бо коэффитсиентҳои $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ ҷамъ менамоем.

Бо осонӣ дидан мумкин аст, ки ин дигаргунсозиҳо қимати $\Delta-$ро тағйир намедиҳанду ҳамаи $b_{ij}-$ҳоро бо сифрҳо иваз менамоянд. Аз тарафи дигар дар кунҷи рости болои муайянкунандаи Δ ба ҷои сифрҳо ададҳои зерин пайдо мешаванд: акнун дар бурриши сатри $i-$юм ва сутуни $n+j-$юми муайянкунанда, $i, j = 1, 2, \dots, n$ адади $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ истодааст, ки он ба элементи c_{ij} матритсаи $C = AB$ баробар аст. Кунҷи рости болои муайянкунандаи $\Delta-$ро ҳамин тавр матритсаи C ишғол мекунад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

Барои ҳисоб намудани муайянкунандаи Δ дар ин намуд боз як бори дигар теоремаи Лапласро истифода бурда онро аз рӯи n сутуни охирин ҷудо менамоем. Ҳамаи минорҳои тартиби $n-$уми дар n сутунҳои охирини муайянкунандаи Δ ҷойгирбуда ба ғайр аз муайянкунандаи $|C|$ ақалан якто сатри нулӣ доранд ва аз ҳамин сабаб онҳо ба нул баробаранд. Минори C дар сатрҳо бо номерҳои $1, 2, \dots, n$ ва сутунҳо бо номерҳои $n+1, n+2, \dots, 2n$ ҷойгир буда, минори пуркунандаи он ба $(-1)^n$ баробар аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки

$$\Delta = (-1)^{S_M} \cdot (-1)^n \cdot |C|.$$

Дар ин ҷо S_M суммаи сатрҳо ва сутунҳое, ки дар онҳо минори C ҷойгир аст, яъне

$$S_M = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n = \frac{1+2n}{2} \cdot 2n = 2n^2 + n.$$

Пас

$$\Delta = (-1)^{2n^2+n} \cdot (-1)^n \cdot |C| = (-1)^{2(n^2+n)} \cdot |C| = |C|.$$

Аз ин ҷо, аз (3.3.1) бо назардошти баробарии $C = AB$ бармеояд, ки

$$|C| = |AB| = |A| \cdot |B|.$$

Теорема исбот шуд.

3.4 Матритсаи баръакс

Таърифи 3.4.1. *Матритсаи квадратиро вайроншуда (ё хос) меноманд, агар муайянкунандаи он баробари сифр бошад ва вайроннашуда (ё ғайрихос) меноманд, агар муайянкунандаи он баробари сифр набошад.*

Таърифи 3.4.2. *Дигаргунсозии хатти номаълумҳоро вайроншуда меноманд, агар матритсаи он вайроншуда бошад ва онро вайроннашуда меноманд, агар матритсаи он вайроннашуда бошад.*

Аз ин таърифҳо ва аз теорема дар бораи зарби муайянкунандаҳо тасдиқотҳои зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 3.4.1. *Ҳосили зарби матритсаҳое, ки ақаллан яке аз онҳо вайроншуда аст, матритсаи вайроншуда мебошад.*

Натиҷаи 3.4.2. *Ҳосили зарби дилхоҳ матритсаҳои вайроннашуда худ вайроннашуда мебошад.*

Аз ин ҷо бо назардошти алоқаи байни зарби матритсаҳо ва натиҷаи пай дар пай иҷро намудани дигаргунсозиҳои хаттӣ тасдиқоти зерин бармеояд:

Натиҷаи 3.4.3. *Натиҷаи пай дар пай иҷро намудани якчанд дигаргунсозиҳои хаттӣ фақат ва фақат дар ҳамон вақт дигаргунсози вайроннашуда мебошад, агар ҳамаи ин дигаргунсозиҳо вайроннашуда бошанд.*

Маҷмӯъи ҳамаи матрисаҳои ҳақиқии квадратии вайроннашудаи тартиби $n-$ро бо $Gl(n, R)$ ишора мекунем. Аз натиҷаи 3.4.2 бармеояд, ки зарби матритсаҳо дар $Gl(n, R)$ амали алгебравӣ мебошад.

Матритсаи воҳидии

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

дар зарби матритсаҳо вазифаи воҳидро иҷро мекунад ва зарби он бо дилхоҳ матритса дорои хосияти коммутативӣ мебошад, яъне

$$AE = EA = A. \tag{3.4.1}$$

Ин баробариро бевосита бо тадбиқи қоидаи зарби матритсаҳо, ё ин ки дар асоси он, ки матритсаи воҳидӣ ба дигаргунсозии хаттии айнияти номаълумҳо мувофиқ меояд, исбот карда мешавад.

$$\begin{array}{l} x_1 = \ y_1 \\ x_2 = \qquad y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad\quad y_n \end{array}$$

Теоремаи 3.4.1. *Матритсаи воҳидии E ягона матритсае мебошад, ки барои он шарти (3.4.1) барои дилхоҳ матритсаи A иҷро мешавад.*

Исбот. Бигзор ба ғайр аз матрисаи воҳидии E боз матритсаи E' бо ҳамин хосият мавҷуд бошад, яъне барои дилхоҳ матритсаи A муносибати

$$AE' = E'A = A. \tag{3.4.2}$$

Дар муносибатҳои (3.4.1) ва (3.4.2) ба ҷойи матритсаи A мувофиқан матритсаҳои E' ва $E-$ро гузошта ҳосил мекунем:

$$E^{'}E = EE' = E^{'},$$
$$EE^{'} = E^{'}E = E.$$

Тарафи чапи ин ифодаҳо баробаранд, пас тарафи рости он ҳам ба ҳамдигар баробаранд, яъне $E' = E$.

Теорема исбот шуд.

Таърифи 3.4.3. *Матритсаи баръакс барои матрисаи A гуфта чунин матритсаеро меноманд, ки ҳосили зарби он бо матритсаи A ба матритсаи воҳидии E баробар аст. Матритсаи бараксро бо A^{-1} ишора мекунанд.*

Ҳамин тавр агар A^{-1} барои матритсаи A матритсаи баръакс бошад, пас

$$AA^{-1} = E. \tag{3.4.3}$$

Теоремаи 3.4.2. *Барои матритсаи вайроншуда матритсаи баръакс мавҷуд нест.*

Исбот. Теоремаро аз баръаксаш исбот мекунем. Барои ин фарз мекунем, ки барои матритсаи вайроншудаи A матритсаи баръакси A^{-1} мавҷуд аст, яъне баробарии (3.4.3) ҷой дорад, ки аз он, яъне аз баробарии матритсаҳои AA^{-1} ва E баробарии муайянкунандаҳояшон ҳам бармеояд:

$$\det(AA^{-1}) = \det E.$$

Ба тарафи чапи ин баробарӣ теоремаи 3.3.1 дар бораи зарби матритсаҳоро тадбиқ намуда, бо назардошти баробарии $\det E = 1$ ҳосил мекунем:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Аз вайроншуда будани матритсаи A бармеояд, ки тарафи чапи ин баробарӣ ба сифр баробар аст, яъне мо ба зиддият дучор омадем. Ҳамин тавр фарзи мо оиди мавҷудияти матритсаи баръакс барои матритсаи A нодуруст аст.

Теорема исбот шуд.

Бигзор матритсаи квадратии тартиби $n-$уми зерин дода шудааст:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ки муайянкунандаи онро бо d, пуркунандаи алгебравии элементи $a_{ij}-$ро бо A_{ij} ишора мекунем.

Теоремаи 3.4.3. *Барои дилхоҳ матритсаи вайроннашудаи* A *матритсаи баръакси ягонаи*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{d} & \dfrac{A_{21}}{d} & \dots & \dfrac{A_{n1}}{d} \\ \dfrac{A_{12}}{d} & \dfrac{A_{22}}{d} & \dots & \dfrac{A_{n2}}{d} \\ \hdotsfor{4} \\ \dfrac{A_{1n}}{d} & \dfrac{A_{2n}}{d} & \dots & \dfrac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}. \tag{3.4.4}$$

мавҷуд аст.

Исбот. Қоидаи зарби матритсаҳоро барои зарби матритсаҳои A ва A^{-1} истифода буда ҳосил мекунем:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{2j} & \dots & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j} & \dots & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ \hdotsfor{4} \\ \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{1j} & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{j2} & \dots & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix}.$$

Барои элементҳои ин баробарӣ хосияти ортогоналии пуркунандаҳои алгебравӣ барои сутунҳо (натиҷаи 1.16.2), яъне формулаи зеринро

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} d, & \text{агар} \quad k = i, \\ 0, & \text{агар} \quad k \neq i, \end{cases} \quad, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Қоидаи зарби матритсаҳоро маротибаи дигар истифода буда ҳосил мекунем:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i1}A_{i1} & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i2}A_{i1} & \dots & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{in}A_{i1} \\ \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i1}A_{i2} & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i2}A_{i2} & \dots & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{in}A_{i2} \\ \hdotsfor{4} \\ \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i1}A_{in} & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{in}A_{i1} & \dots & \frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{in}A_{in} \end{pmatrix}.$$

Тарафи рости ин баробарӣ мувофиқи хосияти ортогоналии пуркунандаҳои алгебравӣ барои сатрҳо (натиҷаи 1.16.1):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} d, & \text{агар} \quad k = j, \\ 0, & \text{агар} \quad k \neq j, \end{cases} \quad, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

намуди зеринро мегирад:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ҳамин тавр, барои A матритсаи баръакс мавҷуд буда, бо формулаи (3.4.4) муайян карда мешавад ва барои он баробарии зерин иҷро мешавад:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{3.4.5}$$

Акнун исбот мекунем, ки матритсаи A^{-1} ягона матритсае мебошад, ки шарти (3.4.5)– ро барои матритсаи A қаноат мекунад. Бигзор бағайр аз матритсаи A^{-1} матритсаи C мавҷуд бошад, ки

$$AC = CA = E.$$

Муносибати (3.4.5)– ро аз чап ба матритсаи C зарб зада ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} CAA^{-1} &= C(AA^{-1}) = CE = C, \\ CAA^{-1} &= (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}. \end{aligned}$$

пас $C = A^{-1}$.

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 3.4.4. *Маҷмӯи $Gl(n, R)$ аз рӯйи амали зарб гурӯҳ мебошад.*

Исбот.

3.5 Зарби матритсаҳои рост кунҷа

Ҳарчанд зарби матритсаҳо фақат барои матритсаҳои квадратии тартиби якхела дошта муайян шуда бошанд, ҳам онро барои матрисаҳои росткунҷаи A ва B низ ҷорӣ намудан мумкин аст, агар барои онҳо тадбиқи формулаи (3.1.3):

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk},$$

мумкин бошанд, яъне миқдори элементҳои сатри матритсаи A ба миқдори элементҳои сутуни матритсаи B баробар бошад. Ҳамин тавр *ҳосили зарби матритсаҳои росткунҷаи A ва B мавҷуд аст, агар миқдори сутунҳои матритсаи A ба миқдори сатрҳои B баробар бошад, илова бар ин миқдори сатрҳои матритсаи AB ба миқдори сатрҳои матритсаи A ва миқдори сутунҳои AB ба миқдори сутунҳои B баробар мебошанд.*

Мисолҳо.

1. $$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 15 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зарби матритсаҳои росткунҷаро бо пай дар пай иҷро намудани дигаргунсозии хаттии номаълумҳо алоқаманд намудан мумкин аст, агар дар таърифи дигаргунсозиҳо аз тағйир наёфтани миқдори номаълумҳо даст кашем.

Исботи қонуни ассосиативиро барои матритсаҳои квадратӣ айнан гузарнида бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки ин қонун барои матритсаҳои росткунҷа ҳам ҷой дорад.

Акнун зарби матритсаҳои росткунҷа ва хосиятҳои матритсаи баръаксро барои баровардани намуди нави қоидаи Крамер истифода мебарем, ки он ҳисобкуниҳои калонро талаб намекунад. Бигзор системаи $n-$то муодилаҳои хаттии $n-$номаълумаи зерин дода шуда бошад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Матритсаи коэффитсиентҳои системаи (3.5.1)$-$ро бо A, сутуни номаълумҳоро бо X, сутуни аъзоҳои озодро бо B ишора мекунем, яъне

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Теоремаи 3.5.1. *Агар муайянкунандаи асосии системаи $n-$то муодилаҳои хаттии $n-$номаълумаи (3.5.1) ғайри сифр бошад, он гоҳ ин система ҳал дорад ва ин ҳал ягона буда, ба намуди матритсавӣ бо ёрии формулаи*

$$X = A^{-1} \cdot B$$

ҳисоб карда мешавад.

Исбот. Миқдори сутунҳои матритсаи A ба миқдори сатрҳои матритсаи X баробар аст, пас ҳосили зарби AX мавҷуд аст. Ҳосили зарби AX сутуне мебошад, ки аз қисмҳои чапи муодилаҳои системаи (3.5.1) тартиб дода шудааст. Бинобар ин системаи (3.5.1)$-$ро ба намуди як муодилаи матритсавии зерин навиштан мумкин аст:

$$AX = B. \tag{3.5.2}$$

Матритсаи A вайроншуда мебошад, чунки $d = |A| \neq 0$. Пас барои матритсаи A матритсаи баръакси A^{-1} мавҷуд аст ва ҳарду тарафи муодилаи (3.5.2)$-$ро аз чап ба ин матритса зарб зада ҳосил мекунем:

$$X = A^{-1}B. \tag{3.5.3}$$

Ҳосили зарби $A^{-1}B$ матритсае мебошад, ки аз як сутун иборат буда элементи $j-$юми он ба суммаи ҳосили зарбҳои элементҳои сатри $j-$юми матритсаи A^{-1} ба элементҳои мувофиқи матритсаи B баробар аст, яъне (3.5.3)$-$ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$x_j = \frac{A_{1j}}{d}b_1 + \frac{A_{2j}}{d}b_2 + \ldots + \frac{A_{nj}}{d}b_n = \frac{1}{d}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_n\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ифодаи дохили қавс дар тарафи рости ин баробарӣ ҷудокунии муайякунандае мебошад, ки аз d дар натиҷаи ивази сутуни $j-$юм бо сутуни аъзоҳои озод ҳосил мешавад, ки онро дар теоремаи Крамер бо d_j ишора карда мешавад ва формулаи охирин намуди зеринро мегирад:

$$x_j = \frac{d_j}{d}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ҳамин тавр, формулаи (3.5.3) ба формулаи (1.19.3), ки дар қоидаи Крамер бо ёрии ҳалли система ифода карда мешавад, баробарқувва мебошад.

Теорема исбот шуд.

3.6 Ранги ҳосили зарби матритсаҳо

Теорема дар бораи зарби муайянкунандаҳо ҳангоми матритсаҳои вайроншуда ба ғайр аз вайроншуда будани ҳосили зарб ягон иттилои дигар намедиҳад, ҳарчанд матритсаҳои вайроншуда метавонанд бо рангҳояшон фарқ кунанд. Қайд мекунем, ки байни рангҳои зарбшавандаҳо ва ҳосили зарб ягон вобастагии муайян вуҷуд надорад, инро мисолҳои зерин нишон медиҳанд:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

дар ҳарду ҳолат матритсаҳои рангашон ба 1 баробар зарб карда мешаванд, лекин як ҳолат ранги ҳосили зарб ба 1, дар ҳолати дигар бошад ба 0 баробар аст. На танҳо барои матритсаҳои квадратӣ балки барои матритсаҳои росткунҷа тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.6.1. *Ранги ҳосили зарби ду матритсаҳо аз ранги ҳар як зарбшавандаҳо зиёд намебошад:*

$$rang\, AB \leq min(rang\, A, rang\, B). \tag{3.6.1}$$

Исбот. Кифоя аст, ки теоремаро барои ду матритсаҳо исбот кунем. Бигзор матритсаҳои

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

дода шудаанд, ки барои онҳо ҳосили зарби

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{st} \end{pmatrix}$$

мавҷуд аст. Элементҳои матритсаи C бо воситаи формулаи зерин муайян карда мешаванд:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \qquad k = 1, 2, \ldots, t.$$

Ин формуларо барои $k-$и додашуда ва ҳамаи $i-$ҳо гирифта, сутуни $k-$юми матритсаи $C-$ро ба намуди зерин менависем:

$$\begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{sk} \end{pmatrix} = b_{1k} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} + b_{2k} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} + ... + b_{nk} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, t.$$

Аз инҷо мебарояд, ки дилхоҳ сутуни матритсаи C бо воситаи сутунҳои матритсаи A хаттӣ ифода карда мешавад, пас мувофиқи теоремаи 2.7.3 ранги системаи сутунҳои матритсаи C аз ранги системаи сутунҳои матритсаҳои A зиёд намебошад, яъне

$$rang\, C \leq rang\, A. \tag{3.6.2}$$

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки системаи сатрҳои матритсаи C бо воситаи сатрҳои матритсаи B хаттӣ ифода карда мешавад ва мувофиқи теоремаи 2.7.3 ранги системаи сатрҳои матритсаи C аз ранги системаи сатрҳои матритсаҳои B зиёд намебошад, яъне

$$rang\, C \leq rang\, B. \tag{3.6.3}$$

Аз (3.6.2) ва (3.6.3) муносибати (3.6.1), яъне тасдиқоти теоремаро ҳосил мекунем.

Агар яке аз ин зарбшавандаҳо дар теоремаи исботшуда матритсаи квадратии вайроннашуда бошад, тасдиқоти аниқтарро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 3.6.1. *Ранги ҳосили зарби дилхоҳ матритсаи A аз чап ё аз рост ба матритсаи вайроннашудаи Q ба ранги матритсаи A баробар аст, яъне*

$$\begin{aligned} rang\, AQ &= rang\, A \qquad \text{агар} \qquad |Q| \neq 0, \\ rang\, QA &= rang\, A \qquad \text{агар} \qquad |Q| \neq 0. \end{aligned}$$

Исбот. Бигзор барои матритсаҳои A ва Q ҳосили зарби

$$C = AQ. \tag{3.6.4}$$

мавҷуд бошад. Ҳарду тарафи ин баробариро аз рост ба матритсаи баръакси Q^{-1} зарб зада ҳосил мекунем:

$$A = CQ^{-1}. \tag{3.6.5}$$

Барои ҳосили зарбҳои (3.6.4) ва (3.6.5) теоремаи исботнамудаамонро татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$rang\, C \leq rang\, A, \qquad rang\, A \leq rang\, C.$$

Ду нобаробарии охиринро муқоиса намуда бо назардошти $rang\, AQ = rang\, C$ ба баробарии зерин меойем:

$$rang\, AQ = rang\, A.$$

Натиҷа исбот шуд.

3.7 Ҷамъи матритсаҳо ва зарби матритса ба адад

Маҷмӯъи ҳамаи матритсаҳои квадратии тартиби $n-$и элементҳояш ҳақиқиро бо $M(n, R)$ ишора намуда, дар ин маҷмӯъ амали ҷамъи матритсаҳо ва зарби матритса ба ададро дохил мекунем.

Таърифи 3.7.1. *Суммаи $A + B$-и матритсаҳои квадратии $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})-$ гуфта, матритсаи $C = (c_{ij})-$ро меноманд, ки ҳар як элементи он ба суммаи элементҳои мувофиқи матритсаҳои A ва B баробар аст:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Теоремаи 3.7.1. *Маҷмӯъи $M(n,R)$ аз рӯи амали ҷамъ гурӯҳи абелӣ мебошад.*

Исбот. Барои элементҳои мувофиқи матритсаҳои $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ қонуни ассотсиативии ҷамъ иҷро мешавад, яъне

$$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}).$$

Аз ин ҷо ва таърифи ҷамъи матритсаҳо қонуни ассотсиативии ҷамъ барои матритсаҳо бармеояд:

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

Матритсаи нулии

$$\Theta=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

дар ҷамъи матритсаҳо роли сифрро мебозад, яъне барои дилхоҳ матритсаи $A=(a_{ij})$ муносибати зерин ҷой дорад:

$$A+\Theta=A.$$

Барои матритсаи $A=(a_{ij})$ матритсаи муқобили

$$-A=(-a_{ij})=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{s1} & -a_{s2} & \dots & -a_{sn}\end{pmatrix},$$

мавҷуд аст, ки барои онҳо муносибати

$$A+(-A)=\Theta$$

иҷро мешавад, пас маҷмӯъи $M(n,R)$ аз рӯи амали ҷамъ гурӯҳ мебошад. Аз коммутативӣ будани ҷамъи матрисаҳо тасдиқоти теорема бармеояд.

Теоремаи 3.7.2. *Дар $M(n,R)$ амали ҷамъи матритсаҳо ва зарби онҳо бо қонуни дистрибутивӣ алоқаманд мебошанд, яъне*

$$(A+B)C=AC+BC, \tag{3.7.1}$$

$$C(A+B)=CA+CB. \tag{3.7.2}$$

Исбот. Бигзор $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ ва $C=(c_{ij})$ дилхоҳ матритсаҳо аз $M(n,R)$ бошанд, он гоҳ баробарии

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}$$

барои дилхоҳ i ва j иҷро мешавад. Воқеъан тарафи чап ва тарафи рости ин баробарӣ мувофиқан элементҳои дар сатри $i-$юм ва сутуни $j-$юм ҷойгир будаи матритсаҳои $(A+B)C$ ва $AC+BC$ мебошанд. Пас баробарии (3.7.1) ҷой дорад. Баробарии (3.7.2) айнан ҳамин хел исбот карда мешавад. Коммутативӣ набудани зарби матритсаҳо исботи ҳарду ин баробариҳоро талаб мекунад.

Таърифи 3.7.2. *Ҳосили зарби kA матритсаи квадратии $A = (a_{ij})$ ба адади k гуфта матритсаи $A' = (a'_{ij})$ – ро меноманд, ки он дар натиҷаи ба адади k зарб задани ҳар як элементи матрисаи A ҳосил мешавад:*

$$a'_{ij} = ka_{ij}.$$

Мо медонем, ки дилхоҳ матритсаи квадратии тартиби n – ро ҳамчун вектори n^2 – ченака дида баромадан мумкин аст ва ин мувофиқати байни матритсаҳо ва векторҳо мувофиқати байниҳамяккимата мебошад. Дар ин ҳолат амали дохил намудаи ҷамъи матритсаҳо ва зарби матритса ба адад ба ҷамъи векторҳо ва зарби вектор ба адад мубаддал мегардад. Ҳамин тавр гуфтан мумкин аст, ки $M(n, R)$ – *маҷмӯъи ҳамаи матритсаҳои квадратии тартиби n – и элементҳояш ҳақиқиро ҳамчун фазои n^2 – ченака дида баромадан мумкин аст.*

Аз ин ҷо бармеояд, ки баробариҳои зерин ҷой доранд (дар ин ҷо A, B матритсаҳо аз $M(n, R)$, k, l – ададҳои ҳақиқӣ):

1. $k(A + B) = kA + kB$,
2. $(k + l)A = kA + lA$,
3. $k(lA) = (kl)A$,
4. $1 \cdot A = A$,
5. $(kA)B = k(AB)$.

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои ҳақиқии квадратии тартиби n вайроннашударо бо $Gl(n, R)$ ишора мекунем. $Gl(n, R)$ аз рӯйи амали зарби матритсаҳо гурӯҳро ташкил мекунад, лекин гурӯҳ абелӣ намебошад.

Боби 4

Ададҳои комплексӣ

4.1 Системаи ададҳои комплексӣ

Ҳангоми омӯхтани курси алгебраи элементарӣ захираи ададҳо чанд маротиба васеъ карда мешаванд. Дар курси арифметика маҷмӯъи ададҳои натурали $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ва амалҳои ҷамъ, зарб, фарқ ва тақсим бо онҳо омӯхта мешаванд. Қайд кардан ҷоиз аст, ки суммаи дилхоҳ ду адади натуралӣ ва ҳосили зарби онҳо боз адади натуралӣ мебошад, яъне амалҳои ҷамъ ва зарб дар маҷмӯи ададҳои натуралӣ амали алгебравӣ мебошанд. Лекин нисбат ба ин амалҳо N гурӯҳ намебошад, яъне муодилаҳои зерин

$$a + x = b, \tag{4.1.1}$$

$$cx = d, \tag{4.1.2}$$

барои дилхоҳ ададҳои натуралии a, b, c ва d ҳалшаванда намебошанд.

Ба маҷмӯъи ададҳои натуралии N адади $0-$сифр ва ҳамаи ададҳои бутуни манфиро илова намуда онро то $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}-$маҷмӯъи ададҳои бутун васеъ менамоем. Маҷмӯъи васеъкардашудаи Z нисбат ба ҷамъ гурӯҳ буда, муодилаи (4.1.1) барои дилхоҳ ададҳои a ва b аз Z ҳалшанда мебошад. Маҷмӯи Z нисбат ба зарб ҳоло ҳам гурӯҳ набуда, муодилаи (4.1.2) барои дилхоҳ ададҳои c ва d аз Z ҳалшаванда намебошад.

Ба маҷмӯъи Z ҳамаи касрҳои ихтисорнашандаи намуди $\frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$ илова намуда, онро то маҷмӯъи ададҳои ратсионалии

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : \quad p \in Z, \quad q \in N \right\},$$

васеъ менамоем, ки дар он амалҳои ҷамъ ва зарб амалҳои алгебравӣ мебошанд. Ба осонӣ санҷидан мумкин аст, ки Q нисбат ба ҷамъ ва $Q \backslash \{0\}$ нисбат ба зарб, яъне маҷмӯҳои $(Q, +)$ ва $(Q \backslash \{0\}, \cdot)$ гурӯҳҳои абелӣ буда, илова бар он амалҳои ҷамъ ва зарб бо қонуни дистрибутивии

$$a(b + c) = ab + ac$$

алоқаманд мебошанд. Дар маҷмӯъи Q дилхоҳ муодилаҳои алгебравии хаттии намуди

$$ax + b = c, \qquad a \neq 0,$$

аз он ҷумла ҳолатҳои хусусии он (4.1.1) ва (4.1.2) ҳалшаванда мебошанд.

Аз тарафи дигар муодилаҳои алгебравии ғайрихаттӣ мавҷуданд, ки онҳо дар маҷмӯъи ададҳои ратсионалии Q ҳал надоранд, ки

$$x^2 - 2 = 0 \tag{4.1.3}$$

мисоли чунин муодилаҳо мебошад. Решаҳои муодилаи (4.1.3) ададҳои ирратсионалии $\pm\sqrt{2}$ адади ратсионалӣ намебошанд. Ин гуна мисолҳо дар геометрия ҳам мавҷуданд. Масалан диагонали квадрати тарафҳояш ба 1 баробар, росткунҷаи тарафҳояш мувофиқан баробари 1 ва 2, яъне ададҳои $\sqrt{2}$ ва $\sqrt{5}$ адади ратсионалӣ намебошанд.

Ба маҷмӯъи ададҳои ратсионалии Q ҳамаи ададҳои иррационалиро илова намуда, онро то маҷмӯъи ададҳои ҳақиқии R васеъ менамоем. Одатан назарияи пурра сохтани маҷмӯъи ададҳои хақиқии R дар курси таҳлили математикӣ омӯхта мешавад. Зимнан таърифи ададҳои ҳақиқиро ҳамчун касрҳои даҳии беохир ё ин ки буриши Дедекинди маҷмӯъи ададҳои ратсионалиро қайд карда мегузарем. Муодилаи (4.1.3) дар R ҳалшаванда мебошад.

Муодилаҳое мавҷуданд, ки ҳарчанд коэффитсиентҳои онҳо ададҳои ҳақиқӣ бошанд, ҳам дар маҷмӯъи ададҳои ҳақиқии R реша надоранд. Оддитарин муодилаи квадратие, ки решаҳои ҳақиқӣ надорад, муодилаи

$$x^2 + 1 = 0 \tag{4.1.4}$$

мебошад. Дар назди худ масъалаи зеринро мегузорем: *маҷмӯи ададҳои ҳақиқии R чунон васеъ карда шавад, ки дар он муодилаи* (4.1.4) *реша дошта бошад.*

Бо сифати масолеҳе, ки аз он системаи нави ададҳо сохта мешаванд, маҷмӯъи нуқтаҳои ҳамвориро интихоб мекунем. Қайд мекунем, ки тасвири ададҳои ҳақиқӣ бо нуқтаҳои хати рост (тири ададӣ) дар ҳамаи шохаҳои математика истифода бурда мешавад. Одат шудааст, ки адади ҳақиқӣ ва нуқтае дар хати рост (тири ададӣ) ин ададро тасвир мекунад, аз якдигар фарқ карда намешаванд.

Ҳамин тавр, мо *мехоҳем, ки системаи ададҳоро муайян кунем, ки нуқтаҳои ҳамвориро тасвир намоянд.* То ин вақт нуқтаҳои ҳамвориро ҷамъ ва зарб накарда будем, аз ҳамин сабаб ин амалҳоро чунон интихоб мекунем, ки онҳо дорои ҳамаи хосияҳое бошанд, ки барои онҳо ин системаи ададҳо сохта мешавад.

Бигзор дар ҳамворӣ системаи координатаи декартии росткунҷа дохил карда шуда бошад. Нуқтаҳои ҳамвориро бо ҳарфҳои юнонии $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ишора намуда, нуқтаи α абсиссааш a ва ординатааш b ба намуди $\alpha = (a, b)$ менависем. Амали ҷамъи ин гуна нуқтаҳо ва зарби онҳоро дохил мекунем.

Таърифи 4.1.1. *Суммаи нуқтаҳои $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ гуфта нуқтаеро меноманд, ки абсиссааш ба $a + c$ ва ординатааш ба $b + d$ баробар аст, яъне*

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{4.1.5}$$

Таърифи 4.1.2. *Ҳосили зарби нуқтаҳои $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ гуфта нуқтаеро меноманд, ки абсиссааш ба $ac - bd$ ва ординатааш ба $ad + bc$ баробар аст, яъне*

$$\alpha\beta = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{4.1.6}$$

Маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ бо ду амали алгебравии дохил намуда бо C ишора карда мешавад. Ҳамин тавр, мо дар маҷмӯъи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ ду амали алгебравиро муайян намудем. Нишон медиҳем, ки *амалҳои дохилкарда барои нуқтаҳои ҳамворӣ дорои ҳамаи хосиятҳои асосие мебошанд, ки барои ҷамъи ададаҳои ҳақиқӣ ва зарби онҳо ҷой доранд, яъне ҳар дуи амалҳо коммутативӣ, ассотсиативӣ бо қонуни дистрибутивӣ алоқаманд ва барои онҳо амалҳои баръакс (ба ғайр аз тақсим ба сифр) иҷро мешаванд.*

Ба таври дигар теоремаҳои 4.1.1, 4.1.2 ва 4.1.3 ҷой доранд.

Теоремаи 4.1.1. *Маҷмӯъи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ нисбат ба амали ҷамъи нуқтаҳои* (4.1.5) *гурӯҳи абелӣ мебошад.*

Исбот. Азбаски тарафҳои рости ифодаҳои зерин

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)+\gamma=[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=\\&=(a+c,b+d)+(e,f)=(a+c+e,b+d+f),\\&\alpha+(\beta+\gamma)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]=\\&=(a,b)+(c+e,d+f)=(a+c+e,b+d+f)\end{aligned}$$

баробаранд, пас тарафҳои чапи онҳо ҳам баробаранд, яъне ҷамъи нуқтаҳо амали ассотсиативӣ мебошад:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Роли элементи нулиро барои ҷамъи нуқтаҳо ибтидои кордината, яъне нуқтаи $\theta=(0,0)$ мебозад. Дар ҳақиқат

$$\alpha+\theta=(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=\alpha.$$

Барои дилхоҳ нуқтаи $\alpha=(a,b)$ нуқтаи $-\alpha=(-a,-b)$ нисбат ба амали ҷамъ нуқтаи муқобил мебошад:

$$\alpha+(-\alpha)=(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(a-a,b-b)=(0,0)=\theta.$$

Ҷамъи нуқтаҳо амали коммутативӣ мебошад:

$$\alpha+\beta=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=\beta+\alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Аз ин теорема бевосита *амали фарқи нуқтаҳо* бармеояд, яъне фарқи нуқтаҳои $\alpha=(a,b)$ ва $\beta=(c,d)$ гуфта, суммаи нуқтаҳои $\alpha=(a,b)$ ва $-\beta=(-c,-d)$ – ро меноманд:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d). \tag{4.1.7}$$

Теоремаи 4.1.2. *Маҷмӯъи ҳамаи нуқтаҳои ҳамворӣ ба ғайр аз ибтидои координата $\theta=(0,0)$ нисбат ба амали зарби нуқтаҳои (4.1.6) гурӯҳи абелӣ мебошад.*

Исбот. Азбаски тарафҳои рости ифодаҳои зерин

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta)\gamma=[(a,b)(c,d)](e,f)=(ac-bd,ad+bc)(e,f)=\\&=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce),\\&\alpha(\beta\gamma)=(a,b)[(c,d)(e,f)]=(a,b)(ce-df,cf+de)=\\&=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf)\end{aligned}$$

баробаранд, пас тарафҳои чапи онҳо ҳам баробаранд, яъне зарби нуқтаҳо амали ассотсиативӣ мебошад:

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

Роли элементи воҳидиро барои зарби нуқтаҳо нуқтаи $\varepsilon=(1,0)$ мебозад. Дар ҳақиқат

$$\alpha\varepsilon=(a,b)(1,0)=(a\cdot1-b\cdot0,a\cdot0+b\cdot1)=(a,b)=\alpha.$$

Барои дилхоҳ нуқтаи $\alpha=(a,b)$, ки аз ибтидои координата фарқ мекунад, яъне $\alpha\neq(0,0)$ нуқтаи

$$\alpha^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

нуқтаи баръакс мебошад. Дар ҳақиқат

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot \alpha^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \\ &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} \right) = (1, 0) = \varepsilon \end{aligned}$$

Зарби нуқтаҳо амали коммутативӣ мебошад:

$$\alpha\beta = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d)(a, b) = \beta\alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Аз ин теорема бевосита *амали тақсим ба нуқтаи* $\beta \neq (0, 0)$ бармеояд, яъне нисбати нуқтаҳои $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ гуфта ҳосили зарби нуқтаҳои α ва β^{-1} – ро меноманд, яъне

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2} \right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{dc-ad}{c^2+d^2} \right). \qquad (4.1.8)$$

Теоремаи 4.1.3. *Амали ҷамъи нуқтаҳои ҳамворӣ ва зарби онҳо бо қонуни дистрибутивӣ алоқаманд мебошанд:*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Исбот. Азбаски тарафҳои рости ифодаҳои зерин

$$\begin{aligned} &\alpha(\beta + \gamma) = (a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b)(c + e, d + f) = \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be), \\ &\alpha\beta + \alpha\gamma = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) = \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

баробаранд, пас тарафҳои чапи онҳо ҳам баробаранд, яъне барои ҷамъи нуқтаҳои ҳамворӣ қонуни ассотсиативӣ иҷро мешавад.

Ҳамин тавр, мо системаи ададҳоро сохтем, ки нуқтаҳои ҳамвориро тасвир мекунанду амалҳо бо ин ададҳо бо формулаҳои (4.1.5) ва (4.1.6) муайян карда мешаванд. Ин системаи ададҳо *системаи ададҳои комплексӣ* номида шуда, бо C ишора карда мешавад.

Теоремаи 4.1.4. *Системаи ададҳои комплексии* C *ин системаи васеъкардашудаи ададҳои ҳақиқии* R *мебошад.*

Исбот. Нуқтаҳои дар тири абсисса хобида, яъне нуқтаҳои намуди $(a, 0)$–ро дида мебароем. Ба нуқтаи $(a, 0)$ адади a–ро мувофиқ гузошта мувофиқати байни ҳам яккиматаи маҷмӯъи ҳамаи ададҳои комплексии намуди $(a, 0)$ ва маҷмӯъи ҳамаи ададҳои ҳақиқиро ҳосил мекунем.

Барои ин нуқтаҳо амали ҷамъ ва зарб, ки мувофиқан бо формулаҳои (4.1.5) ва (4.1.6) муайян карда мешаванд, татбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} &(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \\ &(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0), \end{aligned}$$

яъне нуқтаҳои $(a,0)$ бо якдигар айнан чун ададҳои ҳақиқӣ ҷамъ ва зарб карда мешаванд.

Ҳамин тавр, маҷмӯъи нуқтаҳои дар тири абсисса хобида, ки зермаҷмӯъи системаи ададҳои комплексӣ мебошад, бо хосиятҳои алгебравии худ аз системаи ададҳои ҳақиқӣ ягон хел фарқ намекунанд. Ин ба мо имконият медиҳанд, ки дар оянда нуқтаи $(a,0)$ ва адади $a-$ро аз якдигар фарқ накунем, яъне ҳисоб мекунем, ки

$$(a,0)=a. \tag{4.1.9}$$

Аз он ҷумла, сифр $\theta=(0,0)$ ва воҳид $\varepsilon=(1,0)$ системаи ададҳои комплексӣ ин ададҳои муқаррарии ҳақиқии 0 ва 1 мебошанд.

Теоремаи 4.1.5. *Дар системаи ададҳои комплексии C решаи муодилаи* (4.1.4) *мавҷуд аст, яъне ададе мавҷуд аст, ки квадрати он ба -1 баробар аст.*

Исбот. Нуқтаи $(0,1)$ чунин адади комплексӣ мебошад. Дар ҳақиқат

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)=-1.$$

Ин нуқта бо воситаи i ишора карда мешавад, яъне $i=(0.1)$ ва $i^2=-1$. Адади комплексии i *воҳиди мавҳум* номида мешавад.

Акнун нишон медиҳем, ки барои системаи ададҳои комплексии сохтаамон навишти муқаррарӣ ҳосил намудан мумкин аст. Барои ин пеш аз ҳама ҳосили зарби адади ҳақиқии β ва нуқтаи $i-$ро меёбем:

$$bi=(b,0)(0,1)=(b\cdot0-0\cdot1,\ b\cdot1+0\cdot0)=(0,b), \tag{4.1.10}$$

яъне βi нуқтае мебошад, ки дар тири ордината хобида ординатааш ба b баробар аст ва ҳамаи нуқтаҳои тири ординатаро ба ҳамин намуд навиштан мумкин аст. Агар (a,b) дилхоҳ нуқтаи ҳамворӣ бошад, пас мувофиқи баробарии

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

ва назардошти муносибатҳои (4.1.9) ва (4.1.10) навишти зеринро ҳосил мекунем:

$$(a,b)=a+ib,$$

яъне мо ба навишти муқаррарии ададҳои комплексӣ омадем, сумма ва ҳосили зарб дар ифодаи $a+ib$ албатта ба мазмуни амалҳои барои системаи ададҳои комплексӣ муайян кардаамон, дар назар дошта шудааст.

4.2 Амалҳо бо ададҳои комплексӣ дар навишти муқаррарӣ

Мувофиқи анъанаҳои таърихӣ адади комплексии $i-$ро *воҳиди мавҳум*, адади $bi-$ро *адади соф мавҳум* меноманд, ҳарчанд ба мавҷудияти онҳо ягон хел шубҳа надорем. Зимнан нуқтаҳои тири ордината, ки дар навбати худ нуқтаҳои ҳамворӣ мебошанд, ин ададҳоро тасвир мекунанд.

Дар навишти адади комплексии α ба намуди $\alpha=a+ib$ адади a *қисми ҳақиқии* адади α, адади bi *қисми мавҳуми* он номида мешавад. Ҳаморие, ки нуқтаҳояшро ададҳои комплексӣ ҳисоб намудем, *ҳамвории комплексӣ* номида мешавад. Тирҳои абсисса ва ординатаи ин ҳамворӣ, ки мувофиқан ададҳои ҳақиқӣ ва ададҳои мавҳумро тасвир мекунанд, *тири ҳақиқӣ* ва *тири мавҳум* номида мешаванд.

Амалҳои ҷамъ, фарқ, зарб ва тақсим дар навишти муқаррарии $\alpha = a+ib$ бо назардошти формулаҳои (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7) ва (4.1.8) мавзӯъи гузаштаро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\begin{aligned}
&(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d);\\
&(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d);\\
&(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc);\\
&\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}.
\end{aligned}$$

Гуфтан мумкин аст, ки *ҳангоми ҷамъи ададҳои комплексӣ мувофиқан қисмҳои ҳақиқии онҳо ва мувофиқан қисмҳои мавҳуми онҳо ҷамъ мешаванд.* Ин қоида барои фарқ ҳам ҷой дорад. Аз сабаби душвор баён буданашон ифодаҳои шифоҳиро барои формулаҳои зарб ва тақсим гуфта намегузарем, фақат дар хотир бояд нигоҳ дорем, ки формулаи охирин, яъне тақсими ададҳои комплексиро бо роҳи сурат ва махраҷро ба ҳамрошудаи махраҷ зарб задан ҳосил намудан мумкин аст. Дар ҳақиқат

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(-ad+bc)}{c^2+i^2d^2} =$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}.$$

4.3 Мазмуни геометрии амалҳо бо ададҳои комплексӣ

Аз тасвири ададҳои комплексӣ бо нуқтаҳои ҳамворӣ мазмуни геометрии амалҳо бо ин ададҳо бармеояд. Бигзор ададҳои комплексии $\alpha = a+ib$ ва $\beta = c+id$ дода шуда бошанд. Нуқтаҳои ба ин ададҳо мувофиқи (a,b) ва $(c,d)-$ро бо ибтидои координата пайваста дар асоси порчаҳои ҳосилшуда параллелограм месозем. Қуллаи чоруми параллелограм нуқтаи $(a+c, b+d)$ мебошад, яъне нуқтае, ки дар ҳамворӣ адади комплексии $\alpha+\beta-$ро ифода мекунад. Ҳамин тавр *ҷамъи ададҳои комплексӣ геометрӣ бо қоидаи паралелограмм иҷро карда мешаванд, яъне бо қоидаи ҷамъи векторҳое, ки аввалашон дар ибтидои координата мехобанд.* Қайд мекунем, ки *адади муқобили комплексӣ ба адади $\alpha = a+ib$ ин нуқтае дар ҳамвории комплексӣ мебошад, ки он бо α нисбат ба ибтидои координата симметрӣ мебошад.* Аз ин ҷо бо осонӣ мазмуни геометрии фарқи ададҳои комплексиро баровардан мумкин аст.

Мазмуни геометрии зарб ва тақсими ададҳои комплексиро баъди дохил намудани навишти онҳо дар системаи координатаи қутбӣ дида мебароем. Дар навишти адади α дар намуди $\alpha = a+ib$ координатаҳои декартии нуқтаи ба ин адад мувофиқ истифода бурда мешавад. Барои нуқтаи $(a,b)-$и ҳамвории комплексӣ масофа аз ибтидои координата то ин нуқтаро бо r, кунҷи байни равиши мусбати тири абсисса ва равиш аз ибтидои координат то ин нуқтаро бо φ ишора мекунем. Ададҳои r ва $\varphi-$ро мувофиқан координатаҳои қутбии нуқтаи (a,b) меноманд ва бо дода шудани онҳо мавқеъи нуқта (a,b) дар ҳамвории комплексӣ пурра муайян карда мешавад.

Адади r ғайриманфӣ буда, танҳо барои нуқтаи 0 вай ба сифр баробар аст. Барои $\alpha-$и дар тири ҳақиқӣ хобида, яъне барои ададҳои ҳақиқӣ адади r қимати мутлақи α мебошад, аз ҳамин сабаб $r-$ро модули (баъзан қимати мутлақи) адади комплексии α номида, бо $|\alpha|$ ишора мекунанд.

Кунҷи φ аргументи адади α номида шуда бо $\arg\alpha$ ишора карда мешавад. Кунҷи φ метавонад, дилхоҳ қиматҳои ҳақиқии ҳам мусбат ва ҳам манфиро қабул кунад. Кунҷи мусбат бо равиши муқобили ақрабаки соат ҳисоб карда мешавад. Агар кунҷҳо аз як дигар бо адади ба 2π каратӣ фарқ намоянд, пас нуктаҳои ба онҳо мувофиқи ҳамвории комплексӣ аз якдигар фарқ намекунанд.

Ҳамин тавр, аргументи адади комплексии α беохир бисёр қимат дошта, аз якдигар бо бозургии ба 2π каратӣ фарқ мекунанд. Аз баробарии ду адади комплексии бо координатҳои қутбӣ додашуда бармеояд, ки модулҳои онҳо баробар буда, аргументашон аз якдигар бо бузургии ба 2π каратӣ буда фарқ мекунанд. Аргумент танҳо барои адади 0 муайян карда нашудааст, аз тарафи дигар ин адад пурра бо баробарии $|0| = 0$ муайян карда мешавад.

Аргументи адади комплексӣ бевосита мафҳуми умумикардашудаи аломати адади ҳақиқӣ мебошад. Дар ҳақиқат, аргументи адади мусбат ба сифр, аргументи адади манфӣ ба π баробар аст. Дар тири ҳақиқӣ аз ибтидои координата ду равиш мебароянд, ки онҳо бо аломатҳои $+$ ва $-$ фарқ мекунанд, лекин дар ҳамвории комплексӣ равишҳои аз ибтидои координата бароянда беохир бисёр буда, аз якдигар бо кунҷҳои худ бо равиши мусбати тири абсисса фарқ мекунанд.

Теоремаи 4.3.1. *Дилхоҳ адади комплексии* $\alpha = a + ib$*–ро ба намуди тригонометрии ягонаи*

$$\alpha = r(\cos\varphi + \sin\varphi) \tag{4.3.1}$$

навиштан мумкин аст. Дар ин ҷо $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$ *мувофиқан модул ва аргумети* α *буда, аргументи* φ *то саҳеҳии ҷамъшавандаи ба* 2π *каратӣ муайян карда мешавад.*

Исбот. Дар байни координатаҳои декартӣ ва қутбии дилхоҳ нуқтаи ҳамворӣ алоқаи зерин мавҷуд аст:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi. \tag{4.3.2}$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = r. \tag{4.3.3}$$

Формулаи (4.3.2)–ро барои адади комплексии дилхоҳи $\alpha = a + ib$ тадбиқ намуда, онро ба намуди (4.3.1) менависем, яъне

$$\alpha = a + ib = r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Фарз мекунем, ки адади комплексии $\alpha = a+ib$ ба ғайр аз намуди (4.3.1) боз ба намуди зерин навишта мешавад:

$$\alpha = a + ib = r_0(\cos\varphi_0 + r_0\sin\varphi_0),$$

ки дар инҷо $r_0 \geq 0$ ва φ_0 ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, пас мувофиқи таърифи баробарии ададҳои комплексӣ ҳосил мекунем:

$$r_0\cos\varphi_0 = a, \qquad r_0\sin\varphi_0 = b. \tag{4.3.4}$$

Пас

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{r_0^2(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)} = r_0.$$

Бо назардошти (4.3.3) аз ин ҷо баробарии $r_0 = r$ бармеояд. Пас мувофиқи баробариҳои (4.3.2) ва (4.3.4) ҳосил мекунем:

$$\sin\varphi_0 = \sin\varphi, \qquad \cos\varphi_0 = \cos\varphi,$$

яъне $\varphi_0 = \arg\alpha$ ва зимнан аргументи φ то саҳеҳии ҷамъшавандаи ба 2π каратӣ муайян карда мешавад.

Теорема исбот шуд.

`Мисолҳо. Ададҳои комплексии`

$$\alpha = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \beta = \cos\frac{19}{3}\pi + i\sin\frac{19}{3}\pi, \quad \gamma = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

`дар намуди тригонометрӣ додашудаанд; дар ин ҷо` $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 1$, $|\gamma| = \sqrt{3}$; $\arg\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\arg\beta = \frac{19}{3}\pi$, $\arg\gamma = -\frac{\pi}{7}$.

`Аз тарафи дигар ададҳои комплексии`

$$\alpha' = (-2)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad \beta' = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$
$$\gamma' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{3}{4}\pi\right), \quad \delta' = \sin\frac{3}{4}\pi + i\cos\frac{3}{4}\pi$$

`ба намуди тригонометрӣ дода нашудаанд, ҳарчанд навишти онҳо навишти (4.3.1)-ро ба хотир меорад. Дар намуди тригонометрӣ ин ададҳо ба тариқи зерин навишта мешаванд:`

$$\alpha' = 2\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right), \quad \beta' = 3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right), \quad \delta' = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$

`Ҳангоми ҷустуҷӯи намуди тригонометрии адади` γ' `ба душворӣ дучор меойем. Гузаштан аз навишти муқаррарӣ ба навишти тригонометрӣ ва баръакс имконнопазир мебошад, ба ғайр аз чанд ҳолатҳое, ки аз рӯи кунҷи додашуда қимати аниқи синус ва косинусро ёфтан мумкин аст.`

Теоремаи 4.3.2. *Ҳангоми зарб кардани ададҳои комплексии* $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *модулҳои онҳо зарб, аргументашон ҷамъ мешаванд, яъне*

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \qquad \arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta. \tag{4.3.5}$$

Исбот. Бигзор ададҳои комплексии α ва β дар намуди тригонометрии зерин дода шуда бошанд:

$$\alpha = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \beta = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \tag{4.3.6}$$

яъне модул ва аргументи онҳо бо баробариҳои $|\alpha| = r_1$, $\arg\alpha = \varphi_1$, $|\beta| = r_2$, $\arg\beta = \varphi_2$ муайян карда мешаванд. Ин ададҳоро зарб зада ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta &= \left[r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\right]\left[r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\right] = \\ &= r_1r_2\left[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right] = \\ &= r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right].\end{aligned}$$

Мо навишти ҳосили зарби $\alpha\beta-$ро дар намуди тригонометрӣ ҳосил намудем ва аз ҳамин сабаб $|\alpha\beta| = r_1r_2$ ва $\arg\alpha\beta = \varphi_1 + \varphi_2$, яъне

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \qquad \arg\alpha\beta = \arg\alpha + \arg\beta.$$

Теорема исбот шуд.

Ин теорема барои ҳосили зарби миқдорашон охирноки ададҳои комплексии $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ ҳам ҷой дорад, яъне

$$|\alpha\beta\ldots\gamma| = |\alpha||\beta|\ldots|\gamma|, \qquad \arg(\alpha\beta\ldots\gamma) = \arg\alpha + \arg\beta + \ldots + \arg\gamma.$$

Теоремаи 4.3.3. *Модул ва аргументи нисбати ду адади комплексӣ мувофиқан ба нисбат ва фарқи модулҳои тақсимшаванда ва тақсимкунанда баробаранд, яъне*

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \qquad \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg\alpha - \arg\beta. \tag{4.3.7}$$

Исбот. Навишти тригонометрии (4.3.6)–ро барои ададҳои α ва $\beta \neq 0$ истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)\cdot(cos\varphi_2 - isin\varphi_2)}{(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)\cdot(cos\varphi_2 - isin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{cos\varphi_1\cdot cos\varphi_2 + sin\varphi_1\cdot sin\varphi_2}{cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2} + i\frac{sin\varphi_1\cdot cos\varphi_2 - cos\varphi_1\cdot sin\varphi_2}{cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)]\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Аз ин ҷо тасдиқоти теорема, яъне муносибатҳои (4.3.7) бармеояд.

Аз теоремаҳои исботшудаи 4.3.2 ва 4.3.3 акнун ба осонӣ мазмуни геометрии зарб ва тақсими ададҳои комплексӣ бармеояд. Дар ҳақикат мувофиқи формулаи (4.3.5) нуқтае, ки ҳосили зарби ададҳои α ва $\beta \neq 0$ тасвир мекунад, дар натиҷаи вектори

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи (4.3.5) нуқтаи ҳосили зарби ададҳои α ва β тасвиркунандаро ҳосил мекунем, агар вектори аз 0 ба α равонаро ба муқобили ақрабаки соат ба кунҷи $\varphi_2 = \arg\beta$ тоб дода, баъд онро $r_2 = |\beta|$ маротиба дароз кунем (агар $0 \leq r_2 < 1$ будан ин албатта кӯтоҳ кардан мебошад). Ба ҷои α дар муносибати (4.3.8) адади 1–ро гузошта ҳосил мекунем:

$$\beta^{-1} = r_2^{-1}[cos(-\varphi_2) + isin(-\varphi_2)], \tag{4.3.9}$$

яъне $|\beta^{-1}| = |\beta|^{-1}$, $\arg\beta^{-1} = -\arg\beta$. Ҳамин тавр, нуқтаи β^{-1} ҳосил мекунем, агар аз нуқтаи β ба нуқтаи β', ки аз 0 дар масофаи r^{-1} хобида гузарем

4.4 Решабарорӣ аз ададҳои комплексӣ

Барои ба дараҷаи бутуни мусбати n бардоштани адади комплексии $\alpha = a + ib$ кифоя аст, ки барои ифодаи $(a + ib)^n$ формулаи биноми Нютон

$$(a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-j} i^k b^k$$

тадбиқ карда шуда, баъд барои ҳисоб намудани дараҷаҳои i^k аз баробариҳои $i^2 = -1$, $i^3 = i$, $i^4 = 1$, ки аз он муносибатҳои

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = 1, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

бармеояд, истифода карда шаванд.

Агар адади α ба намуди тригонометрӣ дода шуда бошад, барои ба дараҷаи бутуни мусбати n бардоштани ин адад аз тасдиқоти зерин истифода мебаранд.

Теоремаи 4.4.1. ***(Формулаи Муавр.)*** *Ҳангоми ба дараҷа бардоштани адади комплексӣ модули он ба ин дараҷа бардошта шуда, аргументи он ба ин дараҷа зарб карда мешавад:*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{4.4.1}$$

Исбот. Ин теорема бевосита аз теоремаи 4.3.2 оиди зарби ададҳои комлексӣ дар намуди тригонометрӣ бармеояд.

Формулаи (4.4.1) барои дараҷаҳои бутуни манфӣ ҳам дуруст мебошад. Дар ҳақиқат, аз баробарии $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$ бармеояд, ки кифоя аст, ки формулаи Муаврро барои адади α^{-1} тадбиқ кунем, ки намуди тригонометрии он бо формулаи (4.3.9) муайян карда мешавад.

Ҳолати хусусии формулаи Муавр, маҳз баробарии

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

имконият медиҳад, ки бо осонӣ формулаҳоро барои синус ва косинуси кунҷи каратӣ ҳосил кунем. Дар ҳақиқат, тарафи чапи ин баробариро аз рӯи формулаи биноми Нютон кушода алоҳида қисмҳои ҳакиқӣ ва мавҳуми онҳоро баробар намуда, ҳосил мекунем:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \ldots$$
$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \ldots.$$

Ин формула ҳангоми $n = 2$ ба формулаҳои маълуми зерини кунҷи дучанда мубаддал мегардад:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ҳангоми $n = 3$ формулаҳои зерин ҳосил мекунем:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Баровардани реша аз адади комлексӣ бисёр душвориҳо дорад. Пеш аз ҳама баровардани решаи квадратӣ аз адади комплексии $\alpha = a + ib-$ро дида мебароем.

Теоремаи 4.4.2. *Баровардани решаи квадратӣ аз адади комплексӣ доимо имконпазир аст ва дуто қиматҳои гуногун медиҳад, ки аз якдигар танҳо бо аломаташон фарқ мекунанд.*

Исбот. Ҳоло мо намедонем, ки оё адади комплексие мавҷуд аст, ки квадрати он ба α баробар аст. Фарз мекунем, ки ин гуна адади $u + iv$ мавҷуд аст, яъне

$$\sqrt{a+ib} = u + iv.$$

Аз баробарии

$$(u+iv)^2 = a + ib.$$

системаи ду муодилаҳои ду номаълумаи u ва v бармеояд:

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= a, \\ 2uv &= b. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Ҳарду тарафи ҳар як ин муодилаҳоро ба квадрат бардошта, баъд аъзо ба аъзо ҷамъ намуда ба ҷойи муодилаи дуюм менависем:

$$\begin{gathered} u^2 - v^2 = a, \\ 4u^2v^2 + (u^2 - v^2)^2 = b^2 + a^2. \end{gathered}$$

яъне

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= a, \\ u^2 + v^2 &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} u &= \pm\frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}}, \\ v &= \pm\frac{\sqrt{-a + \sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ҳамин тавр мо ду қимати ҳақиқии u ва ду қимати ҳақиқии v, ки аз якдигар танҳо бо аломаташон фарқ мекунанд, ҳосил мекунем. Ҳамаи чор ҷуфтҳои ҳосилшудаи (u, v) ҳалҳои системаи муодилаҳои (4.4.2) намебошанд. Мувофиқи муодилаи дуюми (4.4.2) аломати ҳосили зарби uv бояд бо аломати b якхела бошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ду адади намуди $u + iv$, ки аз якдигар танҳо бо аломаташон фарқ мекунанд, қимати решаҳои квадратӣ аз адади комплексии $\alpha = a + ib$ мебошанд.

Теорема исбот шуд.

Аз теоремаи исботшуда аз он ҷумла бармеояд, ки аз адади манфӣ ҳам решаҳои квадратӣ баровардан мумкин аст ва зимнан ин решаҳо ададҳои соф мавҳум мебошанд.

Кӯшишҳои баровардани решаҳои дараҷаашон калонтар ба душвориҳои бартарафнашаванда оварда мерасонад. Аз он ҷумла агар мо хоҳем, ки аз адади $\alpha = a + ib$ решаи кубӣ барорем, пас бояд муодилаи ёрирасони кубиро ҳал кунем, лекин то ҳоло дилхоҳ муодилаи кубиро пурра ҳал карда наметавонем. Дар дарсҳои оянда мо нишон медиҳем, ки ҳалли муодилаи кубӣ дар навбати худ аз баровардани решаҳои кубӣ аз адади комплексӣ вобаста аст.

Аз тарафи дигар намуди тригонометрии адади комплексӣ имконият медиҳад, ки решаи дараҷаи дилхоҳ аз адади комплексӣ бароварда шавад. Ин имкониятро истифода бурда масъалаи решабарорӣ аз адади комплексиро пурра ҳал мекунем.

Теоремаи 4.4.3. *Баровадани решаи дараҷаи* $n-$*ум аз адади комплексии* α *доимо имконпазир аст ва* $n-$*то қиматҳои гуногун медиҳад. Ҳамаи решаҳои дараҷаи* $n-$*ум дар давраи радиусаш* $\sqrt[n]{|\alpha|}$ *ва марказаш сифр ҷойгир буда, онро ба* n *қисмҳои баробар тақсим мекунад:*

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\frac{\arg\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg\alpha+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{4.4.3}$$

Исбот. Бигзор аз адади комплексии $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ решаи дараҷаи $n-$ум баровардан лозим бошад. Фарз мекунем, ки ин гуна реша мавҷуд буда он ба адади $\rho(cos\theta+isin\theta)$ баробар аст, яъне

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Ба тарафи чапи ин баробари формулаи Муаврро тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

яъне $\rho^n=r$, ё ин ки $\rho=\sqrt[n]{r}$, дар тарафи рости ин баробарӣ қимати мусбати муайяни решаи дараҷаи $n-$ум аз адади мусбати r истодааст. Аргументи тарафи чап ба $n\theta$ баробар аст ва мо гуфта наметавонем, ки $n\theta$ ба φ баробар аст, чунки ин кунҷҳо метавонанд аз якдигар бо ҷамъшавандаи ба адади ба 2π каратӣ фарқ кунанд. Аз ҳамин сабаб $n\theta=\varphi+2\pi k$, $k-$адади бутун, пас

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Баръакс, агар адади

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

дода шуда бошад, онгоҳ барои дилхоҳ $k-$и бутуни мусбат ё манфӣ дараҷаи $n-$уми ин адад ба α баробар аст. Ҳамин тавр

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Дар ин формула ҳангоми ба k қиматҳои гуногун бахшидан доимо қиматҳои гуногуни реша аз $\alpha-$ро ҳосил мекунем. Дар ҳақиқат, ҳангоми

$$k=0,1,2,\ldots,n-1$$

будан мо $n-$то қиматҳои решаҳои ҳамаашон гуногун бударо ҳосил мекунем, чунки ҳангоми як воҳид зиёд намудани k, аргументи он ба кунҷи $\frac{2\pi}{n}$ зиёд мешавад. Бигзор акнун $k=k_0$ дилхоҳ адади бутун бошад. Аз амали тақсим бо бақия истифода бурда адади k_0-ро ба намуди $k_0=nq+r$, $0\leq r\leq n-1$ тасвир менамоем, пас

$$\frac{\varphi+2\pi k_0}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

яъне қимати аргумент барои $k=k_0$ аз қимати аргумент барои $k=r$ ба кунҷи ба 2π каратӣ фарқ мекунад. Пас барои $k=k_0$ чунин қимати решаро ҳосил мекунем, ки он ба қимати реша барои $k=r$ баробар мебошад, яъне ба системаи (4.4.3) дохил мешавад.

Мисол: $\alpha=16(cos^0+isin0^0)$

$$\sqrt[n]{16}=\sqrt[n]{16}\left(cos\frac{0^0+2\pi k}{8}+isin\frac{0^0+2\pi k}{8}\right)=$$

$$= \sqrt{2}\left(cos\frac{2\pi k}{8} + isin\frac{2\pi k}{8}\right) \quad k = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$k = 1 \quad \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$$

$$k = 2 \quad \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$$

4.5 Решаҳо аз воҳид

Решаҳои дараҷаи $n-$ум аз 1 дар алгебра мавқеъи махсусан муҳимро доранд. Ин реша $n-$то қиматҳо дорад. Зимнан мувофиқи баробарии $1 = \cos 0^0 + i \sin 0^0$ ва формулаи мавзӯъи гузашта ба тасдиқоти зерин меойем:

Теоремаи 4.5.1. *Ҳамаи қиматҳои решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид бо ёрии формулаи*

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots,n-1. \tag{4.5.1}$$

ҳисоб карда шуда, онҳо дар қуллаҳои $n-$кунҷаи мунтазами дар давраи радиусаш 1 ва марказаш сифр дарункашидашуда ҷойгиранд.

Қиматҳои ҳақиқии решаи дараҷаи $n-$ум аз воҳид аз формулаи (4.5.1) барои $n-$ҳои ҷуфт ҳангоми $k = 0$ ва $\frac{n}{2}$ барои $n-$ҳои тоқ ҳангоми $k = 0$ ҳосил мешаванд. Маҷмӯъи ҳамаи решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид, яъне системаи ададҳои (4.5.1) бо C_n ишора карда мешавад.

Мувофиқи натиҷаи 4.5.1 дар ҳамвории комплексӣ решаи дараҷаҳои $n-$ум аз воҳид дар давраи воҳидӣ ҷойгир буда, онро ба n қисмҳои баробар тақсим мекунанд ва яке аз нуқтаҳои тақсимот адади 1 мебошад. Аз ин ҷо бармеояд, ки решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳидӣ ҳақиқӣ набуда, нисбат ба тири ҳақиқӣ симметрӣ мебошанд, яъне онҳо ҷуфт - ҷуфт ҳамроҳшудаанд.

Решаи квадратӣ аз воҳид ду қимат дорад: $\varepsilon_0 = 1$ ва $\varepsilon_1 = -1$, решаи дараҷаи чорум аз воҳид чор то қимат дорад: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = i$, $\varepsilon_2 = -1$ ва $\varepsilon_3 = -i$. Решаҳои кубӣ аз воҳидро ҳам дида мебароем, ки мувофиқи формулаи (4.5.1) ададҳои зеринанд:

$$\varepsilon_k = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \qquad k = 0,1,2.$$

яъне ба ғайр аз худи воҳид $\varepsilon_0 = 1$ инчунин ададҳои байни ҳам ҳамроҳшудаи

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3}}{2},$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

дохиланд.

Акнун алоқаи байни решаҳои дараҷаи $n-$ум аз адади комплексии α ва решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳидро дида мебароем.

Теоремаи 4.5.2. *Ҳамаи қиматҳои решаи дараҷаи $n-$ум аз адади комплексии $\alpha-$ро дар натиҷаи зарб задани яке аз чунин решаҳо ба ҳамаи решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид ҳосил намудан мумкин аст.*

Исбот. Бигузор β яке аз решаҳои дараҷаи $n-$ум аз адади комплексии α ва ε_k қимати дилхоҳи решаи дараҷаи $n-$ум аз воҳид бошанд, яъне

$$\beta^n = \alpha, \qquad \varepsilon_k^n = 1.$$

он гоҳ

$$(\beta\varepsilon_k)^n = \alpha,$$

яъне $\beta\varepsilon_k$ яке аз қиматҳои $\sqrt[n]{\alpha}$ мебошад. Адади $\beta-$ро ба ҳар як ε_k-решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид зарб зада, $n-$ то қиматҳои гуногуни решаи дараҷаи $n-$ ум аз α, яъне ҳамаи қиматҳои ин решаро ҳосил мекунем.

Теоремаи 4.5.3. *C_n – маҷмӯи ҳамаи решаҳои дараҷаи n – ум аз воҳид нисбат ба амали зарб гурӯҳи абелӣ мебошад.*

Исбот. Иҷрошавии ҳамаи шартҳои гурӯҳро дар алоҳидагӣ дида мебароем.

1. Бигзор ε_k ва ε_r решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид бошанд, яъне $\varepsilon_k^n = 1$, $\varepsilon_r^n = 1$, он гоҳ

   $$(\varepsilon_k\varepsilon_r)^n = 1,$$

   яъне ҳосили зарби онҳо $\varepsilon_k\varepsilon_r$ ҳам решаи дараҷаи $n-$ум аз воҳид буда ба системаи (4.5.1) ба тариқи зерин дохил мешавад:

   $$\varepsilon_k\varepsilon_r = \begin{cases} \varepsilon_{k+r}, & \text{агар } k+r \le n; \\ \varepsilon_{k+r-n}, & \text{агар } k+r > n. \end{cases} \tag{4.5.2}$$

2. Амали зарб барои дилхоҳ ададҳои комплексӣ, аз он ҷумла барои решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид ε_k, ε_r ва ε_l ҳам амали ассотсиативӣ мебошад, яъне

   $$(\varepsilon_k\varepsilon_r)\varepsilon_l = \varepsilon_k(\varepsilon_r\varepsilon_l).$$

3. Роли элементи воҳидиро барои зарби решаҳои дараҷаи $n-$ум аз воҳид решаи $\varepsilon_0 = 1$ мебозад.

4. Барои дилхоҳ решаи дараҷаи $n-$ум аз воҳид ε_k решаи ε_{n-k} адади баръакс мебошад. Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи (4.5.2)

   $$\varepsilon_k\varepsilon_{n-k} = \varepsilon_0 = 1.$$

Абелӣ будани гуруҳи C_n бевосита аз коммутативӣ будани зарби ададҳои комплексӣ бармеояд.

Теорема исбот шуд.

Боби 5

Бисёраъзогиҳо ва решаҳои онҳо

5.1 Бисёраъзогиҳо ва амалҳо бо онҳо

Яке аз қисмҳои асосии алгебра ин омӯхтани муодилаҳои дараҷаи n ($n-$адади натуралӣ) мебошад. Намуди умумии муодилаи дараҷаи $n-$уми нисбат ба як номаълуми $x-$ро ба тариқи зерин навиштан мумкин аст:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{5.1.1}$$

Коэффитсиентҳои ин муодила $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n-$ро ададҳои комплексӣ ва коэффитсиенти калон a_0-ро нобаробари сифр меҳисобем.

Агар муодилаи (5.1.1) навишта шуда бошад, он гоҳ доимо дар назар дошта мешавад, ки он ҳал карда шавад. Ба таври дигар талаб карда мешавад, ки чунин қиматҳои ададии номаълуми x ёфта шавад, ки ин муодиларо қаноат кунонад, яъне онро ҳангоми ба ҷойи номаълуми x гузоштан тарафи чапи муодилаи (5.1.1) баробари сифр шавад.

Зимнан иваз намудани масъалаи ҳалли муодилаи (5.1.1) бо масъалаи умумитари омӯхтани қисми чапи ин муодила

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{5.1.2}$$

ки онро *бисёраъзогии (ё полиноми) дараҷаи $n-$ум нисбат ба номаълуми x* меноманд, мувофиқи мақсад мебошад. Ҳамин тавр мо ба таърифи зерин меоем.

Таърифи 5.1.1. *Суммаи дараҷаҳои бутуни ғайри манфии номаълуми x бо ягон коэффитсиентҳои ададӣ, бисёраъзогии дараҷаи $n-$ум нисбат ба номаълуми x номида мешавад.*

Ифодае, ки дар он номаълуми x бо дараҷаҳои бутуни манфӣ ё ин ки бо дараҷаҳои касрӣ иштирок мекунад, бисёръзогӣ ҳисобида намешавад. Масалан ифодаҳои зерин бисёръзогӣ намебошанд:

$$2x^2 + \frac{1}{x} + 3 \quad \text{ё} \quad x^2 + x^{\frac{1}{3}} + 1$$

Барои навишти мухтасари бисёраъзогиҳо аз ишораҳои $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ва ҳоказо истифода бурда мешавад.

Таърифи 5.1.2. *Бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ баробар номида мешаванд, яъне $f(x) = g(x)$ агар коэффитсиентҳои назди дараҷаҳои яккелаи онҳо баробар бошанд.*

Дилхоҳ бисёраъзогие, ки ақаллан якто коэффитсиенти ғайри сифр дорад, ба сифр баробар намебошад, аз ҳамин сабаб аломати баробарие, ки дар навишти муодилаи дараҷаи $n-$уми (5.1.1) истифода шудааст, бо баробарии бисёраъзогиҳо ягон уммумияте надорад. Аломати $=$ дар байни бисёраъзогиҳо доимо ба мазмуни айниятан баробарии онҳо фаҳмида мешавад.

Бисёраъзогиҳоро ба ғайр аз навишти намуди (5.1.2), ки ба тартиби кам шудани дараҷаҳои x навишта шудаанд, инчунин ба тартиби зиёд шудани дараҷаҳои x ҳам менависанд.

Бисёраъзогиҳои дараҷаи n барои дилхоҳ адади натуралии n, яъне бисёраъзогиҳои дараҷаи якум, квадратӣ, кубӣ ва ҳоказо мавҷуданд. Бисёраъзогии дараҷаи нулӣ гуфта ҳамаи ададҳои комплексии нобаробари сифрро меноманд. Адади сифр ҳам бисёраъзогӣ ҳисоб карда мешавад, лекин ин ягона бисёраъзогие мебошад, ки дараҷаи он муайян намебошад.

Маҷмӯи ҳамаи биёраъзогиҳо бо коэффитсиентҳои комплексӣ, ҳақиқӣ, ратсионалӣ ва бутун мувофиқан бо воситаи $C[x]$, $R[x]$, $Q[x]$, $Z[x]$ ишора карда мешавад. Дар ҳамаи ин маҷмӯъҳо амалҳои ҷамъи бисёраъзогиҳо ва зарби онҳоро дохил мекунем. Бигзор бисёразогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ бо тартиби зиёдшавии дараҷаҳои x:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{s-1}x^{s-1} + b_sx^s,$$

дода шуда бошанду $n \geq s$ бошад.

Таърифи 5.1.3. *Суммаи бисёразогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ гуфта бисёраъзогии*

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$$

номида мешавад, ки коэффитсиетҳои он дар натиҷаи ҷамъ кардани коэффитсиентҳои назди дараҷаҳои яккелаи бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳосил мешавад, яъне

$$c_0 = a_0 + b_0,\ c_1 = a_1 + b_1,\ \ldots,\ c_s = a_s + b_s,\ c_{s+1} = a_{s+1} + b_{s+1},\ \ldots,\ c_n = a_n + b_n.$$

Агар n аз s калон бошад, дараҷаи сумма ба n баробар аст, аммо ҳангоми $n = s$ вай метавонад, ногаҳон аз n хурд шавад, ин ҳолат маҳз ҳангоми $b_n = -a_n$ будан, ҷой дорад.

Азбаски ҳангоми ҷамъ кардани бисёразогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ бо коэффитсиентҳои комплексӣ (яъне аз $C[x]$) коэффитсиентҳои мувофиқи онҳо ҷамъ мешаванд, пас суммаи онҳо $f(x)+g(x)$ ҳам бисёразогӣ бо коэффитсиентҳои комплексӣ (яъне аз $C[x]$) мебошад. Ба таври дигар ҷамъи бисёраъзогиҳо дар $C[x]$ амали алгебравӣ мебошад. Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки ҷамъи бисёраъзогиҳо дар маҷмӯъҳои $R[x]$, $Q[x]$, $Z[x]$ ҳам амали алгебравӣ мебошад.

Таърифи 5.1.4. *Ҳосили зарби биёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ гуфта бисёраъзогии*

$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_{n+s-1}x^{n+s-1}d_{n+s}x^{n+s}$$

номида мешавад, ки коэффитсиентҳои он ба тариқи зерин муайян карда мешаванд:

$$d_j = \sum_{k+l=i} a_kb_l, \quad i = 0, 1, \ldots, n+s-1, n+s.$$

Аз ин теорема бармеояд, ки коэффитсиенти d_i ин суммаи ҳамон ҳосили зарбҳои коэффитсиентҳои $f(x)$ ва $g(x)$ мебошад, ки суммаи индексҳояшон ба i баробар аст:

$$\begin{aligned}
&d_0 = a_0b_0,\\
&d_1 = a_0b_1 + a_1b_0,\\
&d_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,\\
&d_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0,\\
&\ldots,\\
&d_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ldots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0, \quad i = 0, 1, \ldots, n+s-1, n+s\\
&\ldots,\\
&d_{n+s-1} = a_{n-1}b_s + a_nb_{s-1},\\
&d_{n+s} = a_nb_s.
\end{aligned}$$

Аз ин баробарии охирин $d_{n+s} \neq 0$ бармеояд, яъне *дараҷаи ҳосили зарби ду бисёръзогиҳо ба суммаи дараҷаҳои ин бисёръзогиҳо баробар аст.* Аз ин ҷо бармеояд, ки *ҳосили зарби бисёръзогиҳои ғайри нулӣ ягон вақт баробари нул намешаванд.*

Теоремаи 5.1.1. *Маҷмӯъи $C[x]$ ҳалқаи коммутативӣ, дорои воҳид ва бе тақсимкунандаҳои нул мебошад.*

Исбот. Пеш аз ҳама нишон медиҳем, $C[x]$ нисбат ба амали ҷамъ гурӯҳи абелӣ мебошад. Ассоциативӣ ва коммутативӣ будани ҷамъи бисёраъзогиҳо аз иҷро шудани ин хосиятҳо барои ададҳои комплексӣ бармеояд, чунки ҳангоми ҷамъ кардани бисёраъзогиҳо коэффитсиентҳои мувофиқи онҳо ҷамъ мешаванд. Роли элементи нулиро барои ҷамъи бисёраъзогиҳо ягона бисёраъзогии дараҷааш муайян набуда яъне сифр мебозад. Дар ҳақиқат

$$f(x) + 0 = f(x).$$

Барои дилхоҳ бисёраъзогии дар намуди боло навишташудаи $f(x)$

$$-f(x) = -a_0 - a_1x - \ldots - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n,$$

бисёраъзогии муқобил мебошад. Ҳамин тавр $C[x]$ нисбат ба амали ҷамъ гурӯҳи абелӣ мебошад.

Ассоциативӣ будани зарб ба тариқи зерин нишон дода мешавад: агар ба ғайр аз бисёраъзогиҳои дар боло навишташудаи $f(x)$ ва $g(x)$, боз бисёраъзогии

$$h(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{t-1}x^{t-1} + c_tx^t, \qquad c_t \neq 0$$

додашуда бошад, он гоҳ коэффитсиенти назди дараҷаи x^i, $i = 0, 1, \ldots, n+s+t$ дар ҳосили зарби $[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x)$ ба адади

$$\left(\sum_{k+l=j} a_kb_l\right) \sum_{j+m=i} c_m = \sum_{k+l+m=i} a_kb_lc_m,$$

дар ҳосили зарби $f(x)[g(x)h(x)]$ бошад, ба адади

$$\sum_{k+j=i} a_k \left(\sum_{l+m=j} b_lc_m\right) = \sum_{k+l+m=i} a_kb_lc_m$$

баробар мебошад, яъне коэффитсиентҳои назди дараҷаи якхелаи x^i, $i = 0, 1, \ldots, n+s+t$ дар ҳосили зарби $[f(x)g(x)]h(x)$ ва $f(x)[g(x)h(x)]$ баробаранд.

Аз баробарии зерин иҷрошавии қонуни дистрибутивӣ бармеояд:

$$\sum_{k+l=i} (a_k + b_l)c_m = \sum_{k+l=i} a_kc_l + \sum_{k+l=i} b_kc_l,$$

чунки тарафи чап ва рости ин баробарӣ мувофиқан коэффитсиентҳои назди дараҷаи якхелаи x^i, дар бисёраъзогиҳои $[f(x) + g(x)]h(x)$ ва $f(x)h(x) + g(x)h(x)$ мебошанд.

Коммутативӣ будани зарби бисёраъзогиҳо аз коммутативӣ будани зарби ададҳои комплексӣ ва аз баробарҳуқуқ будани коэффитсиентҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар таърифи зарби бисёраъзогиҳо, онҳо бармеояд.

Роли элементи воҳидиро барои зарби бисёраъзогиҳо адади 1, ки бисёраъзогии дараҷаи сифр мебошад, мебозад.

Дар боло аллакай қайд кардем, ки ҳосили зарби бисёръзогиҳои ғайри нулӣ ягон вақт баробари нул намешаванд, яъне $C[x]$ тақсимкунандаҳои нул надорад.

Теорема исбот шуд.

Айнан ҳамин тавр исбот намудан мумкин аст, ки *маҷмӯҳои $R[x]$, $Q[x]$ ва $Z[x]$ ҳам ҳалқаҳои коммутативӣ, дорои воҳид ва бе тақсимкунандаҳои нул мебошанд.*

Теоремаи 5.1.2. *Биёраъзогии $f(x)$ фақат ва фақат дар ҳамон вақт дорои бисёраъзогии баръакси $f^{-1}(x)$,*

$$f(x)f^{-1}(x) = 1, \tag{5.1.3}$$

мебошад, агар $f(x)$ бисёраъзогии дараҷаи нулӣ бошад.

Исбот. Дар ҳақикат агар $f(x)$ бисёраъзогии дараҷаи сифр, яъне адади комплексии ғайри сифрии α бошад, пас бисёраъзогии баръакси он адади α^{-1} мебошад. Бигзор барои бисёраъзогии $f(x)-$и дараҷааш ба $n \geq 1$ баробар буда, бисёраъзогии баръакси $f^{-1}(x)$ мавҷуд аст. Азбаски дараҷаи дилхоҳ бисёраъзогӣ, аз он ҷумла $f^{-1}(x)$ адади бутуни ғайриманфӣ мебошад, пас дараҷаи тарафи чапи (5.1.3) аз n хурд намебошад, ҳоло он ки дараҷаи тарафи рост ба сифр баробар аст.

Аз ин ҷо бармеояд, ки дар ҳалқаи $C[x]$ барои бисёраъзогии ғайринулӣ қонуни мавҷудияти элементи (бисёраъзогии) баръакс иҷро намешавад ва маҷмӯъи $C[x]\backslash\{0\}$ нисбат ба амали зарб гурӯҳ намебошад. Ба таври дигар дар ҳалқаи $C[x]$ амали ба зарби биёраъзогиҳо баръакс, яъне тақсим ба бисёраъзогии ғайринулӣ вуҷуд надорад.

Дар ин муносибат $C[x]$ ҳалқаи $Z-$ро ба хотир меоварад, чунки дар ҳалқаи Z ҳам амали ба зарби ададҳои бутун баръакс, яъне тақсим ба адади ғайринулӣ вуҷуд надорад. Ин монандӣ инчунин дар он зоҳир мегардад, ки ҳам дар Z ва ҳам дар $C[x]$ *алгоритми тақсим бо бақия* мавҷуд аст. Алгоритми тақсим бо бақия барои бисёраъзогиҳо бо коэффитсиентҳои ҳақиқӣ қисман дар алгебраи мактабӣ омӯхта мешавад. Моҳияти алгоритми тақсим бо бақияро дар $C[x]$ дар тасдиқоти зерин дида мебароем.

Теоремаи 5.1.3. *Барои дилхоҳ бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ аз $C[x]$ чунин биёраъзогиҳои $q(x)$ ва $r(x)$ аз $C[x]$ мавҷуданд, ки*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{5.1.4}$$

дар ин ҷо дараҷаи $r(x)$ аз дараҷаи $g(x)$ хурд мебошад, ё ин ки $r(x) = 0$ аст. Биёраъзогиҳои $q(x)$ ва $r(x)$, ки ин шартро қаноат мекунанд, ба таври ягона муайян карда мешаванд.

Исбот. Бигзор дараҷаҳои бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ мувофиқан ба n ва s баробар бошанд:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0, \\ g(x) &= b_0x^s + b_1x^{s-1} + \ldots + b_{s-1}x + b_s, \qquad b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Агар $n < s$ бошад, онгоҳ $q(x) = 0$ ва $r(x) = f(x)$, яъне

$$f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x).$$

Ҳангоми $n \leq s$ будан аз ҳамон методе, ки дар алгебраи элементарӣ бисёраъзогиҳо бо коэффитсиентҳои ҳақиқии аз рӯи камшавии дараҷаҳояшон ҷойгиршуда тақсим карда мешаванд, истифода мебарем. Дараҷаи бисёраъзогии $f_1(x)$, ки бо баробарии

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x) = f_1(x). \tag{5_1}$$

муайян карда мешавад, аз n хурд мебошад. Ин дараҷаро бо n_1, коэффитсиенти калони бисёраъзогии $f_1(x)-$ро бо a_{10} ишора мекунем. Ҳангоми $n_1 \geq s$ будан бисёраъзогии $f_2(x)$ бо баробарии

$$f_1(x) - \frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}g(x) = f_2(x) \tag{5_2}$$

муайян мекунем, ки дараҷаи он аз n_1 хурд мебошад. Ин дараҷаро бо n_2, коэффитсиенти калони бисёраъзогии $f_2(x)-$ро бо a_{20} ишора намуда ҳангоми $n_2 \geq s$ будан бисёраъзогии $f_3(x)$ бо баробарии

$$f_2(x) - \frac{a_{20}}{b_0}x^{n_2-s}g(x) = f_3(x) \tag{5_3}$$

муайян мекунем ва ҳоказо.

Азбаски дараҷаи бисёръзогиҳои $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ кам мешаванд, яъне $n > n_1 > n_2 \ldots$, пас баъди қадамҳои охирнок бисёраъзогии $f_k(x)$,

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{k0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}g(x) = f_k(x) \tag{5_k}$$

ҳосил мекунем, ки дараҷаи он n_k аз s хурд мебошад ва протсесси мо ба охир мерасад. Баробариҳои (5_1), (5_2), (5_3), …,(5_k)$-$ро аъзо ба аъзо ҷамъ намуда ҳосил менамоем:

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s} + \frac{a_{20}}{b_0}x^{n_2-s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}\right)g(x) = f_k(x),$$

яъне бисёраъзогиҳои

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a_0}{b_0}x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s} + \frac{a_{20}}{b_0}x^{n_2-s} + \ldots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}, \\ r(x) &= f_k(x) \end{aligned}$$

дар ҳақиқат баробарии (5.1.4)$-$ро қаноъат мекунонанд ва дараҷаи $r(x)$ аз дараҷаи $g(x)$ хурд мебошад.

Акнун қисми дуюми теорема, яъне ягонагии биёраъзогиҳои $q(x)$ ва $r(x)$ исбот мекунем. Бигзор боз биёраъзогиҳои $\bar{q}(x)$ ва $\bar{r}(x)$ мавҷуданд, ки баробарии зеринро қаноат мекунанд:

$$f(x) = g(x)\bar{q}(x) + \bar{r}(x), \tag{5.1.5}$$

ва дараҷаи $\bar{r}(x)$ аз дараҷаи $\bar{g}(x)$ хурд мебошад. Азбаски тарафҳои чапи (5.1.4) ва (5.1.5) баробаранд, пас тарафҳои рости онҳо ҳам баробар мебошанд, яъне

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)\bar{q}(x) + \bar{r}(x),$$

пас

$$g(x)[q(x) - \bar{q}(x)] = \bar{r}(x) - r(x).$$

Дараҷаи тарафи рост аз дараҷаи $g(x)$ хурд мебошад. Дараҷаи тарафи чап ҳангоми $q(x) - \bar{q}(x) \neq 0$ аз дараҷаи $q(x)$ калон ё баробар мебошад. Пас бояд $q(x)-\bar{q}(x) = 0$, яъне $\bar{q}(x) = q(x)$, аз инҷо бармеояд, ки $\bar{r}(x) - r(x) = 0$, яъне ва $\bar{r}(x) = r(x)$.

Теорема исбот шуд.

Қайд кардан ҷоиз аст, ки биёраъзогиҳои $q(x)$ ва $r(x)$ мувофиқан *ҳосили тақсими* $f(x)$ ба $g(x)$ ва *бақияи* ин тақсим номида мешаванд.

Аз алгоритми тақсим бо бақия бармеояд, ки *агар коэффитсиентҳои* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *ҳақиқӣ бошанд, пас коэффитсиентҳои бисёраъзогиҳои* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ *ҳам ҳақиқӣ мешаванд, аз ҳамин сабаб коэффитсиентҳои* $q(x)$ *ва* $r(x)$ *ҳам ҳақиқӣ мебошанд. Ба таври дигар агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *аз* $R[x]$ *бошанд, пас* $q(x)$ *ва* $r(x)$ *ҳам аз* $R[x]$ *мебошанд.*

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки *агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *аз* $Q[x]$ *бошанд, пас* $q(x)$ *ва* $r(x)$ *ҳам аз* $Q[x]$ *мебошанд.*

5.2 Тақсимкунандаҳо

Бигзор бисёраъзогиҳои ғайринулии $f(x)$ ва $\varphi(x)$ аз $C[x]$ дода шудаанд.

Таърифи 5.2.1. *Агар бақияи тақсими $f(x)$ ба $\varphi(x)$ ба сифр баробар бошад, яъне $f(x)$ ба $\varphi(x)$ бутун тақсим шавад, пас бисёраъзогии $\varphi(x)$ тақсимкунандаи бисёраъзогии $f(x)$ номида мешавад.*

Теоремаи 5.2.1. *Барои он ки бисёраъзогии $\varphi(x)$ тақсимкунандаи бисёраъзогии $f(x)$ бошад, зарур ва кифоя аст, ки чунин бисёраъзогии $\psi(x)$– и ба баробарии*

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x) \tag{5.2.1}$$

қаноаткунада мавҷуд бошад.

Исботи шарти зарурӣ. Агар $\varphi(x)$ тақсимкунандаи $f(x)$ бошад, яъне бақияи тақсими $f(x)$ ба $\varphi(x)$ ба сифр баробар бошад, пас ба сифати $\psi(x)$ ҳосили тақсими $f(x)$ ба $\varphi(x)$-ро мегирем.

Исботи шарти кифоягӣ. Бигзор чунин бисёраъзогии $\psi(x)$ мавҷуд бошад, ки баробарии (5.2.1)–ро қаноат мекунонад. Аз теоремаи 5.2.1 оиди ягонагии бисёраъзогиҳои $q(x)$ ва $r(x)$, ки баробарии зеринро

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$$

қаноат мекунанд ва аз шарти дараҷаи $r(x)$ аз дараҷаи $\varphi(x)$ хурд будан бармеояд, ки ҳосили тақсими $f(x)$ ба $\varphi(x)$ ба $\psi(x)$ ва бақия ба сифр баробар аст.

Фаҳмо аст, ки агар баробарии (5.2.1) ҷой дошта бошад, пас $\psi(x)$ ҳам тақсимкунандаи $f(x)$ мебошад. Инчунин аён аст, ки дараҷаи $\varphi(x)$ аз дараҷаи $f(x)$ калон намебошад.

Қайд кардан ҷоиз аст, ки агар бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ аз $Q[x]$ ё $R[x]$ бошанд, пас $\psi(x)$ ҳам аз $Q[x]$ ё $R[x]$ мебошад, чунки $\psi(x)$ бо ёрии алгоритми тақсим ҷустуҷӯ карда мешавад. Албатта бисёраъзогиҳо аз $Q[x]$ ё $R[x]$ метавонанд, тақсимкунандаҳо дошта бошанд, ки аз $Q[x]$ ё $R[x]$ нестанд. Инро мисолҳои зерин нишон медиҳад:

$$x^2 - 1 = (x - i)(x + i), \qquad x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Баъзе хосияти асосии тақсимшавии бисёраъзогиҳоро гуфта мегузарем.

1. *Агар $f(x)$ ба $g(x)$ тақсим шавад, $g(x)$ ба $h(x)$ тақсим шавад, пас $f(x)$ ба $h(x)$ ҳам тақсим мешавад.*

   Дар ҳақиқат аз баробариҳои $f(x) = g(x)\varphi(x)$ ва $g(x) = h(x)\psi(x)$ баробарии $f(x) = h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$ бармеояд.

2. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ ба $\varphi(x)$ тақсим шаванд, пас суммаи онҳо $f(x)+g(x)$ ва фарқи онҳо $f(x) - g(x)$ ҳам ба $\varphi(x)$ тақсим мешавад.*

   Дар ҳақиқат аз баробариҳои $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ ва $g(x) = \varphi(x)\chi(x)$ баробарии $f(x) \pm g(x) = \phi(x)[\psi(x) \pm \chi(x)]$ бармеояд.

3. *Агар $f(x)$ ба $\varphi(x)$ тақсим шавад ва $g(x)$ бисёраъзогии дилхоҳ бошад, пас ҳосили зарби $f(x)g(x)$ ба ҳам ба $\varphi(x)$ тақсим мешавад.*

   Дар ҳақиқат агар $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ бошад, пас $f(x)g(x) = \varphi(x)[\psi(x)g(x)]$.

   Аз хосиятҳои 2 ва 3 хосияти зерин бармеояд:

4. *Агар бисёраъзогиҳои $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ ба $\varphi(x)$ тақсим шаванд, пас барои дилхоҳ бисёраъзогиҳои $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$, бисёраъзогии $f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \ldots + f_n(x)g_n(x)$ ҳам ба $\varphi(x)$ тақсим мешавад.*

5. *Дилхоҳ бисёраъзоги $f(x)$ ба дилхоҳ бисёраъзогии дараҷаи нулӣ тақсим мешавад.*

   Бигзор агар $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ва $c-$дилхоҳ адади ғайри сифр яъне дилхоҳ бисёраъзогии дараҷаи нулӣ бошад, пас аз тасвири бисёраъзогии $f(x)$ дар намуди

$$f(x) = c\left(\frac{a_0}{c}x^n + \frac{a_1}{c}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{c}x + \frac{a_n}{c}\right)$$

   бармеояд, ки $f(x)$ ба адади c тақсим мешавад.

6. *Агар $f(x)$ ба $\varphi(x)$ тақсим шавад, пас барои дилхоҳ адади ғайринулии c бисёраъзогии $f(x)$ ба $c\varphi(x)$ тақсим мешавад.*

   Дар ҳақиқат аз баробарии $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ баробарии $f(x) = [c\varphi(x)][c^{-1}\psi(x)]$ бармеояд, яъне $f(x)$ ба $c\varphi(x)$ тақсим мешавад.

7. *Тақсимкунандаҳои бисёраъзогии $f(x)$, ки бо ӯ дараҷаҳои якхела доранд, танҳо бисёраъзогиҳои $cf(x)$, $c \neq 0$ мебошанд.*

   Дар ҳақиқат $f(x) = c^{-1}[cf(x)]$, яъне $f(x)$ ба $cf(x)$ тақсим мешавад.

   Аз тарафи дигар агар $f(x)$ ба $\varphi(x)$ тақсим шавад ва дараҷаҳои $f(x)$ ва $\varphi(x)$ якхела бошанд, пас дараҷаи ҳосили тақсими $f(x)$ ба $\varphi(x)$ бояд ба сифр баробар бошад, яъне $f(x) = d\varphi(x)$, $d \neq 0$, он гоҳ $\varphi(x) = d^{-1}f(x)$.

   Аз инҷо хосиятҳои зерин бармеояд:

8. *Бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ фақат ва фақат дар ҳамон вақт ба якдигар тақсим мешавад, агар $f(x) = cg(x)$, $c \neq 0$ бошад.*

9. *Ҳар гуна тақсимкунандаи яке аз бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $cf(x)$, $c \neq 0$ тақсим кунандаи дигараш мебошад.*

5.3 Калонтарин тақсимкунандаи умумӣ

Бигзор бисёраъзогиҳои дилхоҳи $f(x)$ ба $g(x)$ дода шудаанд.

Таърифи 5.3.1. *Бисёраъзогии $\varphi(x)$ тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ номида мешавад, агар ӯ тақсимкунандаи ҳар яки ин бисёраъзогиҳо бошад.*

Аз хосияти панҷуми мавзӯи гузашта бармеояд, ки ҳамаи бисрёраъзогиҳои дараҷаи нулӣ ба маҷмӯъи тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дохил мешаванд.

Таърифи 5.3.2. *Бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$-ро байни ҳам содда меноманд, агар онҳо ба ғайр аз бисёраъзогиҳои дараҷаи нулӣ тақсимкунандаҳои дигар надошта бошанд.*

Зимнан бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ метавонанд, тақсимкунадаҳои умумии аз x вобаста дошта бошанд.

Аз курси математикаи мактабӣ маълум аст, ки калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои натуралии m ва n нафақат калонтарин дар байни тақсимкунандаи умумии ин ададҳо буда, балки худ ба ин гуна тақсимкунандаҳо тақсим мешавад. Масалан калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 12 ва 18, яъне адади 6 нафақат калонтарин дар байни тақсимкунандаи умумии ин ададҳо, ки аз ададҳои 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 иборатанд, балки ба ҳамаи ин тақсимкунандаҳо тақсим мешавад.

Таърифи 5.3.3. *Калонтарин тақсимкунандаи умумии (КТУ) бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ гуфта чунин тақсимкунандаи умумии $d(x)$ – и ин бисрёраъзогиҳоро меноманд, ки он ба ҳамаи тақсимкунандаҳои умуми $f(x)$ ва $g(x)$ тақсим мешавад.*

Калонтарин тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ бо $(f(x), g(x))$ ишора карда мешавад.

Мисол $(x^2+1; x+1) = 1$, $(x^2-1, x+1) = x+1$.

Акнун масъалаи мавҷудияти калонтарин тақсимкунандаи умумиро барои дилхоҳ бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дида мебароем. Ба ин масъала тасдиқоти зерин ҷавоб медиҳад.

Алгоритми Евклидро барои бисёраъзогиҳои дилхоҳи $f(x)$ ва $g(x)$ дида мебароем. Бисёраъзогии $f(x)$–ро ба бисёраъзогии $g(x)$ тақсим намуда, ягон бақияи $r_1(x)$ ҳосил менамоем, $g(x)$–ро ба $r_1(x)$ тақсим намуда бақияи $r_2(x)$ ҳосил менамоем, $r_1(x)$–ро ба $r_2(x)$ тақсим намуда бақияи $r_3(x)$ ҳосил менамоем ва ҳоказо. Азбаски дараҷаҳои бақияҳо доимо хурд мешаванд, пас дар ин силсилаи пай дар пай тақсимкуниҳо мо албатта ба қадаме дучор меойем, ки дар он бақияи $r_{k-1}(x)$ ба бақияи $r_k(x)$ бутун тақсим шуда, протсесс ба охир мерасад.

Теоремаи 5.3.1. *Охирин бақияи ғайринулӣ дар алгоритми Эвклид барои бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ба калонтарин тақсимкунандаи умумии ин биёраъзогиҳо баробар аст.*

Исбот. Силсилаи пай дар пай тақсимкуниҳоро дар алгоритми Евклид бо воситаи силсилаи баробариҳои зерин менависем:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)q_1(x) + r_1(x),\\
g(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\\
r_1(x) &= r_2(x)q_3(x) + r_3(x),\\
&\dots\\
r_{k-3}(x) &= r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),\\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)q_{k+1}(x).
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Аз баробарии охирин бармеояд, ки $r_k(x)$ тақсимкунандаи $r_{k-1}(x)$ мебошад. Аз инҷо бармеояд,ки ҳар ду ҷамъшавандаҳои тарафи рост дар баробарии пеш аз охирин ба $r_k(x)$ тақсим мешаванд, пас тарафи чапи ин баробарӣ, яъне $r_{k-2}(x)$ ҳам ба $r_k(x)$ тақсим мешавад. Айнан ҳамин тавр нишон медиҳем, ки аз тақсимшавии $r_{k-1}(x)$ ва $r_{k-2}(x)$ ба $r_k(x)$, тақсимшави $r_{k-3}(x)$ ба r_x бармеояд. Бо ҳамин роҳ дар силсилаи баробариҳои додашудаи (5.3.1) ба боло баромада пай дар пай нишон медиҳем, ки бисёраъзогиҳои $r_{k-3}(x), \dots, r_3(x), r_2(x), r_1(x)$ ба $r(x)$ тақсим мешаванд. Бинобар ин аз баробариҳои дуюми (5.3.1) бармеояд, ки $r_k(x)$ тақсимкунандаи $g(x)$ ҳам мебошад. Аз ин рӯ мувофиқи баробарии якуми (5.3.1) бақияи $r_k(x)$ тақсимкунандаи $f(x)$ ҳам мебошад. Пас $r_k(x)$ тақсимкунандаи умумии $f(x)$ ва $g(x)$ мебошад

Бигзор $\varphi(x)$ дилхоҳ тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ бошад. Азбаски тарафи чап ва ҷамъшавандаи якуми тарафи рости баробарии якуми (5.3.1) ба $\varphi(x)$ тақсим мешаванд, пас $r_1(x)$ ҳам ба $\varphi(x)$ тақсим мешавад. Ба баробарии дуюм ва ба баробариҳои оянда гузашта бо ҳамин роҳ нишон медиҳем, ки $r_2(x), r_3(x), \dots, r_{k-3}(x), r_{k-2}(x), r_{k-1}(x)$ ҳам ба $\varphi(x)$ тақсим мешаванд. Аз баробарии охирини (5.3.1), аз тақсимшавии $r_{k-2}(x)$ ва $r_{k-1}(x)$ ба $\varphi(x)$ бармеояд, ки $r_k(x)$ ҳам ба $\varphi(x)$ тақсим мешавад.

Ҳамин тавр ҳамаи тақсимкунандаи умумии $f(x)$ ва $g(x)$ ба $r_k(x)$ тақсим мешаванд ва $r_k(x)$ худ тақсимкунандаи умумӣ $f(x)$ ва $g(x)$ мебошад, пас $r_k(x)$ ба калонтарин тақсимкунандаи умумиии $f(x)$ ва $g(x)$ баробар аст, яъне

$$r_k(x) = (f(x), g(x)).$$

Теорема исбот шуд.

Мо исбот кардем, ки дилхоҳ ду бисёраъзогӣ калонтарин тақсимкунандаи умумӣ доранд ва усули ҳисоб намудани ӯро нишон додем. Аз ин усул тасдиқоти зерин бармеояд:

Натиҷаи 5.3.1. *Агар коэффитсиентҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳақиқӣ бошанд, пас коэффитсиентҳои калонтарин тақсимкунандаи умумии $(f(x), g(x)) = r_k(x)$ ҳам ҳақиқӣ мебошад яъне агар $f(x)$ ва $g(x)$ аз $R[x]$ бошанд, пас $(f(x), g(x))$ ҳам аз $R[x]$ мебошад.*

Айнан ҳамин тавр нишон додан мумкин аст, ки *агар $f(x)$ ва $g(x)$ аз $Q[x]$ бошанд, пас $(f(x), g(x))$ ҳам аз $Q[x]$ мебошад.*

Ҳарчанд калонтарин тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои бо коэффитсиентҳои ҳақиқии $f(x)$ ва $g(x)$ ҳақиқӣ бошанд, ҳам онҳо метавонанд, тақсимкунандаҳои умумӣ дошта бошанд, ки коэффитсиентҳои он ҳақиқӣ нестанд. Масалан калонтарин тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои бо коэффитсиентҳои ҳақиқии

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \qquad g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

ба $x^2 - 1$ баробар бошад ҳам, онҳо тақсимкунандаҳои умумии $x - i$ ва $x + i$ доранд, ки на ҳамаи коэффитсиентҳояшон ҳақиқӣ мебошанд.

Айнан ҳамин гапро барои бисёраъзогиҳои бо коэффитсиентҳо ратсионалӣ гуфтан мумкин аст. Масалан калонтарин тақсимкунандаи умумии бисёраъзогиҳои бо коэффитсиентҳои ратсионалии

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2, \qquad g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$$

ба $x^2 - 2$ баробар бошад ҳам, онҳо тақсимкунандаҳои умумиии $x - \sqrt{2}$ ва $x + \sqrt{2}$ доранд, ки на ҳамаи коэффитсиентҳояшон ратсионалӣ мебошанд.

5.4 Решаҳои бисёраъзогиҳо

Бигзор бисёраъзогии

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \tag{5.4.1}$$

ва адади дилхоҳи c дода шуда бошанд, онгоҳ адади

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + ... + a_{n-1}c + a_n,$$

ки дар натиҷаи ба ҷойи номаълуми x гузоштани адади c ҳосил шудааст, *қимати бисёраъзогии $f(x)$ барои $x = c$* меноманд.

Агар $f(c)$ баробари нул бошад, онгоҳ c-ро бисёразогии дараҷаи якум яъне ба бисёраъзогии хаттӣ тақсим кунем, онгоҳ бақия ба бисёраъзогии дараҷаи нулӣ ё ин ки ба нул баробар аст. Яъне ба ягон адади r баробар аст. Теоремаи зерин имконият медиҳад, ки ин бақияро бе иҷро намудани худи тиқсим ёбем. Агар тақсимкунанда намуди $x - c$ дошта бошад.

Теорема (Безу). *Бақия аз тақсими бисёраъзогии $f(x)$ ба бисёраъзогии $f(x)$ ҳангоми $x = c$ яъне ба $f(c)$ баробар аст.*

Яъне

$$f(x) = (x - c)q(x) + r; \quad r = f(c)$$

Исбот. Бигзор $f(x) = (x - c)q(x) + r$ ба ҷойи x, c гузошта ҳосил мекунем.

$$f(c) = (c - c)q(c) + r \quad f(c) = r$$

Аз тасдиқоти теорема натиҷаи зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷа Адади c фақат ва фақат дар ҳамон вақт решаи бисёраъзоги $f(x)$ мешавад, агар $f(x)$ ба $(x-c)$ тақсим шавад.

Аз дигар тараф агар $f(x)$ ба ягон бисёраъзогии дараҷаи $ax+b$ тақсим шавад. Онгоҳ вай ба бисёраъзогии $x-(-\frac{b}{a})$ ҳам тақсим мешавад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҷустуҷуи решаҳои бисёраъзогиҳои $f(x)$ ба ҷустуҷуи тақсимкунандаҳои хаттии он баробар қувва аст.

Схемаи Горнер

Схемаи Горнер ин алгоритми ададии тақсими бисёраъзогии $f(x)$ ба дуаъозогии $x-c$ мебошад.

Бигзор $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}(x)a_n$ ва бигзор $f(x) = (x-c)q(x) + r$ $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}(x) + b_n$

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = (x-c)b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1} + r = b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x - cb_0x^{n-1} - cb_1x^{n-2} - ... - cb_{n-2}x - cb_{n-1} + r = b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + (b_2 - cb_1)x^{n-2} + ... + (b_{n-2} - cb_{n-3})x^2 + (b_{n-1} - cb_{n-2})x + (r - cb_{n-1})$

Коэффитсиентҳои назди дараҷаҳои якхеларо ба ҳамдигар баробар намуда ҳосил мекунем.

$a_0 = b_0$

$a_1 = b_1 - cb_0$

....

$a_{n-2} = b_{n-2} - cb_{n-3}$

$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2}$

$a_n = r - cb_{n-1}$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем.

$b_0 = a_0, b_1 = cb_0 + a_1, b_2 = cb_1 + a_2, ..., b_{n-2} = cb_{n-3} + a_{n-2}, b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1}, r = cb_{n-1} + a_n$

Мисол

$f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$

ба $x-3$ тақсим шуда

$q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109$

Решаҳои каратӣ

Агар адади x решаи бисёразогии $f(x)$ бошад, онгоҳ $f(c) = c$ аст, яъне ба дуаъзоги $x-c$ тақсим мешаванд. Мумкин аст, ки $f(x)$ натанҳо ба дараҷаи якуми дуаъзогии $x-c$ балки ба дараҷаҳои калонтарини он тақсим мешаванд.

Дар ҳар ҳолат чунин адади натуралии k мавҷуд аст, ки $f(x)$ ба $(x-c)$ тақсим мешаванду $(x-c)^{k+1}$ тақсим намешаванд. Аз ҳамин сабаб $f(x) = (x-c)^k g(x)$. Дар ин ҳолат k-ро каратноки решаи c дар бисёраъзогии $f(x)$ меноманд. Адади c-ро бошад, решаи k-каратӣ $f(x)$ меноманд. Агар $k = 1$ бошад c-ро решаи ададии $f(x)$ меноманд.

Мисол:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$$

$c = 0$ ва $c = 1$ решаи дукарата

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$$

$c = 0$-решаи ададӣ $c = 1$- решаи 3 карата.

Мафҳуми решаи каратӣ ё ин ки каратнокии реша бо мафҳуми ҳосила зич алоқаманд аст.

Теорема. *Агар адади c решаи k- каратаи бисёраъзогии $f(x)$ бошад, онгоҳ ҳангоми $k > 1$ будан c решаи $k-1$-каратаи $f^{'}(x)$ мебошад.*

Исбот: Бигзор c решаи k-каратаи $f(x)$ бошанд.

Яъне $f(x) = (x-c)^k\varphi(x) \quad \varphi(x) \neq 0 \quad f^{'}(x) = k(x-c)^{k-1}\varphi(x) + (x-c)^k\varphi^{'}(x) = (x-c)^{k-1}[k\varphi(x) + (x-c) \quad \varphi^{'}(x)] = (x-c)^{k-1}g(x), \quad g(c) = k\varphi(c) + (c-c)\varphi^{'}(c) = k\varphi(c) \neq 0$

$f^{'}(x) = (x-c)^{k-1}g(x), \quad g(c) \neq 0$

Яъне c- решаи $(k-1)$ - карати $f^{'}(x)$ мебошад. Теорема исбот шуд.

Натиҷа: Аз решаи k- каратаи бисёразогии $f(x)$ решаи $k-s$- каратаи $f^{(s)}(x)$ мебарояд. $f^{(s)}(x)$ - ҳосилаи тартиби s-уми $f(x)$ мебошад.

Теоремаи асоси алгебра

Ҳангоми омӯхтани бисёраъзогиҳо дар назди худ масъалаи реша доштан ё надоштани бисёраъзогиҳоро нагузашта будем. Бисёраъзогиҳое мавҷуданд, ки коэффитсенти онҳо ҳақиқианду лекин решаи ҳақиқи надоранд.

Масалан $f(x) = x^2 + 1$ яке аз онҳо мебошад. Лекин ин бисёраъзогӣ решаҳои комплексии i ва $-i$ дорад. Акнун ин тавр мебуд, мо бояд системаи ададҳои комплексиро боз васеъ мекурдем, ки дар системаи васеъкардашудаи нав чунин бисёраъзогиҳо реша дошта бошанд.

Дар ҳақиқати ҳол чунин тасдиқотро теоремаи асоси алгебра меноманд.

Теорема: *Дилхоҳ бисёраъзогӣ бо дилхоҳ коэффитсиентҳои ададӣ, ки дараҷаи он аз як хурд нест ақалан якто реша дорад. Ин реша метавонад ададӣ комплексӣ бошад.*

Ин теорема яке аз бузургтарин муваффақиятҳои математика буда дар соҳаҳои гуногун тадбиқ карда мешавад. Дар асоси ин теорема тамоми назарияи бисёраъзогиҳо бо коэффитсентҳои ададӣ сохта шуда аст. Аз ҳамин сабаб ин теоремаро теоремаи асосии алгебраи олӣ меноманд.

Дар ҳақиқати ҳол бошад ин теорема соф алгебравӣ набуда дар исботи он хосиятҳои топологии ададҳои ҳақақӣ ва комплексӣ яъне хосиятҳое, ки бо мафҳуми бефосилагӣ алоқаманд аст истифода мешаванд. Ин теоремаро мо беисбот қабул мекунем.

Натиҷаҳо аз теоремаи асосии алгебра

Бигзор ба мо бисёраъзогии дараҷаи n, яъне

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

$a_0 \neq 0$ $n \leq 1$ бо дилхоҳ коэффитсентиҳои комплексӣ дода шуда бошанд. Мувофиқи теоремаи асосии алгебра $f(x)$ ақалан якто реша дорад ва мо ин решаро бо α_1 ишора мекунем. Аз ҳамин сабаб ба намуди зерин навиштан мумкин аст.

$$f(x) = (x-\alpha_1)\varphi(x)$$

Коэффитсиентҳои $f(x)$ боз ҳақиқи ё комплексӣ мебошанд. Аз ҳамин сабаб мувофиқи теоремаи асосии алгебра $\varphi(x)$ ҳам ақалан якто реша дорад ва мо онро ба воситаи α_2 ишора мекунем. Яъне

$$\varphi(x) = (x-\alpha_2)\psi(x)$$

пас

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\psi(x).$$

Ин процессро давом дода баъди қадамҳои охирнок барои бисёраъзогии $f(x)$ ҷудокунии зеринро ҳамчун ҳосили зарби n-то зарбшавандаҳои хаттӣ ҳосил мекунем.

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) \tag{2}$$

Коэффитсиенти a_0 аз сабаби зерин пайдо шуд. Агар дар тарафи рости (2) ягон коэффитсиенти b мебуд, онгоҳ баъди кушодани қавсҳо аъзои калони $f(x)$ ба bx^n баробар мешуд. Ҳарчанд дар (1) ин аъзо ба a_0x^n баробар аст, аз ҳамин сабаб $b = a_0$ мешавад. Ҳамин тавр барои дилхоҳ бисёраъзогии $f(x)$ ҷудокуниро аз рӯи решаҳои он ҳосил мекунем.

Теорема. *Ҷудокунии бисёразогии $f(x)$ ҳамчун ҳосили зарби зарбшавандаҳои хаттӣ яъне*

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) \tag{2}$$

то соҳаи тартиби зарбшавандаҳо ягона аст.

Исбот: Бигзор ба ғайр аз ҷудокунии (2) боз ҷудокунии

$$f(x) = a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)...(x-\beta_n) \tag{3}$$

мавҷуд бошад.

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)...(x-\beta_n) \tag{4}$$

Агар решаи α_i аз ҳамаи β_j, $\quad j = 1, 2, ..., n$ фарқ кунад онгоҳ дар (4) ба ҷойи номаълуми x α_i-ро гузошта ба ифодае меойем, ки тарафи чапи он нобаробари нул аст. Аз ҳамин сабаб дилхоҳ решаи α_i ба ягон решаи β_j баробар аст ва баракс.

Аз ин ҷо ҳоло якхела будани ҷудокуниҳои (2) ва (3) намебарояд. Дар ҳақиқат дар байни решаҳои α_i $\quad i = 1, 2, ..., n$ метавонад решаҳои байни ҳам мавҷуд бошанд. Бигзор s-то решаҳо ба α_i ва бигзор аз тарафи дигар дар байни решаҳои β_j, $\quad j = 1, 2, ..., n$ t-то решаҳои ба α_i баробар мавҷуд бошанд. Нишон додан лозим аст, ки $s = t$. Аз баски дараҷаҳои ҳосили зарби бисёраъзогиҳо ба суммаи дараҷаҳои зарбшавандаҳо баробар аст, пас ҳосили зарби ду бисёраъзогии ғайри нулӣ ба нул баробар шуда наметавонанд. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳосили зарби ду бисёраъзогӣ ба ҳамдигар баробар бошанд, онгоҳ ҳар ду тарафи баробариро ба зарбшавандаи умумӣ тақсим намудан мумкин аст, агар $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ ва $\varphi(x) \neq 0$ аз $[f(x) - g(x)] = 0$ мебарояд, ки $f(x) - g(x) = 0$ яъне $f(x) = g(x)$.

Инро ба баробари (4) тадбиқ мекунем агар масалан $s > t$ бошад, онгоҳ ҳарду тарафи (4)-ро ба зарбшавадаи $(x-\alpha_i)^t$ тақсим намуда баробарие ҳосил мекунем, ки тарафи чапи он ҳоло зарбшавандаи $(x-\alpha_i)$-ро доранду тарафи рости он ин зарбшавандаро надорад. Мувафиқи гуфтаҳои боло ин ҳолат моро ба зидият меорад. Ҳамин тавр ягонагии ҷудокунии (2) барои $f(x)$ исбот шуд.

Дар (2) зарбшавандаҳои якхеларо мутаҳид намуда онро ба намуди зерин навиштан мумкин аст.

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x-\alpha_e)^{k_e} \tag{5}$$

ва $k_1+k_2+...+k_e = n$ Дар ин навишт дар байни решаҳои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_e$ алакай решаҳои якхела мавҷуд нест. Нишон медиҳем, ки адади k_i дар (5) каратноки решаи α_i барои бисёраъзоги $f(x)$ мебошанд. Дар ҳақиқат агар ин каратноки ба s_i, $\quad s_i = k_i$ бошанд.

Бигзор $s_i < k_i$ бошад, онгоҳ мувафиқи таърифи каратнокии реша барои $f(x)$ ҷудокунии $f(x) = (x-\alpha_1)^{s_i}\varphi(x)$ ҷой дорад. Дар ин ҷудокунӣ ба ҷойи $\varphi(x)$ ҷудокунии онро аз рӯи решаҳои иваз намуда барои $f(x)$ ҷудокунӣ ҳосил намудем, ки он аз ҷудокунии (2) фарқ мекунад. Яъне ба тасдиқотӣ теоремаи дар боло исбот шуда оидӣ ягонагии ҷудокунӣ ба зарбшавандаҳои хаттӣ зиддият ҳосил мекунем. Ҳамин тавр мо ба тасдиқоти хеле муҳим омадем.

Теорема: *Дилхоҳ бисёраъзогии $f(x)$ дараҷаҳои n, $\quad n \geq 1$ бо дихоҳ коэффитсиентҳои ададӣ n-то реша доранд. Агар ҳар як реша ба назардошти каратнокияш ҳисобкарда шаванд.*

$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 = x^3(x-1)^2$ 0-решаи 3 карати 1-решаи 2-карата

$f(x) = x^{100}$ 0-решаи 100 карата

Қайд мекунем, ки ин теорема барои $n = 0$ ҳам дуруст аст. Чунин бисёраъзогиҳои дараҷаи нули реша надоранд. Ин теорема танҳо барои бисёраъзогии нули дуруст намебошанд. Чунки ин бисёраъзогӣ дараҷа надоранду барои дилхоҳ қимати x ба нул баробар аст. Аз қоидаи охиринамон оидӣ бисёраъзогии нули ҳангоми исбот теоремаи зеринро истифода мебарем.

Теорема. *Агар бисёраъзогиҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ки дараҷаҳои онҳо аз n калон намебошанд дар зиёда аз n қиматҳои гуногуни номаълуми x қиматҳои баробар дошта бошанд, онгоҳ ин бисёраъзогиҳо ба ҳамдигар баробаранд.*

Яъне $f(x) = g(x)$

Исбот. Аз тасдиқоти теорема бар меояд, ки бисёраъзоги $f(x) = g(x)$ ки дараҷаи он аз n калон нест, зиёда аз n-то реша доранд. Аз баски миқдори решаҳои $f(x) = g(x)$ аз дараҷаи он калон аст, пас $f(x) - g(x) = 0$ аст. Яъне $f(x) = g(x)$ Теорема исбот шуд.

Бисёраъзогии интерпалятсионии Лагранж

Охирин теоремаи исботкардаи мо тасдиқ мекунад, ки бисёраъзогии дараҷаи аз n калон набуда парра бо қиматҳои худ барои қиматҳои гуногуни номаълум, ки шумораи он аз n зиёд аст муайян курда мешавад.

Агар қимати бисёаъзогӣ барои $n+1$ қиматҳои гуногуни номаълум дода шуда бошанд, онгоҳ бисёраъзогиро пурра муайян намудан мумкин аст. Яъне тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теорема. *Доимо бисёраъзогии дараҷаи аз n калон набуда мавҷуд аст, ки пешаки қиматҳои он барои $n+1$ нуқтаҳои гуногун дода шуда аст.*

Ин бисёраъзогиро боёрии формулаи интерпалятсионии Лагранж ҳисоб карда мешавад.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x-\alpha_1)...(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})...(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)...(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})...(a_i-a_{n+1})}$$

Дар инҷо $a_1, a_2, ..., a_{n+1} - (n+1)$- қиматҳои гуногуни номаълуми x.

$f(a_1) = c_i$- қимати пешакии $f(x)$ барои $x = a_i$

Формулаи Виета

Бигзор ба мо бисёраъзогии дараҷаи n, ки коэффитсиенти калони он ба 1 баробар аст, дода шуда аст.

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

Мувофиқи теоремаи асоси алгебра $f(x)$ n-то реша дорад. Ин решаҳоро ба $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ишора мекунем.

Дар ин ҷо ҳар як реша бо назардошти каратнокияш оварда шуда аст. Онгоҳ барои $f(x)$ ҷудокуни зерин ҷой доранд

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n).$$

Дар тарафи чапи ин ифода тарафи рости (1)-ро гузошта ҳосил мекунем.

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + ... + (x-\alpha_n)$$

Қавсҳои тарафи ростро зарб карда дараҷаҳои якхеларо мувафиқ оварда ҳосил мекунем.

$x^n + a_1x^{n-1+a_2}x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = x^n - (\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)x^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_n) + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_{n-1})x^{n-3} + ... + (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-2}\alpha_n + ... + \alpha_2\alpha_3...\alpha_n)x + (-1)^n\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$

Коэффитсиентҳои назди дараҷаи якхеларо муқоиса намуда ҳосил мекунем.

$a_1 = -(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$

$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n$

$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$

....

$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n + ... + \alpha_2\alpha_3...\alpha_n)$

$a_n = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$

Ифодаи ҳосилшударо формулаи Веита меномад, ки дар он коэффитсентҳои бисёраъзоги ба воситаи решаҳои он ифода карда шуда аст. Ҳангоми $n = 2$ будан ин формула ба формулаи маълуми алгебраи элементарӣ табдил меёбад, яъне $f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ онгоҳ $a_1 = -(\alpha_1 - \alpha_2)$, $a_2 = \alpha_1 \alpha_2$ Барои бисёраъзоги кубӣ $f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ формулаи зерин доранд.

$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$
$a_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$
$a_3 = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$

Мисол:

Бисёраъзоги дараҷаи 4-ум ёфта шавад, ки барои он -2 ва -5-решаи ададӣ ва 3- решаи дукарата аст

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$$

$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$
$a_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4$
$a_3 = -(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$
$a_4 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$
$\alpha_1 = -2$
$\alpha_2 = 5$
$\alpha_3 = 3$
$\alpha_4 = 3$
$a_1 = -(-2 + 5 + 3 + 3) = -9$
$a_2 = (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 7$
$a_3 = -[(-2) \cdot 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 3] = 5$
$a_4 = (-2) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = -90$
$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 51x - 90$

Боби 6

Алгебраи хаттӣ

6.1 Таърифи фазои хаттӣ

Дар курси якум мо фазои вектории $n-$ ченакаро ҳамчун маҷмӯи системаи n – ададҳои ба тартиб овардашуда, яъне вектори n – ченака муайян карда будем. Барои векторҳои n – ченака амали зарби векторҳо ба ададро дохил намуда ба мафҳуми фазои n – ченака омада будем.

Маҷмӯи ҳамаи вектор порчаҳо, ки аввалашон дар ибтидои координата мехобанд (дар ҳамворӣ ва фазо) мисолҳои аввалини фазоҳои векторӣ буданд.

Ҳангоми омӯхтани мисолҳои фазоҳои векторӣ зарурияти векторҳоро бо ёрии координатаҳо муайян намуда, бисёр вақт ба душвориҳо ва ноқулайиҳо меовард.

Мувофиқи мақсад аст, ки дар ҳолати умумӣ фазоҳои вектириро ҳамчун маҷмӯи элементҳо бе истифодаи координатаи онҳо муайян намойем.

Таърифи 6.1.1. *Бигзор маҷмӯи V бо элементҳои $a, b, c, \ldots$ дода шудааст ва бигзор дар маҷмӯи V амали ҷамъи элементҳо, ки бо воситаи он ба ҳар як ҷуфти элементҳои a ва b элементи $a+b$ мувофиқ гузошта мешавад, ки онро суммаи элемениҳои a ва b меноманд ва амали зарби элементи a ба адади ҳақиқии α дода шуда бошад ва элементи αa дар маҷмӯи V мехобад.*

Таърифи 6.1.2. *Маҷмӯи $V-$ ро бо элементҳои $a, b, c, \ldots$ фазои хаттӣ меноманд, агар дар он амали ҷамъи элементҳо ва зарди элементи адади ҳақиқи яъне:*
1^o агар a аз V бошад ва b аз V бошад, он гоҳ $a + b \in V$;
2^o агар $a \in V$ ва $\alpha \in R$ он гоҳ $\alpha a \in V$ дода шуда бошад. Ва ин амалҳо ба хосиятҳои зерини $1 - 8$ соҳиб бошанд.

1^o $a + b = b + a$ коммутативии ҷамъ;

2^o $(a + b) + c = a + (b + c)$ ассотсиативии ҷамъ;

3^o мавҷудияти элементи нулии θ;

4^o мавҷудияти элементи муқобил барои ҳаргуна a аз V, яъне чунин элементи a мавҷуд аст, ки $a + (-a) = \theta$;

5^o $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \alpha \in R, \quad a, b \in V$;

6^o $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \alpha, \beta \in R, \quad a \in V$;

7^o $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \quad \alpha, \beta \in R, \quad a \in V$;

8^o $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V$.

Аз таърифи додашуда мебарояд, ки маҷмӯи V нисбат ба амали ҷамъ гурӯҳи Абелӣ аст, $(V, +)-$ гурӯҳ ва дар он элементи нулӣ ба тарзи ягона муайян карда мешавад.

Дар боло мо фазои хаттиро нисбат ба маҷмӯи майдони ададҳои ҳақиқӣ муайян намудем аз ҳамин сабаб $V-$ ро фазои хаттии ҳақиқӣ меноманд.

Агар дар маҷмӯи V зарби элементҳо натанҳо ба ададҳои ҳақиқӣ, балки ба ададҳои комплексӣ ҳам муайян бошанду барои он хосиятҳои $1-8$ иҷро шавад, $V-$ ро фазои хаттии комплексӣ меноманд.

Дар ин мавзӯъ мо танҳо фазоҳои хаттии ҳақиқиро дида мебароем, лекин ҳамаи тасдиқоту хосиятҳое, ки барои фазоҳои хаттии ҳақиқӣ гуфта мешаванд бе ягон дигаргуни барои фазоҳои хаттии комплексӣ ҳам ҷой доранд.

Мисолҳои фазоҳои хаттӣ.

1) Ҳамаи фазаҳои вектории $n-$ ченака, ки дар курси якум дида баромада будем мисоли фазои хаттӣ мебошад.

2) Фазоҳои хаттии беохирченака мавҷуданд. Маҷмӯи имконпазири пайдарпаиҳои ададҳои ҳақиқии $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,...)$–ро дида мебароем. $b=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n,...)$ бошад, он гоҳ

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n,...),$$

$$\gamma a=(\gamma\alpha_1,\gamma\alpha_2,...,\gamma\alpha_n,...)$$

Бо ин амали ҷамъи элементҳо ва зарби элементҳо ба адад ҳамаи аксиомаҳои $1-8$ иҷро мешаванд ва маҷмӯи ҳамаи пайдарпаиҳои беохирӣ як фазои хаттиро ташкил мекунанд.

3) Маҷмӯи ҳамаи функсияҳои тағйирёбандаи ҳақиқӣ бо амали ҷамъи функсияҳо ва зарби функсияҳо ба адад мисоли дигари фазои хаттии беохирченака мебошад. Чунки ҷамъ ва зарби функсияҳо ба адад аз қимати тағйирёбанда вобаста намебошад.

6.2 Изоморфизми фазоҳои хаттӣ

Дар таърифи фазои хаттӣ мо оиди амали ҷамъи элементҳо ва зарби элементҳо ба адад гуфта гузаштему лекин оиди хосиятҳои худи вектор чизе нагуфтем. Аз ҳамин сабаб мумкин аст, ки фазоҳои хаттӣ аз рӯи табиати элементҳояшон гуногун бошанду аз нуқтаи назари амали ҷамъи элементҳо ва зарби элемент бар адад аз якдигар фарқ накунанд. Таърифи аниқи ин гуна фазоҳо чунин аст:

Таърифи 6.2.1. *Фазои хаттии V ва V' изоморфи номида мешавад, агар дар байни элементҳои он мувофиқати байни ҳам яккиматаи $f:V\to V'$ мавҷуд бошанд ва ду шарти зеринро қаноат кунанд.*

1^o $f(a+b)=f(a)+f(b), \quad a,b\in V, \quad f(a)=a'\in V, \quad f(b)=b'\in V'$

2^o $f(\alpha a)=\alpha f(a), \qquad \forall\alpha\in R, \quad a\in V, \qquad f(a)=a'\in V'.$

Шарти якумро мазмунан чун образи сумма баробар аст ба суммаи образҳо ва шарти дуюмро ҳамчун образи ҳосили зарби адад ба образи элемент маънидод кардан мумкин аст.

Теоремаи 6.2.1. *Образи нулии фазои V ҳангоми инъикоси изоморфи ба фазои V' ба нули фазои V' баробар аст, яъне $f(0)=0'$, 0 ва $0'$ мувофиқан нулҳои фазоҳои V ва V' мебошанд.*

Исбот: Бигзор $a\in V, \quad a'\in V'$ образи a ҳангоми инъикоси изоморфии $f:V\to V'$ яъне $f(a)=a'$, он гоҳ

$$a'=f(a+0)=f(a)+f(0)=a'+0' \quad \to \quad f(0)=0'.$$

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 6.2.2. *Агар фазои хаттии V ва V' изоморфӣ бошанд, он гоҳ системаи векторҳои $a_1,a_2,...,a_k$ фақат ва фақат дар ҳамон вақт хаттӣ вобаста мебошанд агар образи ин система хаттӣ вобаста бошад.*

Исбот: Бигзор V ва V' изоморфӣ ва системаи векторҳои $a_1, a_2, ..., a_k$ хаттӣ вобаста, яъне чунин ададҳои ақалан яктоашон нобаробари нул $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ мавҷуданд, ки

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0.$$

Ба тарафи рост ва чапи ин баробарӣ изоморфии $f-$ ро татбиқ карда ҳосил менамоем:

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k) = f(0)$$

$$\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + ... + \alpha_k f(a_k) = f(0)$$

$$\alpha_1 a' + \alpha_2 a' + ... + \alpha_k a' = 0'$$

Баробарии охирон нишон медиҳад, ки системаи векторҳои $a'_1, a'_2, ..., a'_k$ ҳам хаттӣ вобастаанд. Теорема исбот шуд.

6.3 Фазоҳои хаттии охирнокченака

Таърифи 6.3.1. *Фазои хаттии V – охирнок ченака меноманд, агар дар он системаи максималии хаттӣ новобастаи охирнок мавҷуд бошад, ҳар гуна чунин системаи векторҳоро базиси фазои V меноманд.*

Фазои охирнок ченака метавонад базисҳои гуногун дошта бошад.

Теоремаи 6.3.1. *Ҳаргуна фазои хаттии дорои базиси аз $n-$ вектор иборат буда ба фазои $n-$ ченакаи вектории сатрҳо изоморфӣ мебошад*

Исбот: Барои V фазои хаттии дорои базиси аз $n-$ вектор иборат будаи

$$e_1, e_2, ..., e_n. \tag{6.3.1}$$

бошад. Агар a дилхоҳ вектор аз V бошад, он гоҳ аз сабаби системаи максималии хаттии новобаста будани (6.3.1) мебарояд, ки a бо воситаи (6.3.1) хаттӣ ифода карда мешавад.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n. \tag{6.3.2}$$

Аз тарафи дигар аз сабаби хаттӣ новобаста будани системаи (6.3.1) ифодаи (6.3.2) барои a ба таври ягона муайян карда мешавад, яъне агар

$$a = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + ... + \alpha'_n e_n$$

пас

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)e_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2)e_2 + ... + (\alpha_n - \alpha'_n)e_n = 0$$

аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2, ..., \alpha_n = \alpha'_n.$$

Ҳамин тавр ба вертори a ба тариқи ягона сатри (веткори $n-$ ченакаи)

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \tag{6.3.3}$$

мувофиқ гузошта мешавад, ки он ба коэффитсиентҳои ифодаи вектори a нисбат ба базиси (6.3.1) баробар аст.

Баръакс ҳар гуна сатри намуди (6.3.3) яъне ҳар гуна вектори $n-$ ченака сатри координатии ягон вектор аз V нисбат ба базиси (6.3.1) мебошад.

Ҳамин тавр мо дар байни векторҳои фазои хаттии V ва ҳамаи векторҳои $n-$ ченака мувофиқати байни ҳам яккиматаро ҳосил намудем. Нишон медиҳем, ки ин мувофиқат ки аз интихоби базиси (6.3.1) вобастагӣ дорад, изоморфизм мебошад.

Дар фазои V ба ғайр аз вектори a, ки нисбат ба базиси (6.3.1) ба намуди (6.3.2) ифода меёбад, боз вектори $b-$ ро мегирем, ки он нисбат ба базиси (6.3.1) ба тариқи зерин ифода карда мешавад.

$$b_1 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$$

он гоҳ

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)e_n$$

яъне суммаи векторҳои a ва b ба суммаи сатрҳои координатии он дар базиси (6.3.1) мувофиқ меояд. Аз тарафи дигар

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1)e_1 + (\gamma\alpha_2)e_2 + ... + (\gamma\alpha_n)e_n$$

яъне ба ҳосили зарби вектори a ба адади γ ҳосили зарби координатаҳои он ба адади γ мувофиқ меояд.

Яъне мувофиқ гузории мо изоморфизм мебошад. Теорема исбот шуд.

Чи хеле, ки аз мавзӯи гузашта мо медонем, ҳангоми инъикоси изоморфии фазаҳои хаттӣ системаи векторҳои хаттӣ вобаста ба системаи векторҳои хаттӣ вобаста инъикос мешавад ва баръакс. Аз ҳамин сабаб системаи хаттӣ нововбаста ба системаи хаттии новобаста инъикос мешавад.

Пас тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 6.3.2. *Ҳангоми инъикоси изоморфӣ фазаҳои хаттии V ва V', базиси V ба базиси V' инъикос мешавад.*

Исбот: Бигзор $e_1, e_2, ..., e_n$ базиси фазои V ҳангоми инъикоси изоморфӣ ба системаи векторҳои $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ фазои V' гузарад.

Ин системаи векторҳо хаттӣ новобаста аст, лекин фарз мекунем, ки он максимали намебошад, пас дар фазои V' чунин вектори f' мавҷуд аст, ки системаи $e'_1, e'_2, ..., e'_n,\ f'$ хаттӣ новобаста мебошанд. Аз тарафи дигар вектори f' ҳангоми инъикоси изоморфӣ образи ягон вектори $f \in V$ мебошад. Аз ин ҷо мо ҳосил мекунем, ки системаи векторҳои $e_1, e_2, ..., e_n,\ f$ чунин образи системаи векторҳои хаттии новобастаи $e'_1, e'_2, ..., e'_n,\ f'$ дар навбати худ системаи хаттӣ новобаста мебошанд. Пас мо ба базис будани системаи векторҳои $e_1, e_2, ..., e_n$ зид омадем. Теорема исбот шуд.

Аз назарияи фазаҳои вектории $n-$ ченака медонем, ки ҳамаи системаҳои максимали хаттӣ новобаста аз $n-$ вектор иборат буда, ҳар гуна система аз $n+1-$ вектор иборат буда хаттӣ вобаста аст ва дилхоҳ системаи хаттӣ новобастаи векторҳо ягон зерсистемаи системаи максималии хаттӣ новобаста мебошад.

Хосиятҳои фазоҳои изоморфиро истифода бурда бо назардошти гуфтаҳои боло ба тасдиқотҳои зерин меойем.

Натиҷаи 1. Ҳамаи базисҳои фазои охирнокченакаи V аз миқдори якхелаи векторҳо иборат мебошад. Агар ин миқдор ба n баробар бошад, он гоҳ $V-$ ро фазои хаттии $n-$ ченака меноманд. ($n-$ ченаки фазои V)

Натиҷаи 2. Ҳар гуна системаи аз $n+1-$ вектор иборат будаи фазои хаттии $n-$ ченакаи V хаттӣ вобаста мебошад.

Натиҷаи 3. Ҳар гуна системаи хаттӣ новобастаи векторҳои фазои хаттии $n-$ ченакаи V ба ягон базиси ин фазо дохил мешавад.

Акнун ба осони санҷидан мумкин аст, ки мисолҳои фазоҳои хаттии дар боло дидашуда аз он ҷумла фазоҳои пайдарпайиҳо ва фазои функсияҳо, фазоҳои охирнокченака намебошанд, чунки дар ҳар яки ин фазоҳо бе душвори системаи векторҳои хаттӣ новобаста, ки он аз дилхоҳ миқдор векторҳо иборат аст ёфтан мумкин аст.

.

6.4 Алоқаи байни базисҳо

Қайд мекунем, ки дар курси алгебра танҳо фазоҳои хаттии охирнок ченака омӯхта мешаванд. Фазоҳои хаттии беохирнок ченака дар курси таҳлили функсионалӣ омӯхта мешаванд.

Бигзор V фазои хаттии $n-$ ченака ва

$$e_1, e_2, ..., e_n \tag{6.4.1}$$

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n \tag{6.4.2}$$

(6.4.2) базиси фазои V бошад. Дилхоҳ вектори системаи (6.4.2) ба тарзи ягона бовоситаи базиси (6.4.1) ифода карда мешавад: яъне

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, 3, ..., n \tag{6.4.3}$$

(Айнан ҳамин тавр дилхоҳ вектори системаи (6.4.1) бо воситаи базиси (6.4.2) ба тарзи ягона ифода карда мешавад.)

Аз коэффитсиентҳои (6.4.3) матритсаи зерин тартиб медиҳем

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

$T-$ ро матритсаи гузариш аз базиси (6.4.1) ба базиси (6.4.2) меноманд.

Сатрҳои ин матритса сатрҳои координатии векторҳои (6.4.2) нисбат ба базиси (6.4.1) мебошад.

Алоқаи байни базисҳои (6.4.1) ва (6.4.2)– ро яъне баробариҳои (6.4.3)– ро ба намуди матритсавии зерин навиштан мумкин аст.

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ ... \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix}. \tag{6.4.4}$$

Базисҳои (6.4.1) ва (6.4.2)– ро ба намуди сутун чун e ва e' ишора намуда (6.4.4)– ро ба намуди мухтасари зерин навиштан мумкин аст.

$$e' = Te \tag{4}$$

Аз тарафи дигар бигзор T' матритсаи гузариш аз (6.4.2) ба (6.4.1), яъне

$$e = T'e'. \tag{6.4.5}$$

қимати $e'-$ ро аз (6.4.4) ба (6.4.5) гузошта ҳосил мекунем

$$e = T'(Te) = (T'T)e$$

баръакс аз (6.4.5) ба (6.4.4) мегузорем

$$e' = T(T'e') = (TT')e'$$

аз хаттӣ новобаста будани базисҳои e ва e' ҳосил мекунем, ки

$$T'T = TT' = E$$

(E– матритсаи воҳидӣ) яъне

$$T' = T^{-1}$$

Ҳамин тавр мо тасдиқоти зеринро исбот намудем.

Теоремаи 6.4.1. *Матритсаи гузариши аз як базис ба базиси дигар матритсаи вайроннашуда мебошад.*

Теоремаи 6.4.2. *Дилхоҳ матритсаи вайроннашудаи тартиби n матритсаи гузариш аз базиси додашуда ба ягон базис мебошад.*

Исбот: Бигзор ба мо базиси

$$e_1, e_2, ..., e_n$$

ва матритсаи вайроннашудаи тартиби n дода шуда бошад:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ба сифати базиси

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n$$

системаи векторҳоро мегирем, ки барои онҳо сатрҳои матритсаи T нисбат ба базиси e сатрҳои координатӣ мебошанд, яъне баробариҳои (6.4.4).

Аз ин ҷо мебарояд, ки дар фазои хаттии $n-$ ченака базисҳои гуногун беохир бисёранд ва барои ҳар як матритсаи вайроннашуда як то базис мувофиқ гузоштан мумкин аст.

6.5 Дигаргунсозии координатаҳои векторҳо

Бигзор дар фазои $n-$ ченакаи хаттии V базисҳои (6.4.1) ва (6.4.2) бо матритсаи гузариши

$$T = (\tau_{ij})$$

дода шудааст, яъне

$$e' = Te.$$

Алоқаи байни сатрҳои координати дилхоҳ вектори $a \in V-$ ро нисбат ба базисҳои (6.4.1) ва (6.4.2) меёбем.

Бигзор вектори a нисбат ба базисҳои (6.4.1) ва (6.4.2) мувофиқан ба тариқи зерин ифода карда шавад.

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

Аз баски

$$e' = Te$$

яъне

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j$$

пас

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{ij} \right) e_j$$

тарафҳои чапи ин баробари васеъ якхелаанд, пас тарафи рости онҳо ҳам баробаранд.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{ij} \right) e_j$$

Ягонагии навиштани векторро бо воситаи базис истифода бурда аз ин баробари ҳосил мекунем

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{ij} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Баробарии охиронро ба намуди матритсавӣ менависем

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)T$$

Ҳамин тавр мо тасдиқоти зеринро исбот кардем.

Теоремаи 6.5.1. *Сатри координати вектори a дар базиси e баробар аст ба сатри координатии ин вектор дар базиси e', ки аз рост ба матритсаи гузариш аз базиси e ба e' зарб карда шудааст.*

Фаҳмо аст, ки

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)T^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)T'$$

6.6 Операторҳои хаттӣ

Ҳангоми омӯхтани зарби матритсаҳо мо бо мафҳуми дигаргунсозии номаълумҳо шинос шудем. Мафҳуми оператори хаттӣ ин мафҳуми васеъ кардашудаи дигаргунсозии хаттӣ номаълумҳо мебошад.

Бигзор ба мо фазои хаттии $n-$ ченакаи ҳақиқии V_n- дода шудааст. Дигаргунсозии (инъикоси) ин фазоро ба худаш, ки ба ҳар як вектори $a \in V_n$ вектори $a' \in V_n$ мувофиқ гузошта мешавад, дида мебароем. Вектори $a'-$ ро образи вектори a меноманд. Ин дигаргунсози (инъикос)– ро бо ҳарфи f ишора мекунем, яъне $f : V_n \to V_n$ ва $f(a) = a'$ образи вектори a.

Таърифи 6.6.1. *Инъикоси $f : V_n \to V_n$ – оператори хаттӣ номида мешавад, агар образи суммаи ду вектор ба суммаи образҳои ин векторҳо баробар бошад, яъне*

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \tag{6.6.1}$$

ва образи ҳосили зарби вектор ба адад баробар бошад ба ҳосили зарби ин адад бар образи веткор, яъне

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \tag{6.6.2}$$

α – ҳақиқӣ.

Теоремаи 6.6.1. *Оператори хаттии $f : V_n \to V_n$ дилхоҳ комбинатсияи хаттии векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – ро ба комбинатсияи хаттии образҳои ин векторҳо бо ҳамон коэффитсиентҳо мегузаронад, яъне*

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ..., \alpha_k a_k) = \alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2' + ..., \alpha_k a_k'$$

дар ин ҷо

$$a_1 = f(a_1'), a_2 = f(a_2'), ..., a_k = f(a_k')$$

мувофиқан образҳои векторҳои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ мебошанд.

Исбот:

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k) = f(\alpha_1 a_1) + f(\alpha_2 a_2) + ... + f(\alpha_k a_k) =$$

$$= \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + ... + \alpha_k f(a_k) = \alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2' + ... + \alpha_k a_k'$$

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 6.6.2. *Барои дилхоҳ оператори хаттии*

$$f : V_n \to V_n$$

вектори нулӣ беҳаракат мемонад, яъне

$$f(0) = 0$$

0 – *вектори нулӣ ва образи вектори муқобил ва вектори a баробар аст ба векторе, ки ба образи ин вектор муқобил аст, яъне*

$$f(-a) = -f(a)$$

Исбот:

$$f(0) = f(0 \cdot a) = 0 \cdot f(a) = 0$$

$$f(-a) = f((-1) \cdot a) = (-1) \cdot f(a) = -f(a).$$

Теорема исбот шуд.

Мисолҳои оператори хаттӣ дар фазои V_n ин оператори воҳидӣ ва оператори нулӣ мебошанд, яъне

$\xi(a) = a$, барои ҳаргуна $a \in V_n$, оператори воҳидӣ

$\omega(a) = 0$, барои ҳаргуна $a \in V_n$, оператори нулӣ.

Теоремаи 6.6.3. *Дилхоҳ оператори хаттии $f : V_n \to V_n$ бо дода шудани образҳои*

$$f(e_1), f(e_n), ..., f(e_n)$$

базиси $e_1, e_2, ..., e_n$, фазои V_n пурра муайян карда мешавад.

Исбот: Бигзор $e_1, e_2, ..., e_n$ дилхоҳ базиси фазои V_n бошад, аз баски дилхоҳ вектори a ин фазо ба таври ягона ҳамчун комбинатсияи хаттии векторҳои базиси дода шуда ифода карда мешавад, яъне

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

пас

$$f(a) = a(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n).$$

Мувофиқи теоремаи (6.6.1) ифодаи охиринро ҳамчун комбинатсияи хаттиии образҳои векторҳои базисӣ навиштан мумкин аст, яъне

$$f(a) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_n f(e_n)$$

Ифодаи охирин нишон медиҳад, ки оператори хаттии f бо додашудани образҳои вектор базиси пурра муайян карда мешаванд. Теорема исбот шуд.

6.7 Алоқаи байни операторҳои хаттӣ ва матритсаи квадратӣ

Теоремаи 6.7.1. *Барои дилхоҳ системаи ба тартиб овардашудаи векторҳои фазои* V_n*:*

$$c_1, c_2, ..., c_n \tag{6.7.1}$$

ягона оператори хаттии $f : V_n \to V_n$ *мавҷуд аст, ки системаи додашуда образи векторҳои базисии* $e_1, e_2, ..., e_n$ *мебошад, яъне*

$$f(e_1) = c_1, f(e_2) = c_2, ...f(e_n) = c_n. \tag{6.7.2}$$

Исбот: Оператори $f-$ ро ба тариқи зерин муайян мекунем: агар a дилхоҳ вектори фазои V_n бошад ва

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

навишти ин вектор нисбат ба базис дода шуда бошад, пас бигзор

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \tag{6.7.3}$$

хатти будани ин операторҳоро исбот мекунем. Агар

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

дилхоҳ дигар вектори фазои V_n бошад, пас

$$f(a+b) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = f(a) + f(b).$$

Агар γ дилхоҳ адад бошад, пас

$$f(\gamma a) = f\left(\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) e_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) c_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \gamma \cdot f(a)$$

пас, $f-$ операторҳои хаттӣ мебошад. Дурустии ифодаи (6.7.2)– ро ба тариқи зерин санҷидан мумкин аст. Аз баски

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ij} e_i, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

(ифодаи вектори базисии e_j нисбат ба базиси дода шудаи $e_1, e_2, ..., e_n$), пас

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ij} c_i = c_j, \quad j = 1, 2, ..., n$$

теорема исбот шуд.

Аз тасдиқоти ин теорема натиҷаи зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷа: *Дар байни маҷмӯи операторҳои хаттӣ аз $V_n \to V_n$ амалкунанда ва маҷмӯи ҳамаи системаҳои ба тартиб овардашудаи аз $n-$ вектор иборати фазои V_n мувофиқати байни ҳам яккимата мавҷуд аст.*

Аз тарафи дигар ҳар гуна вектори c_i- ро аз системаи (6.7.1) ба тарзи ягона ҳамчун комбинатсияи хаттии векторҳои базисӣ навиштан мумкин аст, яъне

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{6.7.4}$$

аз координатаҳои векторҳои c_i нисбат ба базиси дода шуда матритсаи квадратии зеринро

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}). \tag{6.7.5}$$

тартиб додан мумкин аст.

Сатри $i-$ юми ин матритса сатри координатии вектори c_i мебошад. Аз баски системаи (6.7.1) дилхоҳ мебошад, пас матритсаи $A-$ ҳам дилхоҳ матритсаи квадратии тартиби n бо элементҳои ҳақиқӣ мебошад.

Аз ин ҷо мо ба тасдиқоти зерин меоем.

Натиҷа: *Дар байни маҷмӯи ҳамаи операторҳои хаттии фазои V_n ва маҷмӯи матритсаҳои квадратии тартиби n мувофиқати байни ҳам яккимата мавҷуд аст ва ин мувофиқат аз интихоби базис вобаста мебошад.*

Таърифи 6.7.1. *Мегӯянд, ки матритсаи A оператори хаттии f – ро нисбат ба базиси $e_1, e_2, ..., e_n$ муайян мекунад, яъне A – ин матритсаи оператори f дар ин базис мебошад.*

Агар бо воситаи $f(e)$ сутуни аз образҳои векторҳои базиси $e_1, e_2, ..., e_n-$ ро ишора намоем, он гоҳ аз формулаи (6.7.4) ва (6.7.5) баробарии матритсавии зеринро

$$f(e) = Ae \tag{6.7.6}$$

ҳосил мекунем, ки он алоқаи байни оператори f, базиси e ва матритсаи A, ки дар базиси e оператори $f-$ ро муайян мекунад, нишон медиҳад.

Нишон медиҳем, ки ҳангоми дода шудани матритсаи A оператори f дар базиси e аз рӯи координатаҳои вектори A нисбат ба ин базис координатаи образи он яъне $f(a)$ ёфтан мумкин аст.

Дар ҳақиқат агар

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \tag{6.7.7}$$

он гоҳ

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_n f(e_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ ...... \\ f(e_n) \end{pmatrix},$$

ки он ба баробарии матритсавии

$$f(a) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)f(e) \tag{6.7.8}$$

баробар қувва аст. Ба тарафи рости (6.7.8) қимати $f(e)$– ро аз (6.7.6) гузошта ҳосил мекунем.

$$f(a) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)(Ae)$$

Ассотсиативӣ будани зарби матритсаҳоро ба назар гирифта баробарии охиринро ба намуди зерин менависем.

$$f(a) = [(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)A]e$$

аз ин ҷо тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Теоремаи 6.7.2. *Сатри координатии вектори $f(a)$ баробар аст ба ҳосили зарби сатри координатии вектори a ба матритсаи A, ки ба базиси e аз рост зарб карда шудааст.*

6.8 Алоқаи байни матритсаҳои операторҳои хаттӣ дар базисҳои гуногун

Бевосита маълум аст, ки матритсаи оператори хаттӣ аз интихоби базис вобаста аст. Мо алоқаи байни матритсаҳои оператори хаттии додашударо нисбат ба базисҳои гуногун нишон медиҳем.

Таърифи 6.8.1. *Мегӯянд, ки матритсаҳои B ва C монанданд, агар чунин матритсаи вайроннашудаи Q мавҷуд бошад, ки*

$$B = Q^{-1}CQ \quad \text{ё} \quad QB = CQ.$$

Бигзор ба мо базисҳои e:

$$e_1, e_2, ..., e_n$$

ва базиси e':

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n$$

бо матритсаи гузариши T, яъне

$$e' = Te \tag{6.8.1}$$

дода шудааст. Ва бигзор оператори хаттӣ $f : V_n \to V_n$ нисбат ба ин базисҳо бо матритсаҳои A ва A' дода шудааст. Яъне

$$f(e) = Ae, \qquad f(e') = A'e' \tag{6.8.2}$$

Теоремаи 6.8.1. *Матритсаҳои оператори хаттии дода шуда нисбат ба базисҳои гуногун монанд мебошанд.*

Исбот: Дар баробарии дуюми (6.8.2), яъне дар баробарии

$$f(e') = A'e'$$

ба ҷои e' қимати онро аз (6.8.1) гузошта меёбем

$$f(Te) = A'Te \tag{6.8.3}$$

аз тарафи дигар

$$f(Te) = Tf(e) = TAe. \tag{6.8.4}$$

Тарафҳои чапи (6.8.3) ва (6.8.4) якхелаанд, пас тарафи рости онҳо баробаранд, яъне

$$A'Te = TAe.$$

Мувофиқи ягонагии ифода кардани вектор ҳамчун комбинатсияи хаттии векторҳои базисӣ ҳосил мекунем.

$$A'T = TA$$

Аз баски матритсаи гузариши T матритсаи вайроннашуда, яъне $|T| \neq 0$, пас барои T матритсаи баръакси T^{-1} мавҷуд аст, ки

$$T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = E$$

ҳамин тавр ифодаи $A'T = TA-$ ро аз чап ба T^{-1} зарб намуда ба намуди зерин меорем.

$$T^{-1}A'T = A$$

Яъне матритсаҳои A ва A' монанд мебошанд.

6.9 Амалҳо бо операторҳои хаттӣ

Дар мавзӯи гузашта мо нишон додем, ки дар байни маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои квадратии тартиби n ва маҷмӯи ҳамаи операторҳои хаттии фазои V_n мувофиқати байни ҳам яққимата мавҷуд аст. Аз баски дар маҷмӯи матритсаҳои квадратии тартиби n амали ҷамъи матритсаҳо ва амали зарб ба адад мавҷуд аст. Табии аст, ки ин гуна амалҳо дар маҷмӯи операторҳои хаттӣ фазои V_n ҳам вуҷуд дорад.

Бигзор операторҳои хаттӣ $f : V_n \to V_n$ ва $\psi : V_n \to V_n$ дода шудааст.

Таърифи 6.9.1. *Суммаи операторҳои f ва ψ гуфта оператори $f + \psi-$ ро меноманд, ки он ба тариқи зерин муайян карда мешавад.*

$$(f + \psi)(a) = f(a) + \psi(a), \quad \forall a \in V_n.$$

Теоремаи 6.9.1. *Оператори $f + \psi$ хаттӣ мебошад.*
Исбот: Дар ҳақиқат

$$\begin{aligned}
1) \quad & (f+\psi)(a+b) = f(a+b) + \psi(a+b) = f(a) + f(b) + \psi(a) + \psi(b) = \\
& = [f(a) + \psi(a)] + [f(b) + \psi(b)] = (f+\psi)(a) + (f+\psi)(b), \\
2) \quad & (f+\psi)(\alpha a) = f(\alpha a) + \psi(\alpha a) = \alpha f(a) + \alpha\psi(a) = \alpha[f(a) + \psi(a)] = \alpha(f+\psi)(a).
\end{aligned}$$

Теорема исбот шуд.

Таърифи 6.9.2. *Ҳосили зарби операторҳои хаттии f ва ψ гуфта оператори $f \cdot \psi = f\psi-$ ро меноманд, ки он ба тариқи зерин муайян карда мешавад.*

$$(f\psi)(a) = \psi(f(a))$$

Теоремаи 6.9.2. *Ҳосили зарби операторҳои хаттии f ва ψ яъне оператори $f\psi$ хаттӣ мебошад.*

Исбот:

$$1)\quad (f\psi)(a+b) = \psi(f(a+b)) = \psi(f(a+b)) = \psi(f(a)+f(b)) = \\ = \psi(f(a)) + \psi(f(b)) = (f\psi)(a) + (f\psi)(b)$$

$$2)\quad (f\psi)(\alpha a) = \psi(f(\alpha a)) = \psi(\alpha f(a)) = \alpha\psi(f(a)) = \alpha(f\psi)(a)$$

Яъне $f\psi-$ оператори хаттӣ мебошад. Теорема исбот шуд.

Таърифи 6.9.3. *Ҳосили зарби операторҳои хаттии f ва адади $\chi-$ гуфта оператори $\chi f-$ ро меноманд, ки он ба тариқи зерин муайян карда мешавад.*

$$(\chi f)(a) = \chi f(a)$$

Айнан ба монанди боло нишон додан мумкин аст, ки ин оператори $\chi f-$ ҳам хаттӣ мебошад.

6.10 Зерфазоҳои хаттӣ

Таърифи 6.10.1. *Зермаҷмӯи L аз фазои хаттии V_n, $L \in V_n$ зерфазои хаттӣ номида мешавад, агар вай нисбат ба амалҳои ҷамъи векторҳо ва зарби вектор ба адад, ки дар фазои V_n муайян шудааст, фазои хаттӣ бошад.*

Масалан: дар фазои ду ченака яъне дар ҳамвории координатӣ ҳамаи нуқтаҳое, ки дар хате, ки аз ибтидои координата мегузарад зерфазои хаттиро ташкил мекунад.

Теоремаи 6.10.1. *Барои он ки зермаҷмӯи ғайрихолии L аз фазои хаттии V_n зерфазои хаттӣ бошад зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шавад:*

1) агар $a \in L,\ b \in L$ бошад, он гоҳ $a+b \in L$

2) агар $a \in L,\ \alpha$ адади ҳақиқӣ бошад, он гоҳ $\alpha a \in L$

Исботи шарти зарурӣ:

Бигзор L зерфазои хаттии фазои V_n, он гоҳ шартҳои 1 ва 2 бевосита аз таъриф оиди фазои хаттӣ будани маҷмӯи L нисбат ба амалҳои ҷамъи векторҳо ва зарби векторҳо, ки дар фазои хаттии V_n муайян карда шудааст, мебарояд.

Исботи шарти кифоягӣ:

Бигзор шартҳои 1 ва 2 иҷро шаванд. Мувофиқи шарти дуюм элементи нулӣ дар зермаҷмӯи L мехобад, яъне

$$0 \cdot a = \Theta \in L$$

Аз таърифи дигар агар $a \in L$ бошад, он гоҳ $-a = (-1)\cdot a \in L$ аст. Иҷрошавии 6– то шартҳои дигар бевосита аз таърифи фазои хаттӣ мебарояд.

Худи фазои V_n ва маҷмӯе, ки танҳо аз элементи нулии ин фазо иборат аст, мисолҳои зерфазои хаттӣ мебошад.

Таърифи 6.10.2. *Пардаи хаттии системаи векторҳои $a_1, a_2, ..., a_r$ гуфта маҷмӯи ҳамаи векторҳои фазои V_n- ро меноманд, ки онҳо ба ягон комбинатсияи хаттии векторҳои ин система иборат аст ва онро бо*

$$< a_1, a_2, ..., a_r >$$

ишора мекунанд.

Теоремаи 6.10.2. *Пардаи хаттии* $< a_1, a_2, ..., a_r >$ *зерфазои хаттӣ мебошад.*

Исбот: Бигзор $b \in < a_1, a_2, ..., a_r >$ ва $c \in < a_1, a_2, ..., a_r >$, яъне $b \in < \alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, ..., \alpha_r a_r >$ ва $c \in < \beta_1 a_1, \beta_2 a_2, ..., \beta_r a_r >$ $\alpha_i, \beta_i,\ i = \overline{1, r}-$ ададҳои ҳақиқи, пас

$$b + c = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_r + \beta_r)a_r \in < a_1, a_2, ..., a_r >$$

$$\gamma b = (\gamma\alpha_1)a_1 + (\gamma\alpha_2)a_2 + ... + (\gamma\alpha_r)a_r \in < a_1, a_2, ..., a_r >$$

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 6.10.3. *Ҳаргуна зерфазои хаттии* L *фазои хаттии* V_n *пардаи хаттии ягон системаи векторҳо мебошад.*

Исбот: Агар зерфазои хаттии L зерфазои нулӣ набошад, пас вай дорои базис мебошад ва $L-$ пардаи хаттии системаи векторҳои базиси худ мебошад. Ченаки зерфазои L аз ченаки $n-$ и фазои хаттии V_n калон намебошад ва ба n баробар аст, агар $L = V_n$.

Ченаки зерфазои нулӣ ба нул баробар аст. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 6.10.4. *Барои ҳаргуна* $0 < k < n$ *дар фазои хаттии* V_n *зерфазои ченакаш ба* k *баробар мавҷуд аст.*

Исбот: Пардаи хаттии дилхоҳ системаи векторҳои хаттии новобаста аз k вектор иборат, зерфазои хаттии ченакаш ба k баробар аст.

6.11 Буриш ва суммаи зерфазоҳо

Бигзор V фазои хаттӣ ва L_1, L_2- зерфазоҳои хаттии он V бошад.

Таърифи 6.11.1. *Буриши зерфазоҳои* L_1 *ва* L_2 *гуфта маҷмӯи ҳамаи векторҳоро меноманд, ки онҳо ҳам ба* L_1 *ва ҳам ба* L_2 *таалуқ дорад ва онро бо* $L_1 \cap L_2-$ *ишора мекунанд.*

$$L_1 \cap L_2 = \{a : a \in L_1, \quad a \in L_2\}$$

Таърифи 6.11.2. *Суммаи зерфазоҳои* L_1 *ва* L_2 *гуфта маҷмӯи ҳамаи векторҳои фазои хаттии* $V-$*ро меноманд, ки онҳо ақалан ба* L_1 *ё* L_2 *таалуқ дорад ва онро бо* $L_1 \cup L_2-$ *ишора мекунанд.*

Теоремаи 6.11.1. *Буриши* $L_1 \cap L_2$ *ва суммаи* $L_1 \cup L_2-$ *и зерфазоҳои хаттии* L_1 *ва* L_2 *худашон зерфазоҳои хаттӣ мебошанд.*

Исбот: Аввал теоремаро барои буриши L_1 ва L_2 исбот мекунем.

1) Бигзор $a \in L_1 \cap L_2, \quad L_1 \cup L_2 \Rightarrow a \in L_1$ ва $a \in L_2, b \in L_1$ ва $b \in L_2 \Rightarrow a + b \in L_1$ ва $a + b \in L_2 \Rightarrow a + b \in L_1 \cap L_2$

2) $a \in L_1 \cap L_2$ $\alpha-$ адади ҳақиқи $a \in L$ ва $a \in L_2 \Rightarrow \alpha a \in L_1$ ва $\alpha a \in L_2 \Rightarrow \alpha a \in L_1 \cap L_2$ пас мувофиқи теоремаи (6.11.1) $L_1 \cap L_2$ зерфазои хаттӣ мебошад.

$a \in L_1 \cup L_2, b \in L_1 \cup L_2 \Rightarrow a \in L_1$ ё $a \in L_2, b \in L_1$ ё $b \in L_2 \Rightarrow a + b \in L_1$ ё $a + b \in L_2 \Rightarrow a + b \in L_1 \cup L_2$ $a \in L_1 \cup L_2$ $\alpha-$ адади ҳақиқи $\Rightarrow a \in L_1$, ё $a \in L_2 \Rightarrow \alpha a \in L_1$, ё $\alpha a \in L_2 \Rightarrow \alpha a \in L_1 \cup L_2$

Теоремаи 6.11.2. *Ченаки суммаи зерфазоҳои* $L_1 \cup L_2$ *баробар аст ба суммаи ченакҳои* L_1 *ва* L_2 *минус ченаки буриши онҳо* $L_1 \cap L_2$, *яъне*

$$\dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

Исбот: Бигзор ченаки $\dim L_1 = d_1$ ченаки $\dim L_2 = d_2$, $\dim L_1 \cap L_2 = d_0, \dim L_1 \cup L_2 = \bar{d}$ бошад. Бигзор

$$a_1, a_2, ..., a_{d_0} \tag{6.11.1}$$

базиси $L_1 \cap L_2$ бошад. Ин базисро мувофиқан то базисҳои

$$a_1, a_2, ..., a_{d_0}, b_{d_0+1}, ..., b_{d_1} \tag{6.11.2}$$

зерфазои L_1 ва

$$a_1, a_2, ..., a_{d_0}, c_{d_0+1}, ..., c_{d_2} \tag{6.11.3}$$

зерфазои L_2 пур мекунем.

Ба осони дидан мумкин аст, ки зерфазоҳои $L_1 \cup L_2$ ба пардаи хаттии системаи векторҳои

$$a_1, a_2, ..., a_{d_0}, b_{d_0+1}, ..., b_{d_1}, c_{d_0+1}, ..., c_{d_2} \tag{6.11.4}$$

яъне

$$L_1 \cup L_2 =< a_1, a_2, ..., a_{d_0}, b_{d_0+1}, ..., b_{d_1}, c_{d_0+1}, ..., c_{d_2} >$$

Нишон медиҳем, ки системаи векторҳои (6.11.4) хаттӣ новобаста мебошанд.

Бигзор баробарии зерин ҷой дошта бошад.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_{d_0} a_{d_0} + \beta_{d_0+1} b_{d_0+1} + ... + \beta_{d_1} b_{d_1} + \gamma_{d_0+1} c_{d_0+1} + ... + \gamma_{d_2} c_{d_2} = 0 \tag{6.11.5}$$

он гоҳ

$$e = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_{d_0} a_{d_0} + \beta_{d_0+1} b_{d_0+1} + ... + \beta_{d_1} b_{d_1} = -\gamma_{d_0+1} c_{d_0+1} - ... - \gamma_{d_2} c_{d_2} \tag{6.11.6}$$

тарафи чапи ин баробари ба L_1 таалуқ дорад, тарафи росташ ба L_2. Аз ҳамин сабаб вектори e ки ҳам ба тарафи рост ва ҳам ба тарафи чап баробар аст ба $L_1 \cap L_2$ таалуқ дорад. Ва аз ҳамин сабаб бо базиси (6.11.1) хаттӣ ифода карда мешавад. Тарафи рости (6.11.6) нишон медиҳад, ки вектори e бо векторҳои

$$c_{d_0+1}, ..., c_{d_2}$$

хаттӣ ифода карда мешавад, пас аз сабаби хаттӣ новобастагии (6.11.3) ҳамаи коэффитсиентҳои

$$\gamma_{d_0+1}, ..., \gamma_{d_2}$$

баробаранд. Яъне $e = 0$, пас мувофиқи хаттӣ новобастагии системаи (6.11.2) ҳамаи коэффитсиентҳои

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{d_0}, \beta_{d_0+1}, ..., \beta_{d_1}$$

баробари нуланд, пас системаи (6.11.4) хаттӣ новобаста аст. Теорема исбот шуд.

6.12 Соҳаи қиматҳо ва ядрои оператори хаттӣ

Бигзор дар фазои хаттии V_n оператори $f : V_n \to V_n$ дода шудааст. Агар $L-$ зерфазои дилхоҳи V_n бошад, он гоҳ маҷмӯи ҳамаи образҳои $f(L)-$ векторҳои $L-$ низ зерфазои хаттӣ мебошанд.

Дар ҳақиқат агар, $\overline{a} \in f(L)$, $\overline{b} \in f(L)$, $\overline{a} \in f(a)$, $a \in L$, $\overline{b} \in f(b)$, $b \in L$ он гоҳ $a + b \in L$, пас $\overline{a} + \overline{b} = f(a) + f(b) = f(a + b) \in L$ ва $\lambda\overline{a} = \lambda f(a) = f(\lambda a) \in f(L)$ яъне шарти зарури ва кифоягии зерфазои хаттии фазои V_n будани $f(L)$ иҷро мешавад. Аз он ҷумла $f(V_n)$, онро соҳаи қиматҳои оператори f меноманд ҳам зерфазои хаттӣ мебошад.

Қайд мекунем, ки соҳаи қиматҳои оператори $f-$ ро бо Imf ишора мекунанд, яъне Imf маҷмӯи ҳамаи векторҳои $\overline{a}$, ки

$$Imf = \{\overline{a} : \overline{a} = f(a),\ a \in V_n\}$$

чи хеле, ки дар боло нишон додем соҳаи қиматҳои оператори f, яъне Imf зерфазои хаттӣ мебошад.

Теоремаи 6.12.1. *Ченаки соҳаи қиматҳои оператори f ба ранги ин оператор баробар аст.*

Исбот: Бигзор оператори f нисбат ба базиси $e_1, e_2, ..., e_n$ фазои V_n бо матритсаи A дода шудааст. Зерфазои

$$f(V_n) = Imf$$

ба пардаи хаттии образҳои векторҳои базисӣ, яъне ба пардаи хаттии системаи векторҳои

$$f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n) \tag{6.12.1}$$

баробар аст. Аз ҳамин сабаб дилхоҳ зерсистемаи максималии хаттӣ новобастаи системаи (6.12.1) базиси зерфазои $f(V_n)$ мебошад. Аз тарафи дигар миқдори максималии векторҳои хаттӣ новобастаи системаи (6.12.1) ба миқдори максималии сатрҳои хаттӣ новобастаи матритсаи A яъне ба ранги ин матритса баробар аст. Теорема исбот шуд.

Мо медонем, ки ҳангоми оператори хаттии f вектори нулӣ ба худаш мегузарад, яъне

$$f(0) = 0$$

Таърифи 6.12.1. *Маҷмӯи ҳамаи векторҳое, ки ҳангоми оператори хаттии f ба вектори нулӣ мегузаранд ядрои ин оператор номида шуда бо $N(f)$ ишора карда мешавад. Яъне*

$$N(f) = \{a : a = V_n,\ f(a) = 0\}$$

Теоремаи 6.12.2. *Ядрои оператори хаттии $f - N(f)$ зерфазои хаттӣ мебошад.*
Исбот: Бигзор

$$a \in N(f),\ b \in N(f) \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) = 0 \Rightarrow a + b \in N(f)$$

$$a \in N(f),\ (\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda a \in N(f)$$

Мувофиқи шарти зарурӣ ва кифояги (ниг. теор.1, мавзӯи фазоҳои хаттӣ) $N(f)-$зерфазои хаттӣ мебошад.

Таърифи 6.12.2. *Ранги ядрои оператори хаттии f – ро дефекти ин оператор меноманд.*

Теоремаи 6.12.3. *Барои дилхоҳ оператори хаттии f фазои V_n суммаи ранг ва дефекти ин оператор ба ченаки ин фазо яъне ба N баробар аст.*

$$\dim Imf + \dim N(f) = \dim V_n$$

Бигзор r ранги оператори f, яъне $r = \dim Imf$ он гоҳ зерфазои $f(V_n)$ базисӣ аз r вектор иборат будаи зеринро дорад:

$$a_1, a_2, ..., a_r \tag{6.12.2}$$

Дар фазои V_n чунин векторҳои

$$b_1, b_2, ..., b_r \tag{6.12.3}$$

интихоб кардан мумкин аст, ки

$$f(b_i) = a_i, \quad i = 1, 2, ..., r$$

Қайд мекунем, ки интихоби векторҳои (6.12.2) яккимата намебошанд. Агар ягон комбинатсияи ғайри тривиалии хаттии векторҳои (6.12.3) бо воситаи f ба 0 иникос мешавад, он гоҳ векторҳои (6.12.2)– ҳам бархилофи фарзи мо хаттӣ вобаста мебуданд. Аз ҳамин сабаб зерфазои хаттии L, ки ба пардаи хаттии векторҳои (6.12.3) баробар аст, ченаки баробари r

дорад ва бо зерфазои $N(f)$ буриши нулӣ дорад. Аз тарафи дигар суммаи зерфазои L ва $N(f)$ ба тамоми фазои V_n баробар аст.

Дар ҳақиқат агар S дилхоҳ вектори фазои V_n бошад, он гоҳ вектори $d = f(c)$ ба зерфазои $f(V_n)$ таалуқ доранд. Пас дар зерфазои L чунин вектори b мавҷуд аст, ки $d = f(b)$ ва вектори b бо воситаи системаи (6.12.3) бо ҳамон коэффитсиентҳо навишта мешаванд, ки бо онҳо вектори d бо воситаи базисӣ (6.12.2) навишта мешаванд.

Аз ҳамин сабаб

$$c = b + (c - b)$$

ва вектори $c - b \in N(f)$ мебошад, чунки

$$f(c-b) = f(c) - f(b) = d - d = 0.$$

Теорема исбот шуд.

6.13 Операторҳои хаттии вайроннашуда

Таърифи 6.13.1. *Оператори хаттии f фазои V_n вайроннашуда номида мешавад, агар вай ба яке аз шартҳои зерини байниҳам баробарқувва қаноат кунонанд:*

1) Ранги оператори f ба ченаки фазои V_n баробар аст.

$$rang f = \dim V_n = n.$$

2) Соҳаи қиматҳои фазои оператор ба тамоми фазо баробар бошад:

$$Imf = V_n.$$

3) Дефекти ин оператор ба 0 баробар бошад:

$$\dim N(f) = 0.$$

4) Векторҳои гуногуни ин фазо образҳои гуногун доранд, яъне агар

$$a \neq b \Rightarrow f(a) = f(b).$$

5) Оператори f инъикоси байни ҳам яккиматаи фазои V_n ба худаш мебошад.

6) Барои оператори f оператори баръакси f^{-1} мавҷуд аст.

6.14 Решаҳои характеристикӣ ва қиматҳои хусусии оператор

Бигзор

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

матритсаи квадратии тартиби n бо элементҳои ҳақиқӣ, $\lambda-$ номаълум ва $E-$ матритсаи воҳидии тартиби n бошад.

Таърифи 6.14.1. *Матритсаи характеристикии матритсаи* A *гуфта матритсаи*

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

меноманд.

Муайянкунандаи матритсаи $A-\lambda E$ бисёраъзогии дараҷаи n аз λ мебошад. Дар ҳақиқат ҳосили зарби элементҳои дар диоганали асосӣ буда бисёраъзогӣ мебошад, ки аъзои калонаш ба $(-1)^n\lambda^n$ баробар аст.

Ҳамаи дигар аъзоҳои муайянкунанда аз диоганали асосӣ ақалан ду элемент надорад аз ҳамин сабаб дараҷаи онҳо нисбат ба λ аз $n-2$ калон намебошад.

Коэффитсиенти ин бисёраъзогиро бо осони ёфтан мумкин аст. Масалан коэффитсиенти назди дараҷаи λ^{n-1} ба $(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{12}+...+a_{nn})$, аъзои озоди ин бисёраъзогӣ ба муайянкунандаи матритсаи A баробар аст.

Таърифи 6.14.2. *Бисёраъзогии дараҷаи* n *– и муайянкунандаи* $|A-\lambda E|$ *– ро бисёраъзогии характеристикии матритсаи* A *меноманд.*

Ин бисёраъзогӣ метавонад ҳам решаҳои ҳақиқӣ ва ҳам решаҳои комплексӣ дошта бошад.

Таърифи 6.14.3. *Решаҳои бисёраъзогии характеристикии* $|A-\lambda E|$ *– ро решаҳои характеристикии матритсаи* A *меноманд.*

Теоремаи 6.14.1. *Матритсаҳои монанд бисёраъзогиҳои характеристикии ба ҳам баробар доранд, яъне агар* $A\sim B$*, он гоҳ*

$$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|.$$

Аз ҳамин сабаб решаҳои характеристикии яккхела ҳам доранд.

Исбот: Бигзор матритсаи $A\sim B$ монанд, яъне ҳамин хел матритсаи вайроннашудаи Q мавҷуд аст, ки $B=Q^{-1}AQ$ он гоҳ

$$|B-\lambda E|=|Q^{-1}AQ-\lambda E|=|Q||Q^{-1}AQ-\lambda E||Q^{-1}|=|Q(Q^{-1}AQ-\lambda E)Q^{-1}|=$$

$$=|Q^{-1}QAQQ^{-1}-Q\lambda EQ^{-1}|=|EAE-\lambda QQ^{-1}|=|A-\lambda E|$$

Теорема исбот шуд.

Аз тасдиқотҳои оиди матритсаҳои оператори хаттӣ дар базисҳои гуногун мебарояд, ки ҳар чанд оператори f дар базисҳои гуногун бо матритсаҳои гуногун дода шаванд ҳам, лекин ҳамаи ин матритсаҳо решаҳои характеристикии якхела доранд. Ин решаҳоро рашаҳои характеристикии оператори f меноманд.

Маҷмӯи ҳамаи решаҳои характеристикии оператори хаттӣ бо назардошти каратнокии онҳо спектори ин оператор номида мешавад. Мавқеъ ва роли решаҳои характеристикӣ, ҳангоми омӯхтани оператори хаттӣ хеле калон мебошад.

Бигзор дар фазои хаттии V_n оператори хаттии

$$f:V_n\to V_n$$

дода шудааст.

Таърифи 6.14.4. *Агар барои вектори $b \in V_n$ ва λ_0 – ҳақиқӣ баробарии*

$$f(b) = \lambda_0 b \tag{6.14.1}$$

иҷро шавад, он гоҳ b – ро вектори хусусии оператори f, λ_0 – ро қимати хусусии ин оператор меноманд ва мегӯянд, ки вектори хусусии β ба қимати хусусии λ_0 таалуқ дорад.

Қайд мекунем, ки аз баски $b-$ вектори ғайринулӣ аст, пас адади λ_0- ҳам ба таври ягона муайян карда мешавад.

Теоремаи 6.14.2. *Танҳо решаҳои характеристикии ҳақиқии оператори хаттӣ, қиматҳои хусусии ин оператор мебошанд.*

Исбот: Бигзор оператори хаттии f дар базиси $e_1, e_2, ..., e_n$ бо матритсаи $A = (a_{ij})$ дода шудааст ва бигзор вектори

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

вектори хусусии ин оператор бошад, яъне

$$f(b) = \lambda_0 b. \tag{6.14.2}$$

Чи хеле, ки нишон дода будем

$$f(b) = [(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)A]e \tag{6.14.3}$$

аз (6.14.2) ва (6.14.3) ҳосил мекунем

$$[(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)A]e = \lambda_0 b$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{i2}, ..., \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{in}\right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \tag{6.14.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i a_{ij} e_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_j e_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i - \lambda_0 \beta_j\right) e_i = 0, \quad j = 1, 2, ..., n$$

Баробарии охиринро ба намуди система навишта ҳосил мекунем

$$\begin{cases} (a_{11}\beta_1 - \lambda_0\beta_1) + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1n}\beta_n = 0 \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22}\beta_2 - \lambda_0\beta_2) + ... + a_{2n}\beta_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + ... + (a_{nn}\beta_n - \lambda_0\beta_n) = 0 \end{cases} \tag{6.14.5}$$

Аз баски векори $b-$ ғайринулӣ аст, пас наҳамаи ададҳои $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ баробари нул аст. Аз ҳамин сабаб системаи $n-$ то муодилаҳои якҷинсаи $n-$ номаълума

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_0)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda_0)x_n = 0 \end{cases} \tag{6.14.6}$$

ҳалҳои ғайринулӣ доранд. Аз ҳамин сабаб муайянкунандаи асосии ин система ба нул баробар аст. Яъне

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix} = 0$$

ё ин ки

$$|A-\lambda_0 E| = 0. \tag{6.14.7}$$

Яъне қимати хусусии λ_0 решаи характеристикии оператори f мебошад ва он ҳақиқӣ мебошад.

Бигзор λ_0 дилхоҳ қимати решаи характеристикии оператори f яъне матритсаи A бошад, он гоҳ мувофиқи (6.14.7) системаи якҷинсаи (6.14.6) ҳалҳои ғайринулӣ доранд. Агар ҳалли онро бо $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ ишора кунем, он гоҳ баробарии (6.14.4) ҷой дорад. Аз (6.14.4) дурустии баробарии (6.14.3) мебарояд. Яъне вектори

$$b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$$

вектори хусусӣ ба қимати хусусии λ_0 таалуқ дошта мебошад. Теорема исбот шуд.

Агар мо фазои хаттии комплексиро дида бароем, он гоҳ талаботи ҳақиқӣ будани решаҳои характеристикӣ лозим намебошад, яъне тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 6.14.3. *Решаҳои характеристикии оператори хаттӣ фазои хаттии комплексӣ танҳо онҳо қиматҳои хусусии ин оператор мебошанд.*

Аз инҷо мо натиҷаи зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷа: *Дар фазои комплексии хаттӣ ҳаргуна оператори хаттӣ дорои векторҳои хусусӣ мебошанд.*

6.15 Таърифи фазои Евклидӣ

Таърифи 6.15.1. *Мегӯянд, ки дар фазои* $n-$ *ченакаи* V_n *зарби скалярӣ дода шудааст, агар барои ҳар гуна ҷуфти векторҳои* a *ва* b *аз* V_n *адади ҳақиқии* (a,b) *мувофиқ гузошта шуда бошад, ки онро зарби скалярии векторҳои* a *ва* b *меноманд ва барои он шартҳои зерин иҷро мешаванд:*

1^0 $(a,b) = (b,a)$*;*

2^0 $(a+b,c) = (a,c)+(b,c)$*;*

3^0 $(\alpha a,b) = \alpha(a,b);$ $\alpha -$ *адади ҳақиқӣ*

4^0 *агар* $a \neq 0$ *бошад, он гоҳ* $(a,a) > 0$.

Аз шарти 3-юм ҳангоми $\alpha = 0$ будан ҳосил мекунем, ки

$$(0,b) = 0 \tag{6.15.1}$$

аст, яъне зарби скалярии вектори нулӣ ба дилхоҳ вектор ба нул баробар аст.

Аз шартҳои 2-юм бевосита мо формулаи зарби скалярии комбинатсияҳои хаттии (6.15.2) системаи векторҳоро ҳосил мекунем

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{l}\beta_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j(a_i,b_j) \tag{6.15.2}$$

Таърифи 6.15.2. *Агар дар фазои хаттии $n-$ ченака зарби скалярӣ дода шуда бошад, онро фазои Евклидии $n-$ ченака меноманд.*

Теоремаи 6.15.1. *Барои дилхоҳ n дар фазои $n-$ ченакаи хаттии V_n зарби скаляриро муайян намудан мумкин аст, яъне V_n- ро ба фазои Евклиди мубаддал гардонидан мумкин аст.*

Исбот: Дар фазои V_n дилхоҳ базиси $e_1, e_2, ..., e_n-$ ро мегирем. Агар

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

дилхоҳ ду вектори ин фазо бошанд, он гоҳ зарби скаляриро ба тариқи зерин муайян мекунем

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \tag{6.15.3}$$

Нишон медиҳем, ки ҳамаи шартҳои $1-4$ иҷро мешаванд.

$$1^0 \ (a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = (b, a)$$

$$2^0 \ (a + b, c) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i = (a, c) + (b, c)$$

$$3^0 \ (\alpha a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i \beta_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha(a, b)$$

$$4^0 \ (a, a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$$

Мо мебинем, ки дар фазои $n-$ ченакаи хаттӣ зарби скаляриро умуман бо тарзҳои гуногун муайян намудан мумкин аст, яъне зарби скалярии (6.15.3) аз интихоби базис вобаста аст.

6.16 Векторҳои ортогоналӣ, системаи ортогоналӣ, протсессияи ортогонализатсия ва базиси ортонормиронидашуда.

Бигзор дар фазои $n-$ ченакаи Евклидии E_n зарби скалярии дилхоҳ дода шуда аст.

Таърифи 6.16.1. *Векторҳои a, b ортогоналӣ номида мешаванд, агар зарби скалярии онҳо баробари нул бошад, яъне*

$$(a, b) = 0$$

Таърифи 6.16.2. *Суммаи векторҳои дода шуда ортогоналӣ номида мешаванд, агар онҳо ҷуфт-ҷуфт байни ҳам ортогоналӣ бошанд, яъне системаи векторҳои $a_1, a_2, ..., a_n$ ортогоналӣ номида мешаванд, агар $(a_i, a_j) = 0$ ҳангоми $i \neq j$ бошад.*

Теоремаи 6.16.1. *Дилхоҳ системаи ортогоналии векторҳои ғайринулӣ, хаттӣ новобаста мебошанд.*

Исбот: Бигзор дар фазои Евклидии E_n системаи векторҳои $a_1, a_2, ..., a_k$, ки барои $i = 1, 2, ..., k$ $a_i \neq 0$ ва $(a_i, a_j) = 0$ ҳангоми $i \neq j$. Агар

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0$$

бошад, он гоҳ ҳар ду тарафи ин баробариро ба вектори a_i, $1 \leq i \leq k$ скалярӣ зарб зада ҳосил мекунем.

$$0 = (0, a_i) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k) = \alpha_1(a_1, a_i) + \alpha_2(a_2, a_i) + ... + \alpha_k(a_k, a_i) = \alpha_i(a_i, a_i)$$

Аз баски $(a_i, a_i) > 0$ аст, пас $\alpha_i = 0$ будаст. Ҳамин тавр мо нишон додем, ки

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0$$

фақат ва фақат ҳангоми ҳамаи коэффитсиентҳои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ ҷой доранд, яъне системаи векторҳои $a_1, a_2, ..., a_k$ хаттӣ новобаста мебошанд.

Акнун протсесси ортогонализатсия яъне усули аз системаи хаттии новобастаи додашуда сохтани системаи ортогоналиро дида мебароем.

Бигзор ба мо системаи хаттии новобастаи k векторҳои

$$a_1, a_2, ..., a_k \tag{6.16.1}$$

фазои Евклидии E_n дода шудааст. Бо воситаи векторҳои ин система мо системаи k векторҳои ғайринулии ортогоналии $b_1, b_2, ..., b_k-$ ро месозем. Ба сифати b_1, a_1- ро интихоб мекунем $b_1 = a_1$. Вектори b_2- ро ҳангоми

$$b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$$

ҷустуҷӯй мекунад, яъне α_1- ро ҳамин хел интихоб мекунем, ки зарби скалярии векторҳои b_1 ва b_2 ба 0 баробар шавад.

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, \alpha_1 b_1 + a_2) = \alpha_1(b_1, b_1) + (b_2, a_2)$$

$$\alpha_1(b_1, b_1) = -(b_2, a_2), \quad \alpha_1 = \frac{(b_2, a_2)}{(b_1, b_1)}$$

Бигзор системаи ортогоналии векторҳои ғайринулии $b_1, b_2, ..., b_l$, $l < k$ сохта шуда бошад ва бигзор ҳар яки ин векторҳои b_i ба комбинатсияи хаттии векторҳои $a_1, a_2, ..., a_i$ баробар бошанд. Ин фарз барои вектори b_{l+1} ҳам иҷро мешаванд, агар онро ба тариқи

$$b_{l+1} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_e b_e + a_{l+1}$$

интихоб кунем.

Вектори b_{l+1} ғайри нулӣ мебошад, чунки системаи (6.16.1) хаттӣ новобаста ва вектори a_{l+1} дар навишти векторҳои $b_1, b_2, ..., b_l$ дохил намешаванд. Коэффитсиентҳои α_i- ро $(i = 1, 2, ..., l)$ ҳамин хел интихоб мекунем, ки вектори b_{l+1} ба вектори b_i ортогоналӣ бошад, яъне

$$0 = (b_i, b_{l+1}) = (b_i, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_e b_e + a_{l+1}) =$$

$$= \alpha_1(b_i, b_1) + \alpha_2(b_i, b_2) + ... + \alpha_e(b_i, b_e) + (b_i, a_{l+1}) = \alpha_i(b_i, b_i) + (b_i, a_{l+1})$$

$$\alpha_i = -\frac{(b_i, a_{l+1})}{(b_i, b_i)}, \quad i = 1, 2, ..., e$$

Ҳамин протсессро давом дода мо системаи ортогоналии $b_1, b_2, ..., b_k-$ ро месозем.

Теоремаи 6.16.2. *Дилхоҳ фазои Евклидӣ дорои базиси ортогоналӣ мебошад ва вектори ғайринулии ин фазо ба ҳайъати ягон базиси ортогоналӣ дохил мешавад.*

Исбот: Базиси дода шудаи фазои Евклидиро бо истифодаи протсесси ортогонализатсия ба базиси ортогонали табдил додан мумкин аст. Аз тарафи дигар аз баски дилхоҳ вектори ғайринулӣ ба ҳайъати ягон базиси ин фазо дохил мешавад ва ин векторро ҳамчун вектори якуми базиси ортогоналӣ интихоб намудан мумкин аст. Теорема исбот шуд.

Таърифи 6.16.3. *Вектори b – ро нормиронида шуда меноманд, агар квадрати скалярии он ба 1 баробар бошад, яъне*

$$(b, b) = 1$$

Агар $a \neq 1$ бошад, пас $(a, a) > 0$ ва вектори нормиронидашудаи вектори a вектори

$$b = \frac{1}{\sqrt{(a,a)}} \cdot a$$

– ро меноманд. Дар ҳақиқат

$$(b, b) = (\frac{1}{\sqrt{(a,a)}} \cdot a, \frac{1}{\sqrt{(a,a)}} \cdot a) = \frac{1}{\sqrt{(a,a)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a,a)}}(a, a) = 1$$

Таърифи 6.16.4. *Базиси $e_1, e_2, ..., e_n$ – и фазои Евклидии E_n – ро фазои базиси ортонормиронидашуда меноманд, агар*

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad i = j \\ 0, & \text{агар} \quad i \neq j \end{cases}$$

Теоремаи 6.16.3. *Дилхоҳ фазои Евклидӣ дорои базиси ортонормиронидашуда мебошад.*

Исбот: Барои исбот кифоя аст, ки дилхоҳ базиси ортогоналиро интихоб мекунему векторӣ онро менормиронем. Дар ин ҳолат базис ҳамчун ортогоналӣ боқи мемонад, чун ки барои дилхоҳ ададҳои α ва β

$$(\alpha a, \beta) = \alpha\beta(a, b) = 0$$

ҳангоми $(a, b) = 0$ будан. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 6.16.4. *Базиси $e_1, e_2, ..., e_n$ – и фазои Евклидии E_n фақат ва фақат дар ҳамон вақт ортонормиронидашуда мебошад, агар зарби скалярии дилхоҳ векторҳои ин фазо ба суммаи ҳосили зарбҳои координатаҳои мувофиқи ин векторҳо дар ин базис баробар бошад, яъне*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \qquad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \tag{6.16.2}$$

бояд баробарии зерин барояд

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \tag{6.16.3}$$

Исбот: Дар ҳақиқат агар базиси додашуда ортонормиронидашуда бошад, яъне

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad i = j \\ 0, & \text{агар} \quad i \neq j \end{cases} \tag{6.16.4}$$

пас

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

Баръакс, агар базиси мо ба шарти 3 қаноат кунад, он гоҳ ба сифати векторҳои a ва b дилхоҳ векторҳои базисии e_i ва e_j– ро интихоб намуда ба дуруст будани баробарии (6.16.4) бовари ҳосил менамоем.

Аз тасдиқотҳое, ки оиди фазоҳои Евклидӣ ва базисҳои ортонормиронидашуда гирифтем натиҷаи зеринро ҳосил намудан мумкин аст.

Натиҷа: *Агар дар фазои n– ченакаи хаттии V_n базиси дилхоҳ интихоб шуда бошад, он гоҳ зарби скаляриро дар ин фазо ҳамин хел додан мумкин аст, ки дар он базиси интихобшуда ортонормиронидашуда мебошад.*

6.17 Изоморфизми фазоҳои Евклидӣ.

Таърифи 6.17.1. *Фазоҳои Евклидии E ва E' изоморфӣ номида мешаванд, агар дар байни онҳо инъикосӣ байниҳам яккиматаи*

$$f : E \to E'$$

мавҷуд бошанду ба шартҳои зерин қаноат кунанд:
1^0 *Инъикоси f бояд инъикоси изоморфии фазоҳои хаттии E ва E' бошад.*
2^0 *Инъикоси f зарби скалярии векторҳои изоморфиро нигоҳ дорад, яъне*

$$(a,b) = (a';b')$$

$$a' = f(a),\ b' = f(b)$$

Аз шарти якум бевосита ченакҳои баробар доштани фазоҳои Евклидӣ изоморфӣ мебарояд, тасдиқоти баръаксро исбот мекунем.

Теоремаи 6.17.1. *Дилхоҳ фазоҳои Евклидии E ва E'– и ченаки яххела дошта байни ҳам изоморфӣ мебошанд.*

Исбот: Дар фазои E ва E' базисҳои ортонормиронидашудаи

$$e_1, e_2, ..., e_n \tag{6.17.1}$$

ва

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n \tag{6.17.2}$$

– ро интихоб мекунем. Инъикосӣ f– ро ба тариқи зерин муайян мекуем, агар

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \text{пас} \quad a' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i.$$

Инъикоси f пеш аз ҳама инъикоси изоморфии фазоҳои хаттии E ва E' мебошад, яъне
1) f инъикоси байни ҳам яккимата
2) $f(a,b) = f(a) + f(b) = a' + b'$
3) $f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda a'$

Нишон медиҳем, ки ин инъикоси f зарби скаляриро нигоҳ медорад, яъне агар $a' = f(a)$, $b' = f(f)$ бошад, он гоҳ $(a,b) = (a',b')$. Дар ҳақиқат аз ортонормиронидашуда будани базисҳои (6.17.1) ва (6.17.2)– и ин фазоҳо ҳосил мекунем

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = (a',b')$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

$$a' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i, \quad b' = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e'_j$$

/

6.18 Матритсаҳои ортогоналӣ.

Таърифи 6.18.1. *Матритсаро ортогоналӣ меноманд, агар транспонironидашудаи он ба матритсаи барғакси он баробар бошад, яъне* Q *– ортогоналӣ аст агар* $Q' = Q^{-1}$ *бошад.*

Таърифи 6.18.2. *Оператори хаттиро ортогоналӣ меноманд, агар вай суммаи квадратҳоро боз ба суммаи квадратҳо гузаронад, яъне шакли нормалии*

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

боз шакли нормалии

$$y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2$$

– ро инъикос кунад.

Теоремаи 6.18.1. *Матритсаи квадратии* Q *– фақат ва фақат дар ҳамон вақт ортогоналӣ мебошад, агар суммаи квадратҳои элементҳои дилхоҳ сатри он ба як баробар бошаду, суммаи ҳосили зарбҳои элементҳои мувофиқи сатрҳои гуногун ба нул баробар бошад.*

Исбот: Бигзор Q матритсаи ортогоналӣ, яъне $Q' = Q^{-1}$ ё ин ки $Q'Q = E$. Аз баски $|Q'| = |Q|$ ва $|Q'| = |Q^{-1}| = |Q|^{-1}$ яъне $|Q| = |Q|^{-1} \Rightarrow |Q|^2 = 1$ аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки муайянкунандаи ортогоналӣ ба ±1 баробар аст ва дилхоҳ оператори ортогоналӣ вайроннашуда мебошад. Аз тарафи дигар аз баски сатрҳои Q сутунҳои Q' мебошанд, тасдиқоти теорема бевосита мебарояд аз баробарии

$$QQ' = E.$$

Теорема исбот шуд.

Натиҷаи 1 *Матритсаи барғакс ба матритсаи ортогоналии худ ҳам матритсаи ортогонали мебошад.*

Исбот:

$$(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}$$

Натиҷаи 2 *Ҳосили зарби матритсаҳои ортогонали худ ҳам ортогонали мебошад.*

Исбот:

$$(QR)' = R'Q' = Q = R^{-1}Q^{-1} = (QR)^{-1}$$

Натиҷаи 3 *Матритсаи гузариши аз базиси ортонормиронидашуда ба базиси ортонормиронидашудаи ортогонали мебошад.*

6.19 Оператори симметрӣ

Таърифи 6.19.1. *Оператори* $f : E_n \to E_n$, *(*E_n*– фазои Евклидӣ) симметри номида мешавад, агар барои дилхоҳ вектори* $a, b \in E_n$ *аз баробарии*

$$(f(a), b) = (a, f(b))$$

иҷро шавад.

Теоремаи 6.19.1. *Оператори симметрӣ дар фазои Евклидӣ нисбат ба базиси ортонормиронидашуда бо матритсаи симметрӣ дода мешавад. Баръакс агар оператори хаттии фазои Евклидӣ ақалан дар як базиси ортонормиронидашуда бо матритсаи симметри дода шавад, он гоҳ ин оператор симметрӣ мебошад.*

Исбот: Бигзор оператори f нисбат ба базиси ортонормиронидашудаи $e_1, e_2, ..., e_n$ бо матритсаи $A = (\alpha_{ij})$.

Аз баски дар базиси ортонормиронидашуда зарби скалярии ду вектор ба суммаи ҳосили зарбҳои координатаҳои онҳо баробар аст. Мо ҳосил мекунем

$$(f(e_i), e_i) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, e_j) = \alpha_{ij}$$

$$(e_i, f(e_j)) = (e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k) = \alpha_{ji}$$

пас

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

яъне A матритсаи симметрӣ мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайд мекунем, ки операторҳои симметрӣ ба хосиятҳои зерин доро мебошад.

1) Суммаи операторҳои симметрӣ ва ҳосили зарби оператори симметрӣ ба адад, худ оператори симметрӣ мебошад.

2) Ҳамаи решаҳои характеристикии оператори симметрӣ ҳақиқӣ мебошад.